3a.Modos Normais de Vibração
Considerando a equação:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

com as condições de contorno:

$$u(0,t) = 0, \quad u(L,t) = 0.$$

e o anzats:

$$u(x,t) = \phi(x)e^{i\omega t}.$$

obtemos:

$$-\omega^2 \phi(x) = c^2 \frac{d^2\phi}{dx^2} \quad \Rightarrow \quad \frac{d^2\phi}{dx^2} = -\left(\frac{\omega^2}{c^2}\right)\phi(x).$$

$$\phi''(x) + k^2\phi(x) = 0, \quad \text{com } k = \frac{\omega}{c}.$$

Solução geral:

$$\phi(x) = A\sin(kx) + B\cos(kx).$$

Aplicando as condições de contorno propostas na tarefa
encontramos que os autovalores e os modos normais são dados por

$$k_n = \frac{n\pi}{L} \Rightarrow \omega_n = \frac{n\pi c}{L}$$

$$\phi_n(x) = \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right).$$

3b. Discretização
pelo método de diferenças finitas, a derivada segunda é algo próximo de

$$\frac{d^2\phi}{dx^2} \approx \frac{\phi_{n+1} - 2\phi_n + \phi_{n-1}}{\Delta x^2}.$$

Assim, a matriz diagonal assume a forma

$$A = \frac{1}{\Delta x^2}\begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & -2 \end{bmatrix}$$