算法第二次作业

王道宇 `PB21030794`

T 3.1-2

现证明：存在 c_1，c_2，n_0，使得对所有 $n > n_0$，都有 $0 \le c_1 n^b \le (n+a)^b \le c_2 n^b$

取 $n_0 > 0, c_1 > 0$，第一个" $\le$ "显然成立。

后式变换成：

$$c_1 \le (1+\frac{a}{n})^b \le c_2$$

由绝对值不等式：

$$(1+\frac{a}{n})^b \le |1+\frac{a}{n}|^b \le (1+\frac{|a|}{n})^b \le (1+\frac{|a|}{n_0})^b$$

可以取 $c_2 = (1+\frac{|a|}{n_0})^b$

再取 $n_0 \ge max\{1,\ |a|\}$，必然有 $1+\frac{a}{n} \ge 0$，同时 $0 \le 1-\frac{|a|}{n} < 1$

由绝对值不等式：

$$(1+\frac{a}{n})^b \ge (1-\frac{|a|}{n})^b \ge (1-\frac{|a|}{n_0})^b$$

可以取 $c_1 = (1-\frac{|a|}{n_0})^b$

故，取 $n_0 \ge max\{1,\ |a|\}$, $c_1 = (1-\frac{|a|}{n_0})^b$, $c_2 = (1+\frac{|a|}{n_0})^b$，可以使得 $0 \le c_1 n^b \le (n+a)^b \le c_2 n^b$ 。

故当 $b > 0$时 $(n+a)^b = \Theta(n^b)$

T 3.1-4

$2^{n+1} = O(2^n)$成立，而 $2^{2n} = O(2^n)$不成立

- 首先证明存在 c，n_0，使得对所有 $n > n_0$，有 $0 \le 2^{n+1} \le c \cdot 2^n$

  显然取 $c = 2$，$n_0 = 0$，即可满足上述不等式。故$2^{n+1} = O(2^n)$成立。
- 假设存在 c'，n_0'，使得对所有 $n > n_0'$，有 $0 \le 2^{2n} \le c' \cdot 2^n$

  不等式两边同除 2^n，有 $2^n \le c'$，然而，取 $n > max\{n_0',\ \lceil log(c') \rceil\}$，有 $2^n > c'$，矛盾！

  故 $2^{2n} = O(2^n)$不成立。

T 3.2-3

书本（3.19）

首先：

$$log(n!) = log(\sqrt{2\pi n}(\frac{n}{e})^n e^{\alpha_n}) = \frac{1}{2}log(2\pi n) + nlog(n) - nlog(e) + \alpha_n log(e)$$

其中：

$$\frac{1}{12n+1} < \alpha_n < \frac{1}{12n}$$

现证明：存在 c_1，c_2，n_0，使得对所有 $n > n_0$，都有 $0 \leq c_1 nlog(n) \leq log(n!) \leq c_2 nlog(n)$

不等式两边同除$nlog(n)$，可以得到：

$$c_1 \leq \frac{1}{2n} + 1 - \frac{log(e)}{log(n)} + \frac{\alpha_n log(e) + log(2\pi)/2}{nlog(n)} \leq c_2$$

取 $n_0 = e^2$，当 $n > n_0$时显然有：

$$\frac{1}{2n} + 1 - \frac{log(e)}{log(n)} + \frac{\alpha_n log(e) + log(2\pi)/2}{nlog(n)} > 1 - \frac{log(e)}{log(n)} > \frac{1}{2} = c_1$$

$$\frac{1}{2n} + 1 - \frac{log(e)}{log(n)} + \frac{\alpha_n log(e) + log(2\pi)/2}{nlog(n)} < \frac{1}{2} + 1 + \frac{log(e)/12 + log(2\pi)/2}{2e^2 log(e)} < \frac{3}{2} + \frac{1}{2} = 2 = c_2$$

故取 $n_0 = e^2$，$c_1 = \frac{1}{2}$，$c_2 = 2$，当 $n > n_0$时显然有：

$$c_1 \leq \frac{log(n!)}{nlog(n)} \leq c_2$$

故等式（3.19）$log(n!) = \Theta(nlog(n))$ 成立。

证明 $n! = \omega(2^n)$

即证：对任意 $c > 0$，存在常量 $n_0 > 0$，使得对所有 $n \geq n_0$，有 $0 \leq c \cdot 2^n \leq n!$

只要取常量 $n_0 = max\{c^2, 2e\}$，那么：

$$n! = \sqrt{2\pi n}(\frac{n}{e})^n e^{\alpha_n} > \sqrt{n}(\frac{n}{e})^n > c \cdot 2^n \geq 0$$

故不等式成立，有 $n! = \omega(2^n)$。

证明 $n! = o(n^n)$

即证：对任意 $c > 0$，存在常量 $n_0 > 0$，使得对所有 $n \geq n_0$，有 $0 \leq n! < c \cdot n^n$

只要取常量 $c = 1$，$n_0 = 2$，那么当 $n > n_0$时：

$$c \cdot n^n > n^n = \underbrace{n \cdot n \cdots n}_{n个n} > n \cdot (n-1) \cdots 1 = n!$$

故不等式成立，有 $n! = o(n^n)$。

T 3.2-5

首先有：

$$log^*(n) = log^*(logn) + 1, \text{其中} log^*(2) = 1$$

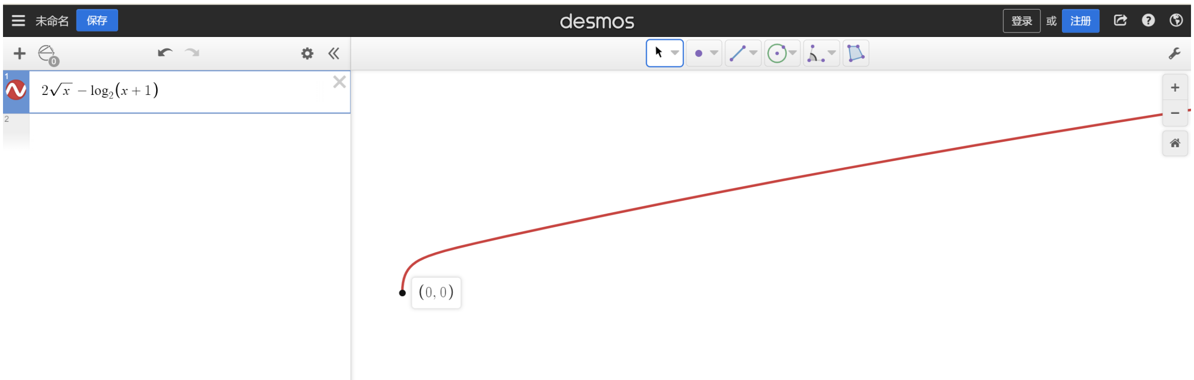
那么：

$$log^*(log(n)) = log^*(n) - 1$$

现证： $log^*(n) - 1 = w(log(log^*(n)))$，即证：对任意 $c > 0$，存在常量 $n_0 > 0$，使得对所有的 $n \geq n_0$，均有 $0 \leq c \cdot log(log^*(n)) < log^*(n) - 1$

由部分数学推导或作图可以得出引论 $2\sqrt{n} > log(n+1)$。

作图如下：



取 $log^*(n_0) = 4c^2 + 1$，那么有：

$$\begin{aligned} log^*(n) - 1 &= c \cdot \frac{log^*(n) - 1}{c} \\ &= c \cdot \frac{\sqrt{log^*(n) - 1}}{2c} \cdot 2\sqrt{log^*(n) - 1} \\ &> c \cdot \frac{\sqrt{log^*(n_0) - 1}}{2c} \cdot log(log^*(n)) \\ &= c \cdot 1 \cdot log(log^*(n)) = clog(log^*(n)) \end{aligned}$$

故：$log^*(log(n)) = log^*(n) - 1 = w(log(log^*(n)))$，即 $log^*(log(n))$渐进更大。

T 4.3-3

现证 $\Omega(nlog(n))$也是这个递归式的解，假设存在 $c > 0$，$n_0 > 0$，使得当 $n \geq n_0$时 $T(n) \geq cnlog(n)$

> 先证明：$\lfloor \frac{n}{2} \rfloor \geq \frac{n-1}{2}$
>
> 由 $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + \lceil \frac{n}{2} \rceil = n$和 $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1 \geq \lceil \frac{n}{2} \rceil$
>
> 可得 $2\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1 \geq n$，即 $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor \geq \frac{n-1}{2}$

由 $T(n) \geq cnlog(n)$，可以得到：

$$T(\lfloor \frac{n}{2} \rfloor) \geq c \cdot \lfloor \frac{n}{2} \rfloor \cdot log(\lfloor \frac{n}{2} \rfloor) > c \cdot (\frac{n-1}{2}) \cdot log(\frac{n-1}{2})$$

由递归式可得 $T(0) = 0$，$T(1) = 1$，$T(2) = 4$，若取 $c = min\{\frac{1}{3}, T(2)/2\} = \frac{1}{3}$，$n \geq n_0 = 2$：

$$
\begin{aligned}
T(n) = 2T(\lfloor \frac{n}{2} \rfloor) + n > c \cdot (n-1) \cdot log(\frac{n-1}{2}) + n \\
&= cnlog(n) + cnlog(\frac{n-1}{n}) - clog(n-1) - c(n-1) + n \\
&= cnlog(n) + (1-c)n - clog(n-1) - cnlog(\frac{n}{n-1}) + c \\
&> cnlog(n) + (1-c)n - cn - cnlog(\frac{2}{2-1}) \\
&= cnlog(n) + (1-3c)n > cnlog(n)
\end{aligned}
$$

故 $\Omega(nlog(n))$也是这个递归式的解，又由 $O(nlog(n))$是这个递归式的解，故 $\Theta(nlog(n))$是这个递归式的解。

T 4.3-6

假设存在 $c > 0$，$n_0 > 0$，使得当 $n \geq n_0$时 $T(n) \leq cnlog(n)$

由 $T(n) \leq cnlog(n)$，可以得到：

$$
T(\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 17) \leq c \cdot (\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 17) \cdot log(\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 17) \leq c \cdot (\frac{n}{2} + 17) \cdot log(\frac{n}{2} + 17)
$$

由递归式可得 $T(0) = 0$，$T(1) = 1$，$T(2) = 4$，若取 $c = \frac{2}{log(\frac{4}{3})}$，$n = max\{n_1, n_2\}$，其中 n_1是使得 $\frac{n}{2} + 17 \leq \frac{3n}{4}$的最小整数，$n_2$是使得 $n > \frac{68}{log(\frac{4}{3})} log(\frac{3n}{4})$的最小整数：

$$
\begin{aligned}
T(n) = 2T(\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 17) + n \leq c(n+34) \cdot log(\frac{n}{2} + 17) + n \\
&\leq c(n+34) \cdot log(\frac{3n}{4}) + n \\
&= cn(log(n) - log(\frac{4}{3})) + 34clog(\frac{3n}{4}) + n \\
&= cnlog(n) - n + \frac{68}{log(\frac{4}{3})} log(\frac{3n}{4}) \\
&< cnlog(n)
\end{aligned}
$$

故 $O(nlog(n))$是这个递归式的解。