# 中国科学技术大学数学科学学院

## 2021—2022学年第二学期考试试卷

■A 卷　　　　□B 卷

课程名称　数理方程(B)　　　课程编号　001549

姓名________　　　学号________　　　学院________

| 题号 | 一 | 二 | 三 | 四 | 五 | 六 | 总分 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 得分 | | | | | | | |

**一(20分)**

(1) 设$u=u(x,y),-\infty<x,y<+\infty$，求$u_{xx}=0$ 的通解。

(2) 设$u=u(x,y)$，求解:

$$\begin{cases} u_{xy}=1, & (-\infty<x,y<+\infty) \\ u\mid_{x=0}=y,\quad u\mid_{y=0}=x. \end{cases}$$

(3) 设$u=u(t,x)$，求

$$\begin{cases} u_{tt}=4u_{xx}-\sin t, & (-\infty<x<+\infty,t>0) \\ u(0,x)=\sin x,\quad u_t(0,x)=\sin x. \end{cases}$$

**二(15分)**设$u=u(r,\theta,\varphi)$，求解以下定解问题，其中$(r,\theta,\varphi)$为球坐标

$$\begin{cases} \Delta_3 u=0,\ (1<r<2,0\le\theta\le\pi,0\le\varphi<2\pi) \\ u\mid_{r=1}=u\mid_{r=2}=3\cos^2\theta. \end{cases}$$

**三(15分)**设$u=u(t,x,y)$，求解

$$\begin{cases} u_{tt}=u_{xx}+u_{yy},\ (t>0,x^2+y^2<9) \\ u(t,x,y)|_{x^2+y^2=9}=0. \\ u(0,x,y)=0,u_t(0,x,y)=\delta(\sqrt{x^2+y^2}-2). \end{cases}$$

**四(15分)**设$u=u(t,x,y)$，求解

$$\begin{cases} u_t=2u_{xx}+u_{yy}+u,\ (t>0,-\infty<x,y<+\infty) \\ u\mid_{t=0}=e^{-x^2-y^2}. \end{cases}$$

**五(20分)**

(1) 求以下固有值问题的固有值和固有函数。

$$\begin{cases} [e^{2x}X']'+\lambda e^{2x}X=e^{2x}(X''+2X'+\lambda X)=0,\quad (0<x<1) \\ X(0)=X(1)=0. \end{cases}$$

(2) 设$u=u(t,x)$，求解以下定解问题

$$\begin{cases} u_t=u_{xx}+2u_x,\ (0<x<1,t>0) \\ u(t,0)=u(t,1)=0, \\ u(0,x)=\delta(x-\frac{1}{2}). \end{cases}$$

**六(共15分)**已知区域$\Omega=\{(x,y,z)\mid x>y+1,-\infty<z<+\infty\}$

1)求出$\Omega$内泊松方程第一边值问题的格林函数。　$(\xi,\eta,\zeta)$

2)设$u=u(x,y,z)$，求解定解问题:

$$\begin{cases} u_{xx}+u_{yy}+4u_{zz}=0,\ ((x,y,z)\in\Omega) \\ u\mid_{x=y+1}=\varphi(y,z). \end{cases}$$

$(\eta+1,\xi-1,\zeta)$

$z=2z'$

---

## 参考公式

1)直角坐标系:$\Delta_3 u=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$, 柱坐标系:$\Delta_3 u=\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\frac{\partial u}{\partial r})+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\theta^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$,

球坐标系:$\Delta_3 u=\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2\frac{\partial u}{\partial r})+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta\frac{\partial u}{\partial\theta})+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}$.

2)若$\omega$是$J_\nu(\omega a)=0$的一个正根，则有模平方$N_{\nu1}^2=\|J_\nu(\omega x)\|_1^2=\frac{a^2}{2}J_{\nu+1}^2(\omega a)$.

若$\omega$是$J'_\nu(\omega a)=0$的一个正根，则有模平方$N_{\nu2}^2=\|J_\nu(\omega x)\|_2^2=\frac{1}{2}[a^2-\frac{\nu^2}{\omega^2}]J_\nu^2(\omega a)$.

3)勒让德多项式:$P_n(x)=\frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n$, $n=0,1,2,3,...$,

母函数:$(1-2xt+t^2)^{-\frac{1}{2}}=\sum_{n=0}^{+\infty}P_n(x)t^n$, 递推公式: $P'_{n+1}(x)-P'_{n-1}(x)=(2n+1)P_n(x)$

4) $\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-a^2\lambda^2}e^{i\lambda x}d\lambda=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-a^2\lambda^2}\cos\lambda x d\lambda=\frac{1}{2a\sqrt{\pi}}\exp(-\frac{x^2}{4a^2})$

5) 基本解: $\Delta_2 u=\delta(x,y),U=\frac{\ln r}{2\pi}$; $\Delta_3 u=\delta(x,y,z),U=-\frac{1}{4\pi r}$。由区域D内Poisson方程第一边值问题的格林函数$G(M;M_0)$, 求得Poisson 方程第一边值问题解$u(M)$ 的公式是:

$$u(M)=-\int_l\varphi(M_0)\frac{\partial G}{\partial n}(M;M_0)dl+\iint_D f(M_0)G(M;M_0)dM_0.$$

由空间V内Poisson方程第一边值问题的格林函数$G(M;M_0)$, 求得Poisson 方程第一边值问题解$u(M)$ 的公式是:

$$u(M)=-\iint_S\varphi(M_0)\frac{\partial G}{\partial n}(M;M_0)dS+\iiint_V f(M_0)G(M;M_0)dM_0.$$