一(共20分，5+5+10)求解以下问题。

(1) $u = xf(y) + g(y)$；

5分

(2) 特解xy

2分

答案$u = x + y + xy$；

3分

(3) 特解$v = \sin t$，

2分

设$w = u - v$，则

$$\begin{cases} w_{tt} = 4w_{xx} \\ w(0,x) = \sin x, \;\; w_t(0,x) = \sin x - 1. \end{cases} .$$

由达朗贝尔公式

5分

$$w = \frac{\sin(x+2t) + \sin(x-2t)}{2} + \frac{1}{4}\int_{x-2t}^{x+2t} \sin x - 1 dx = \sin x \cos 2t + \frac{1}{2}\sin x \sin 2t - t.$$

所以答案为$u = \sin x \cos 2t + \frac{1}{2}\sin x \sin 2t - t + \sin t.$

3分

二(15分)

$$u=\sum_{n=0}^{\infty}(A_nr^n+B_nr^{-n-1})P_n(\cos n\theta).$$

5分

$$3x^2=2P_2+P_0.$$

5分

对照得，$A_n=B_n=0, n\neq 0,2$，以及

$$\begin{cases} A_0+B_0=1 \\ A_0+\frac{B_0}{2}=1. \end{cases}$$

$$\begin{cases} A_2+B_2=2 \\ 4A_2+\frac{B_2}{8}=2. \end{cases}$$

解得$A_0=1, B_0=0, A_2=\frac{14}{31}, B_2=\frac{48}{31}$。答案

$$u=1+(\frac{14}{31}r^2+\frac{48}{31}r^{-3})P_2(\cos\theta).$$

5分

三(15分)分离变量

$$u = TR.$$

得到

$$\frac{T''}{T} = \frac{rR'' + R'}{rR} = -\mu.$$

零阶贝塞尔固有值问题

$$\begin{cases} rR'' + R' + \mu rR = 0 \\ |R(0)| < \infty, R(3) = 0. \end{cases}$$

5分

设$0 < \omega_1 < \omega_2 < \cdots$ 为$J_0(\omega 3) = 0$ 的所有正根，则固有值$\mu_n = \omega_n^2$，固有函数$R_n = J_0(\omega_n r), n = 1, 2, 3, \cdots$。解

$$T_n'' + \omega_n^2 T = 0.$$

得到$T_n = A_n \cos\omega_n t + B_n \sin\omega_n t$。所以

$$u = \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos\omega_n t + B_n \sin\omega_n t) J_0(\omega_n r).$$

5分

带入$t = 0$,

$$\begin{cases} \sum_{n=1}^{\infty} A_n J_0(\omega_n r) = 0 \\ \sum_{n=1}^{\infty} B_n \omega_n J_0(\omega_n r) = \delta(r-2) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\int_0^3 \delta(r-2) J_0(\omega_n r) r dr}{N_n^2} J_0(\omega_n r) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4J_0(2\omega_n)}{9J_1^2(3\omega_n)} J_0(\omega_n r) \end{cases}$$

答案

$$u = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4J_0(2\omega_n)}{9\omega_n J_1^2(3\omega_n)} \sin\omega_n t J_0(\omega_n r)$$

5分

四(15分)F-变换$U = F[u]$。

$$\begin{cases} U_t = (-2\lambda^2 - \mu^2 + 1)U \\ U(0, \lambda, \mu) = F[e^{-x^2-y^2}] = \pi e^{-\frac{\lambda^2+\mu^2}{4}} \end{cases}$$

5分

解得

$$U = F[e^{-x^2-y^2}]e^{(-2\lambda^2-\mu^2+1)t}.$$

5分

反变换

$$\frac{e^t}{(2\pi)^2}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{(-2\lambda^2-\mu^2+1)t}\pi e^{-\frac{\lambda^2+\mu^2}{4}} e^{i(\lambda x+\mu y)} dt = \frac{e^{t-\frac{x^2}{8t+1}-\frac{y^2}{4t+1}}}{\sqrt{(4t+1)(8t+1)}}.$$

5分

五(20分) 1)由SL 理论，固有值大于零，剩下的讨论即可。

5分

固有值$\lambda_n = 1 + n^2\pi^2$，固有函数$X_n = e^{-x}\sin(n\pi x), n = 1, 2, 3, \cdots$。

5分

2) 分离变量，$u = TX$，则

$$T'X = TX'' + 2TX'.$$

所以

$$\frac{T'}{T} = \frac{X'' + 2X'}{X} = -\lambda.$$

固有值问题

$$\begin{cases} X'' + 2X' + \lambda X = 0, \ (0 < x < 1) \\ X(0) = X(1) = 0. \end{cases}$$

解之固有值$\lambda_n = 1 + n^2\pi^2$，固有函数$X_n = e^{-x}\sin(n\pi x), n = 1, 2, 3, \cdots$。解$T_n$ 的方程，

$$T_n' + (1 + n^2\pi^2)T_n = 0.$$

得

$$T_n = A_n e^{-(1+n^2\pi^2)t}.$$

所以

$$u(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-(1+n^2\pi^2)t} e^{-x}\sin(n\pi x).$$

5分

令$t = 0$，

$$\delta(x - 1) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-x}\sin(n\pi x).$$

内积

$$\langle X_n, X_n\rangle = \int_0^1 (e^{-x}\sin(n\pi x))^2 e^{2x} dx = \frac{1}{2}.$$

$$\langle \delta(x - \frac{1}{2}), X_n\rangle = \int_0^1 \delta(x - \frac{1}{2}) e^{-x}\sin(n\pi x) e^{2x} dx = \sqrt{e}\sin(\frac{n\pi}{2}).$$

结果

$$u = \sum_{n=1}^{\infty} 2\sqrt{e}\sin(\frac{n\pi}{2}) e^{-(1+n^2\pi^2)t} e^{-x}\sin(n\pi x).$$

5分

六(共15分=8+7) 1)$M_0=(\xi,\eta,\zeta)$，对称点$M_0'=(\eta+1,\xi-1,\zeta)$。

2分

选择正确的基本解。

3分

格林函数

$$G(M;M_0)=\frac{1}{4\pi}\Big(\frac{1}{\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2}}-\frac{1}{\sqrt{(x-\eta-1)^2+(y-\xi+1)^2+(z-\zeta)^2}}\Big)$$

3分

2) 设$\hat{z}=\frac{z}{2}$，化为

$$\begin{cases} u_{xx}+u_{yy}+u_{\hat{z}\hat{z}}=0,\ (x>y+1,-\infty<\hat{z}<+\infty) \\ u\mid_{x=y}=\varphi(y,2\hat{z}). \end{cases}$$

2分

单位外法向$n=\frac{1}{\sqrt{2}}(-1,1,0)$，

2分

$$\begin{aligned} &\frac{\partial G}{\partial n}|_{\xi=\eta+1} \\ &=\frac{1}{4\pi}\frac{-1}{2\sqrt{2}}\Big(\frac{2\eta-2y-(2\xi-2x)}{\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(\hat{z}-\zeta)^2}^3}-\frac{2(\eta+1-x)-2(\xi-1-y)}{\sqrt{(x-\eta-1)^2+(y-\xi+1)^2+(\hat{z}-\zeta)^2}^3}\Big)|_{\xi=\eta+1} \\ &=\frac{1}{2\sqrt{2}\pi}\Big(\frac{y-x+1}{\sqrt{(x-\eta-1)^2+(y-\eta)^2+(\hat{z}-\zeta)^2}^3}\Big). \end{aligned}$$

2分

结果

$$\begin{aligned} u&=-\frac{y-x+1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\varphi(\eta,2\zeta)}{\sqrt{(x-\eta-1)^2+(y-\eta)^2+(\hat{z}-\zeta)^2}^3}d\eta d\zeta \\ &=\frac{x-y-1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\varphi(\eta,2\zeta)}{\sqrt{(x-\eta-1)^2+(y-\eta)^2+(\frac{z}{2}-\zeta)^2}^3}d\eta d\zeta \end{aligned}$$

1分