问题解答

代数结构

2023 年 6 月 25 日

问题 1　题目 6.14 中的 $\mathbb{Z}[i]$ 是什么意思？映射 $\pi : \mathbb{Z}[i] \to \mathbb{Z}[i]/(2+i)$ 是什么？
答　$\mathbb{Z}[i]$ 表示的是 $\mathbb{C}$ 的子环（给定一个大的环，决定子环，我们只需要决定集合即可），$\mathbb{Z}[i]$ 作为集合是 $\{a+bi \mid a,b \in \mathbb{Z}\}$. 事实上，这个记号是一般性的：对一个环 S 与它的子环 R 和任意子集 $A \subseteq S$，我们用 $R[A]$ 表示包含 R 和 A 的 S 的最小子环.

映射 $\pi : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}[i]/(2+i)$ 表示商映射，把每个元素 x 映射成它所在的等价类中：$\pi(x) = x + (2+i) = \{x+y \mid y \in (2+i)\}$.

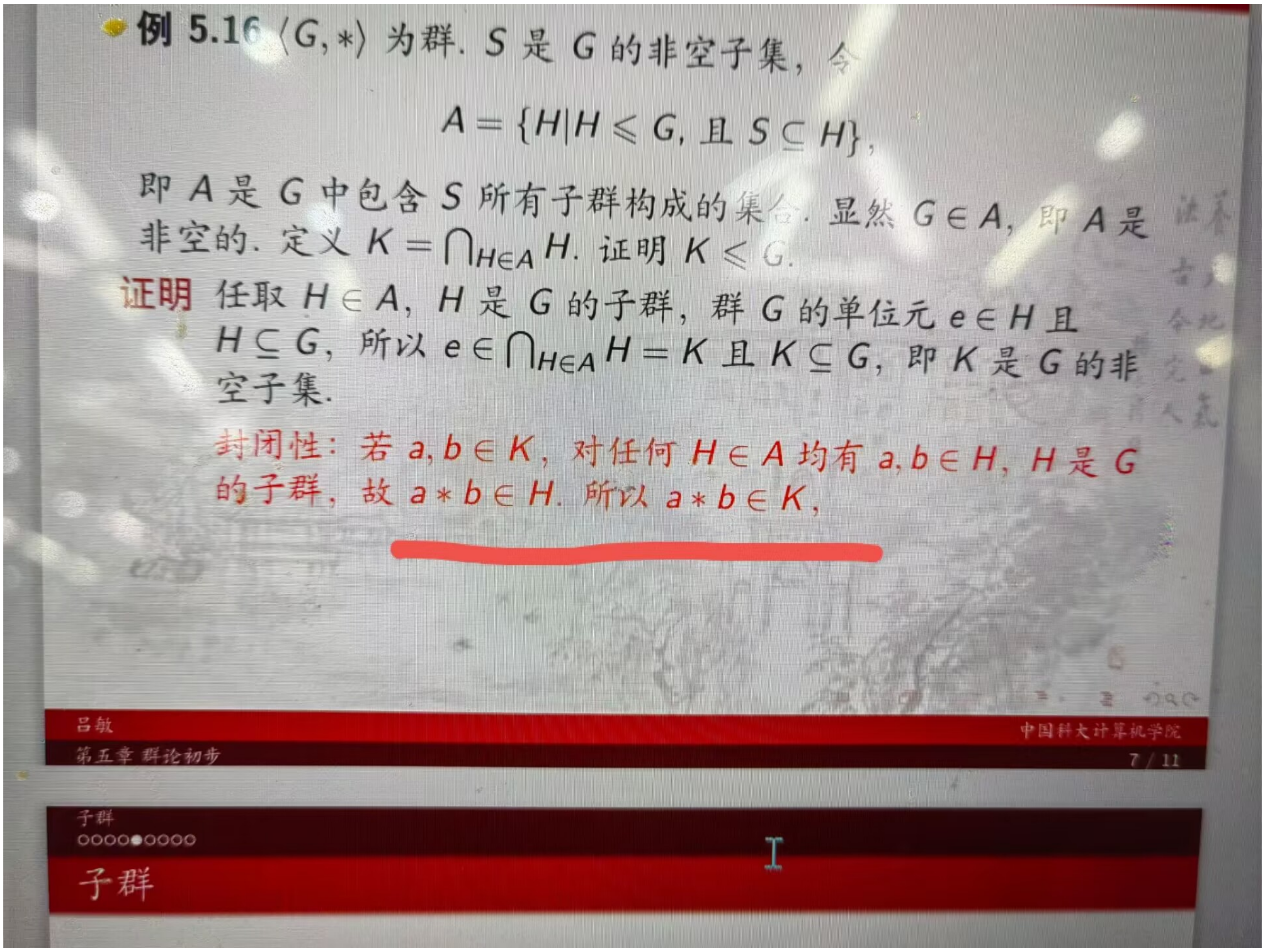
问题 2　题目 6.9：如果群 G 只含有一个某阶子群，则该群是正规子群.
证明　设 $H \leq G$ 是 G 的一个子群，且和 H 相同阶数的子群都等于 H. 为了证明 H 是正规子群，即证，对每个 $g \in G$，都有 $gHg^{-1} = H$. 现在，这由条件得到：因为 gHg^{-1} 和 H 的阶相同，并且不难验证 gHg^{-1} 总是子群.

题目 3　2018 年考试题. (1) 设 $\langle G, * \rangle$ 是群，$|G| \geq 2$ 且满足 $\forall a \in G, a^2 = e$，证明 $\exists n \in \mathbb{Z}_+, |G| = 2^n$.
(2) 证明 $\{(12),(134)\}$ 生成了 S_4.
证明　(1) 对 $|G|$ 作归纳. 任取一个二阶元素 $a \in G$，熟知 G 是 Abel 群（i.e. 交换群）（这是我们的一道作业题，5.3），所以 a 生成的子群 $H := \{e, a\}$ 会是 G 的正规子群，现在考虑商群 G/H，那么它也满足题目的条件，应用归纳假设，所以 $|G/H|$ 是 2 的幂次，然后注意 $|G| = |H| \times |G/H| = 2|G/H|$.
(2) 第一步，我们证明如下的引理：
引理　设 H 是置换群 S_n 指数为 2 的子群，则 $H = A_n$.
证明　熟知如果 H 是 S_n 指数为 2 的子群，则 $\forall \sigma \in S_n, \sigma^2 \in H$（这又是我们的一道作业题，6.4）. 考虑 $S = \{\sigma^2 \mid \sigma \in S_n\}$，用 $\langle S \rangle$ 表示 S 生成的子群，我们断言 $A_n \subseteq \langle S \rangle \subseteq H$，从而比较元素个数得到所需.

第二个包含是我们刚才已经得到的结论，至于第一个包含：我们指出，任意两个对换的乘积 $\tau = (ij)(kl)$，都可以写成置换的平方：

$$(ij)(kl) = \begin{cases} (ijl)^2 & \text{若} i = k \\ (ikjl)^2 & \text{若} i \neq k \end{cases}$$

现在，因为偶置换可以表示成偶数个对换的乘积，所以 $A_n \subseteq \langle S \rangle$.
回到原题　第二步，记 $H = \langle (12),(134) \rangle$，首先 $(1234) = (14)(13)(12) = (134)(12)$，所以由 Lagrange 定理，$4 \mid |H|$ 且 $3 \mid |H|$，于是 $12 \mid |H|$. 从而 $|H| = 12$ 或者 24，但是第一种情形不可能，因为它包含了奇置换 (12)，所以 $|H| = 24$，故 $H = S_4$.
题目 4　ppt 例子 5.16，生成子群.



“这一步是怎么得到的？K 不是 H 的交吗，那么 H 不一定属于 K 吧”

答　这里是对每个 $H \in A$ 都断言了 $ab \in H$，从而由 K 的定义（$K = \bigcap_{H\in A} H$），得到 $ab \in K$.