代数结构 2019.9 考试试卷

by MacGuffin

$2^n - n \equiv 0 \pmod 3$
$3^n - n \equiv 0 \pmod 5$
$5^n - n \equiv 0 \pmod 2$

1. 【9 分】已知存在一些正整数 n，满足：
   (1)$2^n - n$ 是 3 的整数倍；
   (2)$3^n - n$ 是 5 的整数倍；
   (3)$5^n - n$ 是 2 的整数倍。
   求同时满足条件 (1)(2)(3) 的 n 的最小值？

$a^{\phi(b)} \equiv 1 \pmod b$
$b^{\phi(a)} \equiv 1 \pmod a$

$2^2 \equiv 1 \pmod 3$
$3^4 \equiv 1 \pmod 5$
$5^1 \equiv 1 \pmod 2$
$\therefore 5^n \equiv 1 \pmod 2$
$\therefore n \equiv 1 \pmod 2$
设 $n = 2k+1$ $k = 0, 1 \cdots$
若 $n=1$ 不满足
若 $n \geq 3$ 即 $k \geq 1$
$2^{2k+1} - n \equiv 0 \pmod 3$
$2 \cdot (2^2)^k - n \equiv 0 \pmod 3$
$2 \cdot (2^2)^k \equiv 2 \pmod 3$
$\therefore n \equiv 2 \pmod 3$

2. 【10 分】证明：若两个正整数 a,b 互素，则存在正整数 m,n，使得 $a^m + b^n \equiv 1 (mod\, ab)$。

$a^m b^n \equiv 0 \pmod{ab}$
$a^m + b^n - 1 - a^m b^n \equiv 0 \pmod{ab}$
$(a^m - 1)(1 - b^n) \equiv 0 \pmod{ab}$
$a^{\phi(b)} - 1 \equiv 0 \pmod b$
$b^{\phi(a)} - 1 \equiv 0 \pmod a$
$(a^{\phi(b)} - 1)(1 - b^{\phi(a)}) \equiv 0 \pmod{ab}$
$a^{\phi(b)} + b^{\phi(a)} \equiv 1 \pmod{ab}$

3. 【9 分】计算下列置换的运算：
   (1)
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$
   (2)
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 5 & 2 & 6 & 3 & 1 \end{pmatrix}^3$$

4. 【11 分】设 N 是正整数集，定义 N 上的二元关系 $R = \{\langle x, y\rangle | x, y \in N \wedge x + y 是偶数\}$
   (1) 证明 R 是 N 上的一个等价关系
   (2) 求该等价关系确定的等价类集合

自反✓ 对称✓ 传递✓
奇数 偶数

5. 【12 分】设 $A = \{a, b, c, d\}$,A 上的二元关系 R_1 和 R_2 定义如下：
$$R_1 = \{(a, b), (b, c), (c, d), (d, a)\}$$
$$R_2 = I_A \cup \{(a, b), (b, a), (c, d), (d, c)\}$$
   其中 I_A 为 A 上的恒等关系
   (1) 试分别指出 R_1 和 R_2 所具有的性质 (即是否具有自反性，不自反性，对称性，反对称性和传递性)；✓
   (2) 试求出 $R_1 \circ R_2, R_1^+ 和 R_2^+$(传递闭包)

$R_1 \cup R_1^2 \cup R_1^3 \cup \cdots$

$n = 3m+2$
而 $n = 2k+1$
$\therefore \begin{cases} n \equiv 2 \pmod 3 \\ n \equiv 1 \pmod 2 \end{cases}$
$M_1 = 2$ $M_2 = 3$ $M = 6$
$n \equiv (M_1 b_1 \cdot 2 + M_2 b_2 \cdot 1) \pmod 6$
$\equiv (8 + 3) \pmod 6$
$\equiv 5 \pmod 6$
即 $n = 6r + 5$.

$2b_1 \equiv 1 \pmod 3$
$b_1 = 2$.
$3b_2 \equiv 1 \pmod 2$
$b_2 = 1$

$3^n \equiv n \pmod 5$
$3^5 \cdot 3^{6r} \equiv (6r+5) \pmod 5$
$3 \cdot 3^{6r} \equiv 6r \pmod 5$

$r = 2t$ 时 $n = 12t+5$

$3^n = 3^5 \cdot (3^4)^{3t} \equiv 3^5 \pmod 5$

$\equiv 3 \pmod 5$

$12t+5 \equiv 12t \equiv 3 \pmod 5$

即 $4t \equiv 1 \pmod 5$

$t_{min} = 4$

即 $n_{min} = 48+5 = 53$

$r = 2t+1$ 时 $n = 12t+11$

$3^n = 3^{11} \cdot (3^4)^{3t} \equiv 3^{11} \equiv 3^3 \equiv 2 \pmod 5$

$12t+11 \equiv 12t+1$

$\equiv 2 \pmod 5$

即 $12t \equiv 1 \pmod 5$

$t_{min} = 3$

$n_{min} = 36+11 = 47 < 53$ 即 $n_{min} = 47$.

6.【13 分】集合 S 上运算 * 满足结合律，H 和 K 为 S 的非空子集，$< H, * >$ 和 $< K, * >$ 为群，且群 H,K 除了单位元以外无相同元素，对于群 H,K 内的任意元素 $h \in H$和$k \in K$有$h * k = k * h$. 若 $HK = \{h * k | h \in H, k \in K\}$ 是 S 的子集

(1) 证明 G=HK 关于乘法 * 构成一个群。

(2) 证明 H,K 都是 G 的正规子群。

(3) 证明商群 G/H 与 K 同构。

封闭
结合
单位元
逆元

7.【12 分】设 $< G, * >$ 是一个群，

$$H = \{a | a \in G \text{且对于所有} b \in G, a * b = b * a\}$$

证明 $< H, * >$ 是正规子群。

$<R, \oplus>$ 交换群

$<R, \otimes>$ 含幺半群

$\otimes$ 对 $\oplus$ 的左右分配率.

8.【13 分】已知实数集 R 对于普通的加法和乘法是一个含幺环 (乘法存在单位元)，对于任意 $a, b \in R$，定义 (1)$a \oplus b = a + b - 1$ (2)$a \otimes b = a + b - ab$ 证明 R 关于 $\oplus$和$\otimes$ 也构成一个含幺环。

9.【11 分】$Q[x]$ 是有理数集 Q 上多项式全体，Δ 为正整数，$S = \{a + b\sqrt{\Delta} | a \in Q, b \in Q\}$，定义 $\Psi : Q[x] \to S, \Psi(f(x)) = f(\sqrt{\Delta})$, 证明 Ψ 为满环同态映射，求 $Ker\Psi$。

$a \otimes b \in R$. ✓

$a \otimes (b \otimes c) = (a \otimes b) \otimes c$

$= a + (b+c-bc) - a(b+c-bc)$

$= a + b + c - ab - ac - bc + abc$ ✓

$e \otimes a = e + a - eb = a$.

$e = 0$.

即 $0 \otimes a = a = a \otimes 0$.

① ψ 的定义与代表元选取无关

② $\forall f(x), g(x) \in Q[x]$

$h_1(x) = f(x) + g(x)$ $\quad h_2(x) = f(x) \cdot g(x)$

$\psi(f(x) + g(x)) = \psi(h_1(x)) = h_1(\sqrt{\Delta})$

$= f(\sqrt{\Delta}) + g(\sqrt{\Delta})$

$= \psi(f(x)) + \psi(g(x))$

③ $\psi(f(x) \cdot g(x)) = \psi(h_2(x))$

$= h_2(\sqrt{\Delta})$

$= f(\sqrt{\Delta}) \cdot g(\sqrt{\Delta}) = \psi(f(x)) \cdot \psi(g(x))$

④. $Q[x]$ 上乘法单位元 $1_{Q[x]} = 1$

S 上 ···· $1_S = 1$

是环同态 ——

还 ψ 是满射： $\forall\ y \in S$.

$$y = a + b\sqrt{\Delta}$$

$$\exists\ f(x) = a + bx \in \mathbb{Q}[x]$$

有 $\psi(f(x)) = f(\sqrt{\Delta}) = a + b\sqrt{\Delta} = y$

是满射 ——

$$\ker\psi = \{ f(x) \mid f(x) \in \mathbb{Q}[x],\ \psi[f(x)] = 0 \}$$

$$\psi[f(x)] = f(\sqrt{\Delta}) = 0.$$

$$f(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n \quad a_n \neq 0$$

$$f(\sqrt{\Delta}) = a_0 + a_1\sqrt{\Delta} + \cdots + a_n(\sqrt{\Delta})^n.$$

$$= (a_0 + a_2\Delta + a_4\Delta^2 + \cdots) + (a_1 + a_3\Delta + \cdots)\sqrt{\Delta}$$

$$= 0.$$

$\sqrt{\Delta}$ 为无理数 $\begin{cases} a_0 + a_2\Delta + \cdots + \cdots = 0 \\ a_1 + a_3\Delta + \cdots = 0. \end{cases}$

$\sqrt{\Delta}$ 为有理数.