第一次作业答案

章海

2023 年 4 月 5 日

目录

第一题

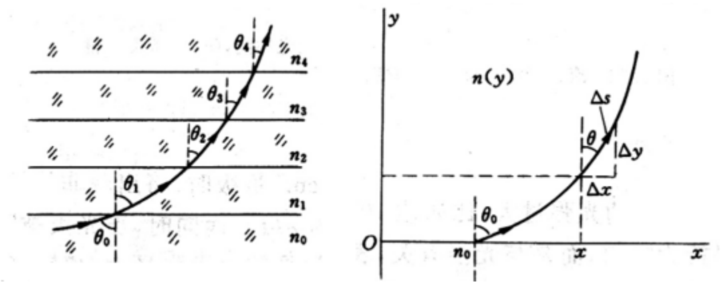

图 1: 图 1

光线方程:

$$n_0 \sin\theta_0 = n_1 \sin\theta_1 = n_2 \sin\theta_2 = \ldots = n_m \sin\theta_m$$

$$n(y)\sin\theta(y) = n_0 \sin\theta_0 \quad \text{最远距离:} \begin{cases} n_0 \\ \theta_0 = 90^\circ \end{cases}$$

几何关系:

$$\sin\theta(y) = \frac{dx}{ds} \quad (ds)^2 = (dx)^2 + (dy)^2$$

$$\frac{dy}{dx} = \operatorname{ctg}\theta = \sqrt{\frac{n^2(y)}{n_0^2 \sin^2\theta_0} - 1}$$

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt{(1+Ay)^2 - 1} \approx \sqrt{2Ay}$$

$$y = \frac{A}{2}x^2$$

$$x_0 = \sqrt{\frac{2h}{A}} = 2 \times 10^3 \text{ m}$$

最远只能看到 2 km 。

第二题

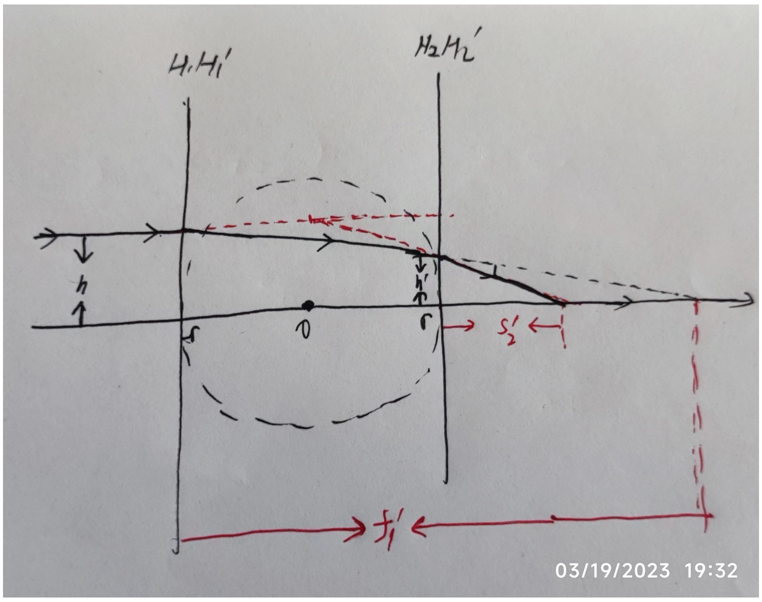

图 2: 图 2

将折射过程视为左球面折射和右球面折射两次过程。记左球面折射过程焦距为 f_1 , f_1' ，右球面折射过程焦距为 f_2 , f_2' 。易得

$$f_1' = \frac{nr}{n-1}$$

$$f_2 = \frac{nr}{n-1}$$

$$f_2' = \frac{r}{n-1}$$

考虑平行光从左入射，经过左球面折射，汇聚点是第二次折射的像点。第二次折射的物距 s

$$s = 2r - f_1' = r\frac{n-2}{n-1}$$

第二次成像公式

$$\frac{1}{s'} + \frac{n}{s} = \frac{n-1}{r}$$

解得

$$s' = \frac{r}{2}\frac{2-n}{n-1}$$

故右焦点在 $x = r + s'$ 处。由对称性可得，左焦点 $x = -r + s'$ 处。

下面求主平面。由主平面定义，通过入射光线和出射光线的交点求主平面。

对于平行光从左入射，入射光线方程为 $y = h$。

出射光线过右焦点 $(r + s', 0)$。

下求出射光线的斜率。由第一次折射出射光线的相似关系

$$h' = h\frac{f_1' - 2r}{f_1'}$$

出射光线的斜率为

$$k = -\frac{h'}{s'}$$

故出射光线方程为

$$y = -\frac{h'}{s'}[x - (r + s')]$$

联立求解，交点为 $(0, h)$

故主平面为 $x = 0$。(由对称性可知，另一个主平面亦为 $x = 0$)

焦距为主平面和焦点的距离，为 $f = f' = r + s'$

第四题

仅考虑左侧平行光入射的情况。右侧平行光入射同理可求。

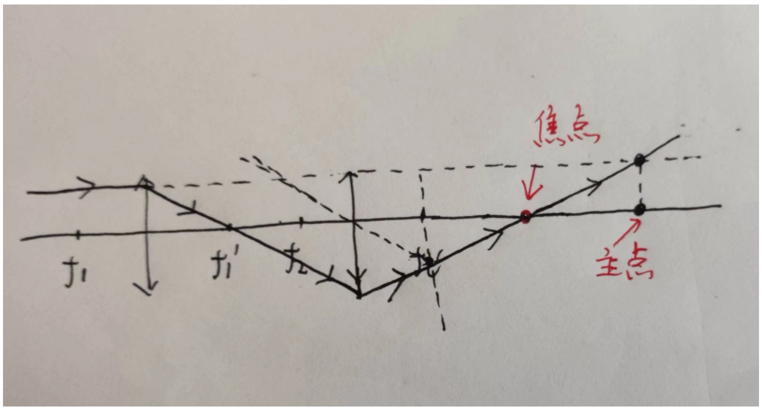

图 3: 图 3

需要强调的是，主点位于 x 轴之上。

第五题

$$\vec{E}=\vec{E}_0\cos\left(\omega t-\vec{k}\cdot\vec{r}+\phi_0\right)$$

有题目可知, 三维空间中的波矢量可以表示为 $\vec{k}=(0,k\cos(30^\circ),k\sin(30^\circ))=\left(0,\frac{\sqrt{3}}{2}k,\frac{k}{2}\right)$, 而空间矢量可以表示为 $\vec{r}=(x,y,z)$, 因而平面波函数写作:

$$\vec{E}=\vec{E}_0\cos\left(\omega t-\frac{\sqrt{3}}{2}ky-\frac{1}{2}kz+\phi_0\right)$$

而标量波函数可以写作:

$$E=E_0\cos\left(\omega t-\frac{\sqrt{3}}{2}ky-\frac{1}{2}kz+\phi_0\right)$$

如果写成复波函数, 则为:

$$\tilde{E}=E_0e^{-i\left(\omega t-\frac{\sqrt{3}}{2}ky-\frac{1}{2}kz+\phi_0\right)}$$

注: 上式中 ϕ_0 为初相位, E_0 为振幅, ω,k 分别为平面波的频率以及波矢的绝对值, 二者满足关系:

$$\frac{\omega}{k}=v=\frac{c}{n}$$

第七题

产生干涉的必要条件是：存在互相平行的电场分量；频率相同；相位差稳定。唯有同一原子发出的光才频率相同的，而它同一次发出的光的初相位一样，故相位差是稳定的。

第九题

解: 设远处的麦克风离三个单频信号的距离分别为: $l-d\sin\theta,l,l+d\sin\theta$

我们把单频信号写成复波函数的形式有:

$$s_1=Ae^{-i(\omega t-kl+kd\sin\theta+\psi_1)}s_2=Ae^{-i(\omega t+\psi_2)}s_3=Ae^{-i(\omega t-kl-kd\sin\theta+\psi_3)}$$

故:

$$s=s_1+s_2+s_3$$

法 $1: s=0$ 时, 会得到消音的结果, 此时我们只需让 $kd\sin\theta+\psi_1,\psi_2,-kd\sin\theta+\psi_3$ 之间差 $\frac{2\pi}{3}+2k\pi$ 或 $\frac{4\pi}{3}+2k\pi$ 的相位即可.

法 2：为使麦克风处消音, 只需要令下式为零即可:

$$|s|^2 = A^2\left(3+2\cos\left(\psi_2-\psi_3+kd\sin\theta\right)+2\cos\left(\psi_2-\psi_1-kd\sin\theta\right)+2\cos\left(\psi_3-\psi_1-2kd\sin\theta\right)\right)$$

$$3+2\cos\left(\psi_2-\psi_3+kd\sin\theta\right)+2\cos\left(\psi_2-\psi_1-kd\sin\theta\right)+2\cos\left(\psi_3-\psi_1-2kd\sin\theta\right)=0$$

即为初相位之间应满足的条件: $kd\sin\theta+\psi_1, \psi_2, -kd\sin\theta+\psi_3$ 之间差 $\frac{2\pi}{3}+2k\pi$ 或 $\frac{4\pi}{3}+2k\pi$ 的相位即可.

第十一题

$$r_m^2 = mR\lambda$$

$$r_n^2 = nR\lambda$$

作差

$$R=\frac{r_m^2-r_n^2}{(m-n)\lambda}$$

代入数据得 $R=0.102m$

更换折射率为 n 的介质后，光程差为 $\delta L=2nh+\frac{\lambda}{2}$

化简得 $r_m=\sqrt{\frac{mR\lambda}{n}}$

代入数据得 $r_5=0.607nm$，$r_{15}=1.47nm$

第十三题

解: 依据夫琅禾费单缝衍射的干涉极小公式: $\sin\theta = m\frac{\lambda}{a}, m=\pm1,\pm2,\pm3,\ldots$, $\sin\theta=\frac{x}{z}$, 这里 x 为屏上到中心的距离, z 为光源到屏幕的距离, a 是光源的宽度。件带入上式, 得到:

$$\frac{0.3\ \text{cm}}{z}=2\cdot\frac{589.3\ \text{nm}}{a}$$

$$\frac{0.42\ \text{cm}}{z}=3\cdot\frac{\lambda}{a}$$

两式相除:

$$\frac{0.3}{0.42}=\frac{2\cdot 589.3}{3\cdot\lambda}$$

$$\lambda=550nm$$

第十六题

解: 基本公式 $d\sin\theta = m\lambda$

代入数据

$$d = \frac{632.8nm}{\sin 38} = 1.03 * 10^{-6}m$$

若能看到，需要满足

$$\sin\theta = \frac{m\lambda}{d} < 1$$

代入 $m = 2$，不满足条件。

故不能看到

第十八题

解: 每经过一个偏振片, 线偏转光振幅的变化均为:

$$A = A_0 \cos\alpha$$

假设入射光是自然光, 经过第一个偏正片后光强变为原来的一半, 经过后面三个偏振片后, 光的振幅变为:

$$A = A_1 \cos^3 30^\circ = \frac{3\sqrt{3}}{8} A_1$$

光强变为:

$$I = A^2 = \frac{27}{64} A_1^2 = \frac{27}{64} I_1 = \frac{27}{128} I_0 \approx 0.21 I_0$$

因而光强变为原来的 0.21 倍。

第二十二题

解: (1) 根据维恩位移定律, 辐射强度与温度成反比, 有:

$$\lambda_m = \frac{b}{T} = \frac{2.898 \times 10^{-3}}{10^7} = 2.898 \times 10^{-10} \text{ m}$$

(2) 可以直接由公式 $E = h\nu = h\frac{c}{\lambda}$ 得到:

$$E = h\frac{c}{\lambda_m} = \frac{6.626 \times 10^{-34} \times 3 \times 10^8}{2.898 \times 10^{-10}} = 6.859 \times 10^{-16} \text{ J}$$