中国科学技术大学数学科学学院

2020—2021学年第二学期考试试卷

■A 卷　　□B 卷

课程名称　数学物理方程(B)　　课程编号　001549

姓名________　　学号________　　学院________

题号	一	二	三	四	五	六	七	总分
得分								

一(12分) 求解以下初值问题：

$$\begin{cases} u_{tt} = 9u_{xx} + f(t,x), \ (t>0, -\infty < x < +\infty) \\ u\,|_{t=0} = x^3, \quad u_t\,|_{t=0} = \sin x. \end{cases}$$

(1) 当 $f(t,x) = 0$ 时，求此定解问题的解；

(2) 当 $f(t,x) = x + xt$ 时，求出此定解问题的解。

二(14分)求解定解问题：

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx} + 1, \quad (0 < x < l, \ t > 0) \\ u(t,\ 0) = 0, \quad u_x(t,\ l) = 0, \\ u\,|_{t=0} = \varphi(x), \ u_t\,|_{t=0} = \psi(x), \end{cases}$$

三(14分)求解定解问题：

$$\begin{cases} \Delta_2 u = 0, \quad (1 < r < e, 0 < \theta < \frac{\pi}{3}) \\ u\,|_{r=1} = 0, \ u\,|_{r=e} = 0, \\ u\,|_{\theta=0} = 0, \ u\,|_{\theta=\frac{\pi}{3}} = \varphi(r), \end{cases}$$

这里(r,θ)为极坐标，e为自然对数底

四(14分) 求解圆柱体上的定解问题：

$$\begin{cases} \Delta_3 u = 0, \quad (r = \sqrt{x^2+y^2} < 1, \ 0 < z < 2) \\ u\,|_{r=0} \text{ 有界}, \quad u\,|_{r=1} = 0, \\ u\,|_{z=0} = r - r^2, \quad u\,|_{z=2} = 0. \end{cases}$$

五(14分) (1) 将 $f(x) = 1 + x + x^2$ 展开成勒让德-傅里叶级数.

(2) 计算积分$\int_{-1}^{1} P'_{2019}(x) P'_{2021}(x) dx$.

六(16分)对于初值问题:

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} + 5u_x + f(t,x), \ (t>0, -\infty < x < +\infty) \\ u\mid_{t=0} = \varphi(x). \end{cases}$$

(1) 利用傅里叶变换求其基本解;

(2) 利用基本解求解以上初值问题

七(16分) 设半空间 $V = \{(x,y,z) \mid x>1,\ y,\ z \in \ R\}$,

(1) 用镜像法求出V内的格林函数 $\begin{cases} \Delta_3\, G = -\delta(M-M_0) \quad (M,\ M_0 \in V) \\ G|_{x=1} = 0, \end{cases}$

(2) 求解定解问题 $\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} + 9u_{zz} = 0 \qquad (x>0) \\ u|_{x=0} = \varphi(y,z), \end{cases}$

参考公式

1) 直角坐标系:$\Delta_3 u = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2}$, 柱坐标系:$\Delta_3 u = \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial r}(r\dfrac{\partial u}{\partial r}) + \dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2}$,

球坐标系:$\Delta_3 u = \dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial}{\partial r}(r^2\dfrac{\partial u}{\partial r}) + \dfrac{1}{r^2\sin\theta}\dfrac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta\dfrac{\partial u}{\partial\theta}) + \dfrac{1}{r^2\sin^2\theta}\dfrac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}$.

2) 若ω是$J_\nu(\omega a) = 0$的一个正根,则有模平方$N_{\nu1}^2 = \|J_\nu(\omega x)\|_1^2 = \dfrac{a^2}{2}J_{\nu+1}^2(\omega a)$.

若ω是$J_\nu'(\omega a) = 0$的一个正根,则有模平方$N_{\nu2}^2 = \|J_\nu(\omega x)\|_2^2 = \dfrac{1}{2}[a^2 - \dfrac{\nu^2}{\omega^2}]J_\nu^2(\omega a)$.

递推公式: $\dfrac{d}{dx}(x^\nu J_\nu(x)) = x^\nu J_{\nu-1}(x)$, $\quad \dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{J_\nu(x)}{x^\nu}\right) = -\dfrac{J_{\nu+1}(x)}{x^\nu}$.

$2J_\nu'(x) = J_{\nu-1}(x) - J_{\nu+1}(x)$, $\quad \dfrac{2\nu}{x}J_\nu(x) = J_{\nu-1}(x) + J_{\nu+1}(x)$.

3) 勒让德多项式:$P_n(x) = \dfrac{1}{2^n n!}\dfrac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n$, $n = 0,1,2,3,\ldots$

母函数:$(1-2xt+t^2)^{-\frac{1}{2}} = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} P_n(x)t^n$, 递推公式: $P_{n+1}'(x) - P_{n-1}'(x) = (2n+1)P_n(x)$.

4) $\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-a^2\lambda^2 t}\cos\lambda x d\lambda = \dfrac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\exp(-\dfrac{x^2}{4a^2 t})$

5) 由Poisson方程第一边值问题的格林函数$G(M;M_0)$,求得第一边值问题解$u(M)$的公式:

空间区域: $u(M) = -\displaystyle\iint_S \varphi(M_0)\dfrac{\partial G}{\partial \vec{n}}(M;M_0)dS + \iiint_V f(M_0)G(M;M_0)dM_0$,

平面区域: $u(M) = -\displaystyle\int_l \varphi(M_0)\dfrac{\partial G}{\partial \vec{n}}(M;M_0)dl + \iint_D f(M_0)G(M;M_0)dM_0$.