

中国科学技术大学

2020—2021 学年第 2 学期考试试卷

考试科目: 代数结构 得分: _____

学生所在系: _____ 姓名: _____ 学号: _____

1. (16 分) (1) 求解下列同余方程组

$$\begin{cases} x = 1 \pmod{5} \\ x = 5 \pmod{6} \\ x = 4 \pmod{7} \\ x = 10 \pmod{11} \end{cases}$$

(2) 计算 $\phi(7800)$

2. (12 分) 设集合 $A = \{1, 2, 3, 4\}$, R 是集合 A 上的关系, $R = \{(1, 2), (2, 1), (2, 3), (3, 4), (4, 1)\}$, 求 R 的传递闭包和 R^2 。

3. (15 分) R^* 是非零实数集合, $x, y \in R^*$, 定义 R^* 上的关系 $S: xSy \Leftrightarrow x \cdot y > 0$,

(1) 证明: S 是 R^* 上的等价关系, 并写出所有等价类;

(2) 如果将 R^* 改为实数集合 R , 那么 S 还是 R 上的等价关系吗? 为什么?

4. (15 分) 对部分序集 $\langle \{3, 5, 9, 15, 24, 45\}, | \rangle$, 回答以下问题:

(1) 画出 Hasse 图, 求极大元和极小元, 存在最大元和最小元吗?

(2) 找出 $\{3, 5\}$ 的所有上界, 如果存在, 求 $\{3, 5\}$ 的最小上界;

(3) 找出 $\{15, 45\}$ 的所有下界, 如果存在, 求 $\{15, 45\}$ 的最大下界。

5. (11 分) 设 H 是群 G 的非空子集。证明: H 是 G 的子群的充分必要条件是: 对任意的 $a, b \in H$, 有 $a^{-1}b \in H$ 。

6. (11 分) 设 f 是群 G 到 G' 的同构映射, $b \in G$ 。证明: b 与 $f(b)$ 的阶相同。

7. (10 分) 试证明: 具有 3 个或更多元素的链 (线性序集) 不是有补格。

8. (10 分) 设 f 是环 R 到环 R' 的同态满射, I 是 R 的理想, 证明: $f(I) = R' \Leftrightarrow I + \text{Ker} f = R$ 。