中国科学技术大学

2021-2022 学年第二学期考试试卷

考试科目：数理逻辑　　　　　　　　　　得分：________

学生所在系：少年班学院　姓名：徐亦昶　学号：PB20000156

本试卷与答题纸同时上交方为有效

一（24）判断题（在题号前的括号里打√或×）

1. 谓词演算 K 的五条公理模式是相互独立的。
2. 若Γ 极大相容(即完备无矛盾)且公式$p \notin \Gamma$，则$\Gamma \cup \{p\}$不相容。
3. 任何命题公式都有唯一的合取范式和析取范式。
4. 若$\Gamma \vDash p$，则每一个满足Γ 的一阶解释也满足p。
5. $\Gamma \vdash p$ 是可判断定的。
6. 不含否定词的公式都是可满足公式。
7. $(\neg r \wedge q \wedge (p \to (q \to r))) \to \neg p$ 是永真式。
8. 项$f(a, x_1)$对公式$\forall x_1 (R_1(b, x_1) \to R_2(x_1, x_2))$中的 x_2 自由。

二（8）简要回答问题（不超过 200 字）：在应用逻辑系统中“假设”（非逻辑公理）有什么作用，请举例说明。

三 （16）设$p, q \in L(X)$。分别用直接证明和简化证明的方法，证明下列 L 的内定理：

$(r\to r)\to p)$

$\to r)$ $\qquad \vdash p\to((p\to q)\to q)$ $\qquad p\to((p\to q)\to p).$

$p\to(q\to p).$

$(p\to(r\to r)).$ $\qquad (p\to((p\to q)\to p))\to(p\to((p\to q)\to q))$

四（16）在某次研讨会的休息时间，3 名与会者根据王教授的口音分别作出如下判断：(1) 甲说：王教授不是苏州人，是上海人；(2) 乙说：王教授不是上海人，是苏州人；(3) 丙说：王教授既不是上海人，也不是杭州人。王教授听后说：你们三人中有一个全说对了，有一人全说错了，还有一个人判断对一半。试根据以上情况判断王教授是哪里人？

$p,\ q$

$\neg p\wedge q\vee\neg q\wedge p.$

1 2 3
1 3 2
2 1 3
2 3 1
3 1 2
3 2 1

五（12）下列谓词公式是否为有效式？为什么？

$$\exists x_2\forall x_1R_1^2(x_1,x_2)\to\forall x_1\exists x_2R_1^2(x_1,x_2)$$

$\neg x_1\wedge x_2\wedge(x_2\wedge\neg x_3\vee\neg x_2\wedge x_3)$

六（12）在谓词演算 K 中证明 $\{\forall x(F(x)\vee G(x))\}\vdash\forall xF(x)\vee\exists xG(x)$。 $\neg x_1\wedge x_2\wedge\neg x_3$

七（12）求与下述公式逻辑等值的前束合取范式：

$\neg x_1\wedge x_2\wedge x_3$ $\qquad \perp$

$$(\forall x_1)(\mathrm{P}(x_1,x_2)\vee(\forall x_2)\mathrm{R}(x_2,x_3))\to(\forall x_3)\mathrm{Q}(x_1,x_3)$$

$\neg\forall x\neg G.$

$\neg F\to G.$

$\neg\forall xF(x)\to\exists xG(x)$

$\forall x(\neg F\to G).$

$\neg F\to G$ $\qquad \neg F$

$\neg G$ $\qquad \neg G\to F.$

F $\qquad \forall xF$

一. ✓ × × ~~✓~~ × ✓ ✓ ×

PB20001156

21

二、可以利用假设，人为地添加一些条件，使命题更容易证明.
比如在证明双重否定律时，利用反证律可得到 $\{\neg\neg p, \neg p\}$ 的假定（多出一个 $\neg p$），利用多出的 $\neg p$ 即可构造原有条件推不出的东西，快速地证明命题. 又如本次考试的第三题，利用演绎定理可以得到 $\{p, p\to q\}$ 的假定，用它来推待证结论显然比从 $\varnothing$ 推出 $p\to((p\to q)\to q)$ 容易许多.

6

三、直接证明:

16

(1) $(p\to q)\to(((p\to q)\to(p\to q))\to(p\to q))$ (L1)

(2) $((p\to q)\to(((p\to q)\to(p\to q))\to(p\to q)))\to(((p\to q)\to((p\to q)\to(p\to q)))\to((p\to q)\to(p\to q)))$. (L2)

(3) $((p\to q)\to((p\to q)\to(p\to q)))\to((p\to q)\to(p\to q))$ (1), (2), MP

(4) $(p\to q)\to((p\to q)\to(p\to q))$ ~~(3), (4), MP~~ (L1)

(5) $(p\to q)\to(p\to q)$ (3), (4), MP.

~~(6) $((p\to q)\to(p\to q))\to(p\to((p\to q)\to(p\to q)))$ (L1)~~

~~(7) $p\to((p\to q)\to(p\to q))$. (5), (6), MP~~

~~(8) $(p\to((p\to q)\to(p\to q)))\to$~~

(6) $((p\to q)\to(p\to q))\to(((p\to q)\to p)\to((p\to q)\to q))$ (L2)

(7) $((p\to q)\to p)\to((p\to q)\to q))$ (5), (6), MP

(8) $(((p\to q)\to p)\to((p\to q)\to q)))\to(p\to(((p\to q)\to p)\to((p\to q)\to q)))$ (L1)

(9) $p\to(((p\to q)\to p)\to((p\to q)\to q)))$ (7), (8), MP

(10) $(p\to(((p\to q)\to p)\to((p\to q)\to q)))\to((p\to((p\to q)\to p))\to(p\to((p\to q)\to q)))$

(11) $(p\to((p\to q)\to p))\to(p\to((p\to q)\to q))$ (9), (10), MP

(12) $p\to((p\to q)\to p)$ (L1)

(13) $p\to((p\to q)\to q)$ (11), (12), MP.

简化证明:

~~先证~~

根据演绎定理,只用证 $\{p, p\to q\}\vdash q$,下面是所需要的一个证明.

(1) p (假定)

(2) $p\to q$ (假定)

(3) q (1),(2),MP.

16

四. 用 x_1, x_2, x_3 分别表示王教授是苏州人、上海人、杭州人,于是题中的论证可形式化为

$$
\begin{aligned}
&\{(\neg x_1\wedge x_2\wedge\neg\neg x_2\wedge\neg x_1\wedge(\neg\neg x_2\wedge\neg x_3\vee\neg x_2\wedge\neg\neg x_3))\vee\\
&(\neg x_1\wedge x_2\wedge\neg\neg x_2\wedge\neg\neg x_3\wedge(\neg\neg x_2\wedge x_1\vee\neg x_2\wedge\neg x_1))\vee\\
&(\neg x_2\wedge x_1\wedge\neg\neg x_1\wedge\neg x_2\wedge(\neg\neg x_2\wedge\neg x_3\vee\neg x_2\wedge\neg\neg x_3))\vee\\
&(\neg x_2\wedge x_1\wedge\neg\neg x_2\wedge\neg\neg x_3\wedge(\neg\neg x_1\wedge x_2\vee\neg x_1\wedge\neg x_2))\vee\\
&\cancel{(\neg x_2\wedge\neg x_1\wedge\neg\neg x_1\wedge\neg x_2\wedge(\neg\neg x_2\wedge x_1\vee\neg x_2\wedge\neg x_3))}\\
&(\neg x_2\wedge\neg x_3\wedge\neg\neg x_1\wedge\neg x_2\wedge(\neg\neg x_2\wedge x_1\vee\neg x_2\wedge\neg x_1))\vee\\
&(\neg x_2\wedge\neg x_3\wedge\neg\neg x_2\wedge\neg x_1\wedge(\neg\neg x_1\wedge x_2\vee\neg x_1\wedge\neg x_2))\}=\{P\}.
\end{aligned}
$$

解方程使 $\cancel{P=0}$ $P=1$

P 可化简为 $(\neg x_1\wedge x_2\wedge\neg x_3)\vee 0\vee(\neg x_2\wedge x_1\wedge x_3)\vee 0\vee 0\vee 0$.

~~由 $P=1$ 可得 $(x_1, x_2, x_3$~~ $=(\neg x_1\wedge x_2\wedge\neg x_3)\vee(\neg x_2\wedge x_1\wedge x_3)$

~~解~~ 解 $\neg x_1\wedge x_2\wedge\neg x_3=1$ 得 $x_1=0, x_2=1, x_3=0$.

解 $\neg x_2\wedge x_1\wedge x_3=1$ 得 $x_1=1, x_2=0, x_3=1$.

又由实际情况知 x_1、x_2、x_3 至多1个为1

$\therefore (x_1, x_2, x_3)=(0,1,0)$.

将它代入原方程验证知符合要求.

$\therefore$ 王教授是上海人.

五、是有效式. 先证明:

$\{\forall x_1 R_1^2(x_1,x_2)\} \vdash \forall x_1 \exists x_2 R_1^2(x_1,x_2)$.

(1) $\forall x_1 R_1^2(x_1,x_2)$ (假定)

~~(2) $R_1^2(x_1,x_2)$ (K~~

(2) $\forall x_1 R_1^2(x_1,x_2) \to R_1^2(x_1,x_2)$ (K4)

(3) $R_1^2(x_1,x_2)$ (1),(2),MP

(4) $R_1^2(x_1,x_2) \to \exists x_2 R_1^2(x_1,x_2)$ ($\exists_1$规则)

(5) $\exists x_2 R_1^2(x_1,x_2)$ (3),(4),MP

(6) $\forall x_1 \exists x_2 R_1^2(x_1,x_2)$ (5),Gen

12

由于Gen变元 x_1 不在 $\forall x_1 R_1^2(x_1,x_2)$ 自由出现, ~~由∃~~ 也不在 $\forall x_1 \exists x_2 R_1^2(x_1,x_2)$ 自由出现, 由 $\exists_2$ 规则, 有 $\{\exists x_2 \forall x_1 R_1^2(x_1,x_2)\} \vdash \forall x_1 \exists x_2 R_1^2(x_1,x_2)$, 且除了 x_2 不增加其他Gen变元.

由于 x_1, x_2 均不在 $\exists x_2 \forall x_1 R_1^2(x_1,x_2)$ 自由出现, 由演绎定理, 有: $\vdash \exists x_2 \forall x_1 R_1^2(x_1,x_2) \to \forall x_1 \exists x_2 R_1^2(x_1,x_2)$.

六、由 $(p \vee q) \leftrightarrow (\neg p \to q)$, 可将原命题等价转化成

$\{\forall x(\neg F(x) \to G(x))\} \vdash (\neg \forall x F(x) \to \exists x G(x))$.

又 $\exists x G(x) \leftrightarrow \neg \forall x \neg G(x)$

可继续化成

$\{\forall x(\neg F(x) \to G(x))\} \vdash (\neg \forall x F(x) \to \neg \forall x \neg G(x))$.

由演绎定理, 只要证 $\{\forall x(\neg F(x) \to G(x)), \neg \forall x F(x)\} \vdash \neg \forall x \neg G(x)$.

我们保证证明过程中只用到 x 作为Gen变元, 而它在 $\forall \neg \forall x F(x)$ 中不自由出现.

由归谬律, 只要证 $\{\forall x(\neg F(x) \to G(x)), \neg \forall x F(x), \forall x \neg G(x)\} \vdash \forall x F(x)$,

$\{\forall x(\neg F(x) \to G(x)), \neg \forall x F(x), \forall x \neg G(x)\} \vdash \neg \forall x F(x)$,

从而完成证明.

接下来的证明将包含上面两式的证明:

(2) $\forall x\neg G(x)$ （新假定）

(3) $\cancel{\neg G(x)}$ $\forall x\neg G(x)\to\neg G(x)$ (K4)

(4) $\neg G(x)$ (2), (3), MP

(5) $\forall x(\neg F(x)\to G(x))$ （假定）

(6) $\forall x(\neg F(x)\to G(x))\to(\neg F(x)\to G(x))$ (K4)

(7) $\neg F(x)\to G(x)$ (5), (6), MP

(8) $(\neg F(x)\to G(x))\to(\neg G(x)\to\neg\neg F(x))$ （换位律）

(9) $\neg G(x)\to\neg\neg F(x)$ (7), (8), MP

(10) $\neg\neg F(x)\to F(x)$ （双重否定律）

(11) $\cancel{F(x}$ $\neg G(x)\to F(x)$ (9), (10), HS

(12) $F(x)$ (4), (11), MP

(13) $\forall xF(x)$ (12), Gen

至此完成证明.

并利用 $p\vee q\Leftrightarrow(\neg p\to q)$

七、适当改变原公式中的约束变元得到等价的 q_1:

9.

q_1: $\forall x_6(\neg P(x_6,x_2)\to\forall x_4R(x_4,x_3))\to\forall x_5Q(x_1,x_5)$ 。

由 q_1 出发，反复利用课本77页命题 2-2° 与 2-3°，得到以下的等价公式:

q_2: $\forall x_5(\forall x_6(\neg P(x_6,x_2)\to\forall x_4R(x_4,x_3))\to Q(x_1,x_5))$

q_3: $\forall x_5\exists x_6((\neg P(x_6,x_2)\to\forall x_4R(x_4,x_3))\to Q(x_1,x_5))$

q_4: $\forall x_5\exists x_6(\forall x_4(\neg P(x_6,x_2)\to R(x_4,x_3))\to Q(x_1,x_5))$

q_5: $\forall x_5\exists x_6\exists x_4((\neg P(x_6,x_2)\to R(x_4,x_3))\to Q(x_1,x_5))$.

q_5 即为所求.