对一些基础概念的辨析

解答同学问题的过程中我发现很多同学对一些基础的概念与定义有疑惑或误解，这里给大家分享一些我的理解。

F / T，即 0 / 1，实际上是命题常元，也就是说它们的真值指派恒定(F 为 0 而 T 为 1)。

对应地也有命题变元，即大家常见的 p q r x1 x2 x3 等等（当然有时候 p q r 等也会用来表示命题常元，这通过上下文很容易判断）。命题变元的真值指派是不定的，既可能为 1 也可能为 0，所以列真值表的时候会遍历所有命题变元的所有取值。

再说合取/析取范式，大家可以看到无论是 ppt 还是课本上的定义都强调的是“命题变元”，也就是说 F / T 是不能作为范式的，甚至不能参与到范式中（ppt P77 课本 P50）：

(1) 命题变元或命题变元的否定称为文字；

(2) 有限个文字的析取式称为简单析取式(基本和)，有限个文字的合取式称为简单合取式(基本积)；

(3) 由有限个简单合取式构成的析取式称为析取范式(Disjunctive Normal From)，由有限个简单析取式构成的合取式称为合取范式(Conjunctive Normal From)。

定义 2 (析取范式与合取范式) 形为 $\bigvee_{i=1}^{m}(\bigwedge_{j=1}^{n_i} y_{ij})$ 的公式叫做析取范式，形为 $\bigwedge_{i=1}^{m}(\bigvee_{j=1}^{n_i} y_{ij})$ 的公式叫做合取范式，其中每个 y_{ij} 是某个命题变元 x_k 或它的否定 $\neg x_k$.

换句话说，析取范式就是以若干基本合取式为析取支的析取式；合取范式就是以若干基本析取式为合取支的合取式. 例如，公式

$$(x_1 \wedge \neg x_3) \vee (x_3 \wedge x_1 \wedge \neg x_2) \vee (x_5 \wedge x_4 \wedge \neg x_1)$$

是析取范式，公式

$$(x_1 \vee \neg x_3) \wedge (x_2 \vee x_1 \vee \neg x_2) \wedge (x_5 \vee x_4 \vee \neg x_1)$$

是合取范式. 公式

$$x_1 \wedge \neg x_2 \wedge x_3$$

既是析取范式，又是合取范式. 作为析取范式，它只有一个析取支；作为合取范式，它有三个合取支.

有的同学问如果演算出了 F / T 怎么办？实际上 F / T 的出现一般表明你使用零律/同一律/排中律/矛盾律进行了等值演算：

8. 零律

$$A \vee 1 \Leftrightarrow 1, \quad A \wedge 0 \Leftrightarrow 0 \tag{2.8}$$

9. 同一律

$$A \vee 0 \Leftrightarrow A, \quad A \wedge 1 \Leftrightarrow A \tag{2.9}$$

10. 排中律

$$A \vee \neg A \Leftrightarrow 1 \tag{2.10}$$

11. 矛盾律

$$A \wedge \neg A \Leftrightarrow 0 \tag{2.11}$$

这个思路显然是不对的。在求范式的过程中应当首先把其它联接词化为∧与∨，最后可能需要再经过适当的变换得到结果（De. Morgan 律），而不需要你刻意引入或消去∧与∨。上面所提的四个与 F / T 有关的等值式显然对这个过程没有帮助。另外，范式中如$\neg x_1 \wedge x_1$的存在满足定义，是没有问题的，这也是课本中提到可用来判别范式永真或永假的一种特征（P50 P51）：

任给一个基本析取式，很容易判定它是不是永真式，这只要看式中是否有某个 x_k 和 $\neg x_k$ 同时出现. 如果式中有这样一对同时出现，那么该式就是永真式；否则就不是永真式 (可以很快找出它的成假指派). 例如，$x_1 \vee \neg x_2 \vee \neg x_1$ 是永真式. $x_1 \vee \neg x_2 \vee x_3$ 不是永真式，因为它有成假指派 (0，1，0) (这是它唯一的成假指派).

同样，任给一个基本合取式，很容易鉴别它是否是永假式. 如果式中同时出现某个 x_k 和 $\neg x_k$，则为永假式；否则就是可满足公式 (可以很容易指出它的成真指派). 例如 $\neg x_1 \wedge x_2 \wedge \neg x_2$ 是永假式，$\neg x_1 \wedge x_2 \wedge x_3$ 是可满足公式，因为它有成真指派 (0，1，1) (这是它唯一的成真指派). 注意，一个基本析取式只可能有唯一的一个成假指派. 同样，一个基本合取式只可能有一个成真指派.

可以快速判定任一析取范式是不是永假式. 这只要扫描一遍就可以了：每个析

取支都是基本合取式，一看便知它们是不是永假式. 原析取范式是永假式，当且仅当每个析取支都是永假式. 但是，要想判定任一析取范式是不是永真式，当命题变元数目多时，则比较麻烦.

相反，可以快速判定任一合取范式是不是永真式，因为每个合取支都是基本析取式，容易确定它们是不是永真式. 合取范式是永真式，当且仅当它的每个合取支都是永真式. 同样，要想判定任一合取范式是不是永假式，当命题变元数目多时，则比较麻烦.

最后附上课本中求范式的思路（P51）：

给一个公式，要找出与它等值的析取范式或合取范式，大致可采取以下步骤.

1° 消去 $\to$ 与 $\leftrightarrow$. 先用

$$p \leftrightarrow q = (p \to q) \wedge (q \to p) \quad \text{(1.2.5 小节中} \leftrightarrow \text{的定义)}$$

消去 $\leftrightarrow$, 再用 $\vDash (p \to q) \leftrightarrow (\neg p \vee q)$ 消去 $\to$.

2° 把否定号 $\neg$ 等值变换到命题变元之前. 这要用到以下几个等值式:

$$\vDash \neg(p \vee q) \leftrightarrow \neg p \wedge \neg q,$$
$$\vDash \neg(p \wedge q) \leftrightarrow \neg p \vee \neg q,$$
$$\vDash \neg\neg p \leftrightarrow p.$$

3° 利用交换律、结合律及分配律作等值变换，直到得出所需要的形式为止.

现在大家处于数理逻辑学习的初期阶段，一定要将基本的定义与概念理解清楚，否则后期的学习可能会非常吃力。当然，助教的理解也未必全然正确，如果仍有疑惑或不解之处，欢迎大家提出。

By 贺阳槐安