Построение фрактала «Кривая Коха» с помощью Python

Мельник Наталья Олеговна

РГПУ им. А.И. Герцена

6 ноября 2025 г.

Содержание

Что такое фрактал Коха?

История

Кривая Коха — фрактал, описанный шведским математиком Хельге фон Кохом в 1904 году.

- Простой геометрический фрактал

Что такое фрактал Коха?

История

Кривая Коха — фрактал, описанный шведским математиком Хельге фон Кохом в 1904 году.

- Простой геометрический фрактал
- Бесконечная длина при конечной площади

Что такое фрактал Коха?

История

Кривая Коха — фрактал, описанный шведским математиком Хельге фон Кохом в 1904 году.

- Простой геометрический фрактал
- Бесконечная длина при конечной площади
- Самоподобная структура

Что такое фрактал Коха?

История

Кривая Коха — фрактал, описанный шведским математиком Хельге фон Кохом в 1904 году.

- Простой геометрический фрактал
- Бесконечная длина при конечной площади
- Самоподобная структура
- Применение в компьютерной графике

Что такое фрактал Коха?

История

Кривая Коха — фрактал, описанный шведским математиком Хельге фон Кохом в 1904 году.

- Простой геометрический фрактал
- Бесконечная длина при конечной площади
- Самоподобная структура
- Применение в компьютерной графике

Интересный факт

Кривая Коха является непрерывной, но нигде не дифференцируемой!

Геометрическое построение

1. Начальный отрезок

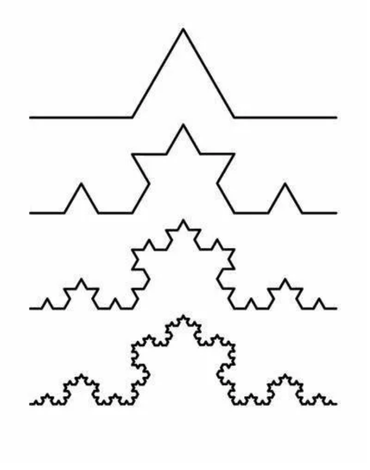

Рис.: Процесс построения кривой

Геометрическое построение

1. Начальный отрезок
2. Разделить на 3 части

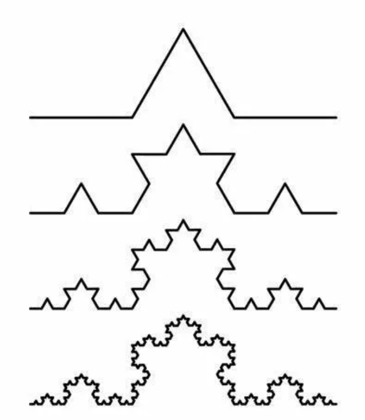

Рис.: Процесс построения кривой

Геометрическое построение

1. Начальный отрезок
2. Разделить на 3 части
3. Построить равносторонний треугольник

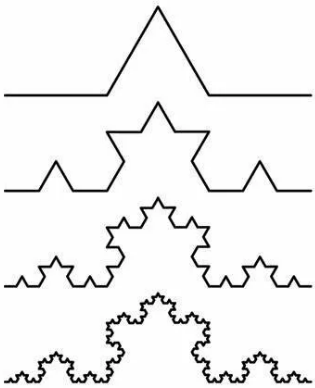

Рис.: Процесс построения кривой

Геометрическое построение

1. Начальный отрезок
2. Разделить на 3 части
3. Построить равносторонний треугольник
4. Удалить основание треугольника

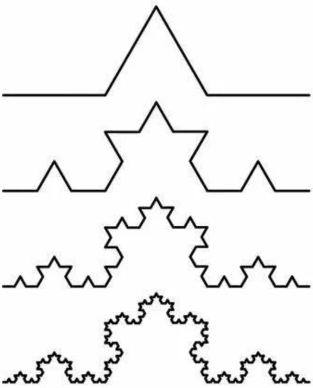

Рис.: Процесс построения кривой

Геометрическое построение

1. Начальный отрезок
2. Разделить на 3 части
3. Построить равносторонний треугольник
4. Удалить основание треугольника
5. Повторить для каждого отрезка

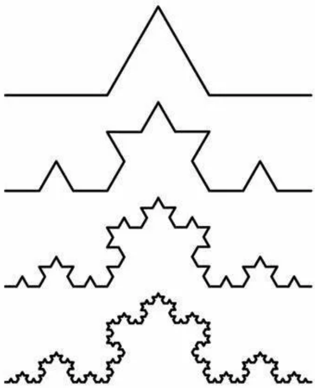

Рис.: Процесс построения кривой

Математическое описание

Рекуррентное соотношение

На каждом шаге длина кривой увеличивается в $\frac{4}{3}$ раза:

$$\mathsf{L}_\mathsf{n} = \mathsf{L}_0 \times \left(\frac{4}{3}\right)^\mathsf{n}$$

Размерность Хаусдорфа

Размерность фрактала Коха вычисляется по формуле:

$$\mathsf{D} = \frac{\log 4}{\log 3} \approx 1.26186$$

- Бесконечная длина при $\mathsf{n} \to \infty$

Базовый алгоритм

Listing: Рекурсивная функция построения

```
import turtle
import math

def koch_curve(t, length, depth):
    if depth == 0:
        t.forward(length)
    else:
        length /= 3.0
        koch_curve(t, length, depth-1)
        t.left(60)
        koch_curve(t, length, depth-1)
        t.right(120)
        koch_curve(t, length, depth-1)
        t.left(60)
        koch_curve(t, length, depth-1)
```

Полная реализация

Listing: Построение снежинки Коха

```
def koch_snowflake(t, length, depth):
    for i in range(3):
        koch_curve(t, length, depth)
        t.right(120)

# Настройкаотображения
screen = turtle.Screen()
screen.setup(800, 600)
t = turtle.Turtle()
t.speed(0)

# Построениеснежинки
koch_snowflake(t, 300, 4)
screen.exitonclick()
```

Визуализация результатов

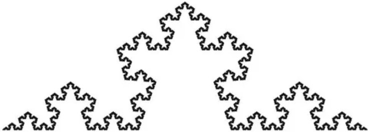

Рис.: Кривая Коха (n=4)

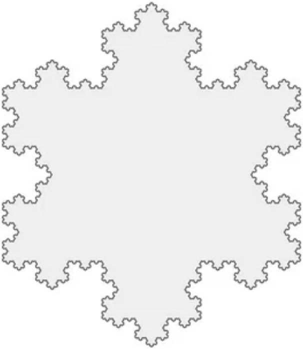

Рис.: Снежинка Коха (n=5)

Сравнительный анализ

Глубина	Кол-во отрезков	Длина	Время (с)
n=0	1	1.00	0.001
n=1	4	1.33	0.005
n=2	16	1.78	0.021
n=3	64	2.37	0.085
n=4	256	3.16	0.341
n=5	1024	4.21	1.364

Таблица: Зависимость параметров от глубины рекурсии

Практическое применение

Компьютерная графика

- Генерация природных ландшафтов
- Создание текстур
- Моделирование сложных форм

Образование

- Изучение рекурсии
- Визуализация математических концепций
- Развитие алгоритмического мышления

Выводы

Достигнутые результаты

- Реализован алгоритм построения кривой Коха на Python
- Исследованы математические свойства фрактала
- Визуализированы различные итерации
- Проанализирована вычислительная сложность

Перспективы развития

- Оптимизация алгоритма
- 3D-версия фрактала
- Интерактивная визуализация

Спасибо за внимание!