北京邮电大学 2020-2021 第一学期

《概率论与数理统计》期末考试试题(计算机学院，4 学分，A)

考试注意事项：
学生必须将答题内容做在试题答题纸上，做在试题纸上一律无效.

一、填空题与选择题（每小题 4 分，共 40 分）

1. 设 A,B 为两事件，且 $P(A)=0.7$，$P(B)=0.4$，$P(A\overline{B})=0.5$，则

$P(B\mid A\cup\overline{B})=$______.

2. 设随机变量 X 和 Y 相互独立，$X\sim b(1,p)$，$Y\sim b(2,p)$（$p\in(0,1)$），则 X 与 $X+Y$ 的相关系数为______.

3. 设随机变量 X 服从均值为 $\frac{1}{3}$ 的指数分布，则 $D(e^{X})=$____.

4. 设 $X_1,X_2,\cdots,X_n,\cdots$ 独立同分布，X_1 的分布律为 $P\{X_1=k\}=\frac{k+1}{10},k=0,1,2,3$，则 $n\to\infty$ 时，$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2$ 依概率收敛于______.

5. 有两箱同类型的零件，每箱都装有 8 个零件，第一箱中有 4 个一等品，第二箱有 6 个一等品，现从两箱中任选一箱，然后从该箱中不放回地取零件两次，每次取一个，则在第一次取到一等品条件下，第二次取到一等品的条件概率为______.

6. 设随机变量 X_1,X_2 独立同分布，且 X_1 的分布函数为

$$F(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2}{1+x^2},x\ge 0,\\ 0,x<0,\end{cases}$$

则 $Z=\min(X_1,X_2)$ 的概率密度为 $f_Z(z)=$______.

7. 设 $(X,Y)\sim N(0,1,4,1,-\frac{1}{2})$，则 $X-2Y+1$ 服从正态分布

A. $N(-1,4)$　　B. $N(-1,8)$

C. $N(1,10)$　　D. $N(-1,12)$

8. 设总体 X 服从参数为 λ 的泊松分布，$X_1,X_2,\cdots,X_n$ 为来自总体 X 的样本，

$\overline{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$，则 $E(\overline{X}^2)=$

A. λ　　B. λ^2　　C. $\lambda^2+\frac{\lambda}{n}$　　D. $\lambda^2-\frac{\lambda}{n}$

9. 从正态总体 $N(\mu,\sigma^2)$ 中抽取容量为 n 的样本 $x_1,x_2,\cdots,x_n$. s^2 为样本方差, 则 σ^2 的置信度为 $1-\alpha$ 的置信区间为

A. $(\frac{ns^2}{\chi_\alpha^2(n)},\frac{ns^2}{\chi_{1-\alpha}^2(n)})$　　B. $(\frac{(n-1)s^2}{\chi_\alpha^2(n-1)},\frac{(n-1)s^2}{\chi_{1-\alpha}^2(n-1)})$

C. $(\frac{ns^2}{\chi_{\alpha/2}^2(n)},\frac{ns^2}{\chi_{1-\alpha/2}^2(n)})$　　D. $(\frac{(n-1)s^2}{\chi_{\alpha/2}^2(n-1)},\frac{(n-1)s^2}{\chi_{1-\alpha/2}^2(n-1)})$

10. 设 $X\sim\chi^2(n)$，则由中心极限定理知，当 n 充分大时，下列随机变量中近似服从标准正态分布的是

A. $\frac{X-n}{2n}$　　B. $\frac{X-n}{\sqrt{2n}}$　　C. $\frac{X-2n}{n}$　　D. $\frac{X-2n}{\sqrt{n}}$

二(12 分) 设随机变量 X 的概率密度为 $f(x)=\begin{cases}\frac{200}{x^3}, x\geq 10,\\ 0, \quad 其它,\end{cases}$

(1) 求 X 的期望 $E(X)$；(2) 求 X 的分布函数；(3) 求 $Y=\ln X$ 的概率密度.

三(12 分) 设随机变量 X 和 Y 相互独立，X 的分布律为 $P\{X=-1\}=\frac{1}{2}$，$P\{X=1\}=\frac{1}{2}$，$Y\sim N(0,1)$，令 $Z=XY$，

(1) 求 $\mathrm{Cov}(Y,Z)$； (2) 求 Z 的概率密度;

(3) 证明：事件 $\{Y\leq 0\}$ 与事件 $\{Z\leq 0\}$ 相互独立，而事件 $\{|Y|\leq 1\}$ 与事件 $\{|Z|\leq 1\}$ 不独立.

四(8 分) 设随机向量 (X,Y) 的概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}6y, 0<x<1, 0<y<x,\\ 0, \quad 其它,\end{cases}$$

(1) 求 $P\{X+Y<1\}$；(2)求在 $Y=y\ (0<y<1)$ 的条件下，X 的条件概率密度.

五(8 分) 一项研究比较两种不同复合材料制造的发动机轴承.两种类型的轴承各

取 10 个进行使用寿命(以百万圈为单位)的测试,由试验结果算得样本均值、样本方差如下:

类型 1　　$\bar{x}=19.5$　　$s_x^2=9.5$

类型 2　　$\bar{y}=16.5$　　$s_y^2=8.5$

假设类型 1,类型 2 轴承的使用寿命分别服从正态分布 $N(\mu_1,\sigma_1^2)$ 和 $N(\mu_2,\sigma_2^2)$,

(1)在水平 $\alpha=0.1$ 下,检验假设 $H_0:\sigma_1=\sigma_2$ 对 $H_1:\sigma_1\neq\sigma_2$;

(2)能否认为类型 1 轴承的平均寿命显著地大于类型 2 轴承的平均寿命(检验水平取 $\alpha=0.05$).

六(12 分) 设总体 X 的概率密度为

$$f(x;\theta)=\begin{cases}\dfrac{x}{\theta^2}\,\mathrm{e}^{-\frac{x}{\theta}}, x\geq 0,\\ 0, \quad 其它,\end{cases}$$

其中 $\theta>0$ 为未知参数, $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 为来自总体 X 的样本.

(1) 求 θ 的最大似然估计量 $\hat{\theta}$;

(2) 求 θ 的最大似然估计量 $\hat{\theta}$ 是否是 θ 的无偏估计?

(3) 确定 a,使得 $E(a\hat{\theta}-\theta)^2$ 最小.

七(8 分) 测量了 10 名 5~8 岁儿童的体重 x (单位: kg)和体积 Y (单位: dm^3),得数据 $(x_i,y_i)(i=1,2,\cdots,10)$,并算得: $\sum_{i=1}^{10}x_i=144$, $\sum_{i=1}^{10}x_i^2=2136.84$, $\sum_{i=1}^{10}y_i=141.2$, $\sum_{i=1}^{10}y_i^2=2065.08$, $\sum_{i=1}^{10}x_iy_i=2095.42$.

(1) 求线性回归方程 $\hat{y}=\hat{a}+\hat{b}x$;

(2) 对回归方程作显著性检验,即检验假设 $H_0:b=0$ 对 $H_1:b\neq 0$. (水平取 $\alpha=0.01$)

附: $t_{0.05}(18)=1.734$, $F_{0.05}(9,9)=3.18$, $F_{0.01}(1,8)=11.3$, $t_{0.005}(8)=3.355$.

北京邮电大学 2020-2021 第一学期

《概率论与数理统计》期末试题答案(计算机学院，4 学分)

一、填空题与选择题（每小题 4 分，共 40 分）

1. 0.25

2. $\frac{\sqrt{2}}{2}$

3. $\frac{3}{4}$

4. 5

5. $\frac{3}{5}$

6. $f_Z(z)=\begin{cases}\frac{4z}{(1+z^2)^3}, z>0,\\ 0, z\le 0\end{cases}$

7. D
8. C
9. D.
10. B

二、(12 分)

解:(1) $E(X)=\int_{-\infty}^{\infty}xf(x)dx=\int_{10}^{\infty}\frac{200}{x^2}dx=20$. ……4 分

(2) $F(x)=\int_{-\infty}^{x}f(t)dt=\begin{cases}\int_{10}^{x}\frac{200}{t^3}dt, x\ge 10\\ 0, x<10\end{cases}=\begin{cases}1-\frac{100}{x^2}, x\ge 10,\\ 0, x<10\end{cases}$. ……4 分

(3) $y=\ln x$ 的反函数为 $x=e^y$，且 $\frac{dx}{dy}=e^y$，所以 $Y=\ln X$ 的概率密度为

$$f_Y(y)=f(e^y)e^y=\begin{cases}200e^{-2y}, y>\ln 10,\\ 0, 其他.\end{cases}$$ ……4 分

三、(12 分)

解 (1) $E(Y)=0, E(YZ)=E(XY^2)=E(X)E(Y^2)=0$,故

$\mathrm{Cov}(Y,Z)=E(YZ)-E(Y)E(Z)=0$. ……4 分

$$f_{X|Y}(x|y)=\frac{f(x,y)}{f_Y(y)}=\begin{cases}\frac{1}{1-y}, y<x<1,\\ 0, 其他\end{cases}$$ ……4 分

五、(8 分)

解:(1)检验的拒绝域为

$F \le F_{0.95}(9,9)=\frac{1}{3.18}$,或$F \le F_{0.05}(9,9)=3.18$,

其中检验统计量$F=\frac{s_x^2}{s_y^2}$,

由样本算得$F=\frac{s_x^2}{s_y^2}=\frac{9.5}{8.5}$=1.118,易见 $F_{0.95}(9,9)<F=1.118<F_{0.05}(9,9)$,样本没有落入拒绝域,所以不拒绝原假设,即认为两总体的方差无显著差异. ……4 分

(2)需检验假设

$H_0:\mu_1 \le \mu_2 \quad H_1:\mu_1>\mu_2$

检验的拒绝域为

$t \ge t_{0.05}(18)=1.734$

其中检验统计量$t=\frac{\overline{x}-\overline{y}}{s_w\sqrt{\frac{1}{10}+\frac{1}{10}}}$,

由样本算得

$$t=\frac{19.5-16.5}{3\sqrt{1/5}}=\sqrt{5},$$

易见$t=\sqrt{5}\ge 1.734$,从而样本落入拒绝域,所以拒绝原假设,即认为类型 1 轴承的平均寿命显著地大于类型 2 轴承的平均寿命.

……4 分

六、(12 分)

解:(1)似然函数为

$$L(\theta)=\prod_{i=1}^{n}f(x;\theta)=\frac{x_1\cdots x_n}{\theta^{2n}}\, e^{-\frac{1}{\theta}\sum_{i=1}^{n}x_i},$$

对数似然函数为

$$\ln L(\theta)=-2n\ln\theta-\frac{1}{\theta}\sum_{i=1}^{n}x_i+\sum_{i=1}^{n}\ln x_i,$$

$$S_{xy}=\sum_{i=1}^{10}x_iy_i-\frac{1}{10}\sum_{i=1}^{10}x_i\cdot\sum_{i=1}^{10}y_i=2095.42-14.4\times141.2=62.14,$$

$$\hat{b}=\frac{S_{xy}}{S_{xx}}=0.9826,\ \hat{a}=14.12-0.9826\times14.4=-0.0294,$$

所以 y 关于 x 的线性回归方程为

$$\hat{y}=-0.0294+0.9826x.$$ ……5 分

(2) $S_{yy}=\sum_{i=1}^{10}y_i^2-\frac{1}{10}(\sum_{i=1}^{10}y_i)^2=2065.08-\frac{1}{10}\times141.2^2=71.336,$

$S_R=\hat{b}S_{xy}=0.9826\times62.14=61.0588,$

$S_E=S_{yy}-S_R=71.336-61.0588=10.2772,$

$F=\frac{S_R}{S_E/8}=47.53,$

由于 $F>F_{0.01}(1,8)=11.3$，因此在显著水平 0.01 下认为回归方程是显著的.

……3 分

附: $t_{0.05}(18)=1.734$，$t_{0.005}(8)=3.355$，$F_{0.05}(9,9)=3.18$，$F_{0.01}(1,8)=11.3$.