北京邮电大学 2020-2021 第一学期

《概率论与数理统计》期末考试试题(经管院，4 学分，A)

考试注意事项：
学生必须将答题内容做在试题答题纸上，做在试题纸上一律无效.

一、填空题与选择题（每小题 4 分，共 40 分）

1. 设 A,B 为两事件，且 $P(A)=0.7$，$P(B)=0.3$、$P(A\bar{B})=0.5$，则 $P(B\bar{A})=$ ____.

2. 设事件 A,B,C 相互独立，且 $P(A)=0.4$，$P(B)=0.5$. $P(C)=0.2$，则

$P(A|A\cup B\cup C)=$ ______.

3.设随机变量 X 的分布律为

X	-2	0	2
P	a	0.5	b

已知 $E(X)=0.6$，则 $D(X)=$ ______.

4. 有甲，乙两箱同类型的零件，每箱都装有 6 个，甲箱中有 5 个优质品，乙箱中有 4 个优质品，现从两箱中任取一箱，然后从该箱中不放回地取零件两次，每次取一件，则在两次都取到优质品条件下，取到甲箱的条件概率为 ______.

5. 设随机向量 $(X,Y)\sim N(1,1,9,1,\frac{2}{3})$，则 $E(XY)=$ ______.

6. 设 $X\sim N(1,2)$，则 $Z=1-2X$ 服从正态分布

A. $N(-1,4)$ B. $N(-1,8)$ C. $N(-3,4)$ D. $N(1,6)$

7. 设 $X_1,X_2,\cdots,X_{100}$ 为来自总体 X 的样本，总体 X 服从两点分布 $b(1,\frac{1}{2})$，$\Phi(z)$ 为标准正态分布函数，利用中心极限定理,有 $P\{45<\sum_{i=1}^{100}X_i\le 55\}\approx$

A. $2\Phi(1)-1$ B. $2\Phi(0.2)-1$ C. $2[1-\Phi(1)]$ D. $2[1-\Phi(0.2)]$

8. 设 X 服从自由度为 n 的 t 分布，则 $Y=\frac{1}{X^2}$ 的分布为

A. $F(1,n)$ B. $F(n,1)$ C. $\chi^2(1)$ D. $\chi^2(n)$

9. 从正态总体 $N(\mu,\sigma^2)$ 中抽取容量为 n 的样本 $x_1,x_2,\cdots,x_n$. s^2 为样本方差，则 σ 的置信度为 $1-\alpha$ 的置信区间为

A. $\left(\frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{\alpha/2}(n-1)},\frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)}\right)$ B. $\left(\frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{\alpha}(n-1)},\frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{1-\alpha}(n-1)}\right)$

C. $\left(\frac{\sqrt{n-1}s}{\sqrt{\chi^2_{\alpha}(n-1)}},\frac{\sqrt{n-1}s}{\sqrt{\chi^2_{1-\alpha}(n-1)}}\right)$ D. $\left(\frac{\sqrt{n-1}s}{\sqrt{\chi^2_{\alpha/2}(n-1)}},\frac{\sqrt{n-1}s}{\sqrt{\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)}}\right)$

10. 设总体 X 服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$，$x_1,x_2,\cdots,x_n$ 是来自总体 X 的样本，据此样本检验假设：$H_0:\mu=\mu_0$，$H_1:\mu\ne\mu_0$，则

A. 如果在检验水平 $\alpha=0.05$ 下拒绝 H_0，那么在检验水平 $\alpha=0.01$ 下必拒绝 H_0.
B. 如果在检验水平 $\alpha=0.05$ 下拒绝 H_0，那么在检验水平 $\alpha=0.01$ 下必接受 H_0.
C. 如果在检验水平 $\alpha=0.05$ 下接受 H_0，那么在检验水平 $\alpha=0.01$ 下必拒绝 H_0.
D. 如果在检验水平 $\alpha=0.05$ 下接受 H_0，那么在检验水平 $\alpha=0.01$ 下必接受 H_0.

二(12 分) 设随机变量 X 的概率密度为 $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}(2-x), & 0<x<2,\\ 0, & 其它,\end{cases}$

求(1) $P(X>1)$；(2) X 的方差 $D(X)$；(3) X 的分布函数.

三(10 分) 设随机变量 X 和 Y 相互独立，X 的分布律为 $P\{X=-1\}=\frac{1}{2}$，$P\{X=1\}=\frac{1}{2}$，$Y\sim U(0,2)$，令 $Z=XY$、

(1) 求 X 和 Z 的相关系数;
(2) 求 Z 的分布函数,及概率密度.

四(8 分) 设 (X,Y) 的概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{3}{8}x, & 0<x<2, 0<y<x,\\ 0, & 其他,\end{cases}$$

求(1) $P\{Y<\frac{1}{2}X^2\}$；(2) $Y=y\,(0<y<2)$ 条件下的 X 的条件概率密度.

五(12 分) 设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 为来自总体 X 的样本，总体 X 概率密度为

$$f(x;\theta)=\begin{cases}\frac{3x^2}{\theta^3}, & 0\le x\le\theta,\\ 0, & 其它,\end{cases}$$

其中 $\theta>0$ 为未知参数,

(1) 求θ的矩估计量$\hat{\theta}_M$；

(2) 求θ的最大似然估计量$\hat{\theta}_{MLE}$；

(3) 确定c，使得$c\hat{\theta}_{MLE}$为θ的无偏估计量.

六(10分) 某铸造车间为提高铸件的耐磨性而试制了一种镍合金铸件以期取代铜合金铸件.为此,从两种铸件中各抽取一个容量均为8的样本,测其硬度(一种耐磨性指标)，经计算得样本均值和样本方差如下:

镍合金铸件：$\bar{x}=73.39$、 $s_x^2=28.26$、

铜合金铸件：$\bar{y}=68.27$， $s_y^2=21.74$，

设镍合金铸件、铜合金铸件的硬度分别服从正态分布$N(\mu_1,\sigma_1^2)$和$N(\mu_2,\sigma_2^2)$，

(1) 试检验假设：$H_0:\sigma_1=\sigma_2$ | $H_1:\sigma_1\neq\sigma_2$ (检验水平$\alpha=0.1$)；

(2) 在检验水平$\alpha=0.05$下，能否认为镍合金铸件的硬度较铜合金铸件硬度有显著提高?

七(8分) 蟋蟀用一个翅膀在另一个翅膀上快速地滑动,从而发出吱吱喳喳的叫声.生物学家知道叫声的频率x(叫声数/秒)与气温Y(^{0}C)具有线性关系.现有10对叫声频率与气温的数据$(x_i,Y_i)(i=1,2,\cdots,10)$,并算得

$\sum_{i=1}^{10}x_i=170.0$、$\sum_{i=1}^{10}y_i=264.0$、$\sum_{i=1}^{10}x_i^2=2927.2$，$\sum_{i=1}^{10}x_iy_i=4557.4$，$\sum_{i=1}^{10}y_i^2=7132.6$，

(1)求Y关于x的线性回归方程；

(2) 对回归方程作显著性检验、即检验假设$H_0:b=0$ $H_1:b\neq0$ (水平取$\alpha=0.01$).

附：$t_{0.05}(14)=1.76$，$t_{0.005}(8)=3.355$，$F_{0.05}(7,7)=3.79$，$F_{0.01}(1,8)=11.3$.

北京邮电大学 2020-2021 第一学期

《概率论与数理统计》期末试题答案(经管院，4 学分，A)

一、填空题与选择题（每小题 4 分，共 40 分）

1. 0.1.

2. $\frac{10}{19}$.

3. 1.64

4. $\frac{5}{8}$

5. 3.

6. B

7. A

8. B

9. D

10. D

二、(12 分)

解 (1) $P\{X>1\}=\int_1^2 \frac{1}{2}(2-x)dx=\frac{1}{4}$. ……4 分

(2) $E(X)=\int_0^2 \frac{x}{2}(2-x)dx=\frac{2}{3}$,

$E(X^2)=\int_0^2 \frac{x^2}{2}(2-x)dx=\frac{2}{3}$,

$D(X)=E(X^2)-[E(X)]^2=\frac{2}{3}-\frac{4}{9}=\frac{2}{9}$. ……4 分

(3) $F(x)=\int_{-\infty}^x f(t)dt$,

当 $x<0$ 时，$F(x)=0$；

当 $0\le x<2$ 时，$F(x)=\int_0^x \frac{1}{2}(2-t)dt=x-\frac{x^2}{4}$；

当 $x\ge 2$ 时，$F(x)=1$,

即得 X 的分布函数为

$$F(x)=\begin{cases}0, x<0,\\ x-\dfrac{x^2}{4}, 0\le x<2,\\ 1, x\ge 2.\end{cases}$$ ……4 分

三、(10 分)

解 (1) $E(X)=0$、$D(X)=E(X^2)-[E(X)]^2=1$,

$E(Z)=E(XY)=E(X)E(Y)=0$, $E(Z^2)=E(X^2Y^2)=E(X^2)E(Y^2)=\dfrac{4}{3}$,

$D(Z)=E(Z^2)-[E(Z)]^2=\dfrac{4}{3}$,

$E(XZ)=E(X^2Y)=E(X^2)E(Y)=1$,

$\mathrm{Cov}(X,Z)=E(XZ)-E(X)E(Z)=1$,

所以 X 和 Z 的相关系数为

$$\rho_{XZ}=\frac{\mathrm{Cov}(X,Z)}{\sqrt{D(X)D(Z)}}=\frac{\sqrt{3}}{2}.$$ ……5 分

(2) Z 的分布函数为

$$\begin{aligned}F_Z(z)&=P\{XY\le z\}\\ &=P\{X=-1\}P\{XY\le z\mid X=-1\}+P\{X=1\}P\{XY\le z\mid X=1\}\\ &=\frac{1}{2}[P\{Y\ge -z\}+P\{Y\le z\}]\\ &=\begin{cases}0, z<-2,\\ \dfrac{2+z}{4}, -2\le z<2,\\ 1, z\ge 2\end{cases}\end{aligned}$$ ……3 分

Z 的概率密度为

$$f_Z(z)=\begin{cases}\dfrac{1}{4}, -2<z<2,\\ 0, 其他\end{cases}.$$ ……2 分

四、(8 分)

解 (1) $P\{Y<X^2\}=\displaystyle\iint_{y<x^2} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

$$=\int_0^2\mathrm{d}x\int_0^{\frac{x^2}{2}}\frac{3}{8}x\mathrm{d}y=\int_0^2\frac{3}{16}x^3\mathrm{d}x=\frac{3}{4}.$$ ……4 分

(2)当 $0<y<2$ 时,

$$f_Y(y)=\int_y^2 \frac{3}{8}x dx=\frac{3}{16}(4-y^2),$$

$Y=y(0<y<2)$ 条件下, X 的条件概率密度为

$$f_{X|Y}(x|y)=\frac{f(x,y)}{f_Y(y)}=\begin{cases}\frac{2x}{4-y^2}, y<x<2,\\ 0,其他.\end{cases}$$ ……4 分

五、(12 分)

解 (1) $E(X)=\int_0^\theta \frac{3x^3}{\theta^3}dx=\frac{3}{4}\theta$,即得 $\theta=\frac{4}{3}E(X)$,所以 θ 的矩估计量为

$$\hat{\theta}_M=\frac{4}{3}\bar{X}.$$ ……4 分

(2)似然函数为

$$L(\theta)=\prod_{i=1}^n f(x_i;\theta)=\begin{cases}\frac{3^n x_1^2\cdots x_n^2}{\theta^{3n}}, \theta\ge\max\{x_1,\cdots,x_n\}\\ 0,其他\end{cases},$$

当 $\theta=\max\{x_1,\cdots,x_n\}$ 时, $L(\theta)$ 取得最大值,故 θ 的最大似然估计量为

$$\hat{\theta}_{MLE}=\max\{X_1,X_2,\cdots,X_n\}.$$ ……4 分

(3) $\hat{\theta}_{MLE}$ 的分布函数为

$$\begin{aligned}f_{\hat{\theta}_{MLE}}(z)&=P\{\max\{X_1,X_2,\cdots,X_n\}\le z\}\\&=P\{X_1\le z\}P\{X_2\le z\}\cdots P\{X_n\le z\}\\&=[P\{X\le z\}]^n\\&=\begin{cases}0, z<0,\\ \frac{z^{3n}}{\theta^{3n}}, 0\le z<\theta,\\ 1, z\ge\theta\end{cases}\end{aligned}$$

因此 $\hat{\theta}_{MLE}$ 的概率密度为

$$f_{\hat{\theta}_{MLE}}(z)=\begin{cases}\dfrac{3nz^{3n-1}}{\theta^{3n}},0<z<\theta,\\ 0,其他,\end{cases}$$

于是

$$E(\hat{\theta}_{MLE})=\int_0^\theta z\cdot\frac{3nz^{3n-1}}{\theta^{3n}}dz=\frac{3n\theta}{3n+1},$$

所以$c=\dfrac{3n+1}{3n}$时，$c\hat{\theta}_{MLE}$为θ的无偏估计. ……4 分

六、(10 分)

解：（1）该检验问题的拒绝域为$F\le F_{0.95}(7,7)=\dfrac{1}{3.79}$，或$F\ge F_{0.05}(7,7)=3.79$，

其中检验统计量$F=\dfrac{s_x^2}{s_y^2}$.

由样本数据得检验统计量的观测值为

$$F=\frac{s_x^2}{s_y^2}=\frac{28.26}{21.74}=1.3,$$

易见 $F_{0.95}(7,7)<F=1.3<F_{0.05}(7,7)$，样本未落入拒绝域，所以接受原假设.

……5 分

（2）需检验假设

$$H_0: \mu_1\le\mu_2 \quad H_1: \mu_1>\mu_2,$$

该检验问题的拒绝域为$t\ge t_{0.05}(14)=1.76$,其中检验统计量$t=\dfrac{\overline{x}-\overline{y}}{s_w\sqrt{\frac{1}{8}+\frac{1}{8}}}$,

由样本得检验统计量的观测值为

$$t=\frac{73.39-68.27}{\sqrt{\frac{7\times28.26+7\times21.74}{14}}\times\sqrt{\frac{1}{8}+\frac{1}{8}}}=2.048,$$

由于$t=2.048\ge1.76$，即样本落入了拒绝域，所以拒绝原假设.在检验水平$\alpha=0.05$下，认为镍合金铸件的硬度较铜合金铸件硬度有显著提高.

……5 分

七、(8 分)

解 (1) $\overline{x}=17$，$\overline{y}=26.4$,

$$S_{xx}=\sum_{i=1}^{10}x_i^2-\frac{1}{10}(\sum_{i=1}^{10}x_i)^2=2927.2-\frac{170^2}{10}=37.2,$$

$$S_{xy}=\sum_{i=1}^{10}x_iy_i-\frac{1}{10}\sum_{i=1}^{10}x_i\cdot\sum_{i=1}^{10}y_i=4557.4-17\times264=69.4,$$

$$\hat{b}=\frac{S_{xy}}{S_{xx}}=1.8656,\ \hat{a}=26.4-1.8656\times17=-5.3135,$$

所以 y 关于 x 的线性回归方程为

$$\hat{y}=-5.3135+1.8656x.$$ ……5 分

(2) $S_{yy}=\sum_{i=1}^{10}y_i^2-\frac{1}{10}(\sum_{i=1}^{10}y_i)^2=7132.6-\frac{1}{10}\times264^2=163,$

$$S_R=\hat{b}S_{xy}=1.8656\times69.4=129.47,$$

$$S_E=S_{yy}-S_R=163-129.47=33.53,$$

$$F=\frac{S_R}{S_E/8}=30.89,$$

由于 $F>F_{0.01}(1,8)=11.3$, 因此在显著水平 0.01 下认为回归方程是显著的.

……3 分

附:, $t_{0.05}(14)=1.76$, $t_{0.005}(8)=3.355$, $F_{0.05}(7,7)=3.79$, $F_{0.01}(1,8)=11.3$.