北京邮电大学 2018--2019 学年第 1 学期

《概率论与数理统计》期末考试试题（A）

考试注意事项：学生必须将答题内容做在试题答题纸上，做在试题纸上一律无效.

一．填空题（每空 4 分，共 4 0 分）

$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)$

$=\frac{1}{4}+\frac{1}{6}-\frac{1}{12}=\frac{1}{3}$

1.设 A,B 为两事件，且 $P(A)=\frac{1}{4}$，$P(B|A)=\frac{1}{3}$，$P(A|B)=\frac{1}{2}$，则 $P(A\cup B)=$ $\underline{1/3}$.

$\frac{P(AB)}{P(A)}=\frac{1}{3}$ $\quad \frac{P(AB)}{P(B)}=\frac{1}{2}$ $\Rightarrow P(B)=2P(AB)$

$=2\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{4}$

$=\frac{1}{6}$

2.设随机变量 X 的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}\overset{\frac{1}{2}}{\cancel{a}}x, 0<x<2, \\ 0, \quad 其它\end{cases}$$

则 $P\{X>1\}=$ $\underline{3/4}$.（先确定常数 a，再计算 $P\{X>1\}$）

$E(X)=\mu$

$D(X)=\sigma^2.$

$E(X^2)=D(X)+E^2(X)$

$=\sigma^2+\mu^2$

$12-16$

[illegible]

$P\{X>1\}=\int_1^2\frac{1}{2}x=\frac{1}{4}x^2\Big|_1^2=1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$

3.设随机变量 X 和 Y 相互独立,且 $X\sim N(0,3)$，$Y\sim N(0,4)$，则 $2X-Y$ 与 $2X+Y$ 的相关系数为 $\underline{\frac{1}{2}}$.

$E(4X^2-Y^2)$

$2X-Y\sim N(0,16)$

$E(4X^2-Y^2)$

$2X+Y\sim N(0,16)$

$=4E(X^2)-E(Y^2)$

$=12-4$

$=8$

4. 设随机变量 X 和 Y 相互独立，且 $X\sim U(0,2)$，Y 的分布律为

$$P\{Y=k\}=\frac{1}{2},\quad k=1,2，则 P\{X+Y\le 2\}=\underline{1/4}.$$

$f_X(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}, & 0<x<2 \\ 0, & 其他\end{cases}$

$Y=1,$

$\frac{1}{2}P\{X\le 1\}+\frac{1}{2}P\{X\le 0\}$

$=\frac{1}{2}\int_0^1\frac{1}{2}$

$=1/4$

$P\{Y=k\}=\frac{1}{2}\quad k=1,2$

$E(2X-Y)=$

$2E(X)-E(Y)$

$=0$

5.某种型号器件的寿命 X（单位：小时）具有概率密度

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1000}{x^2}, x>1000, \\ 0, 其他\end{cases}$$

$10\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=2.5$

现有一大批此种器件，从中任取10件，Y 表示 10 件器件中寿命大于 2000 小时的件数，则 $D(Y)=$ $\underline{2.5}$.

$1/2,$

$D(Y)=np(1-p)$

$=2.5$

$P\{X>2000\}=\int_{2000}^{\infty}f(x)$

6.设 $X_1,X_2,\cdots,X_{48}$ 独立同分布，且 $X_1\sim U(-1,1)$，利用中心极限定理可得

$\mu=\frac{1}{2}(a+b)=0$

$D(2X-Y)=4D(X)+4$

$\sigma^2=\frac{1}{12}(b-a)^2=\frac{1}{12}\times 4=\frac{1}{3}$

$=16$

没有绝对值

$$P\{|\sum_{i=1}^{48}X_i|<2\}\approx\underline{2\Phi(\tfrac{1}{2})-1}$$

7.设 X 服从参数为 2 的泊松分布，则 $E(e^X)=$ $\underline{e^{2(e-1)}}$.

[illegible]

$D(2X+Y)=4D(X)+4$

$\sigma=\frac{1}{\sqrt{3}}$

$=16$

$$\boxed{P\{X=k\}=\frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!},k=0,1,2,\cdots.\lambda>0}$$

[illegible]

$\left|\frac{\sum X_i-n\mu}{\sqrt{n}\sigma}\right|\sim N(0,1)$

4×4

$P\{X=k\}=\frac{2^k e^{-2}}{k!},k=0,1,2,\cdots$

$\sqrt{48}\times\frac{1}{\sqrt{3}}$ $\quad\sqrt{16}$

$\Phi(\frac{1}{2})-\Phi(-\frac{1}{2})$

$P\{X=k\}=e^0\cdot\frac{2^0e^{-2}}{0!}+e^1\cdot\frac{2^1e^{-2}}{1!}+\frac{e^0 2^2}{2!}$

$\left|\frac{\sum X_i}{4}\right|.$

$P\{X=k\}=\frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!}$

$\sum_{k=0}^{\infty}e^k\cdot\frac{2^ke^{-2}}{k!}=\boxed{\sum_{k=0}^{\infty}\frac{e^{k-2}2^k}{k!}}$

$\ln M=$

$\sum X_i$

泊松分布. $X\sim\pi(\lambda)$. $P\{X=k\}=\frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$ $k=0,1,2,\cdots\cdots$ $\sum_{k=0}^{\infty}(k-2)+k\ln 2-\ln k!$

$\ln 1\times2\times\cdots k$

8. 从正态总体 $N(\mu,\sigma^2)$ 中抽取容量为16的样本，算得样本均值为 $\bar{x}=14.68$，样本标准差为 $s=2.4$，则 μ 的置信水平为95%的置信区间为______.

$\boxed{\bar{X}\pm\frac{s}{\sqrt{n}}t_{\alpha/2}(n-1)}$

$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\frac{e}{2})^k}{e^2 k!}$

9. 设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 为来自总体 $b(1,p)$ 的样本，$\bar{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$，则 $D(\bar{X})=$ $\frac{1}{n}p(1-p)$.

$\frac{1}{e^2}\sum_{0}^{\infty}\frac{(\frac{e}{2})^k}{k!}$

记不住啊

$D(X)=p(1-p)$ $D(\bar{X})=\frac{1}{n^2}\sum D(X_i)=\frac{1}{n^2}\cdot np(1-p)$

10. 设 X_1,X_2,X_3,X_4,X_5 为来自总体 $N(0,\sigma^2)$ 的样本，若统计量

$\bar{X}\pm\frac{s}{\sqrt{n}}t_{\alpha/2}(n-1)$

$$\frac{cX_1}{(X_2^2+X_3^2+X_4^2+X_5^2)^{1/2}}$$ 服从 t 分布，则 $c=$ 2 .

$\bar{X}\pm\frac{s}{\sqrt{n}}t_{\alpha/2}(n-1)$

$\bar{X}\pm\frac{\sigma}{\sqrt{n}}Z_{\alpha/2}$

$\bar{X}\pm 0.6\times 2.13$

14.68 ± 1.278

$2.13\times0.6=1.278$

二．(10 分) 一袋中有 5 个球,其中 2 个红球、3 个白球. 从中不放回地任取 3 个球,以 X 表示取出的 3 球中的红球数，求

(1) X 的分布律； (2) $E(X)$； (3) X 的分布函数.

1) $X=0,1,2.$

$P\{X=0\}=\frac{C_3^3}{C_5^3}=\frac{1}{10}$

$f(x,y)$

三．(10 分) 设随机变量 X 和 Y 相互独立,且均服从参数为 1 的指数分布，求

(1) $P\{X>2Y\}$； (2) $Z=\min(X,Y)$ 的分布函数； (3) $U=X+Y$ 的概率密度.

$\frac{1}{3}$ $P\{X-2Y>0\}$

不好做啦.

$P\{X=1\}=\frac{C_3^2C_2^1}{C_5^3}=\frac{6}{10}$

四．(10 分) 设随机向量 (X,Y) 的概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{21}{4}x^2y, & x^2<y<1,\\ 0, & 其它\end{cases}$$

X取值跟y有关

$-\sqrt{y}<x<\sqrt{y}$

$P\{X=2\}=\frac{C_2^2C_3^1}{C_5^3}=\frac{3}{10}$

$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{\theta}e^{-\frac{x}{\theta}}, & x>0\\ 0, & 其他\end{cases}$

$E(X)=0$ $Cov(X,Y)=0$ ✓

$E(X)=1.2$

求(1) $\mathrm{Cov}(X,Y)$； (2) $Y=y(0<y<1)$ 的条件下，X 的条件概率密度.

$f(x)=\begin{cases}e^{-x}, & x>0\\ 0, & 其他.\end{cases}$ $E(XY)=0.$

五．(10 分) 设总体 X 的概率密度为

3) $F(x)=\begin{cases}0, & x<0\\ 0.1, & 0\le x<1\\ 0.7, & 1\le x<2\\ 1, & x\ge 2.\end{cases}$

$P\{X>2Y\}$

$$f(x;\theta)=\begin{cases}\frac{1}{\theta}x^{\frac{1}{\theta}-1}, & 0<x<1,\\ 0, & 其他\end{cases}$$

$Cov(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)$

$f(x,y)=\begin{cases}e^{-(x+y)}, & x>0,y>0\\ 0, & 其他\end{cases}$

$\theta\in(0,+\infty)$ 为未知参数，$X_1,X_2,\cdots,X_n$ 为来自该总体的样本.

$P\{X>2Y\}$

(1)求 θ 的最大似然估计量 $\hat{\theta}$；(2) 证明 θ 的最大似然估计量 $\hat{\theta}$ 是 θ 的无偏估计.

$=\iint_{x>2y}e^{-(x+y)}dxdy$

注意是 X_i

$=\int_0^{\infty}dx\int_0^{\frac{x}{2}}e^{-(x+y)}dy$

六．(10 分) 有甲、乙两台机器生产同种类型的金属部件. 分别在两台机器所生产的部件中各抽取一个容量均为 8 的样本，测量部件的重量(单位:kg)，经计算得样本均值和样本方差如下:

5.06
2.94

甲机器：$\bar{x}=12.68$， $s_1^2=5.06$ ，

乙机器：$\bar{y}=10.45$， $s_2^2=2.94$，

⑧

$$\begin{array}{r} 12.68 \\ 10.45 \\ \hline 2.23 \end{array}$$

设甲、乙两台机器生产的金属部件的重量分别服从正态分布 $N(\mu_1,\sigma_1^2)$ 和 $N(\mu_2,\sigma_2^2)$，

对着答案再好好看一遍

$H_0: \sigma_1=\sigma_2 \quad H_1: \sigma_1 \neq \sigma_2.$

★试检验假设：$H_0:\sigma_1=\sigma_2 \quad H_1:\sigma_1\neq\sigma_2$ (显著性水平 $\alpha=0.1$)；仔细看··

$\geq t_\alpha(n_1+n_2-2)$

(2) 在显著性水平 $\alpha=0.05$ 下，能否认为甲机器生产的部件的重量比乙机器生产的部件的重量大? 拒绝域内,拒绝原假设,认为大

$= t_{0.05}(14)$

$H_0: \mu_1\leq\mu_2 \quad H_1: \mu_1>\mu_2$

$= 1.76$

$\mu_1-\mu_2\leq 0$. $\quad \mu_1-\mu_2>0$

七．(10 分) 在钢线碳含量对于电阻的效应的研究中,得到~~以下数据~~：

$$t=\frac{\bar{x}-\bar{y}-0}{\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}\,S_w} \qquad S_w^2=\frac{(n_1-1)S_1^2+(n_2-1)S_2^2}{n_1+n_2-2}$$

碳含量 $x(\%)$	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7
电阻 $y(\mu\Omega)$	15	18	19	21	23	25	26

$2\times\frac{1}{2}$ $= 2.23 > 1.76$ $\quad \frac{7S_1^2+7S_2^2}{14}=\frac{1}{2}(S_1^2+S_2^2)$

$=4$

并计算得 $\sum_{i=1}^{7}x_i=2.8$，$\sum_{i=1}^{7}x_i^2=1.4$，$\sum_{i=1}^{7}y_i=147$，$\sum_{i=1}^{7}y_i^2=3181$，$\sum_{i=1}^{7}x_iy_i=63.9$，

(1)求线性回归方程 $\hat{y}=\hat{\beta}_0+\hat{\beta}_1x$； 18.2143

$\hat{\beta}_0=\bar{y}-\bar{x}\hat{\beta}_1=21-0.4\times18.2143$

$=21-7.28572$

$=13.71$

(2)在显著水平 $\alpha=0.01$ 下，检验回归方程的显著性,即检验假设 5.1

$H_0:\beta_1=0$，$H_1:\beta_1\neq0$

保留小数

附： $\Phi(0.5)=0.6915$ ， $t_{0.025}(15)=2.13$ ， $t_{0.05}(14)=1.76$ ， $F_{0.05}(7,7)=3.79$ ，

最好还是精确点

$F_{0.01}(1,5)=16.3$.

$$\begin{array}{r} 18.2143 \\ 0.4 \\ \hline 7.28572 \end{array}$$

$$\hat{\beta}_1=\frac{\sum x_iy_i-\frac{1}{n}\sum x_i\sum y_i}{\sum x_i^2-\frac{1}{n}(\sum x_i)^2}=\frac{63.9-\frac{1}{7}\times2.8\times147}{1.4-\frac{1}{7}\times2.8\times2.8}=\frac{5.1}{0.28}=\frac{510}{28}=$$

7.28572

$\frac{91.05}{0.58}$

$\sqrt{9105}$

$3181-147^2\times\frac{1}{7}$

$\begin{array}{r} 3087 \\ \hline \end{array}$

$S_{xy}=94$

(1) $F_\alpha(1,n-2)$

(2). $H_0:\beta_1=0$, $H_1:\beta_1\neq0$

$$6\overline{)9105}^{\,151}$$

$F=\frac{U}{Q_e/n-2}=\frac{U}{Q_e/5}$

$147\times\frac{1}{7}\times147$

$21\times$

$$\begin{array}{r} 18.21 \\ 5 \\ \hline 91.05 \end{array}$$

91.05

则: $\hat{b}S_{xy}=18.2143\times5.1=91.05$

$$\begin{array}{r} 147 \\ 21 \\ \hline 147 \\ 294 \\ \hline 3087 \end{array}$$

$$5\overline{)2.95}^{\,0.58}$$

25
45

$Q_e=S_{yy}-U=94-91.05=2.95$