Содержание

Введение

Функциональный анализ является одним из важнейших разделов математического анализа, воплотившим в себе единство абстрактной и прикладной математики.

Данный сборник содержит задачи, подобранные в соответствии с программой курса «Функциональный анализ и интегральные уравнения» для студентов специальности 1-31 03 01-02 − «Математика (научно-педагогическая деятельность)» (5-й семестр обучения). В сборнике представлены наиболее типичные задачи по разделам «Метрические пространства», «Линейные нормированные пространства и операторы в них».

Предлагаемый материал направлен на закрепление теоретического материала путем самостоятельного решения задач, а также на овладение основными приемами и методами решения задач по функциональному анализу.

Сборник предназначен, в первую очередь, для проведения лабораторных и практических занятий по курсу «Функциональный анализ и интегральные уравнения». Подбор задач осуществлен в соответствии с расположением учебного материала в программе дисциплины. Задачи объединены в группы по темам, по каждой из которых учебным планом по дисциплине «Функциональный анализ и интегральные уравнения» для студентов специальности 1-31 03 01-02 − «Математика (научно-педагогическая деятельность)» предусмотрено выполнение лабораторной работы. Для каждого типового задания подобрано 6 вариантов задач примерно одинаковой сложности. Это позволит также использовать сборник для самоконтроля при подготовке к экзамену. Самостоятельное решение задач по функциональному анализу часто вызывает большие трудности у студентов, поэтому пособие содержит примеры решения типовых задач.

1 Метрические пространства

Тема 1
Сходящиеся последовательности в метрических пространствах

1.1.1 Проверить, сходится ли заданная последовательность x_n точек метрического пространства X к точке a, если выполнены следующие условия (таблица 1.1.1).

Таблица 1.1.1

вариант	X	x_n	a
1	$C[0;2]$	$\left(tn^2+1\right)/\left(n^2+t\right)$	t
2	$C[0;5]$	$\left(nt^2+n^2t\right)/\left(n^2t+1\right)$	$\mathbf{1}$
3	$C[-3;3]$	$\sqrt{t^2+1/n^3}$	$\|t\|$
4	$C[0;8]$	$(t/8)^n-(t/8)^{2n}+t$	t
5	$C[0;1]$	$t^{2n}-t^{n+1}+t$	t
6	$C[1;2]$	$n\left(\sqrt{1/n+t}-\sqrt{t}\right)$	$1/(2\sqrt{t})$

1.1.2 Проверить, сходится ли заданная последовательность x_n точек метрического пространства X к точке a, если выполнены следующие условия (таблица 1.1.2).

Таблица 1.1.2

вариант	X	x_n	a
1	2	3	4
1	l_∞	$\left(\underbrace{\left(\frac{4n+1}{4n+3}\right)^n,\dots,\left(\frac{4n+1}{4n+3}\right)^n}_{n},0,0,\dots\right)$	$\left(e^{-1/2},e^{-1/2},\dots\right.$
2	$l_{8/5}$	$\left(\underbrace{\frac{\cos(1/n)}{n},\dots,\frac{\cos(1/n)}{n}}_{n},0,0,\dots\right)$	$(0,0,0,\dots)$
3	l_1	$\left(\underbrace{\sin\frac{1}{2^n},\dots,\sin\frac{1}{2^n}}_{n^2},0,0,\dots\right)$	$(0,0,0,\dots)$

Окончание таблицы 1.1.2

1	2	3	4
4	$l_{3/2}$	$\left((1+1/n)^n,(\sin n^2)/n,(\sin n^3)/n^2,\ldots(\sin n^k)/n^{k-1},\ldots\right)$	$(e,0,0,\ldots)$
5	l_3	$\left(\underbrace{\frac{n^2}{2^n},\ldots,\frac{n^2}{2^n}}_{n^2},0,0,\ldots\right)$	$(0,0,0,\ldots)$
6	l_2	$\left(\underbrace{\frac{1}{n^2},\ldots,\frac{1}{n^2}}_{n^2},n,0,0,\ldots\right)$	$(0,0,0,\ldots)$

1.1.3 Проверить, сходится ли заданная последовательность x_n точек метрического пространства X к точке a, если выполнены следующие условия (таблица 1.1.3).

*Таблица 1.*1.3

вариант	X	x_n	a
1	$L_2[0;2]$	$1/(1+nt)$	0
2	$L_4[0;3]$	$(t/3)^n+2t$	$2t$
3	$L_{4/3}[-1;2]$	$(t/2)^n+\sin t$	$\sin t$
4	$L_1[0;1]$	$e^{n(t-1)}$	0
5	$L_{3/2}[-2;0]$	$\sin(t/n)+2t^2$	$2t^2$
6	$L_2[0;2]$	$(\sin nt)/n^2+t^3$	t^3

1.1.4 Является ли данное условие: а) необходимым, б) достаточным, в) необходимым и достаточным для сходимости последовательности x_n в метрическом пространстве X (таблица 1.1.4)?

Таблица 1.1.4

вариант	X	Условие
1	2	3
1	$C[a;b]$	$\forall t\in[a;b]$ существует предел числовой последовательности $x_n(t)$
2	l_1	$\forall k\in \boldsymbol{N}$ существует предел числовой последовательности $x_n(k)$
3	l_4	$\lim\limits_{n\to\infty}\sup\limits_{k\in N}\lvert x_n(k)-a(k)\rvert=0$, где $a=(a(1),a(2),\ldots,a(k),\ldots)\in l_4$
4	l_∞	$\forall k\in \boldsymbol{N}$ существует предел числовой последовательности $x_n(k)$

Окончание таблицы 1.1.4

1	2	3
5	c_0	$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sum\limits_{k=1}^{\infty}\lvert x_n(k)-a(k)\rvert\right)=0$, где $a=\left(a(1),a(2),...,a(k),...\right)$
6	l_1	$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sum\limits_{k=1}^{\infty}\lvert x_n(k)-a(k)\rvert^2\right)=0$, где $a=\left(a(1),a(2),...,a(k),...\right)$

1.1.5 Найти предел последовательности x_n в метрическом пространстве X, если он существует (таблица 1.1.5).

Таблица 1.1.5

вариант	X	x_n
1	l_∞	$\left(\underbrace{tg\left(1+\frac{1}{n}\right)^n,...,tg\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}_{n},0,0,...\right)$
2	l_3	$\left(\underbrace{\frac{1}{\sqrt{n}},...,\frac{1}{\sqrt{n}}}_{n},0,0,...\right)$
3	l_2	$\left(\underbrace{\sin\frac{1}{n},...,\sin\frac{1}{n}}_{n^2},0,0,...\right)$
4	c_0	$\left(\underbrace{\left(\frac{n+2}{n}\right)^2,...,\left(\frac{n+2}{n}\right)^2}_{n},0,0,...\right)$
5	l_∞	$\left(tg(1/n),tg(1/n^2),...tg(1/n^k),...\right)$
6	l_1	$\left(\underbrace{\frac{\sin 3^n}{n^2},...,\frac{\sin 3^n}{n^2}}_{n},0,0,...\right)$

Примеры решения типовых задач

1 Проверить, сходится ли заданная последовательность x_n точек метрического пространства X к точке a.

Пример 1 $x_n(t)=\frac{1}{n^2}\sqrt{n^4t^2+1},\ a(t)=|t|,\ X=C[-4;4]$.

Решение Рассмотрим расстояние $\rho_C(x_n,a)=\max\limits_{t\in[-4,4]}|x_n(t)-a(t)|$. Так как при всех $t\in[-4;4]$ имеем

$$|x_n(t)-a(t)|=\left|\frac{1}{n^2}\sqrt{n^4t^2+1}-|t|\right|=\sqrt{t^2+\frac{1}{n^4}}-|t|=\frac{t^2+\frac{1}{n^4}-t^2}{\sqrt{t^2+\frac{1}{n^4}}+|t|}\le\frac{\frac{1}{n^4}}{\sqrt{\frac{1}{n^4}}}=\frac{1}{n^2}\to 0$$

при $n\to\infty$, то $\rho_C(x_n,a)\to 0\ (n\to\infty)$. Значит, x_n сходится к a в $C[-4;4]$.

Пример 2 $x_n(t)=t^n-t^{n+1}+t,\ a(t)=t,\ X=C[0;1]$.

Решение Рассмотрим $\rho_C(x_n,a)=\max\limits_{0\le t\le 1}|t^n-t^{n+1}|$. Обозначим t^n-t^{n+1} через $\Delta_n(t)$ и найдем наибольшее значение функции $|\Delta_n(t)|=\Delta_n(t)=t^n-t^{n+1}$ на отрезке $[0;1]$. Имеем $\Delta'_n(t)=nt^{n-1}-(n+1)t^n$, $\Delta'_n(t)=0$, если $t=0$ или $t=\frac{n}{n+1}$.

$$\Delta_n\left(\frac{n}{n+1}\right)=\left(\frac{n}{n+1}\right)^n-\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1}=\left(\frac{n}{n+1}\right)^n\left(1-\frac{n}{n+1}\right)=\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}\frac{1}{n+1},\ \Delta_n(0)=0,$$

$\Delta_n(1)=0$.

Значит, (по правилу нахождения наибольшего значения функции на отрезке), $\rho_C(x_n,a)=\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}\frac{1}{n+1}\to\frac{1}{e}\cdot 0=0$,

а поэтому x_n сходится к a в $C[0;1]$.

Пример 3 $x_n=\left(\underbrace{\frac{1}{\sqrt{n}},\ldots,\frac{1}{\sqrt{n}}}_{n^2\ раз},0,0,\ldots\right),\quad a=(0,0,0,\ldots),\ X=l_3$.

Решение $$\rho_3(x_n,a)=\left(\sum_{i=1}^{\infty}|x_{n_i}-a_i|^3\right)^{1/3}=\left(n^2\left|\frac{1}{\sqrt{n}}-0\right|^3\right)^{1/3}=$$

$$=\left(\frac{n^2}{n^{3/2}}\right)^{1/3}=n^{1/6}\to\infty \text{ при } n\to\infty.$$

Так как $\rho_3(x_n,a)$ не стремится к нулю, то x_n не сходится к a в l_3.

Пример 4 $x_n=\left(\underbrace{\frac{\sin n}{n},\ldots,\frac{\sin n}{n}}_{n\ раз},0,0,\ldots\right),\ a=(0,0,0,\ldots),\ X=l_2$.

Решение $\rho_2(x_n,a)=$

$$=\left(\sum_{i=1}^{\infty}\left|x_{n_i}-a_i\right|^2\right)^{1/2}=\left(n\frac{\sin^2 n}{n^2}\right)^{1/2}=\left(\frac{\sin^2 n}{n}\right)^{1/2}=\frac{|\sin n|}{\sqrt{n}}\to 0 \text{ при } n\to\infty.$$

Значит, x_n сходится к a в l_2.

Пример 5 $x_n(t)=n\left(\sqrt{t+1/n}-\sqrt{t}\right)$, $a(t)=\frac{1}{2\sqrt{t}}$, $X=L_1[0;1]$.

Решение $\rho_{L_1}(x_n,a)=\int_0^1|x_n(t)-a(t)|\,dt=\int_0^1\left|n\left(\sqrt{t+1/n}-\sqrt{t}\right)-\frac{1}{2\sqrt{t}}\right|dt=$

$$=\int_0^1\left|\frac{1}{\sqrt{t+1/n}+\sqrt{t}}-\frac{1}{2\sqrt{t}}\right|dt=\int_0^1\left(\frac{1}{2\sqrt{t}}-\frac{1}{\sqrt{t+1/n}+\sqrt{t}}\right)dt.$$

Применим теорему Беппо Леви о предельном переходе под знаком интеграла. Обозначим $f_n(t)=\frac{1}{2\sqrt{t}}-\frac{1}{\sqrt{t+1/n}+\sqrt{t}}$. Функция $f_n(t)$ является интегрируемой на $[0;1]$ для любого $n\in \boldsymbol{N}$, и $f_1(t)\ge f_2(t)\ge\ldots\ge f_n(t)\ge\ldots$. Кроме того, $f_n(t)\to 0\ (n\to\infty)$. Значит, по теореме Б. Леви,

$$\lim_{n\to\infty}\rho_{L_1}(x_n,a)=\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f_n(t)dt=0.$$

Следовательно, x_n сходится к a в $L_1[0;1]$.

Пример 6 $x_n(t)=n\sin(t/n)$, $a(t)=t$, $X=L_1[0;1]$.

Решение $\rho_{L_1}(x_n,a)=\int_0^1\left|n\sin\frac{t}{n}-t\right|dt=\left(\left|n\sin\frac{t}{n}\right|\le n\cdot\frac{t}{n}\le t\right)=\int_0^1\left(t-n\sin\frac{t}{n}\right)dt=$

$$=\left(\frac{t^2}{2}+n^2\cos\frac{t}{n}\right)\Bigg|_0^1=\frac{1}{2}+n^2\cos\frac{1}{n}-n^2=\frac{1}{2}+n^2\left(\cos\frac{1}{n}-1\right)=\frac{1}{2}-2n^2\sin^2\frac{1}{2n}\to 0$$

при $n\to\infty$ (мы воспользовались тем, что $\sin x\sim x$ при $x\to 0$). Значит, x_n сходится к a в $L_1[0;1]$.

2 Является ли данное условие: а) необходимым, б) достаточным, в) необходимым и достаточным для сходимости последовательности x_n в метрическом пространстве X?

Пример 1 $X=C_L[a;b]$ – пространство непрерывных функций с метрикой $\rho_L(x,y)=\int_a^b\left|x(t)-y(t)\right|dt$.

Условие: последовательность $x_n(t)$ поточечно сходится к непрерывной функции $a(t)$.

Решение Не нарушая общности, можем считать, что $a=0, b=1$. Покажем, что условие не является ни необходимым, ни достаточным. Для выяснения достаточности условия рассмотрим следующую последовательность $x_n(t)$, заданную на $[0;1]$ графически (рисунок 1):

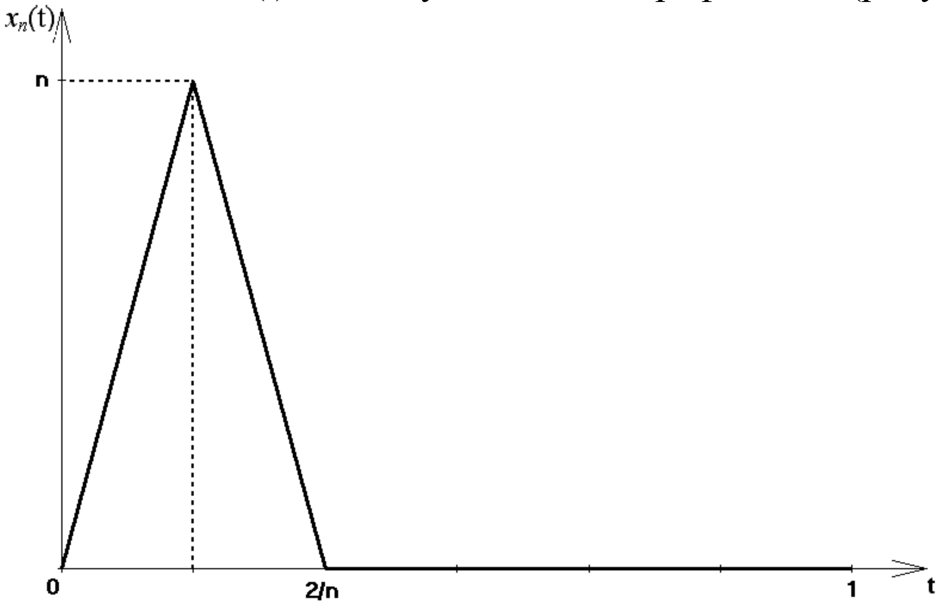

Рисунок 1 – График функции $x_n(t)$

Последовательность x_n сходится к $a\equiv 0$ поточечно на $[0;1]$ (почему?), но

$$\rho_L(x_n,a)=\int_0^1 |x_n(t)-0|\,dt=\int_0^{2/n} x_n(t)\,dt=\frac{1}{2}\times\frac{2}{n}\times n=1,$$

то есть $\rho_L(x_n,a)$ не стремится к нулю. Значит, данное условие не является достаточным для сходимости последовательности x_n в метрическом пространстве $C_L[a;b]$.

Теперь допустим, что $x_n\to a$ в $C_L[0;1]$, то есть $\int_0^1 |x_n(t)-a(t)|\,dt\to 0$ при $n\to\infty$. Покажем на примере, что отсюда не следует поточечная сходимость x_n к a. Рассмотрим последовательность $x_n(t)=t^n$ и функцию $a(t)\equiv 0$. Имеем

$$\rho_L(x_n,a)=\int_0^1 t^n\,dt=\left.\frac{t^{n+1}}{n+1}\right|_0^1=\frac{1}{n+1}\to 0 \text{ при } n\to\infty.$$

Значит, $x_n\to a=0$ в $C_L[0;1]$. Но t^n не сходится к $a=0$ поточечно, так как $t^n\to 1$ при $t=1$. Значит, данное условие не является необходимым для сходимости последовательности x_n в метрическом пространстве $C_L[a;b]$.

Пример 2 $X = l_2$.

Условие: $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sum\limits_{k=1}^{\infty}|x_n(k)-a(k)|\right)=0$, где $a=(a_1,a_2,...,a_k,...)$.

Решение Положим $\alpha_n := \sum\limits_{k=1}^{\infty}|x_n(k)-a(k)|$. Тогда данное условие означает, что $\alpha_n \to 0$ при $n\to\infty$. Докажем, что это условие является достаточным для сходимости последовательности x_n к a в пространстве l_2.

Поскольку при выполнении этого условия $\alpha_n < 1$ при достаточно больших n, то при этих n и при всех k имеем $|x_n(k)-a(k)| < 1$. Поэтому $|x_n(k)-a(k)|^2 \le |x_n(k)-a(k)|$ при этих n и при всех k. Значит,

$$(\rho_2(x_n,a))^2 \le \alpha_n \to 0 \ (n\to\infty),$$

а это значит, что $\rho_2(x_n,a) \to 0$. Следовательно, $x_n \to a$ в l_2. Достаточность доказана.

Теперь покажем, что условие не является необходимым. Рассмотрим последовательность $x_n = \left(1,\frac{1}{2},...,\frac{1}{n},0,0,0,...\right)$ и точку $a=\left(1,\frac{1}{2},...,\frac{1}{n},\frac{1}{n+1},...\right)$ из l_2. Имеем $\rho_2(x_n,a)=\left(\sum\limits_{k=n+1}^{\infty}\frac{1}{k^2}\right)^{1/2} \to 0$ $(n\to\infty)$ как остаток сходящегося ряда. Значит, $x_n \to a$ в l_2. Но в этом примере $\alpha_n=\infty$ (сравните с гармоническим рядом), а потому данное условие не выполняется.

3 Найти предел последовательности x_n в метрическом пространстве X, если он существует.

Пример 1 $X = l_1$, $x_n = \left(\frac{1}{2},\frac{4}{5},...,\frac{n^2}{n^2+1},0,0,...\right)$.

Решение

1 способ Допустим, x_n сходится к некоторому a в l_1. Так как для любого k справедливо неравенство

$$|x_n(k)-a(k)| \le \rho_1(x_n,a) \to 0 \ (n\to\infty),$$

то имеем и покоординатную сходимость x_n к a. Но покоординатно x_n «сходится» к последовательности

$$\left(\frac{1}{2},\frac{4}{5},\dots,\frac{n^2}{n^2+1},\frac{(n+1)^2}{(n+1)^2+1},\dots\right),$$

которая не принадлежит пространству l_1 (ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{n^2+1}$ расходится, по необходимому признаку). Мы пришли к противоречию. Значит, x_n не сходится в l_1.

2 способ Так как $\rho_1(x_n,x_{n+1})=\frac{(n+1)^2}{(n+1)^2+1}\to 1$ при $n\to\infty$, последовательность x_n не является фундаментальной. Следовательно, x_n не сходится в l_1.

Пример 2 $X = l_\infty$, $x_n=\left(1,\sqrt{2},\sqrt[3]{3},\dots,\sqrt[n]{n},0,0,\dots\right)$.

Решение

1 способ Допустим, x_n сходится к некоторому a в l_∞. Так как $\left|x_n(k)-a(k)\right|\le\rho_\infty(x_n,a)\to 0$ при $n\to\infty$ для любого k, то имеем покоординатную сходимость x_n к a. Но покоординатно x_n «сходится» к последовательности

$$a=\left(1,\sqrt{2},\sqrt[3]{3},\dots,\sqrt[n]{n},\sqrt[n+1]{n+1},\dots\right)\in l_\infty,$$

для которой $\rho_\infty(x_n,a)=\sup\limits_{k\ge n+1}\left|\sqrt[k]{k}\right|=\sqrt[n+1]{n+1}\to 1$ (почему?) при $n\to\infty$. Следовательно, x_n не сходится к a в l_∞. Противоречие.

2 способ Заметим, что последовательность x_n не является фундаментальной в l_∞. Действительно, $x_{n+1}=\left(1,\sqrt{2},\sqrt[3]{3},\dots,\sqrt[n]{n},\sqrt[n+1]{n+1},0,0,\dots\right)$, $\rho(x_n,x_{n+1})=\sqrt[n+1]{n+1}\to 1$ при $n\to\infty$. Так как x_n не фундаментальна в l_∞, то она не сходится в l_∞.

Тема 2
Топология метрических пространств

1.2.1 Является ли данное множество M открытым, замкнутым, ограниченным в пространстве $C[a;b]$? Найти его замыкание, внутренние и граничные точки (таблица 1.2.1).

Таблица 1.2.1

вариант	M	вариант	M
1	$\{x \in C^{(1)}[a;b] \mid x(a)=0\}$	4	$\{x \mid x(a)>0\}$
2	$\{x \mid x(a)=x(b)\}$	5	$\{x \mid x(t)=const\}$
3	$\left\{x \,\middle|\, \int_a^b x(t)dt=0\right\}$	6	$\{x \in C^{(1)}[a;b] \mid x(a)=x`(a)\}$

1.2.2 Для данного множества A выяснить, является ли множество $B=A\cap l_p$ открытым, замкнутым, ограниченным в l_p (таблица 1.2.2).

Таблица 1.2.2

вариант	p	A	вариант	p	A
1	1	$\left\{x \,\middle|\, \lvert x(k)\rvert \le \frac{1}{k}\right\}$	4	∞	$\{x \mid \exists n:\ \forall k>n\ x(k)=0\}$
2	2	$\{x \mid x(k)>0\}$	5	3/2	$\{x \mid x(1)=\ldots=x(n)=0\}$
3	2	$\left\{x \,\middle|\, \lvert x(k)\rvert < \frac{1}{\sqrt[3]{k^2}}\right\}$	6	2	$\left\{x \,\middle|\, \sum_{k=1}^{\infty}\lvert x(k)\rvert<1\right\}$

Примеры решения типовых задач

1 Является ли данное множество M открытым, замкнутым, ограниченным в пространстве $C[a;b]$? Найти его замыкание, внутренние и граничные точки.

Пример 1 $M = \{x \mid x(a) = 0\}$.

Решение Множество M не является открытым, и более того, ни одна его точка не является внутренней. Действительно, $\forall x_0 \in M$ и для любого шара $B(x_0,\varepsilon)$ имеем $x = x_0 + \varepsilon/2 \in B(x_0,\varepsilon)$, но $x \notin M$, так как $x(a) = x_0(a) + \frac{\varepsilon}{2} = \frac{\varepsilon}{2} \neq 0$.

Множество M является замкнутым, так как оно содержит в себе пределы всех своих сходящихся последовательностей. Действительно, если $x_n(t) \to x_0(t)$ в $C[a;b]$, $x_n(a) = 0$, то и $x_0(a) = 0$. А это значит, что $x_0 \in M$.

Граница множества ∂M совпадает с самим множеством M, что теперь сразу следует из формулы $\partial M = \overline{M} \setminus IntM$.

Множество M не является ограниченным, так как последовательность $x_n(t) = n\cdot(t-a) \in M$, но $\rho(x_n,0) = n\cdot(b-a) \to \infty (n \to \infty)$.

Пример 2 $M = \left\{x \,\middle|\, \int_a^b x(t)dt < 1\right\}$.

Решение Покажем, что M является открытым. Возьмём $\forall x_0 \in M$, то есть

$$\int_a^b x_0(t)dt < 1.$$

Тогда $\exists \varepsilon > 0 : \int_a^b x_0(t)dt < 1-\varepsilon$. Покажем, что шар $B(x_0, \varepsilon/(b-a)) \subset M$. Возьмём $\forall y \in B(x_0,\varepsilon/(b-a))$. Это значит, что $\max\limits_{a\le t\le b}|x_0(t)-y(t)| < \frac{\varepsilon}{b-a}$. Тогда

$$\int_a^b y(t)dt = \int_a^b x_0(t)dt + \int_a^b (y(t)-x_0(t))dt \le$$

$$\int_a^b x_0(t)dt + \int_a^b |y(t)-x_0(t)|dt < 1-\varepsilon + \frac{\varepsilon}{b-a}\cdot(b-a) = 1.$$

Значит, $y \in M$.

Так как M открыто, то $IntM = M$.

Множество M не является замкнутым, так как содержит не все свои предельные точки. Действительно, возьмём последовательность

$x_n(t) = \frac{n}{n+1} \cdot \frac{1}{b-a}$ из M . Тогда $x_n(t) \to \frac{1}{b-a}$, но $\int_a^b \frac{dt}{b-a} = 1$, т.е. $\frac{1}{b-a} \notin M$.

Замечание Нормированное пространство X всегда связно, так как любые две его точки x и y можно связать непрерывным путем $tx + (1-t)y, t \in [0;1]$, лежащим в X, а потому в нем нет открытых и одновременно замкнутых собственных подмножеств.

Замыкание $\overline{M} = \left\{ x \left| \int_a^b x(t)dt \le 1 \right. \right\}$. Действительно, если x_0 принадлежит $\overline{M}$, то найдется последовательность $x_n \in M$ равномерно сходящаяся к x_0 на $[a;b]$. А тогда

$$\int_a^b x_0(t)dt = \int_a^b \lim_{n\to\infty} x_n(t)dt = \lim_{n\to\infty} \int_a^b x_n(t)dt \le 1 .$$

Обратно, если $\int_a^b x_0(t)dt \le 1$, то последовательность $x_n = n/(n+1)x_0$ принадлежит M и сходится к x_0 равномерно (проверьте!), а потому x_0 принадлежит $\overline{M}$.

Теперь ясно, что граница $\partial M = \overline{M} \setminus IntM = \overline{M} \setminus M = \left\{ x \left| \int_a^b x(t)dt = 1 \right. \right\}$.

Наконец, M не является ограниченным, так как $x_n(t) = -n \in M$, но $\rho(x_n, 0) = n \to \infty$.

Пример 3 $M = \{ x \mid \max|x(t)| < 1 \}$.

Решение Покажем, что M открыто. Возьмём $\forall x_0 \in M$. Тогда $\max|x_0(t)| < 1$, а потому $\exists \varepsilon > 0 : \max|x_0(t)| < 1 - \varepsilon$. Рассмотрим $B(x_0, \varepsilon)$. Для любого $y \in B(x_0, \varepsilon)$ имеем $\max\limits_{a \le t \le b} |y(t) - x_0(t)| < \varepsilon$, а тогда

$$\max|y(t)| \le \max|y(t) - x_0(t)| + \max|x_0(t)| < \varepsilon + 1 - \varepsilon = 1 .$$

Покажем, что замыкание множества M есть $\overline{M} = \{ x \mid \max|x(t)| \le 1 \}$. Действительно, если x_0 принадлежит $\overline{M}$, то найдется последовательность $x_n \in M$, равномерно сходящаяся к x_0 на $[a;b]$. А тогда $|x_0(t)| = \lim\limits_{n\to\infty} |x_n(t)| \le 1$.

Обратно, если $\max|x(t)| \le 1$, то последовательность $x_n = n/(n+1)x_0$ принадлежит M и сходится к x_0 равномерно на $[a;b]$ (проверьте), а потому x_0 принадлежит $\overline{M}$.

Теперь ясно, что граница $\partial M = \overline{M} \setminus IntM = \overline{M} \setminus M = \{ x \mid \max|x(t)| = 1 \}$.

Очевидно, что данное множество ограничено.

2 Для данного множества A выяснить, является ли множество $B = A \cap l_p\,(p \ge 1)$ открытым, замкнутым, ограниченным в l_p.

Пример 1 $p = 3/2,\ A = \left\{ x \,\middle|\, |x(k)| \le \frac{1}{k} \right\}$.

Решение Множество $B = A \cap l_{3/2}$ замкнуто, так как содержит в себе все свои предельные точки. Действительно, если $x_n \to x_0, x_n \in A,$ то $\forall k \in N \quad x_n(k) \to x_0(k)$ (почему?). Но так как $|x_n(k)| \le 1/k$, то и $|x_0(k)| \le 1/k$. Значит, $x_0 \in B$.

Так как B замкнуто, то оно не является открытым, поскольку $\forall p \ge 1$ пространство l_p связно (см. замечание к примеру 2 в задаче 1). Но легко дать и прямое доказательство. Действительно, точка $e_1 = (1,0,0,\ldots)$ принадлежит B, но для любого $\varepsilon > 0$ точка $(1 + \varepsilon/2, 0, 0, \ldots) \notin B$, хотя и лежит в $\varepsilon -$ окрестности точки e_1.

Наконец, B ограничено, так как $\forall x \in B$

$$\rho_{3/2}(x,0) = \left(\sum_{k=1}^{\infty} |x(k)|^{3/2} \right)^{2/3} \le \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{3/2}} \right)^{2/3}.$$

Пример 2 $p = \infty,\ A = \{ x \mid 0 < x(k) < 1 \}$.

Решение Множество $B = A \cap l_\infty$ не является открытым. Для доказательства покажем, что точка $x_0 = (1/2, 1/3, \ldots) \in B$ не является для него внутренней. Возьмём $\forall \varepsilon > 0$ и найдём такое натуральное N, что $\frac{1}{N} < \frac{\varepsilon}{2}$ Тогда $x_\varepsilon = (\frac{1}{2}, \ldots, \frac{1}{N} - \frac{\varepsilon}{2}, \frac{1}{N+1}, \ldots) \in B(x_0, \varepsilon)$, но $x_\varepsilon \notin B$, поскольку $x_\varepsilon(N) < 0$.

Множество B не замкнуто. Действительно, рассмотрим $x_n = (\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n+2}, \ldots) \in B$. Тогда x_n сходится к точке $0 = (0,0,\ldots)$, так как $\rho_\infty(x_n, 0) = \frac{1}{n+1} \to 0$ при $n \to \infty$, но $(0,0,\ldots) \notin B$.

Множество B ограничено, так как $\rho_\infty(x,0) \le 1, \quad \forall x \in B$.

Пример 3 $p = 1,\ A = \left\{ x \,\middle|\, \sum_{k=1}^{\infty} |x(k)|^2 < 1 \right\}$.

Решение Покажем, что множество $B = A \cap l_1$ открыто.

Возьмём $\forall x_0 \in B$. Найдется такое $0 < \varepsilon < 1$, что $\sum_{k=1}^{\infty} |x_0(k)|^2 < (1-\varepsilon)^2$. Если $x \in B(x_0, \varepsilon^2)$ (шар рассматривается, конечно, в l_1), то $\sum_{k=1}^{\infty} |x(k) - x_0(k)| < \varepsilon^2$. Тогда и $\sum_{k=1}^{\infty} |x(k) - x_0(k)|^2 \le \sum_{k=1}^{\infty} |x(k) - x_0(k)| < \varepsilon^2$. Теперь, в силу неравенства Минковского, имеем

$$\sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} |x(k)|^2} \le \sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} |x(k) - x_0(k)|^2} + \sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} |x_0(k)|^2} < \varepsilon + 1 - \varepsilon = 1.$$

Значит, $\sum_{k=1}^{\infty} |x(k)|^2 < 1$, т. е. $x \in B$. Итак, $B(x_0, \varepsilon^2) \subset B$.

Так как B открыто, то B не замкнуто по замечанию из решения примера 2 к задаче 1. Дадим прямое доказательство этого факта. Точки $x_n = c(1, 1/2^2, ..., 1/n^2, 0, 0, ...)$, где $c = \left(\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^4 \right)^{-1/2}$, очевидно, принадлежат B. Но в то же время x_n сходится в l_1 к $c(1, 1/2^2, 1/3^2, ...) \notin B$.

Покажем, что B не ограничено. Рассмотрим последовательность

$$x_n = \left(\sqrt{\frac{6}{\pi^2}} \cdot 1, \sqrt{\frac{6}{\pi^2}} \cdot \frac{1}{2}, ..., \sqrt{\frac{6}{\pi^2}} \cdot \frac{1}{n}, 0, 0, ... \right).$$

Имеем: $x_n \in B$, так как

$$\sum_{k=1}^{\infty} |x_n(k)|^2 = \sum_{k=1}^{n} \frac{6}{\pi^2} \cdot \frac{1}{k^2} < \frac{6}{\pi^2} \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = 1,$$

но в то же время $\rho_1(x_n, 0) = \sqrt{\frac{6}{\pi^2}} \cdot \sum_{K=1}^{\infty} \frac{1}{k} \to \infty$ при $n \to \infty$.

Пример 4 $p = 2, A = \left\{ x \,\middle|\, \sum_{k=1}^{\infty} |x(k)| \cdot k < 1 \right\}$.

Решение Покажем, что $B = A \cap l_2$ не является открытым. Возьмём $x_0 = (0, 0, ...) \in B$ и $\forall \varepsilon > 0$. Найдётся такое натуральное N, что $N \cdot \varepsilon / 2 > 1$. Тогда $x(\varepsilon) = (0, 0, ..., 0, \underbrace{\varepsilon / 2}_{N\text{-е место}}, 0, 0, ...) \in B(x_0, \varepsilon)$, но $x(\varepsilon) \notin B$.

Множество B не является и замкнутым. Для доказательства рассмотрим последовательность $x_n = \frac{6}{\pi^2} \cdot \left(1, \frac{1}{2^3}, ..., \frac{1}{n^3}, 0, 0, ... \right) \in B$. Она сходится к точке $x_0 = \frac{6}{\pi^2} \cdot \left(1, \frac{1}{2^3}, ..., \frac{1}{n^3}, \frac{1}{(n+1)^3}, ... \right)$, которая не принадлежит B, так как $\sum_{k=1}^{\infty} |x(k)| \cdot k = \frac{6}{\pi^2} \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = 1$.

Множество B ограничено, поскольку неравенство $|x(k)| < \frac{1}{k}$ влечет

$$\rho_2(x,0) = \left(\sum_{k=1}^{\infty} |x(k)|^2 \right)^{1/2} \le \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \right)^{1/2} = \frac{\pi}{\sqrt{6}}.$$

Тема 3
Полнота метрических пространств

1.3.1 Является ли последовательность x_n фундаментальной в данном пространстве X? Найти $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$, если он существует (таблица 1.3.1).

Таблица 1.3.1

вариант	X	x_n
1	$L_1[-1;2]$	$x_n(t)=\begin{cases}\sin nt, t\in Q\cap[-1;2],\\ \sqrt{t^2+\frac{1}{n^3}}, t\in[-1;2]\setminus Q\end{cases}$
2	$L_{3/2}[0;1]$	$x_n(t)=\begin{cases}ne^{nt}, t\in K,\\ \frac{t^3}{n}, t\in[0;1]\setminus K\end{cases}$
3	$L_4[-2;0]$	$x_n(t)=\begin{cases}nt, t\in Q\cap[-2,0],\\ ne^{nt}, t\in[-2,0]\setminus Q\end{cases}$
4	$L_2[-1;1]$	$x_n(t)=\begin{cases}\sqrt{t^2+\frac{1}{n^4}}, t\in[-1;1]\setminus K,\\ \cos(n+t), t\in K\cap[-1;1]\end{cases}$
5	$L_4[0;3]$	$x_n(t)=\begin{cases}\sin\pi nt, t\in Q\cap[0;3]\\ \left(\frac{t}{3}\right)^n, t\in[0;3]\setminus Q\end{cases}$
6	$L_2[0;\pi]$	$x_n(t)=\begin{cases}\sin(t/n), t\in[0;\pi/]\setminus Q,\\ \exp(n^2t), t\in Q\cap[0;\pi/2]\end{cases}$

1.3.2 Выяснить, является ли заданное пространство (X,ρ) полным.

Вариант 1 а) пространство $C^{(1)}[a;b]$ непрерывно дифференцируемых на отрезке $[a;b]$ функций с метрикой

$$\rho(x;y)=\max_{a\le t\le b}|x(t)-y(t)|+\max_{a\le t\le b}|x'(t)-y'(t)|;$$

б) пространство всех дважды дифференцируемых на отрезке $[a;b]$ функций с метрикой $\rho(x;y)=\max\limits_{a\le t\le b}|x(t)-y(t)|$.

Вариант 2 а) пространство $l_p(p \ge 1)$ числовых последовательностей $x = (x(1), x(2), ..., x(k), ...)$, удовлетворяющих условию $\sum_{k=1}^{\infty} |x(k)|^p < \infty$, с метрикой $\rho(x, y) = \left(\sum_{k=1}^{\infty} |x(k) - y(k)|^p \right)^{1/p}$;

б) пространство всех непрерывных на отрезке $[a; b]$ функций с метрикой $\rho(x, y) = \left(\int_a^b |x(t) - y(t)|^2 dt \right)^{1/2}$.

Вариант 3 а) пространство l_∞ всех ограниченных числовых последовательностей $x = (x(1), x(2), ..., x(k), ...)$ с метрикой $\rho(x; y) = \sup_k |x(k) - y(k)|$;

б) $X = C[0;1]$ с метрикой $\rho(x, y) = \int_0^1 |x(t) - y(t)| dt$.

Вариант 4 а) пространство c_0 сходящихся к нулю последовательностей $x = (x(1), x(2), ..., x(k), ...)$ с метрикой $\rho(x; y) = \sup_k |x(k) - y(k)|$;

б) $X = \left\{ x \in C[0;1] \,\middle|\, \int_0^1 |x(t)| dt < 1 \right\}$ с метрикой $\rho(x; y) = \max_{0 \le t \le 1} |x(t) - y(t)|$.

Вариант 5 а) Пространство c сходящихся последовательностей $x = (x(1), x(2), ..., x(k), ...)$ с метрикой $\rho(x; y) = \sup_k |x(k) - y(k)|$;

б) $X = C[0;1]$ с метрикой $\rho(x, y) = \left(\int_a^b |x(t) - y(t)|^2 dt \right)^{1/2}$.

Вариант 6 а) Пространство $CB[a; b]$ ограниченных и непрерывных на интервале $(a; b)$ функций с метрикой $\rho(x; y) = \sup_{a \le t \le b} |x(t) - y(t)|$;

б) $X = l_1$ с метрикой $\rho(x; y) = \sup_k |x(k) - y(k)|$.

Примеры решения типовых задач

1 Является ли последовательность x_n фундаментальной в данном пространстве *X*? Найти $\lim_{n \to \infty} x_n$, если он существует.

Пример 1 $X = L_{3/5}[0;1]$, $\rho(x, y) = \left(\int_0^1 |x(t) - y(t)|^{3/5} dt \right)^{5/3}$,

$$x_n(t)=\begin{cases}(n+t)^{-1}, t\in[0;1]\setminus K,\\ \exp(n^2t), t\in K\cap[0;1]\end{cases}$$, где K – канторово множество.

Решение Так как канторово множество имеет лебегову меру нуль, то и $K\cap[0;1]$ – множество меры нуль. Значит, $x_n(t)=(n+t)^{-1}$ почти всюду.

Покажем, что x_n сходится к 0 в $L_{3/5}[0;1]$. Для этого рассмотрим

$$\rho^{3/5}(x_n,0)=\int_0^1\left|\frac{1}{n+t}-0\right|^{3/5}dt=\frac{5(n+t)^{2/5}}{2}\Bigg|_0^1=\frac{5}{2}\left((n+1)^{2/5}-n^{2/5}\right)=\frac{5}{2}n^{2/5}\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^{2/5}-1\right)$$

и воспользуемся разложением по формуле Тейлора:

$$(1+x)^{\alpha}-1=\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^2+o(x^2) \text{ при } x\to 0.$$

Получаем:

$$\rho^{3/5}(x_n,0)=\frac{5}{2}\cdot n^{2/5}\left(\frac{2}{5}\cdot\frac{1}{n}-\frac{2}{5}\cdot\frac{3}{5}\cdot\frac{1}{n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)=$$

$$=\frac{1}{n^{3/5}}-\frac{3}{5\cdot n^{8/5}}+o\left(\frac{1}{n^{8/5}}\right)\to 0 \text{ при } n\to\infty.$$

Тот же результат мы получим, применив теорему Лебега о предельном переходе под знаком интеграла.

Итак, x_n сходится к 0, а потому она фундаментальна.

Пример 2 $X=L_{5/3}[0;1]$, $x_n(t)=\begin{cases}\cos nt, t\in[0;1]\setminus K,\\ \exp(\pi t^n), t\in K\cap[0;1]\end{cases}$.

Решение Так как $K\cap[0;1]$ – множество меры нуль, то $x_n(t)=\cos nt$ почти всюду на $[0;1]$. Покажем, что эта последовательность не фундаментальна в нашем пространстве:

$$\rho^{5/3}(x_{n+2},x_n)=\int_0^1|x_{n+2}(t)-x_n(t)|^{5/3}dt=2^{5/3}\int_0^1|\sin t|^{5/3}|\sin(n+1)t|^{5/3}dt\geq$$

$$\geq 2^{5/3}\int_0^1\sin^2 t\sin^2(n+1)t\,dt=2^{5/3}\int_0^1\sin^2 t\frac{1-\cos 2(n+1)t}{2}dt=$$

$$=2^{2/3}\left(\int_0^1\sin^2 t\,dt-\int_0^1\sin^2 t\cos 2(n+1)t\,dt\right)\to 2^{2/3}\int_0^1\sin^2 t\,dt\neq 0 \quad (n\to\infty).$$

(мы воспользовались леммой Римана из теории рядов Фурье, согласно которой $\int\limits_0^1 \sin^2 t \sin 2(n+1)t dt \to 0$, но можно было бы вычислить интеграл и непосредственно).

2 Является ли метрическое пространство (X,ρ) полным?

Пример 1 $X = B[0;1]$ – пространство вещественнозначных ограниченных функций на $[0;1]$, наделенное метрикой $\rho(x,y) = \sup\limits_{t\in[0;1]} |x(t)-y(t)|$.

Решение Покажем, что любая фундаментальная последовательность (x_n) в $B[0;1]$ является сходящейся. Ее фундаментальность означает, что $\forall\varepsilon>0 \ \exists n_\varepsilon : \forall n,m > n_\varepsilon$ выполняется неравенство

$$\sup_{t\in[0;1]} |x_n(t)-x_m(t)| < \varepsilon . \qquad (1)$$

Зафиксируем произвольное число $t\in[0;1]$. Тогда числовая последовательность ($x_n(t)$), в силу (1), является фундаментальной в $\boldsymbol{R}$. По причине полноты пространства $\boldsymbol{R}$, последовательность $x_n(t)$ сходится. Положим $x_0(t) = \lim\limits_{n\to\infty} x_n(t)$, $t\in[0;1]$. Тем самым на $[0;1]$ определена функция $x_0(t)$, к которой $x_n(t)$ сходится поточечно. Осталось доказать, что

1) $x_0 \in B[0;1]$;

2) $\rho(x_n,x_0)\to 0$ при $n\to\infty$.

С этой целью перейдем в (1) (а точнее, в неравенстве $|x_n(t)-x_m(t)|<\varepsilon$, справедливом при всех *t* из $[0;1]$) к пределу при $m\to\infty$. Получим, что

$$\forall n > n_\varepsilon \quad \sup_{t\in[0;1]} |x_n(t)-x_0(t)| \le \varepsilon . \qquad (2)$$

В частности, при $N = n_\varepsilon + 1 \ \forall t\in[0;1]$ выполняется оценка:

$$-\sup_{t\in[0;1]}|x_N(t)| - \varepsilon \le x_0(t) \le \sup_{t\in[0;1]}|x_N(t)| + \varepsilon ,$$

из которой следует ограниченность x_0. Следовательно, $x_0\in B[0;1]$. Наконец, формула (2) означает, что $\forall n > n_\varepsilon \ \rho(x_n,x_0)\le\varepsilon$. Поэтому

$$\rho(x_n,x_0)\to 0 \text{ при } n\to\infty .$$

Пример 2 $X = l_{p,\mu}$ ($p\ge 1$) – пространство числовых последовательностей $x = (x(1), x(2),..., x(n),...)$, удовлетворяющих условию:

$\sum_{n=1}^{\infty}|x(n)|^p \mu(n) < \infty$, где $\mu = (\mu(1), \mu(2), ..., \mu(n), ...)$, $\mu(n) > 0$ – заданная числовая последовательность; $\rho(x, y) = \left(\sum_{n=1}^{\infty}|x(n) - y(n)|^p \mu(n)\right)^{1/p}$.

Решение Покажем, что данное пространство полно. Пусть (x_n) – фундаментальная последовательность в $l_{p,\mu}$. Это значит, что

$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists n_\varepsilon : \forall n, m > n_\varepsilon \;\; \left(\sum_{n=1}^{\infty}|x_n(i) - x_m(i)|^p \mu(i)\right)^{1/p} < \varepsilon . \qquad (3)$$

Тогда для любого фиксированного i имеем:

$$\forall n, m > n_\varepsilon \;\; |x_n(i) - x_m(i)|^p \mu(i) < \varepsilon^p, \text{ или } |x_n(i) - x_m(i)| < \varepsilon / (\mu(i))^{1/p} .$$

Следовательно, для любого фиксированного i числовая последовательность $(x_n(i))_{n=1}^{\infty}$ является фундаментальной, а потому сходится. Обозначим $x_0(i) = \lim_{n\to\infty} x_n(i)$ и положим $x_0 = (x_0(1), x_0(2), ..., x_0(n), ...)$. Осталось показать, что

1) $x_0 \in l_{p,\mu}$ и
2) $\rho(x_n, x_0) \to 0$ при $n \to \infty$.

Из (3) следует, что $\sum_{i=1}^{M}|x_n(i) - x_m(i)|^p \mu(i) < \varepsilon^p$ любого фиксированного M, что в пределе при $m \to \infty$ дает $\forall M \;\; \sum_{i=1}^{M}|x_n(i) - x_0(i)|^p \mu(i) \le \varepsilon^p$. Переходя теперь к пределу при $M \to \infty$, получим $\sum_{i=1}^{\infty}|x_n(i) - x_0(i)|^p \mu(i) \le \varepsilon^p$, т. е.

$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists n_\varepsilon : \forall n > n_\varepsilon \;\; \sum_{i=1}^{\infty}|x_n(i) - x_0(i)|^p \mu(i) \le \varepsilon^p . \qquad (4)$$

Возьмем какие-нибудь $\varepsilon > 0$ и $N > n_\varepsilon$ и обозначим

$$\rho(x_N, 0) = \left(\sum_{i=1}^{\infty}|x_N(i) - x_0(i)|^p \mu(i)\right)^{1/p} = C .$$

Вследствие неравенства Минковского, имеем

$$\left(\sum_{i=1}^{\infty}|x_0(i)|^p \mu(i)\right)^{1/p} \le \left(\sum_{i=1}^{\infty}|x_0(i) - x_N(i)|^p \mu(i)\right)^{1/p} + \left(\sum_{i=1}^{\infty}|x_N(i)|^p \mu(i)\right)^{1/p} \le \varepsilon + C < \infty,$$

а это значит, что $x_0 \in l_{p,\mu}$. Теперь (4) показывает, что $\rho(x_n, x_0) \to 0$ при $n \to \infty$, а потому (x_n) сходится в нашем пространстве к x_0.

Пример 3 $X = C^{(1)}[-1;1]$ – множество непрерывно дифференцируемых на $[-1;1]$ функций с метрикой

$$\rho(x, y) = \int_{-1}^{1}|x(t) - y(t)|dt .$$

Решение Рассмотрим последовательность $x_n(t) = arctg(nt)$ и покажем, что она является фундаментальной, но не является сходящейся в нашем пространстве. Заметим, что эта последовательность поточечно сходится к функции $x_0(t) = \frac{\pi}{2}\operatorname{sgn} t \in L_1[-1;1] \setminus X$, где

$$\operatorname{sgn} t = \begin{cases} 1, & t \in (0;1], \\ 0, & t = 0, \\ -1, & t \in [-1;0) \end{cases}.$$

А так как $\forall t \quad |x_n(t) - x_0(t)| \le \pi/2 + \pi/2$, то, по теореме Лебега, $\rho(x_n, x_0) = \int_{-1}^{1} |x(t) - x_0(t)| dt \to 0$ при $n \to \infty$. Это означает, что в пространстве $L_1[-1;1]$ последовательность x_n сходится к x_0. Следовательно, она фундаментальна в *X*. С другой стороны, если предположить, что последовательность x_n сходится в данном пространстве *X* к некоторой функции $\psi \in C^{(1)}[-1;1]$, то получим, что x_n имеет два предела (x_0 и ψ) в $L_1[-1;1]$. Противоречие. Итак, данное пространство не является полным.

Тема 4
Непрерывные отображения

1.4.1 Выяснить, является ли заданное отображение $F: X \to Y$ на своей естественной области определения непрерывным в точке x_0 (таблица 1.4.1)?

*Таблица 1.4.*1

вариант	X	Y	F	$x_0(t)$
1	$L_2[0;1]$	$L_1[0;1]$	$(Fx)(t) = t^{-1/4}\sin x(t)$	t^2
2	$C[0;1]$	$L_1[0;1]$	$(Fx)(t) = \sin x^2(t)$	t
3	$L_2[0;1]$	$L_2[0;1]$	$(Fx)(t) = x(\sqrt{t})$	$\sqrt{t}$
4	$C[0;1]$	$C[0;1]$	$(Fx)(t) = \int_0^1 \frac{t\lvert x(s)\rvert}{\sqrt{s}}ds$	t
5	$C[0;1]$	$C[0;2]$	$(Fx)(t) = 2x^3(t/2)$	1
6	$L_1[0;1]$	$L_2[0;1]$	$(Fx)(t) = x(t)$	0

1.4.2 Является ли заданное отображение $F: X \to Y$: а) непрерывным; б) равномерно непрерывным; в) удовлетворяющим условию Липшица (таблица 1.4.2)?

Таблица 1.4.2

вариант	X	Y	F
1	$C[0;1]$	$C[0;1]$	$(Fx)(t) = x^2(\sqrt{t})e^t$
2	$C[-1;1]$	$C[-1;1]$	$(Fx)(t) = \frac{x(t)}{1+x^2(t)}$
3	$L_2[-1;0]$	$L_1[-1;0]$	$(Fx)(t) = \int_{-1}^0 \frac{tx(s)}{1+x^2(s)}ds$
4	$C[-1;2]$	$L_1[-1;2]$	$(Fx)(t) = \frac{e^{x(t)}}{1+e^{x(t)}}$
5	l_1	l_1	$Fx = (\cos x(1), x(2), x(3), \ldots, x(k), \ldots)$
6	$C[-5;2]$	$L_1[-5;2]$	$Fx(t) = \int_0^1 t\lvert x(s)\rvert^{2/3}ds$

Примеры решения типовых задач

1 Является ли заданное отображение $F: X \to Y$ на своей естественной области определения непрерывным в точке x_0?

Пример 1 $F: C[0;2] \to L_1[0;1]$, $(Fx)(t) = x(1) - \int_0^2 tx^2(s)ds$, $x_0(t) = t$.

Решение Очевидно, что заданное отображение определено на всем $C[0;2]$. Представим его в виде $Fx = F_1x - F_2x$, где $F_1x = x(1)$, $F_2x(t) = \int_0^2 tx^2(s)ds$, и покажем, что F_1 и F_2 непрерывны в любой точке $x_0 \in C[0;2]$. Пусть последовательность (x_n) сходится к x_0 в $C[0;2]$. Тогда

$$\rho_{L_1}(F_1x_n, F_1x_0) = \int_0^1 |x_n(1) - x_0(1)|\, ds \le \max_{t\in[0;1]} |x_n(t) - x_0(t)| = \rho_C(x_n, x_0)$$
$$\to 0\ (n \to \infty).$$

Отсюда следует, что F_1 непрерывно.

Докажем непрерывность F_2. Так как функция $x_0 \in C[0;2]$, то она ограничена на $[0;2]$, т. е. $\exists M \in R: \ |x_0(s)| \le M \quad \forall s \in [0;2]$. А так как $x_n \to x_0$ равномерно на $[0;2]$, то, начиная с некоторого номера, $|x_n(s)| \le 2M$ на $[0;2]$ (почему?). Тогда

$$\rho_{L_1}(F_2x_n, F_2x_0) = \int_0^1 t \cdot \left| \int_0^2 x_n^2(s)ds - \int_0^2 x_0^2(s)ds \right| ds = \int_0^1 t dt \cdot \int_0^2 \left| x_n^2(s) - x_0^2(s) \right| ds =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \int_0^2 |x_n(s) - x_0(s)||x_n(s) + x_0(s)| ds \le \frac{1}{2} \cdot 3M \cdot \max_{s\in[0;2]} |x_n(s) - x_0(s)| \cdot 2 =$$

$$= 3M \cdot \rho_C(x_n, x_0) \to 0\ (n \to \infty).$$

Отсюда следует, что $F_2x_n \to F_2x_0$ в $L_1[0;1]$. Поэтому в силу произвольности x_0 отображение F непрерывно в любой точке из $C[0;2]$.

Пример 2 $F: L_2[0;1] \to L_1[0;1]$, $(Fx)(t) = tx(t^3)$, $x_0(t) = 0$.

Решение Пусть последовательность (x_n) сходится к x_0 в $L_2[0;1]$.

Тогда $\rho_{L_2}(x_n, x_0) = \left(\int_0^1 |x_n(t) - x_0(t)|^2 dt \right)^{1/2} = \left(\int_0^1 |x_n(t)|^2 dt \right)^{1/2} \to 0$ при $n \to \infty$.

Теперь в силу неравенства Коши-Буняковского,

$$\rho_{L_1}(Fx_n, Fx_0) = \int_0^1 \left| t x_n(t^3) \right| dt = \begin{bmatrix} t^3 = s & dt = \frac{1}{3} s^{-2/3} ds \\ t = \sqrt[3]{s} & s \in [0;1] \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \int_0^1 \frac{|x_n(s)|}{s^{1/3}} ds \leq$$

$$\leq \frac{1}{3} \left(\int_0^1 |x_n(s)|^2 ds \right)^{1/2} \cdot \left(\int_0^1 \frac{ds}{s^{2/3}} \right)^{1/2} = \frac{\sqrt{3}}{3} \rho_{L_2}(x_n, x_0) \to 0 \ (n \to \infty).$$

(аналогичные вычисления показывают, что Fx принадлежит $L_1[0;1]$ при x из $L_2[0;1]$; поэтому отображение F определено на всем $L_1[0;1]$). Значит, F – непрерывное отображение в точке x_0.

Пример 3 $F : L_1[0;1] \to L_2[0;1],\ (Fx)(t) = \int_0^1 t\sqrt{s} x^2(s) ds,\ x_0(t) = 0$.

Решение Покажем, что отображение не является непрерывным. Возьмём последовательность $x_n = n^{3/4} . \chi_{[0;1/n]}$, которая стремится к нулю в $L_1[0;1]$. Действительно,

$$\rho_{L_1}(x_n, 0) = \int_0^{1/n} n^{3/4} dt = \frac{n^{3/4}}{n} = \frac{1}{n^{1/4}} \to 0 \text{ при } n \to \infty.$$

Рассмотрим теперь выражение

$$\rho_{L_2}^2(Fx_n, Fx_0) = \rho_{L_2}^2(Fx_n, 0) = \int_0^1 \left| Fx_n(t) \right|^2 dt = \int_0^1 \left(\int_0^1 t\sqrt{s} x_n^2(s) ds \right)^2 dt = =$$

$$\int_0^1 t^2 dt \times \left(\int_0^1 \sqrt{s} x_n^2(s) ds \right)^2 = \frac{1}{3} \left(\int_0^{1/n} \sqrt{s} n^{3/2} ds \right)^2 = \frac{1}{3} \left(n^{3/2} \cdot \frac{2s^{3/2}}{3} \Big|_0^{1/n} \right)^2 = \frac{4}{27}.$$

Следовательно, последовательность $\rho_{L_2}(Fx_n, Fx_0)$ не стремится к нулю при $n \to \infty$, а потому Fx_n не стремится к Fx_0.

Пример 4 $F : L_2[0;1] \to L_1[0;1], (Fx)(t) = \int_0^1 \frac{tx^2(s)}{\sqrt[4]{s}} ds, x_0(t) = 0$.

Решение Покажем, что отображение не является непрерывным. Заметим, что

$$\rho_{L_1}(Fx_n, Fx_0) = \rho_{L_1}(Fx_n, 0) = \int_0^1 \left| \int_0^1 \frac{tx_n^2(s)}{\sqrt[4]{s}} ds \right| dt = \int_0^1 t dt \times \left| \int_0^1 \frac{x_n^2(s)}{\sqrt[4]{s}} ds \right| = \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{x_n^2(s)}{\sqrt[4]{s}} ds.$$

Возьмем последовательность $x_n = n^{7/8} \cdot \chi_{[0;n^{-2}]}$, которая сходится к нулю в $L_2[0;1]$, так как $\left(\int_0^{n^{-2}} n^{7/4} dt \right)^{1/2} = \left(\frac{n^{7/4}}{n^2} \right)^{1/2} = \frac{1}{\sqrt[8]{n}} \to 0$ при $n \to \infty$.

Тогда $\rho_{L_1}(Fx_n, 0) = \frac{1}{2} \int_0^{n^{-2}} \frac{n^{7/4}}{\sqrt[4]{s}} ds = \frac{n^{7/4}}{2} \cdot \frac{4s^{3/4}}{3} \Big|_0^{1/n^2} = \frac{2}{3} \cdot \frac{n^{7/4}}{n^{3/2}} \to \infty$ при $n \to \infty$, а потому Fx_n не стремится к Fx_0.

2 Является ли заданное отображение $F:X\to Y$: а) непрерывным; б) равномерно непрерывным; в) удовлетворяющим условию Липшица?

Пример 1 $X=Y=C[-4;2],\ (Fx)(t)=x(t)\sin x(t)$.

Решение а) Отображение F является непрерывным, так как

$$\rho(Fx,Fx_0)=\max_{t\in[-4;2]}\left|x(t)\sin x(t)-x_0(t)\sin x_0(t)\right|\le\max_{t\in[-4;2]}\left|x(t)\sin x(t)-x_0(t)\sin x(t)\right|+$$

$$+\left|x_0(t)\sin x(t)-x_0(t)\sin x_0(t)\right|\le\max_{t\in[-4;2]}\left|x(t)-x_0(t)\right|+$$

$$+\max_{t\in[-4;2]}\left|x_0(t)\cdot 2\sin\frac{x(t)-x_0(t)}{2}\cdot\cos\frac{x(t)+x_0(t)}{2}\right|\le\max_{t\in[-4;2]}\left|x(t)-x_0(t)\right|+M\cdot\max_{t\in[-4;2]}\left|x(t)-x_0(t)\right|=$$

$=(M+1)\rho(x,x_0)$ (мы воспользовались неравенством $|\sin x|\le|x|$; здесь $M=\max\limits_{t\in[-4;2]}|x_0(t)|$).

б) Покажем, что F не является равномерно непрерывным. Возьмём $x_n(t)=2\pi(n+1/n),\ y_n(t)=2\pi n$. Тогда $\rho(x_n,y_n)=\dfrac{2\pi}{n}\to 0$ при $n\to\infty$, но

$$\rho(Fx_n,Fy_n)=2\pi(n+1/n)\sin\frac{2\pi}{n}-2\pi n\times\sin 2\pi n=2\pi n\sin\frac{2\pi}{n}+\frac{2\pi}{n}\sin\frac{2\pi}{n}=$$

$$=4\pi^2\frac{\sin\frac{2\pi}{n}}{\frac{2\pi}{n}}+\frac{2\pi}{n}\sin\frac{2\pi}{n}\to 4\pi^2,$$

а значит, $\rho(Fx_n,Fy_n)$ не стремится к нулю при $n\to\infty$. Это противоречит определению равномерной непрерывности (проверьте).

в) Так как F не является равномерно непрерывным, то оно не удовлетворяет условию Липшица (почему?).

Пример 2 $X=l_2,\ Y=l_\infty,\ Fx=\left(\dfrac{x_1^2}{1+x_1^2},x_1,x_2,\dots\right)$.

Решение Покажем, что F удовлетворяет условию Липшица с константой $L=1$. Заметим, что

$$\rho_{l_\infty}(Fx,Fy)=\sup\left\{\left|\frac{x_1^2}{1+x_1^2}-\frac{y_1^2}{1+y_1^2}\right|;|x_1-y_1|;|x_2-y_2|;\dots\right\}.$$

Рассмотрим функцию $f(x)=\frac{x^2}{1+x^2}$. Тогда

$$|f'(x)|=\left|\frac{2x\left(1+x^2\right)-x^2\cdot 2x}{\left(1+x^2\right)^2}\right|=\frac{2|x|}{\left(1+x^2\right)^2}\le 1.$$

Следовательно, по теореме Лагранжа, $|f(x_1)-f(y_1)|\le|x_1-y_1|$, а значит,

$$\rho_{l_\infty}(Fx,Fy)=\sup\left\{\left|\frac{x_1^2}{1+x_1^2}-\frac{y_1^2}{1+y_1^2}\right|;|x_1-y_1|;|x_2-y_2|;\dots\right\}\le\sup_k|x_k-y_k|\le\rho_{l_2}(x,y).$$

Так как F удовлетворяет условию Липшица, то оно равномерно непрерывно, а потому и непрерывно.

Пример 3 $X=L_1[0;1],\ Y=L_2[-1;1],\ (Fx)(t)=\int_0^1 e^t\, arctgx(s)ds$.

Решение Покажем, что F удовлетворяет условию Липшица. Действительно,

$$\rho_{L_2}(Fx,Fy)=\left(\int_{-1}^1|Fx(t)-Fy(t)|^2dt\right)^{1/2}=\left(\int_{-1}^1 e^{2t}\left|\int_0^1 arctgx(s)-\int_0^1 arctgy(s)\right|^2dt\right)^{1/2}=$$

$$=\sqrt{ch2}\cdot\int_0^1|arctgx(s)-arctgy(s)|\,ds.$$

Так как $|(arctgx)'|=\frac{1}{1+x^2}\le 1$, то по теореме Лагранжа $|arctgx-arctgy|\le|x-y|$. Поэтому при любых x,y

$$\rho_{L_2}(Fx,Fy)\le\sqrt{ch2}\ \rho_{L_1}(x,y).$$

Так как F удовлетворяет условию Липшица, то оно является равномерно непрерывным.

Пример 4 $X=l_2,\ Y=l_1,\ Fx=\left(0,0,\sqrt{|x^3(21)|},0,0,\dots\right)$.

Решение а) Покажем, что F непрерывно. Действительно, если $x_n\to x_0$ в l_2, то числовая последовательность $x_n(21)$ сходится к $x_0(21)$. Тогда $\rho_{l_2}(Fx_n,Fx_0)=\left|\sqrt{|x_n^3(21)|}-\sqrt{|x_0^3(21)|}\right|\to 0$ при $n\to\infty$.

б) Покажем, что F не является равномерно непрерывным. Пусть

$$x_n(21)=\left(\sqrt{n}+\frac{1}{n}\right)^2,\ y_n(21)=n,\ x_n(k)=y_n(k)=0,\ \forall k\ne 21.$$

Тогда $\rho_{l_2}(x_n,y_n)=\left(\sqrt{n}+\frac{1}{n}\right)^2-n=\frac{2}{\sqrt{n}}+\frac{1}{n^2}\to 0$ при $n\to\infty$.

Но $\rho_{l_1}(Fx_n, Fy_n) = \left(\sqrt{n} + \frac{1}{n}\right)^3 - \sqrt{n^3} = 3 + \frac{3}{n\sqrt{n}} + \frac{1}{n^3} \to 3$ при $n \to \infty$.

в) Так как F не является равномерно непрерывным, то оно не удовлетворяет и условию Липшица.

Пример 5 $X = C[-5;2],\ Y = L_1[-5;2],\ (Fx)(t) = \int_0^1 t \cdot |x(s)|^{2/3}\, ds$.

Решение а) Покажем, что F не удовлетворяет условию Липшица. Допустим противное, то есть что

$$\exists L \in \boldsymbol{R}:\ \forall x, y \in C[-5;2]\ \ \rho_{L_1}(F(x), F(y)) \le L \cdot \rho_C(x, y).$$

Возьмем $x_n(t) = 1/n, y(t) = 0$.

Так как

$$\rho_{L_1}(Fx, Fy) = \int_0^1 \left| \int_0^1 t|x(s)|^{2/3}\, ds - \int_0^1 t|y(s)|^{2/3}\, ds \right| dt = \frac{1}{2}\left| \int_0^1 \left(|x(s)|^{2/3} - |y(s)|^{2/3}\right) ds \right|, \tag{1}$$

то получим $\rho_{L_1}(Fx_n, Fy) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{n^{2/3}} \le L \cdot \frac{1}{n}$, то есть $n^{1/3} \le 2L$, $\forall n \in \boldsymbol{N}$. Противоречие.

б) Покажем, что F является равномерно непрерывным.

Заметим, что функция $f(t) = \sqrt[3]{t^2}$ является равномерно непрерывной на $\boldsymbol{R}$ (она равномерно непрерывна на $[-2;2]$ по теореме Кантора и равномерно непрерывна на $(-\infty; -1] \cup [1; \infty)$, так как $|f'(t)| = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{|t|}} \le \frac{2}{3}$ при $|t| \ge 1$). Равномерная непрерывность функции $f(t) = \sqrt[3]{t^2}$ означает, что

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0:\ \forall t, t_1 \in R:\ |t - t_1| < \delta \Rightarrow \left|t^{2/3} - t_1^{2/3}\right| < \varepsilon.$$

Теперь если $\rho_C(x, y) < \delta$, то $|x(s) - y(s)| < \delta \quad \forall s \in [-5;2]$, тогда, в силу равенства (1),

$$\rho_{L_1}(Fx, Fy) \le \frac{1}{2}\int_0^1 \left|x^{2/3}(s) - y^{2/3}(s)\right| ds < \frac{1}{2}\varepsilon < \varepsilon.$$

Тема 5
Компактные множества в метрических пространствах

1.5.1 Выяснить, является ли множество M предкомпактным, компактным в $C[0;1]$ (таблица 1.5.1).

*Таблица 1.*5.1

вариант	M	вариант	M
1	$\{at^{\alpha} \mid 1 \le \alpha \le 10, \lvert a\rvert \le 10\}$	4	$\{a\sin(t+b) \mid 0 \le a, b \le 1\}$
2	$\{at^{\alpha} \mid 0 \le \alpha \le 1; 0 < a < 1\}$	5	$\{\frac{t+a}{t+b} \mid 1 \le a, b \le 2\}$
3	$\{\cos at \mid -1 \le a \le 1\}$	6	$\{arctg\,(at+b) \mid a \le 1, b > 1\}$

1.5.2 Является ли множество M предкомпактным в l_p (таблица1.5.2)?

Таблица 1.5.2

вариант	p	M
1	2	$\{x \mid \lvert x(k)\rvert < \frac{1}{k}, k \in N\}$
2	1	$\{x \mid \frac{1}{k^2} < \lvert x(k)\rvert < \frac{2}{k^2}, k \in N\}$
3	2	$\{x \mid \lvert x(k)\rvert \le \frac{1}{2^k}, k \in N\}$
4	2	$\{x \mid \frac{1}{2^k} \le \lvert x(k)\rvert \le \frac{1}{2^{k+1}}, k \in N\}$
5	1	$\{x \mid x(2k) = 0, 0 < x(2k+1) \le \frac{1}{2^k}, k \in N\}$
6	1	$\{x \mid \lvert x(k)\rvert < \frac{1}{k^{\alpha}}, \frac{3}{2} \le \alpha \le \frac{5}{2}\}$

Примеры решения типовых задач

1 Выяснить, являются ли данные множества предкомпактными, компактными в $C[0;1]$.

Пример 1 а) $M = \{ae^{-\alpha t+b} \mid a, b, \alpha \in [0;1]\}$;

б) $M_1 = \{ae^{-\alpha t+b} | a,b \in [0;1], \alpha \in (0;1)\}$.

Решение Проверим для множества *M* условия теоремы Арцела-Асколи.

Рассмотрим функцию $f(t,a,b,\alpha) = ae^{-\alpha t+b}$. Пусть $K = [0;1]^3$. Тогда f непрерывна на $[0;1] \times K$ и $M = \{f(\cdot;s) | s \in K\}$.

Множество $[0;1] \times K$ является компактом. По теореме Вейерштрасса, f ограничена на $[0;1] \times K$, т.е. $\exists C \in \boldsymbol{R}$: $\forall t \in [0;1]$ $\forall (a,b,\alpha) \in [0;1]^3$ справедливо неравенство $\left|ae^{-\alpha t+b}\right| \le C$. Значит, *M* − равномерно ограничено (впрочем, легко проверить и непосредственно, что при наших условиях $\left|ae^{-\alpha t+b}\right| \le e$).

Проверим равностепенную непрерывность множества *M*. По теореме Кантора, f равномерно непрерывна на $[0;1] \times K$. Если обозначить через $s = (a,b,\alpha)$ произвольную точку из *K*, то равномерная непрерывность f означает, что $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta > 0$: $\forall t_1, t_2 \in [0;1]$, таких, что $|t_1 - t_2| < \delta$, и $\forall s_1, s_2 \in K$, таких, что $\rho(s_1,s_2) < \delta$ (ρ обозначает евклидову метрику в *K*), справедливо неравенство

$$\left|f(t_1,s_1) - f(t_2,s_2)\right| < \varepsilon .$$

Отсюда следует равностепенная непрерывность множества *M* (см. определение). Значит, по теореме Арцела-Асколи, *M* − предкомпактно.

Для доказательства компактности множества *M* теперь достаточно проверить его замкнутость в $C[0;1]$. Но это тоже следует из непрерывности функции f. В самом деле, если *x* − предельная точка множества *M*, то найдется последовательность $f(\cdot;s_n)$ функций из *M,* сходящаяся к *x* в $C[0;1]$. По теореме Больцано-Вейерштрасса, из последовательности s_n точек множества *K* можно выбрать подпоследовательность s_{n_l}, сходящуюся к точке $s \in K$. Тогда поточечно $f(t,s_{n_l}) \to f(t,s)$, а потому, в силу единственности предела, $x = f(\cdot;s) \in M$. Итак, *M* – компакт.

Далее, так как $M_1 \subset M$, то множество M_1 предкомпактно. Но M_1 не является компактом, так как не замкнуто в $C[0;1]$. Действительно, функции $x_n(t) = e^{-t/n} \in M_1$, но предел этой последовательности $x_0(t) = 1$ не принадлежит множеству M_1.

Пример 2 $M = \{t^n | n \in \boldsymbol{N}\}$.

Решение

1 способ Это множество является равномерно ограниченным, но не является равностепенно непрерывным. Действительно, возьмем $\varepsilon = 1/4$. Тогда $\forall\delta > 0$ найдется такое натуральное *n*, что точки $t_1 = 1$ и $t_2 = 1/\sqrt[n]{2} \in [0;1]$ удовлетворяют неравенству $|t_1 - t_2| = |1 - 1/\sqrt[n]{2}| < \delta$, но в то же время $|t_1^n - t_2^n| = |1 - 1/2| > \varepsilon$. Значит, по теореме Арцела-Асколи, *M* не является предкомпактным, а потому и компактным множеством.

2 способ *M* не является предкомпактным, так как из него нельзя извлечь сходящейся в $C[0;1]$ подпоследовательности. Действительно, все его подпоследовательности сходятся к разрывной функции.

Пример 3 $M = \{\sin(t+a) \mid a \in \boldsymbol{R}\}$.

Решение Множество *M* равномерно ограничено, так как

$$\forall t \in \boldsymbol{R} \quad \forall a \in \boldsymbol{R} \quad |\sin(t+a)| \le 1.$$

Множество *M* равностепенно непрерывно, так как $\forall\varepsilon > 0 \quad \forall a \in \boldsymbol{R}$ и $\forall t_1, t_2 \in [0;1]$, таких, что $|t_1 - t_2| < \varepsilon$, имеем

$$|\sin(t_1 + a) - \sin(t_2 + a)| = \left|2\sin\frac{t_1 - t_2}{2}\cos\frac{t_1 + t_2 + 2a}{2}\right| \le |t_1 - t_2| < \varepsilon .$$

Значит, по теореме Арцела-Асколи, *M* − предкомпактно.

Покажем, что *M* содержит все свои предельные точки. Пусть *x* есть предельная точка множества *M*, $\sin(t + a_k) \to x(t)$ равномерно на $[0;1]$. В силу периодичности синуса, можно считать, что $a_k \in [0;2\pi)$. При этом промежуток $[0;2\pi)$ удобно отождествлять с фактор-группой $\boldsymbol{R}/2\pi\boldsymbol{Z}$, то есть с единичной окружностью, наделенной естественной топологией, в которой она компактна. (Отличие здесь в том, что если последовательность $a_k \in [0;2\pi)$ в $\boldsymbol{R}$ сходится к 2π, то в этой топологии предел считается равным 0). Заметим, что в этой топологии существует $\lim\limits_{k\to\infty} a_k = a \in [0;2\pi)$. Действительно, если допустить противное, то найдутся две подпоследовательности a'_k и a''_k, имеющие различные пределы a' и $a'' \in [0;2\pi)$ соответственно. Но тогда $x(t) = \sin(t + a') = \sin(t + a'')$, откуда $a' = a''$. Противоречие. Следовательно, $x(t) = \sin(t + a) \in M$.

Значит, *M* – замкнутое множество, откуда следует, что *M* – компакт.

Пример 4 $M = \{\sin nt \mid n \in \boldsymbol{N}\}$.

Решение Множество *M* равномерно ограничено, так как

$$\forall t \in \boldsymbol{R} \quad \forall n \in \boldsymbol{N} \quad |\sin nt| \le 1.$$

Но множество не является равностепенно непрерывным. Действительно, возьмем $\varepsilon = 1/2$. Тогда $\forall\delta > 0$ найдется такое натуральное *n*, что точки $t_1 = 0$ и $t_2 = \pi/2n \in [0;1]$ удовлетворяют неравенству $|t_1 - t_2| = |\pi/2n| < \delta$, но в то же время $|\sin nt_1 - \sin nt_2| = \sin\pi/2 = 1 > \varepsilon$. Значит, по теореме Арцела-Асколи, *M* не является предкомпактным, а потому и компактным множеством.

2 Является ли множество *M* предкомпактным в l_1?

Пример 1 $M = \{ x \in l_1 | \ |x(2k)| < \dfrac{1}{2^k}, |x(2k+1)| < \dfrac{1}{3^{2k}}, |x(1)| = 1 \}$.

Решение Проверим критерий предкомпактности в l_1.

1) Множество *M* является ограниченным, поскольку $\forall n \geq 2$ $|x(n)| < \dfrac{1}{2^{n/2}}$, а потому $\forall x \in M$ $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |x(n)| < 1 + \sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{1}{2^{n/2}} = 2 - \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

2) Так как ряд $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{1}{(\sqrt{2})^n}$ сходится, то его остаток стремится к нулю, то есть $\forall\varepsilon > 0$ $\exists N_\varepsilon \in N:$ $\sum\limits_{n=N_\varepsilon+1}^{\infty} \dfrac{1}{(\sqrt{2})^n} < \varepsilon$.

Поэтому $\forall\varepsilon > 0$ $\exists N_\varepsilon \in N:$ $\forall x \in M$ $\sum\limits_{n=N_\varepsilon+1}^{\infty} |x(n)| < \sum\limits_{n=N_\varepsilon+1}^{\infty} \dfrac{1}{(\sqrt{2})^n} < \varepsilon$.

Значит, множество *M* − предкомпактно.

Тема 6
Сжимающие отображения

1.6.1 Является ли отображение F метрического пространства X в себя сжимающим? Найти x_3, где $x_{k+1}=F(x_k), x_0=0$. Оценить расстояние от x_3 до неподвижной точки в случае, если F является сжимающим (таблица 1.6.1).

*Таблица 1.*6.1

вариант	X	F
1	$l_{8/3}$	$F(x)=\left(0,\frac{x(1)}{2}+\frac{1}{2},\frac{x(2)}{4}+\frac{1}{3},...,\frac{x(k)}{2^k}+\frac{1}{k+1},...\right)$
2	l_∞	$F(x)=(\frac{x(2)}{2}+\frac{1}{2},\frac{x(3)}{3}+\frac{1}{4},...,\frac{x(k)}{k}+\frac{1}{2^{k-1}},...)$
3	$C[-1;1]$	$(Fx)(t)=tx(t)+\exp(\sin\pi t)$
4	l_{21}	$F(x)=(\sin(\pi/6)x(1)+1,...,(\sin(\pi/6))^k x(k)+1/k,...)$
5	$C[-1;1]$	$(Fx)(t)=\frac{1}{2}x(t^2)+t$
6	$L_2[0;1]$	$(Fx)(t)=\frac{1}{8}x(\sqrt{t})+1$

1.6.2 Применим ли принцип сжимающих отображений к заданному интегральному уравнению в пространстве X при $\lambda=\lambda_1$, $\lambda=\lambda_2, \lambda=\lambda_3$? При $\lambda=\lambda_1$ с точностью до 0,01 найти приближенное решение и сравнить его с точным решением (таблица 1.6.2).

Таблица 1.6.2

вариант	X	λ_1	λ_2	λ_3	Уравнение
1	2	3	4	5	6
1	$C[0;1]$	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{8}$	$\sqrt{\frac{3}{2}}$	$x(t)=\lambda\int_0^1 t^{1/4}sx(s)ds+t^2$
2	$C[-1;1]$	$\frac{1}{8}$	$-\frac{1}{10}$	$\frac{3}{2}$	$x(t)=\lambda\int_{-1}^1 (t^2-1)s^2x(s)ds+t$

Окончание таблицы 1.6.2

1	2	3	4	5	6
3	$C[-2;2]$	$\frac{1}{45}$	$-\frac{1}{40}$	$\frac{2}{15}$	$x(t)=\lambda\int_{-2}^{2}(1+s)(1-t)x(s)ds+t$
4	$C[-1;1]$	$\frac{1}{20}$	$-\frac{1}{12}$	1	$x(t)=\lambda\int_{-1}^{1}tsx(s)ds+2$
5	$C[0;1]$	$\frac{1}{6}$	$-\frac{1}{8}$	$\frac{2}{3}$	$x(t)=\lambda\int_{0}^{1}t(1+s)x(s)ds-5$
6	$C[-1;1]$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{5}{2}$	$x(t)=\lambda\int_{-1}^{1}t^2s^2x(s)ds+t^3$

Примеры решения типовых задач

1 Является ли отображение F метрического пространства X в себя сжимающим? Найти x_3, где $x_{k+1}=F(x_k), x_0=0$. Оценить расстояние от x_3 до неподвижной точки, если F является сжимающим.

Пример 1 $X=C[-1;1], (Fx)(t)=1/3\sin x(t)+e^t$.

Решение Оценим расстояние в $C[-1;1]$

$$\rho(Fx,Fy)=\max_{-1\le t\le 1}\left|\frac{1}{3}\sin x(t)-\frac{1}{3}\sin y(t)\right|=\max_{-1\le t\le 1}\frac{1}{3}\left|\sin x(t)-\sin y(t)\right|=$$

$$=\max_{-1\le t\le 1}\frac{1}{3}\left|2\sin\frac{x(t)-y(t)}{2}\cdot\cos\frac{x(t)+y(t)}{2}\right|\le\frac{1}{3}\max_{-1\le t\le 1}\left|x(t)-y(t)\right|=\frac{1}{3}\rho(x,y)$$

(мы воспользовались неравенством $|\sin x|\le|x|$). Значит, F является сжимающим отображением с константой Липшица $\alpha=1/3$.

Построим последовательность $x_{k+1}=F(x_k)$. По условию $x_0=0$, поэтому $x_1=F(x_0)=e^t$, $x_2=F(x_1)=\frac{1}{3}\sin e^t+e^t, x_3=F(x_2)=\frac{1}{3}\sin(\frac{1}{3}\sin e^t+e^t)+e^t$.

А так как $\rho(x_n;x^*)\le\frac{\alpha^n}{1-\alpha}\rho(x_1;x_0)$, где x^* – неподвижная точка, то

$$\rho(x_3;x^*)\le\frac{(1/3)^3}{1-1/3}.\max_{-1\le t\le 1}\left|e^t\right|=\frac{e\times 1/27}{2/3}=\frac{e}{18}<\frac{2,72}{18}\approx 0,1511.$$

Пример 2 $X=l_4,\ f(x)=(1,\frac{x(3)}{5},\frac{x(4)}{6},\frac{x(5)}{7},\ldots)$.

Решение Оценим расстояние в l_4.

$$\rho(f(x), f(y)) = \left(\sum_{k=3}^{\infty} \left| \frac{x(k)}{k+2} - \frac{y(k)}{k+2} \right|^4 \right)^{1/4} \le \frac{1}{5} \rho(x, y).$$

Значит, F – сжимающее отображение с константой $\alpha = 1/5$.

По условию, $x_0 = (0,0,0,...)$. Тогда $x_1 = (1,0,0,...)$, $x_2 = x_3 = (1,0,0,...)$ а потому

$$\rho(x_3; x^*) \le \frac{(1/5)^3}{1-1/5} \cdot \rho(x_1; x_0) = 0,01$$

(на самом деле, как легко проверить, x_3 является неподвижной точкой).

Пример 3 $X = L_4[-1;1]$, $(Fx)(t) = \sqrt[3]{t} \cdot x(t) + \ln(t+2)$.

Решение Допустим, что отображение F является сжимающим, то есть $\exists \alpha \in [0;1) : \forall x, y \in X \quad \rho(Fx, Fy) \le \alpha \rho(x, y)$.

При $y = 0$ из этого неравенства следует, что

$$\forall x \in X \quad \int_{-1}^{1} t^{4/3} \cdot |x(t)|^4 \, dt \le \alpha^4 \int_{-1}^{1} |x(t)|^4 \, dt. \tag{1}$$

Подставив $x(t) = \sqrt[4]{n} \times \chi_{[1-\frac{1}{n};1]}(t)$ в левую часть неравенства (1), получим

$$\int_{1-\frac{1}{n}}^{1} t^{4/3} \cdot n dt = \left. \frac{3nt^{7/3}}{7} \right|_{1-\frac{1}{n}}^{1} = \frac{3n}{7}\left(1 - \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{7/3}\right) \sim \frac{3n}{7} \cdot \frac{7}{3n} = 1 \text{ при } n \to \infty$$

(мы воспользовались эквивалентностью $(1+x)^{\alpha} - 1 \sim \alpha x$ при $x \to 0$).

Правая же часть неравенства (1), как легко проверить, при этом значении x равна α^4. Следовательно, неравенство (1) при указанных x,y и $n \to \infty$ примет вид: $1 \le \alpha^4$, противоречие. Значит, F не является сжимающим. (Аналогичное решение получается и при $x = \chi_{[1-\frac{1}{n};1]}(t)$).

2 Применим ли принцип сжимающих отображений к заданному интегральному уравнению в пространстве X при $\lambda_1 = \frac{1}{6}, \lambda_2 = -\frac{1}{3}, \lambda_3 = 2$? При $\lambda = \lambda_1$ с точностью до 0,01 найти приближенное решение и сравнить его с точным решением.

Пример 1 $X = C[0;1]$, $x(t) = \lambda \int_0^1 ts \cdot x(s) ds + 1$.

(2)

Решение Определим отображение $f: C[0;1] \to C[0;1]$ по формуле

$$(f(x))(t) = \lambda \int_0^1 ts \cdot x(s)ds + 1.$$

Тогда исходное уравнение запишется в виде $x = f(x)$, и искомое решение есть неподвижная точка отображения f. Метрическое пространство $C[0;1]$ является полным, поэтому если мы покажем, что f – сжимающее отображение $C[0;1]$ в себя, то можно будет применить принцип сжимающих отображений.

То, что отображение f непрерывную на $[0;1]$ функцию переводит в непрерывную, в данном случае очевидно (а в общем следует из свойств интеграла, зависящего от параметра). Определим, при каких λ отображение f является сжимающим.

Известно, что отображение

$$(Ax)(t) = \lambda \int_a^b K(s,t)x(s)ds + g(t)$$

является сжимающим в $C[a;b]$, если $|\lambda| < \frac{1}{M(b-a)}$, где $M = \max_{s,t\in[a;b]} |K(s,t)|$. При этом константа Липшица $\alpha = M \cdot |\lambda| \cdot (b-a)$. (Заметим, что это утверждение дает лишь достаточное условие сжимаемости). В данном случае $K(s,t) = ts$, $M = \max_{s,t\in[0;1]} |ts| = 1$. Следовательно, f является сжимающим при $|\lambda| < 1$, то есть, в частности, при $\lambda = \lambda_1$ и $\lambda = \lambda_2$.

Докажем, что f не является сжимающим при $\lambda_3 = 2$. Если допустить, что f – сжимающее, то для $\forall x, y \in X$ и некоторого $\alpha \in [0;1)$ должно выполняться неравенство

$$\max_{0\le t\le 1} \left| 2\int_0^1 ts(x(s) - y(s))ds \right| \le \alpha \cdot \max_{0\le t\le 1} |x(t) - y(t)|.$$

При $y(t) = 0$, $x(t) = 1$ последнее неравенство примет вид:

$$2\left|\int_0^1 sx(s)ds\right| \le \alpha.$$

Вычислив интеграл в левой части, получим $1 \le \alpha$. Это противоречие доказывает, что f не является сжимающим при $\lambda_3 = 2$.

Решим уравнение (2) при $\lambda = 1/6$. При этом λ отображение f является сжимающим, а потому для нахождения приближенного решения можно воспользоваться методом итераций (последовательных приближений).

Поскольку x_0 выбирается произвольно, возьмём $x_0(t) = 0$. Дальнейшие приближения находятся по формулам $x_1 = f(x_0)$, $x_2 = f(x_1), \ldots, x_{n+1} = f(x_n), \ldots$.

Установим номер k, при котором элемент x_k будет давать точность приближения 0,01. Используем оценку погрешности (x − точное решение)

$$\rho(x_n, x) \le \frac{\alpha^n}{1-\alpha} \times \rho(x_0, x_1) \le 0,01 .$$

В нашем случае $\alpha = |\lambda| M(b-a) = 1/6$. Кроме того, легко подсчитать, что $x_1(t) = 1$. Следовательно, для нахождения нужного числа итераций имеем неравенство

$$\rho(x_n, x) \le \left(\frac{1}{6}\right)^n \times \frac{6}{5} \times \le \frac{1}{100},$$

Поскольку $k = 3$ ему удовлетворяет, то x_3 будет приближенным решением исходного уравнения с точностью 0,01. Найдём x_3:

$$x_2(t) = f(x_1)(t) = \frac{1}{6} t \int_0^1 s ds + 1 = \frac{1}{12} t + 1,$$

$$x_3(t) = f(x_2)(t) = \frac{t}{6} \int_0^1 s \left(\frac{1}{12} s + 1\right) ds + 1 = \frac{19}{204} t + 1 \approx 0,093t + 1 .$$

Итак, приближённое решение с нужной точностью есть

$$x_3(t) = \frac{19}{204} t + 1.$$

Найдем точное решение данного уравнения. Из (2) следует, что его решение имеет вид

$$x(t) = \lambda \times c \times t + 1, \text{ где } c = \int_0^1 s x(s) ds, \qquad (3)$$

то есть вид $x(t) = \frac{c}{6} t + 1$. Подставив $x(t)$ в (2), получим

$$\frac{c}{6} t + 1 = \frac{t}{6} \int_0^1 s \left(\frac{c}{6} s + 1\right) ds + 1 .$$

Отсюда $c = \int_0^1 \left(\frac{c}{6} s^2 + s\right) ds$, $c = \frac{c}{18} + \frac{1}{2}$, $c = \frac{9}{17}$. Следовательно, точное решение есть

$$x(t) = \frac{9}{102} t + 1 \approx 0,088t + 1.$$

Сравним его с приближённым:

$$\rho(x_3; x) = \max_{0 \le t \le 1} \left| \frac{9}{102} t + 1 - \frac{19}{204} t - 1 \right| < \frac{1}{100} .$$

Примечание Первую часть решения можно сократить, если воспользоваться тем фактом, что норма линейного оператора

$$(A_1 x)(t) = \int_a^b k(s,t) x(s) ds$$

в пространстве $C[0;1]$ дается формулой:

$$\|A_1\| = \max_{t\in[a;b]} \int_a^b |k(t,s)| ds .$$

Поскольку норма есть *точная* константа в неравенстве ограниченности, отображение A_1 является сжимающим тогда и только тогда, когда $\|A_1\| < 1$. То же верно и для отображения $f(x) = A_1 x + g$ (почему?).

2 Линейные нормированные пространства и операторы в них

Тема 1
Линейные нормированные пространства

2.1.1 Проверить, является ли функция p нормой в пространстве X. Образует ли пара (X,ρ), где $\rho(x,y)=p(x-y)$, метрическое пространство (таблица 2.1.1)?

Таблица 2.1.1

вариант	X	$p(x)$
1	$C^{(n)}[0;1]$	$\sum\limits_{k=0}^{n}\max\limits_{0\le t\le 1}\left\|x^{(k)}(t)\right\|$
2	l_∞	
3	$B(R)$	$\sup\{\|x(t)\| \mid t\in R\}$
4	$C^{(1)}[0;1]$	$\int\limits_0^1 \|x(t)\|dt$
5	l_1	$\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^{-1}\|x(n)\|$
6	$C^{(1)}[a;b]$	$\|x(a)\| + \max\{\|x'(t)\| : t\in[a;b]\}$

2.1.2 Является ли множество A выпуклым в пространстве X (таблица 2.1.2)?

Таблица 2.1.2

вариант	X	A
1	$C[0;1]$	неубывающие функции
2	l_2	$\{x\in l_2 \mid \|x(n)\| < 2^{-n}, n\in \mathbf{N}\}$
3	$C[a;b]$	многочлены степени n
4	l_1	$\left\{x\in l_1 \mid \|x(n)\| \le \frac{1}{n^2}, n\in \mathbf{N}\right\}$
5	$C^{(1)}[0;1]$	многочлены степени $\le k$
6	$C^{(1)}[a;b]$	$\{x\in C^{(1)}[a;b] \mid \|x(t)\| + \|x'(t)\| \le 1, t\in[a;b]\}$

2.1.3 Проверить, является ли данная последовательность векторов (x_k) в бесконечномерном пространстве X линейно независимой (таблица 2.1.3).

Таблица 2.1.3

вариант	X	x_k
1	l_3	$x_k = \left(\frac{1}{k+1}, \frac{1}{(k+1)^2}, \frac{1}{(k+1)^3}, \dots\right), k = 1,\dots,p$
2	l_∞	$x_k = \left(\frac{1}{k+1}, \frac{1}{(k+1)^2}, \frac{1}{(k+1)^3}, \dots\right), k = 1,\dots,p$
3	$C[a;b]$	$x_k(t) = t^k, k = 0,1,\dots,p$
4	$C[a;b]$	$x_k(t) = e^{itk}, k = 0,1,\dots,p$
5	$L_2[a;b]$	$x_k(t) = (1 + D(t))\, t^k, k = 0,1,\dots,p, D -$ функция Дирихле
6	$C[0;1]$	$x_1(t) = \lvert 2t-1\rvert - \left\lvert 2t - \frac{1}{2}\right\rvert, x_2(t) = \lvert 4t-2\rvert + \lvert 4t-1\rvert, x_3(t) = \lvert 4t-1\rvert + \lvert 2t-1\rvert$

2.1.4 Привести пример последовательности $(x_n) \subset X \cap Y$, которая сходится в *X,* но не сходится в *Y*, если пространства *X* и *Y* наделены естественными нормами (таблица 2.1.4).

Таблица 2.1.4

вариант	1	2	3	4	5	6
X	l_∞	l_∞	c_0	$C[0;1]$	$L_1[0;1]$	l_2
Y	l_1	l_2	l_4	$C^{(1)}[0;1]$	$C[0;1]$	l_1

2.1.5 Являются ли нормы *p* и *q* эквивалентными в пространстве *E* (таблица 2.1.5)?

Таблица 2.1.5

вариант	E	p	q
1	2	3	4
1	l_2	$\sup\limits_{n\in N} \lvert x(n)\rvert$	$\left(\sum\limits_{n=1}^{\infty} \lvert x(n)\rvert^2\right)^{1/2}$
2	$C[0;1]$	$\max\limits_{t\in[0;1]} \lvert x(t)\rvert$	$\left(\int\limits_0^1 \lvert x(t)\rvert^2 dt\right)^{1/2}$
3	$C^{(1)}[0;1]$	$\max\limits_{t\in[0;1]} \lvert x(t)\rvert + \max\limits_{t\in[0;1]} \lvert x'(t)\rvert$	$\int\limits_0^1 \lvert x(t)\rvert dt$

Окончание таблицы 2.1.5

1	2	3	4
4	c	$\sup\limits_{n\in N}\lvert x(n)\rvert$	$\sup\limits_{n\in N}\dfrac{n\lvert x(n)\rvert}{n+1}$
5	$\boldsymbol{R}^n$	$\sup\limits_{1\le k\le n}\lvert x(k)\rvert$	$\sum\limits_{k=1}^{n}\lvert x(k)\rvert$
6	$C^{(1)}[0;1]$	$\max\limits_{t\in[0;1]}\lvert x(t)\rvert$	$\lvert x(0)\rvert+\max\limits_{t\in[0;1]}\lvert x'(t)\rvert$

2.1.6 Построить изоморфизм между фактор-пространством *L/M* и одним из стандартных линейных пространств (таблица 2.1.6).

Таблица 2.1.6

вариант	L	M
1	$C[-1;1]$	$\{x\in C[-1;1] \mid x(t)=0,\ t\in[0;1]\}$
2	$C[0;1]$	$\{x\in C[0;1] \mid x(0)=0\}$
3	$C^{\infty}[0;1]$	$\{x\in C^{\infty}[0;1] \mid x(0)=x'(0)=0\}$
4	l_1	$\{x\in l_1 \mid x_1+x_2=0\}$
5	$C^{(1)}[a;b]$	$\{x\in C^{(1)}[a;b] \mid x(a)=x(b)\}$
6	l_∞	$\{x\in l_\infty \mid x_1=x_3=0\}$

Примеры решения типовых задач

1 Является ли множество *A* выпуклым в пространстве *X*?

Пример 1 $X=c_0,\ A=\{x\in c_0 : \lvert x(1)\rvert+\lvert x(2)\rvert\le 1\}$.

Решение Воспользуемся определением выпуклости. Возьмем $\forall x,y\in A, \forall\lambda\in[0;1]$ и покажем, что $\lambda x+(1-\lambda)y\in A$.

Действительно, так как $\lvert x(1)\rvert+\lvert x(2)\rvert\le 1$ и $\lvert y(1)\rvert+\lvert y(2)\rvert\le 1$, то

$$\lvert\lambda x(1)+(1-\lambda)y(1)\rvert+\lvert\lambda x(2)+(1-\lambda)y(2)\rvert\le\lambda\lvert x(1)\rvert+(1-\lambda)\lvert y(1)\rvert+\lambda\lvert x(2)\rvert+(1-\lambda)\lvert y(2)\rvert=$$

$$=\lambda(\lvert x(1)\rvert+\lvert x(2)\rvert)+(1-\lambda)(\lvert y(1)\rvert+\lvert y(2)\rvert)\le\lambda+1-\lambda=1.$$

Значит, множество *A* является выпуклым.

2 Проверить, является ли заданная система векторов (x_k) в бесконечномерном пространстве *X* линейно независимой.

Пример 1 $X = C[a;b], \quad x_k(t) = (t-a)^k, \ k = 0,1,2,...n.$

Решение Покажем по определению, что система $1, t-a, (t-a)^2, ..., (t-a)^n$ является линейно независимой. Пусть

$$\alpha_0 \cdot 1 + \alpha_1 (t-a) + \alpha_2 (t-a)^2 + ... + \alpha_n (t-a)^n = 0 \ \forall t \in [a;b]. \qquad (1)$$

Подставив в это равенство $t = a$, получим $\alpha_0 = 0$, а потому

$$\alpha_1 (t-a) + \alpha_2 (t-a)^2 + ... + \alpha_n (t-a)^n = 0.$$

Сокращая на $t-a$ и снова полагая $t = a$, получим $\alpha_1 = 0$. Продолжая этот процесс, окончательно будем иметь $\alpha_0 = \alpha_1 = ... = \alpha_n = 0$.

Возможно другое решение: алгебраическое уравнение (1) не может иметь более *n* корней, если не все его коэффициенты равны нулю (почему?).

Пример 2 $X = C[0;1]$,

$$x_1(t) = \left|t - \frac{1}{2}\right| - \left|t - \frac{1}{3}\right|, \ x_2(t) = \left|t - \frac{1}{2}\right| + \left|t - \frac{1}{3}\right|, \ x_3(t) = |2t - 1| - |3t - 1|.$$

Решение Заметим, что $x_1(t) + x_2(t) = |2t - 1|$, $3(x_2(t) - x_1(t)) = 2|3t - 1|$.

Тогда $x_3(t) = x_1(t) + x_2(t) - \frac{1}{2} \cdot 3(x_2(t) - x_1(t)) = \frac{5}{2} x_1(t) - \frac{1}{2} x_2$, а значит, данные функции линейно зависимы.

3 Привести пример последовательности $(x_n) \subset X \cap Y$, сходящейся в *X*, но не сходящейся в *Y*, если пространства *X* и *Y* наделены естественными нормами.

Пример 1 $X = c_0, Y = l_1$.

Решение Рассмотрим последовательность $x_n = (1, 1/2, ..., 1/n, 0, 0, ...)$, принадлежащую пространству $X \cap Y$. В пространстве c_0 она сходится к вектору $x_0 = (1, 1/2, ..., 1/n, 1/(n+1), ...)$, так как

$$\rho_X(x_n, x_0) := \max_k |x_n(k) - x_0(k)| = 1/(n+1) \to 0 \text{ при } n \to \infty.$$

Допустим, что $\exists a \in l_1 : \rho_Y(x_n, a) \to 0, n \to \infty$.

Так как $\rho_X(x_n, a) = \max_k |x_n(k) - a(k)| \le \sum_{k=1}^{\infty} |x_n(k) - a(k)| = \rho_Y(x_n, a)$, то (x_n) сходится к *a* и в пространстве $X = c_0$. В силу единственности предела, отсюда следует, что $a=(1,1/2,...,1/n,...)$. Но $a\notin l_1$. Это противоречие доказывает, что в l_1 данная последовательность не сходится.

Пример 2 $X=L_1[0;1],\ Y=L_2[0;1].$

Решение Рассмотрим последовательность $x_n(t)=\begin{cases} n, 0\le t\le 1/n^2 \\ 0, 1/n^2<t\le 1\end{cases}$ в пространстве $X\cap Y$. Тогда в $L_1[0;1]$ имеем:

$\rho_{L_1}(x_n,0)=\int\limits_0^{1/n^2} ndt=1/n\to 0$ при $n\to\infty$, то есть $x_n\to 0$ в $L_1[0;1]$.

Допустим, что (x_n) сходится в $L_2[0;1]$ к некоторому a. В силу неравенства Коши-Буняковского,

$$\rho_{L_1}(x_n,a)=\int\limits_0^1 |x_n(t)-a(t)|dt\le\left(\int\limits_0^1 |x_n(t)-a(t)|^2 dt\right)^{1/2}=\rho_{L_2}(x_n,a).$$

Отсюда следует, что если $x_n\to a$ в $L_2[0;1]$, то $x_n\to a$ и в $L_1[0;1]$. В силу единственности предела, $a=0$. С другой стороны, легко проверить, что $\rho_{L_2}(x_n,0)=1$. Противоречие. Следовательно, в $L_2[0;1]$ данная последовательность не сходится.

Пример 3 $X=C[0;1], Y=C^{(2)}[0;1].$

Решение Рассмотрим последовательность $x_n(t)=t^n/n\in X\cap Y$. В $C[0;1]$ имеем $x_n\to 0$, но в $C^{(2)}[0;1]$ $\rho_Y(x_n,0)=\frac{1}{n}+1+(n-1)\nrightarrow 0$ ($n\to\infty$). Значит, $x_n\nrightarrow 0$ в $C^{(2)}[0;1]$. Воспользовавшись неравенством: $\rho_{C[a;b]}(x_n,a)\le\rho_{C^{(2)}[a;b]}(x_n,a)$ и рассуждая, как в предыдущих примерах, получим, что (x_n) не сходится в $C^{(2)}[0;1]$.

4 Выяснить, являются ли нормы *p* и *q* эквивалентными в данном пространстве *X*.

Пример 1 $X=l_1$, $p(x)=\sup\limits_{n\in N}|x(n)|$, $q(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}|x(n)|$.

Решение Очевидно, $\forall x\in l_1\ \ p(x)\le q(x)$. Допустим теперь, что

$$\exists a>0:\ \forall x\in l_1\ \ q(x)\le a\cdot p(x),\ \text{т. е. } \sum_{n=1}^{\infty}|x(n)|\le a\sup_{n\in N}|x(n)|,\ \forall x\in l_1.$$

При $x=\Big(\underbrace{1,1,\ldots,1}_{n\,раз},0,0,\ldots\Big)\in l_1$ последнее неравенство примет вид: $n\le a,\ \forall n\in \boldsymbol{N}$.

Полученное противоречие доказывает, что нормы p и q не эквивалентны.

Пример 2 $X=C[0;1],\ p(x)=\max\limits_{0\le t\le 1}|x(t)|,\ q(x)=\int\limits_0^1|x(t)|dt.$

Решение Заметим, что $\forall x\in C[0;1]\ \ q(x)=\int\limits_0^1|x(t)|dt\le\max\limits_{0\le t\le 1}|x(t)|=p(x)$.

Допустим, что $\exists a>0:\ \forall x\in C[0;1]\quad p(x)\le a\cdot q(x)$, то есть $\max\limits_{0\le t\le 1}|x(t)|\le a\cdot\int\limits_0^1|x(t)|dt$, и положим здесь $x(t)=t^n,n\in \boldsymbol{N}$ $x(t)=t^n,n\in N$. Тогда последнее неравенство примет вид $1\le a\times\frac{1}{n}$, т. е. $n\le a,\ \forall n\in \boldsymbol{N}$ $n\le a,\ \forall n\in \boldsymbol{N}$. Полученное противоречие показывает, что нормы p и q не эквивалентны.

Пример 3 $X=\boldsymbol{R}^n,\ p(x)=\sum\limits_{k=1}^{n}|x(k)|,\ q(x)=\left(\sum\limits_{k=1}^{n}x^2(k)\right)^{1/2}$.

Решение Так как $\forall k=1,\ldots,n\ \ |x(k)|\le\left(\sum\limits_{k=1}^{n}x^2(k)\right)^{1/2}$, то

$$\sum_{k=1}^{n}|x(k)|\le n\cdot\left(\sum_{k=1}^{n}x^2(k)\right)^{1/2},\ \text{то есть }\ p(x)\le n\times q(x).$$

С другой стороны, так как

$$|x(1)|^2+|x(2)|^2+\ldots+|x(n)|^2\le(|x(1)|+|x(2)|+\ldots+|x(n)|)^2,$$

то $\left(\sum\limits_{k=1}^{n}x^2(k)\right)^{1/2}\le\sum\limits_{k=1}^{n}|x(k)|$, т.е. $q(x)\le p(x),\ \forall x\in \boldsymbol{R}^n$.

Итак, мы доказали, что p и q – эквивалентные нормы.

Пример 4 $X=L_2[0;1],\ p(x)=\int\limits_0^1|x(t)|dt,\ \ q(x)=\left(\int\limits_0^1|x(t)|^2dt\right)^{1/2}$.

Решение В силу неравенства Коши-Буняковского, $\forall x\in X\ \ p(x)\le q(x)$.

Допустим, что $\exists a > 0 : \forall x \in X \quad q(x) \le a \cdot p(x)$. Возьмем $x(t) = \begin{cases} n, t \in [0;1/n] \\ 0, t \in (1/n;1]. \end{cases}$.

Тогда $q(x) = \sqrt{n}, p(x) = 1$, и последнее неравенство примет вид: $\sqrt{n} \le a$, $\forall n \in \boldsymbol{N}$, что невозможно ни при каком a. Значит, нормы p и q не эквивалентны.

5 Построить изоморфизм между фактор-пространством L/M и одним из стандартных линейных пространств.

Пример 1 $L = c,\ M = \{ x \in c \mid x_1 = x_2 = 0 \}$.

Решение Возьмем произвольный элемент $x \in c$. Его класс эквивалентности есть

$$[x] = \{ y \in c \mid x - y \in M \} = \{ y \in c \mid x_1 - y_1 = x_2 - y_2 = 0 \} = \{ y \in c \mid x_1 = y_1, x_2 = y_2 \}.$$

Это равенство показывает, что отображение $f : L/M \to \boldsymbol{R}^2,\ f([x]) = (x_1; x_2)$ корректно определено и инъективно. Очевидно также, что оно линейно и является сюръекцией (проверьте). Значит, f – изоморфизм линейных пространств L/M и $\boldsymbol{R}^2$.

Тема 2

Линейные ограниченные операторы в банаховых пространствах

2.2.1 Пусть X,Y – нормированные пространства. Выяснить, совпадет ли область определения $D(A)=\{x\in X \mid Ax\in Y\}$ оператора A с нормированным пространством X. Является ли оператор A линейным, непрерывным оператором из $D(A)$ в Y (таблица 2.2.1)?

Таблица 2.2.1

вариант	X	Y	A
1	$C[-3;-1]$	$C[-3;-1]$	$(Ax)(t)=\sqrt[3]{x(t)}$
2	$L_2[0;1]$	$L_2[0;1]$	$(Ax)(t)=\frac{1}{\sqrt{t}}x(t)$
3	$L_8[0;1]$	$\boldsymbol{R}$	$Ax=\int_0^1 \lvert x(t)\rvert^8\,dt$
4	$C[-1;2]$	$C[-1;2]$	$(Ax)(t)=\int_0^1 x^2(s)\,ds$
5	l_3	$\boldsymbol{C}$	$Ax=\sum_{k=1}^{\infty}\lvert x(k)\rvert^3$
6	l_3	l_3	$Ax=(x(1),2x(2),\ldots kx(k),\ldots)$

2.2.2 Доказать, что оператор умножения $A: X\to Y$ является линейным ограниченным, и найти его норму (таблица 2.2.2).

Таблица 2.2.2

вариант	X	Y	A
1	$L_{3/2}[-1;1]$	$L_{3/2}[-1;1]$	$(Ax)(t)=\sqrt[3]{1+t}\,x(t)$
2	$C[-2;1]$	$C[-2;1]$	$(Ax)(t)=(t^3-1)^2x(t)$
3	$L_{5/4}[1;2]$	$L_{5/4}[1;2]$	$(Ax)(t)=(t^2-t^4)x(t)$
4	$L_3[0;1]$	$L_3[0;1]$	$(Ax)(t)=(t^4-t^5)x(t)$
5	$L_1[-1;1]$	$L_1[-1;1]$	$(Ax)(t)=\cos\pi t\,x(t)$
6	$C[-1;1]$	$C[0;1]$	$(Ax)(t)=(t^4-t^2)x(t)$

2.2.3 Доказать, что диагональный оператор, действующий из X в Y, является линейным ограниченным, и найти его норму (таблица 2.2.3).

Таблица 2.2.3

вариант	X	Y	A
1	$l_{7/3}$	$l_{7/3}$	$Ax=(\sqrt{2}x(1),\sqrt[3]{3}x(2),\ldots,\sqrt[k+1]{k+1}x(k),\ldots)$
2	$l_{5/4}$	$l_{5/4}$	$Ax=(\frac{x(1)}{2},\frac{x(2)}{\sqrt{2}},\ldots,\frac{x(k)}{\sqrt[k]{2}},\ldots)$
3	$l_{3/2}$	$l_{3/2}$	$Ax=((1+1)x(1),\ldots,(1+1/k)x(k),\ldots)$
4	$l_{5/2}$	$l_{5/2}$	$Ax=(\frac{x(1)}{5},\frac{x(2)}{5^2},\ldots,\frac{x(k)}{5^k},\ldots)$
5	l_1	l_1	$Ax=(0,0,\frac{x(3)}{2},\frac{x(4)}{2^2},\ldots,\frac{x(k)}{2^{k-2}},\ldots)$
6	$l_{5/4}$	$l_{5/4}$	$Ax=(0,x(1),1/2x(2),\ldots,(1-1/k)x(k),\ldots)$

2.2.4 Доказать, что оператор данный замены переменной, действующий из X в Y, является линейным ограниченным, и найти его норму (таблица 2.2.4).

Таблица 2.2.4

вариант	X	Y	A
1	$C[-1;1]$	$C[-1;1]$	$(Ax)(t)=(\sin^2\pi t)x(\sqrt[3]{t})$
2	$C[-1;1]$	$C[-1;1]$	$(Ax)(t)=\sin\pi t\cdot x(\sqrt[7]{t})$
3	$C[-1;0]$	$C[-1;0]$	$(Ax)(t)=t^2\sin t\cdot x(t^3)$
4	$C[0;1]$	$C[0;1]$	$(Ax)(t)=t^2x(\sqrt{t})$
5	$C[-1;1]$	$C[0;1]$	$(Ax)(t)=(t^2-t)x(t^2)$
6	$L_4[0;1]$	$L_4[0;1]$	$(Ax)(t)=tx(t^{3/2})$

2.2.5 Доказать, что интегральный оператор, действующий из X в Y, является линейным ограниченным, и найти его норму (таблица 2.2.5).

Таблица 2.2.5

вариант	X	Y	A
1	2	3	4
1	$C[0;1]$	$C[0;1]$	$(Ax)(t)=\int_0^1\sin\pi(t-s)x(s)ds$
2	$C[-2;1]$	$C[1;3]$	$(Ax)(t)=\int_{-2}^1 e^{t+s}sx(s)ds$
3	$C[-3;2]$	$C[-3;1]$	$(Ax)(t)=\int_{-3}^2 s^4 signs\cdot\cos t\cdot x(s)ds$
4	$C[-1;1]$	$C[0;2]$	$(Ax)(t)=\int_{-1}^1 s^3\ln(1+t)x(s)ds$

Окончание таблицы 2.2.5

1	2	3	4
5	$C[0;1]$	$C[-1;2]$	$(Ax)(t)=\int_0^1 (s-1/2)\cos t\cdot x(s)ds$
6	$C[0;1]$	$C[-1;2]$	$(Ax)(t)=\int_0^{1/2} (1+t-3s)x(s)ds$

2.2.6 Для последовательности операторов $(A_n)\subset LB(X,Y),$ $X,Y\in Norm$ и $A\in LB(X,Y)$ установить: 1) сходится ли (A_n) поточечно (сильно) к оператору A; 2) сходится ли (A_n) по норме к оператору A (таблица 2.2.6).

Таблица 2.2.6

вариант	X	Y	A_n	A
1	l_2	l_2	$A_n x=((1+1/n)x(1),\dots,(1+1/n)x(k)$	1_{l_2}
2	c_0	c_0	$A_n x=(0,\dots 0,x(n),0,0,\dots)$	0
3	l_2	l_2	$A_n x=(0,\dots,0,x(n+1),x(n+2),\dots)$	0
4	$C[0;1]$	$C[0;1]$	$(A_n x)(t)=(t^n-t^{2n})x(t)$	0
5	$C^{(1)}[0;1]$	$C[0;1]$	$(A_n x)(t)=(t^n-t^{2n})x(t)$	0
6	$L_2[0;1]$	$L_1[0;1]$	$(A_n x)(t)=(1-t^n)x(t)$	$Ax=x$

Примеры решения типовых задач

1 Пусть X,Y – нормированные пространства. Выяснить, совпадает ли область определения $D(A)=\{x\in X|\ Ax\in Y\}$ оператора A с нормированным пространством X. Является ли оператор A линейным, непрерывным оператором из $D(A)$ в Y?

Пример 1 $X=L_2[0;1],\ Y=L_1[0;1],\ (Ax)(t)=|x(t)|$.

Решение Если $x\in L_2[0;1]$, то $\|x\|_2^2=\int_0^1 |x(t)|^2 dt<+\infty$. В силу неравенства Коши-Буняковского,

$$\left(\int_0^1 |x(t)|dt\right)^2\le\int_0^1 |x(t)|^2 dt\cdot\int_0^1 dt=\|x\|_2^2<+\infty. \tag{1}$$

Отсюда следует, что $Ax\in L_1[0;1]$. Поэтому $D(A)=X$.

Оператор A не является линейным (рассмотрите, например, $A(\lambda x)$). Исследуем его на непрерывность. Для любой точки $a \in X$ оценим расстояние

$$\|Ax - Aa\|_1 = \||x(t)| - |a(t)|\|_1 = \int_0^1 \big||x(t)| - |a(t)|\big| dt \le \int_0^1 |x(t) - a(t)| dt \le \|x - a\|_2$$

(мы воспользовались числовым неравенством $\big||x|-|a|\big| \le |x-a|$, а затем неравенством (1)). Поэтому $\forall \varepsilon > 0$ получаем при $\delta = \varepsilon$, что $\forall x \in X$ из $\|x - a\|_2 < \delta$ следует $\|Ax - Aa\|_1 < \varepsilon$. Значит, оператор A непрерывен на X.

Пример 2 $X = l_2, Y = l_1, Ax = (x(1), \frac{x(2)}{\sqrt{2}}, \frac{x(3)}{\sqrt{3}}, ..., \frac{x(k)}{\sqrt{k}}, ...)$.

Решение В этом примере $D(A) \ne X$, так как $x = \left(\frac{1}{\sqrt{n}\ln n}\right)_{n=1}^{\infty} \in l_2$, но $Ax = \left(\frac{1}{n\ln n}\right)_{n=1}^{\infty} \notin l_1$ (в обоих случаях сходимость ряда исследуется с помощью интегрального признака; проверьте это).

Очевидно, A является линейным оператором, поэтому исследование непрерывности равносильно исследованию ограниченности.

Докажем, что A не является ограниченным. Допустим противное, то есть что $\exists c \in R : \forall x \in X \quad \|A_x\|_Y \le c \cdot \|x\|_X$. При $x = (1, \frac{1}{\sqrt{2}}, ..., \frac{1}{\sqrt{n}}, 0, 0, ...) \in l_2$ последнее неравенство примет вид

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \le c \cdot \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\right)^{1/2}, \text{ т.е. } \forall n \in N \quad \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \le c^2.$$

Поскольку частичные суммы ряда $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ не являются ограниченными, мы пришли к противоречию. Значит, A не является непрерывным.

Пример 3 $X = L_1[0;1], Y = L_{3/2}[0;1], (Ax)(t) = \int_0^1 e^{t^2 s} x(s) ds$.

Решение Возьмем $\forall x \in L_1[0;1]$, тогда $\int_0^1 |x(t)| dt < +\infty$. Рассмотрим

$$\int_0^1 |(Ax)(t)|^{3/2} dt = \int_0^1 \left|\int_0^1 e^{t^2 s} x(s) ds\right|^{3/2} dt \le e^{3/2} \int_0^1 \left(\int_0^1 |x(s)| ds\right)^{3/2} dt = e^{3/2} \left(\int_0^1 |x(s)| ds\right)^{3/2} < +\infty,$$

то есть $Ax \in L_{3/2}[0;1]$. Значит, $D(A) = X$.

Легко проверить, что A − линейный. Докажем, что A − ограниченный. Используя предыдущее неравенство, получаем

$$\|A\|_{3/2} = \left(\int_0^1 \left|\int_0^1 e^{t^2 s} x(s)ds\right|^{3/2} dt\right)^{2/3} \le e \cdot \left(\int_0^1 \left|\int_0^1 x(s)ds\right|^{3/2} dt\right)^{2/3} = e \cdot \left|\int_0^1 x(s)ds\right| \cdot \left(\int_0^1 dt\right)^{2/3} \le e \cdot \|x\|_1 .$$

Наконец, как известно, из ограниченности A следует его непрерывность.

Пример 4 $X = l_{3/2},\, Y = C,\, Ax = \sum_{k=2}^{\infty} k \cdot |x(k)|^{3/2}$.

Решение Здесь $D(A) \ne X$, так как последовательность $(1/k)_{k=1}^{\infty} \in X$, но $Ax = \infty$. Далее, оператор A не является линейным (как в примере 1). Докажем, что он не является непрерывным. Действительно, возьмём следующую последовательность x_n точек из $l_{3/2}$:

$$x_n(k) = \begin{cases} \dfrac{1}{n+k}, 1 \le k \le 2n \\ 0,\ k > 2n \end{cases} .$$

Тогда $x_n \to 0$ в $l_{3/2}$, так как

$$\|x_n - 0\|_{3/2}^{3/2} = \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{(n+k)^{3/2}} < \frac{2n}{n^{3/2}} = \frac{2}{\sqrt{n}} \to 0 \text{ при } n \to \infty .$$

В то же время

$$|Ax_n - A0| > \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{k}{(n+k)^{3/2}} > \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{k}{(2k)^{3/2}} = \frac{1}{2^{3/2}} \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k^{1/2}} > \frac{1}{2^{3/2}} n \frac{1}{(2n)^{1/2}} \to \infty .$$

Таким образом, из того, что $x_n \to 0$, не следует, что . Мы показали, что A не является непрерывным в нуле, значит, A не является непрерывным на $D(A)$.

Пример 5 $X = C[0;1],\, Y = \boldsymbol{R},\, (Ax)(t) = |x'(0) + x(0)|$.

Решение Очевидно, что $D(A) \ne X$ и что A − нелинейный. Покажем, что A не является непрерывным в нуле. Возьмём последовательность $x_n(t) = (1-t)^n / n$ из $C[0;1]$. Она сходится к 0, так как $\|x_n\|_X = 1/n \to 0$ при $n \to \infty$. Но в то же время

$$|Ax_n - A0| = \left|(-1)^n + \frac{1}{n}\right| \to 1 \text{ при } n \to \infty .$$

То есть из того, что $x_n \to 0$, не следует, что . Значит, A не является непрерывным на $D(A)$.

2 Доказать, что оператор $A: X \to Y$ является линейным ограниченным, и найти его норму.

а) Оператор умножения, действующий из X в Y.

Пример 1 $X = Y = C[0;1],\ (Ax)(t) = \dfrac{t}{1+t^2}x(t)$.

Решение Ясно, что A − линейный оператор.
Так как

$$\|Ax\| = \max_{t\in[0;1]}\left|\frac{t}{1+t^2}x(t)\right| \le \max_{t\in[0;1]}\left|\frac{t}{1+t^2}\right| \cdot \max_{t\in[0;1]}|x(t)| = \frac{1}{2}\cdot\|x\|,$$

(2)

то A ограничен с константой ограниченности $1/2$. А так как норма оператора есть наименьшая из констант ограниченности, то $\|A\| \le 1/2$.

Докажем теперь противоположное неравенство, т. е. что $\|A\| \ge 1/2$. Для этого постараемся подобрать такой ненулевой вектор x_0, для которого неравенство (2) превращается в равенство. Возьмём $x_0(t) = 1$. Тогда, как легко посчитать, $\|x_0\| = 1,\ Ax_0(t) = \dfrac{t}{1+t^2}, \|Ax_0\| = 1/2$. А так как $\|A\| = \sup\{\|Ax\| \mid \|x\| \le 1\}$, то $\|A\| \ge 1/2$. Сопоставляя полученные неравенства, заключаем, что $\|A\| = 1/2$.

б) Диагональный оператор, действующий из l_p в l_p.

Пример 1 $A: l_7 \to l_7,\ Ax = (0,0,\dfrac{x(1)}{2},\dfrac{x(2)}{2^2},...,\dfrac{x(k)}{2^k},...)$.

Решение Ясно, что A − линейный оператор. Так как

$$\|Ax\| = \left(\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{|x(k)|}{2^k}\right)^7\right)^{1/7} \le \frac{1}{2}\left(\sum_{k=1}^{\infty}|x(k)|^7\right)^{1/7} = \frac{1}{2}\|x\|,$$

то оператор A ограничен, причем $\|A\| \le 1/2$. Возьмём $x_0 = e_3 = (0,0,1,0,0,...)$. Тогда $\|x_0\| = 1, \|Ax_0\| = 1/2$. Значит, $\|A\| \ge 1/2$ (почему?). Из полученных неравенств следует, что $\|A\| = 1/2$.

Пример 2 $A: l_{5/4} \to l_{5/4},\ Ax = (0,\dfrac{x(2)}{2},0,\dfrac{3x(4)}{4},0,...,(1-\dfrac{1}{2k})x(2k),0,...)$.

Решение Оператор A − линейный. Докажем неравенство ограниченности:

$$\|Ax\| = \left(\sum_{k=1}^{\infty}(1-\frac{1}{2k})^{5/4}\cdot|x(2k)|^{5/4}\right)^{4/5} \le \left(\sum_{k=1}^{\infty}|x(2k)|^{5/4}\right)^{4/5} \le \|x\|.$$

(3)

Значит, оператор A − ограничен, причем $\|A\| \le 1$.

В отличие от предыдущих примеров, здесь не существует ненулевого вектора, при котором неравенство (3) превращается в равенство (подумайте, почему?). Поэтому будем подбирать ненулевые векторы x так, чтобы обе части (3) мало отличались друг от друга. Возьмём $x_0 = e_{2k} = (0,...,0,1,0,0,...)$ (единица стоит на $2k$-м месте). Тогда имеем

$$\|x_0\| = 1,\ \|Ax_0\| = 1 - 1/(2k),$$

откуда $\forall k \in \boldsymbol{N}$ $\|A\| \ge 1 - 1/(2k)$ (см. решение примера 1). Ввиду произвольности *k,* отсюда следует, что $\|A\| \ge 1$. Окончательно получаем: .

в) Оператор замены переменной.

Пример 1 $A = C[0;1] \to C[0;1],\ (Ax)(t) = (t^4 - t^8)x(t^3)$**.**

Решение Очевидно, оператор A − линеен. Докажем его ограниченность:

$$\|Ax\| = \max_{t\in[0;1]}\left|t^4 - t^8\right| \cdot \left|x(t^3)\right| = \left[t^3 = s, t = s^{1/3}\right] = \max_{s\in[0;1]}\left|s^{4/3} - s^{8/3}\right| \cdot |x(s)| \le \frac{1}{4}\cdot\|x\|, \tag{4}$$

поскольку, как легко проверить, $\max\limits_{s\in[0;1]}\left|s^{4/3} - s^{8/3}\right| = 1/4$. Следовательно, $\|A\| \le 1/4$. Далее, так как при $x(t) = 1$ неравенство (4) превращается в равенство, то $\|A\| \ge 1/4$ (см. решения предыдущих примеров). Итак, $\|A\| = 1/4$.

Пример 2 $A: L_2[0;1] \to L_2[0;1],\ (Ax)(t) = x(\sqrt[8]{t})$.

Решение Очевидно, что оператор A − линеен. Докажем его ограниченность:

$$\|Ax\| = \left(\int_0^1 x^2(\sqrt[8]{t})dt\right)^{1/2} = \left[\sqrt[8]{t} = z, t = z^8, dt = 8z^7 dt\right] = \left(\int_0^1 8z^7 \cdot x^2(z)dz\right)^{1/2} \le$$

$$\le 2\sqrt{2}\cdot\left(\int_0^1 x^2(z)dz\right)^{1/2} = 2\sqrt{2}\cdot\|x\| \tag{5}$$

(мы воспользовались тем, что $z \le 1$). Значит, $\|A\| \le 2\sqrt{2}$.

Как и в примере 2 пункта б), не существует ненулевого вектора, при котором неравенство (5) превращается в равенство (подумайте, почему). Поэтому будем подбирать ненулевые векторы x так, чтобы обе части (5) мало отличались друг от друга. Возьмём последовательность $x_n = \sqrt{n}\cdot\chi_{[1-\frac{1}{n};1]}(t)$, состоящую из функций, сосредоточенных в окрестности точки $z = 1$ и таких, что $\|x_n\| = 1$. Тогда

$$\|Ax_n\| = \left(\int_{1-\frac{1}{n}}^{1} 8z^7 n dz\right)^{1/2} = \left(nz^8\Big|_{1-1/n}^{1}\right)^{1/2} = \left(n \cdot \left(1 - \left(1 - \frac{1}{n}\right)^8\right)\right)^{1/2}.$$

Значит, $\|A\| \geq \left(n \cdot \left(1 - \left(1 - \dfrac{1}{n}\right)^8\right)\right)^{1/2}, \forall n \in \mathbf{N}$. Перейдем в последнем неравенстве к пределу при $n \to \infty$. Воспользовавшись тем, что $(1+x)^\alpha - 1 \sim \alpha x$ при $x \to 0$, получим:

$$\|A\| \geq \lim_{n\to\infty}\left(n \cdot \frac{8}{n}\right)^{1/2} = 2\sqrt{2}.$$

Из полученных неравенств следует, что $\|A\| = 2\sqrt{2}$.

г) Интегральный оператор, действующий из *X* в *Y*.

Пример 1 $A : C[-1;3] \to C[-2;0], \ (Ax)(t) = \int_{-1}^{1}(1-t)s^5 x(s)ds$.

Решение Из свойства линейности интеграла следует, что *A* – линейный оператор. Далее,

$$\|Ax\| = \max_{t\in[-2;0]}\left|\int_{-1}^{1}(1-t)s^5 x(s)ds\right| \leq \max_{t\in[-2;0]}|1-t| \cdot \int_{-1}^{1}|s^5| \cdot |x(s)|ds \leq 3 \cdot 2\int_{0}^{1}s^5 ds \cdot \|x\| = \|x\|. \tag{6}$$

Значит, оператор *A* − ограничен, причем $\|A\| \leq 1$. Заметим, что неравенство (6) превращается в равенство при $x(t) = \operatorname{sgn} t$, но эта функция не принадлежит $C[-1;3]$. Возьмем следующую последовательность функций из $C[-1;3]$, которые «похожи» на $\operatorname{sgn} t$ при больших *n* (сделайте чертеж):

$$x_n(t) = \begin{cases} -1, & t \in [-1;-1/n] \\ nt, & t \in [-1/n;1/n] \\ 1, & t \in [1/n;3] \end{cases}.$$

Легко видеть, что $\|x_n\| = 1$ в $C[-1;3]$. Вычислим $\|Ax_n\|$ в $C[-2;0]$. Так как функция $s^5 \cdot x_n(s)$ − четная на $[-1;1]$, то

$$\|Ax_n\| = \max_{t\in[-2;0]}|1-t| \cdot \left|\int_{-1}^{1}s^5 \cdot x_n(s)ds\right| = 3 \cdot 2 \cdot \int_0^1 s^5 \cdot x_n(s)ds = 6\left(\int_0^{1/n} ns^6 ds + \int_{1/n}^{1} s^5 ds\right) = 1 - \frac{1}{7n^6}.$$

Значит, $\|A\| \geq 1 - 1/(7n^6), \forall n \in \mathbf{N}$, а потому $\|A\| \geq 1$. Окончательно получаем, что $\|A\| = 1$.

3 Для последовательности операторов $(A_n) \subset LB(X,Y)$, $X, Y \in Norm$ и $A \in LB(X,Y)$ установить: 1) сходится ли (A_n) поточечно (сильно) к оператору A; 2) сходится ли (A_n) по норме к оператору A.

Пример 1 $A_n x = (x(1),...,x(n),0,0,...), A = 1_{l_1}, X = Y = l_1$.

Решение 1) Заметим, что $\forall x \in l_1$

$$\|A_n x - Ax\| = \|(0,...0, x(n+1), x(n+2),...)\| = \sum_{k=n+1}^{\infty} |x(k)| \to 0 \text{ при } n \to \infty$$

как остаток сходящегося ряда. Значит, последовательность (A_n) сходится поточечно (то есть сильно) к оператору A.

2) Воспользуемся тем, что $\|A\| \geq \|Ax_0\|, \forall x_0 : \|x_0\| \leq 1$. Возьмем вектор $x_0 = e_{n+1} = (0,...,0,1,0,...)$ (единица стоит на $(n+1)$-м месте). Тогда

$$\|A_n - A\| \geq \|A_n x_0 - Ax_0\| = \|(0,\ldots,0,0,0,\ldots) - (0,\ldots,0,1,0,\ldots)\| = \|(0,\ldots,0,1,0,\ldots)\| = 1.$$

Так как $\|A_n - A\| \geq 1$, то (A_n) не сходится по норме к A.

Тема 3
Обратные операторы

2.3.1 Пусть $A : X \to Y$. Доказать, что существует непрерывный обратный оператор A^{-1}, и построить его (таблица 2.3.1).

Таблица 2.3.1

вариант	X	Y	A

1	$C^{(2)}[0;1]$	$C^{(2)}[0;1]$	$(Ax)(t)=x(t)+\int_0^1 e^{t+s}x(s)ds$
2	$C[0;1]$	$C[0;1]$	$(Ax)(t)=x(t)+\int_0^1 (1-st)x(s)ds$
3	$C^{(1)}[0;1]$	$C^{(1)}[0;1]$	$(Ax)(t)=x(t)+\int_0^1 (t+s)x(s)ds$
4	$C[0;1]$	$C[0;1]$	$(Ax)(t)=x(t)+\int_0^1 t^2 sx(s)ds$
5	l_2	l_2	$Ax=((1+1/2)x(1),(1+1/3)x(2),(1+1/4)x(3),\ldots)$
6	l_2	l_2	$Ax=(1(\sin 1/1)x(1),2(\sin 1/2)x(2),3(\sin 1/3)x(3),\ldots$

2.3.2 Пусть $A:X\to Y$.
1) Что представляет собой область значений $R(A)$ оператора A?
2) Существует ли на $R(A)$ левый обратный оператор B?
3) Является ли оператор $B:R(A)\to X$ ограниченным, если он существует?
4) Существует ли обратный оператор A^{-1} (таблица 2.3.2)?

Таблица 2.3.2

вариант	X	Y	A
1	l_5	l_5	$Ax=(\frac{1}{2}x(1),\frac{1}{2^2}x(2),\ldots,\frac{1}{2^k}x(k),\ldots)$
2	l_2	l_2	$Ax=(x(2),x(3),\ldots,x(k),\ldots)$
3	l_2	l_2	$Ax=(x(2),x(1),x(4),x(3),\ldots,x(2k),x(2k-1),\ldots)$
4	l_1	l_2	$Ax=(x(1),0,x(2),x(3),\ldots,x(k),\ldots)$
5	$C^{(2)}[0;1]$	$C[0;1]$	$(Ax)(t)=x''(t)$
6	$C[0;1]$	$C[0;1]$	$(Ax)(t)=t\int_0^t x(s)ds$

2.3.3 Пусть $A_\lambda\in LB(X,Y)$, где λ – числовой параметр, X_λ – банахово пространство. Выяснить, при каких λ существует обратный оператор к оператору A_λ, построить его. При каких λ оператор A_λ непрерывно обратим (таблица 2.3.3)?

Таблица 2.3.3

вариант	X_λ	Y	A_λ

1	$\left\{\begin{matrix} x\in C^{(1)}[0;1]: \\ \lambda x(0)=x'(1)\end{matrix}\right\}$	$C[0;1]$	$\frac{d}{dt}+tI$
2	$\left\{\begin{matrix} x\in C^{(1)}[0;1]: \\ x(0)=0\end{matrix}\right\}$	$C[0;1]$	$\frac{d}{dt}+\lambda tI$
3	$\left\{\begin{matrix} x\in C^{(1)}[0;1]: \\ \lambda x(0)=x(1)\end{matrix}\right\}$	$C[0;1]$	$\frac{d}{dt}-2tI$
4	$\left\{\begin{matrix} x\in C^{(1)}[0;1]: \\ x(0)=0\end{matrix}\right\}$	$C[0;1]$	$\frac{d}{dt}+\lambda I$
5	$\left\{\begin{matrix} x\in C^{(1)}[0;1]: \\ x(0)=0\end{matrix}\right\}$	$C[0;1]$	$\frac{d}{dt}+\lambda a(t)I,\ a\in C[0;1]$
6	$\left\{\begin{matrix} x\in C^{(1)}[0;1]: \\ x(0)+x(1)=0\end{matrix}\right\}$	$C[0;1]$	$\frac{d}{dt}-3\lambda t^2 I$

Примеры решения типовых задач

1 Пусть $A:X\to Y$. Доказать, что существует непрерывный обратный оператор A^{-1}, и построить его.

Пример 1 $A:l_1\to l_1,\ Ax=((1-1/2)^2x(1),(1-1/3)^3x(2),(1-1/4)^4x(3),\ldots).$

Решение Очевидно, что A – линейный оператор. Докажем, что A является биекцией. Рассмотрим уравнение $Ax=y$, которое равносильно системе уравнений

$$(1-1/(k+1))^{k+1}x(k)=y(k),\ k=1,2,\ldots .$$

Отсюда

$$x(k)=\frac{y(k)}{(1-\frac{1}{k+1})^{k+1}}. \tag{1}$$

А так как несложно найти константу C, такую, что

$$\sum_{k=1}^{\infty}|x_k|\le C\sum_{k=1}^{\infty}|y_k|<+\infty, \tag{2}$$

то $x\in l_1$. Мы получили, что $\forall y\in l_1$ уравнение $Ax=y$ имеет единственное решение x из l_1. Значит, A – биекция. Более того, из (1) следует, что обратный оператор A^{-1} задается формулой

$$A^{-1}y = \left(\frac{y(k)}{(1-1/2)^2}, \frac{y(k)}{(1-1/3)^3}, \frac{y(k)}{(1-1/4)^4}, \ldots\right).$$

Ограниченность этого оператора следует из оценки

$$\|A^{-1}y\| \le C\sum_{k=1}^{\infty}|y(k)| = C\|y\| \text{ (см. (2)).}$$

Пример 2 $A: C[0;1] \to C[0;1],\ (Ax)(t) = x(t) + \int_0^1 e^{t+s}x(s)ds.$

Решение Очевидно, что A – линейный оператор.
Запишем его в виде

$$(Ax)(t) = x(t) + e^t\int_0^1 e^s x(s)ds,$$

и рассмотрим уравнение $Ax = y$, то есть

$$x(t) + e^t\cdot\int_0^1 e^s x(s)ds = y(t). \tag{3}$$

Пусть

$$\int_0^1 e^s x(s)ds = c. \tag{4}$$

Тогда (3) примет вид $x(t) + c\cdot e^t = y(t)$, откуда $x(t) = y(t) - c\cdot e^t$. Мы получили общий вид решения уравнения (3) с неопределенным коэффициентом c. Подставив это выражение в (4), без труда находим, что

$$c = \frac{2}{1+e^2}\int_0^1 e^s y(s)ds.$$

Таким образом,

$$x(t) = y(t) - \frac{2}{1+e^2}\int_0^1 e^s y(s)ds = A^{-1}y(t). \tag{5}$$

Итак, $\forall y \in C[0;1]$ уравнение (2) имеет единственное решение из $C[0;1]$. Значит, оператор A обратим, причем обратный оператор вычисляется по формуле (5).

Непрерывность обратного оператора вытекает из теоремы об оценке интеграла. Действительно, по этой теореме

$$|A^{-1}y(t)| \le |y(t)| + \frac{2}{1+e^2}\max_{s\in[0;1]}|y(s)|\int_0^1 e^s ds \le C\|y\|,$$

а потому выполняется неравенство ограниченности $\|A^{-1}y\| \le C\|y\|$ (другое доказательство непрерывности получается из (5) с помощью теоремы о предельном переходе под знаком интеграла Римана).

2 Пусть $A: X \to Y$.
1) Что представляет собой область значений $R(A)$ оператора A?
2) Существует ли на $R(A)$ левый обратный оператор B?
3) Является ли оператор $B: R(A) \to X$ ограниченным (в случае, если он существует?
4) Существует ли обратный оператор A^{-1}?

Пример 1 $A: l_2 \to l_2$, $Ax = (0, x(1), x(2), ..., x(k), ...)$.

Решение Очевидно, что
$$R(A) = \{(0, x(1), x(2), ..., x(k), ...) \mid (x(k) \in l_2\} = \{y \in l_2 \mid y(1) = 0\} -$$
множество последовательностей из l_2, первая координата которых равна нулю. Заметим, что $R(A) \ne l_2$.

Так как уравнение $Ax = 0$ имеет только нулевое решение, то $Ker\, A = \{0\}$. А это, как известно, равносильно тому, что левый обратный оператор B существует. Легко проверить, что
$$Bx = (x(2), x(3), x(4), ...).$$
Действительно, при всех x из l_2 имеем
$$BAx = B(0, x(1), x(2), ...) = (x(1), x(2), x(3), ...).$$
Оператор B ограничен, так как $\|Bx\| \le \|x\|$.

Поскольку уравнение $Ax = y$ не при всех y имеет решение (например, при $y = (1, 0, 0, \ldots)$), то A не является сюрьекцией. А это значит, что правого обратного оператора не существует. Следовательно, оператор A − необратим.

Пример 2 $A: C[0;1] \to C[0;1]$, $(Ax)(t) = \int\limits_0^t x(s)ds$.

Решение По теореме о дифференцировании интеграла с переменным верхним пределом (теорема Барроу), функция $y(t) = \int\limits_0^t x(s)ds$ − дифференцируема, причем $y'(t) = x(t)$. Значит, $y \in C^{(1)}[0;1]$. Кроме того, очевидно, что $y(0) = 0$. Обратно, если

$y \in C^{(1)}[0;1]$ и $y(0) = 0$, то, по формуле Ньютона-Лейбница, $y(t) = \int\limits_0^t y'(s)ds$. Поэтому

$$R(A) = \left\{ \int\limits_0^t x(s)ds \,\middle|\, x \in C[0;1] \right\} = \left\{ y \in C^{(1)}[0;1] \,\middle|\, y(0) = 0 \right\}.$$

Рассмотрим оператор дифференцирования $Bx = \frac{dx}{dt}$. Поскольку (снова по теореме Барроу) $(BAx)(t) = \frac{d}{dt}\int\limits_0^t x(s)ds = x(t)$ при всех $x \in C[0;1]$, то B – левый обратный для оператора A.

Покажем, что B не является ограниченным оператором. Допустим противное, т. е.

$$\exists c \in \boldsymbol{R} : \|Bx\| = \max_{0 \le t \le 1} |x'(t)| \le c \cdot \max_{0 \le t \le 1} |x(t)| = c \cdot \|x\|.$$

Возьмём $x(t) = t^n \ (n \in \boldsymbol{N})$. Тогда последнее неравенство примет вид $n \le c, \ \forall n \in N$. Противоречие.

Поскольку $R(A) \ne C[0;1]$, то A не является сюръекцией. Значит, правого обратного оператора не существует. Следовательно, не существует и A^{-1}.

3 Пусть $A_\lambda \in LB(X,Y)$, где λ – числовой параметр, X_λ – банахово пространство. Выяснить, при каких λ существует обратный оператор к оператору A_λ, построить его. При каких λ оператор A_λ непрерывно обратим?

Пример 1 $X_\lambda = \left\{ x \in C^{(1)}[0;1] \mid x'(0) = \lambda x(1) \right\}$, $Y = C[0;1]$, $A_\lambda = \frac{d}{dt} + 2I$.

Решение Для нахождения обратного оператора рассмотрим в X_λ уравнение $A_\lambda x = y$, т. е. линейное дифференциальное уравнение

$$x' + 2x = y. \tag{6}$$

Нужно выяснить, при каких λ у этого уравнения для любого $y \in C[0;1]$ существует единственное решение $x \in X_\lambda$. Другими словами, для любого $y \in C[0;1]$ краевая задача

$$x'(0) = \lambda x(1) \tag{7}$$

для уравнения (6) должна иметь единственное непрерывно дифференцируемое решение. Воспользовавшись формулой для общего решения линейного дифференциального уравнения первого порядка, получим общее решение уравнения (6):

$$x(t)=e^{-2t}\left(\int_0^t y(s)e^{2s}ds+C\right). \tag{8}$$

Требуется узнать, при каких λ для любого $y\in C[0;1]$ найдется такое C, при котором формула (8) дает решение задачи (7). Подставив (8) в (7), получим после упрощений

$$\left(\lambda e^{-2}+2\right)C=y(0)-\lambda\int_0^1 y(s)e^{2s-2}ds. \tag{9}$$

Возможны два случая:

а) $\lambda\neq-2e^2$. Тогда уравнение (9) имеет единственное решение

$$C=\frac{1}{2+\lambda e^{-2}}\left(y(0)-\lambda\int_0^1 y(s)e^{2s-2}ds\right)$$

для любого $y\in C[0;1]$. Следовательно, при этих λ существует обратный оператор, который мы найдем, подставив это C в равенство (8):

$$A_\lambda^{-1}y(t)=e^{-2t}\left(\int_0^t y(s)e^{2s}ds+\frac{1}{2+\lambda e^{-2}}\left(y(0)-\lambda\int_0^1 y(s)e^{2s-2}ds\right)\right).$$

В силу теоремы Банаха об обратном операторе, непрерывность этого оператора будет следовать из непрерывности оператора $A_\lambda x=x'+2x$. Последний же факт легко доказать по Гейне. Действительно, если $x_n\to0$ в пространстве $C^{(1)}[0;1]$, то это значит, что $x_n\to0$ и $x_n'\to0$ равномерно на $[0;1]$. Но тогда и $A_\lambda x_n=x_n'+2x_n\to0$ равномерно на $[0;1]$;

б) $\lambda=-2e^2$. В этом случае уравнение (9) имеет вид

$$0=0\times C=y(0)+2e^2\int_0^1 y(s)e^{2s-2}ds.$$

Так как правая часть этого уравнения при некоторых непрерывных y (например, при $y(t)=1$) не будет равна 0, то при этих y уравнение (9) не имеет решения (относительно C), а потому оператор A_λ – не сюръективен.

Итак, обратный оператор к оператору A_λ существует тогда и только тогда, когда $\lambda\neq-2e^2$. Причем при таких λ оператор A_λ непрерывно обратим.

Литература

1 Антоневич, А. Б. Функциональный анализ и интегральные уравнения / А. Б. Антоневич, Я. В. Радыно. − Мн.: БГУ, 2003. − 430 с.

2 Колмогоров, А. Н. Элементы теории функций и функционального анализа / А. Н. Колмогоров, С. В. Фомин. − М.: Наука, 1972. – 496 с.

3 Антоневич, А. Б. Функциональный анализ и интегральные уравнения: Лабораторный практикум / А.Б. Антоневич [и др.]. − Мн.: БГУ, 2003. − 179 с.

4 Кириллов, А. А. Теоремы и задачи функционального анализа / А. А. Кириллов, А. Д. Гвишиани. − М.: Наука, 1979. – 381 с.