Avaliando Ativo com distribuição GEV

Melquisadec

2024-07-02

```
if (!require("pacman")) install.packages("pacman")
## Carregando pacotes exigidos: pacman
p_load(tidyverse, xtable,extRemes,ggplot2,quantmod,Quandl,ecostats,latex2exp)
```

Introdução

Nosso interesse neste trabalho é a confiabilidade (ou probabilidade) stress-strength (abreviada por SSR) que, em termos gerais, consiste no estudo da probabilidade de falha de um sistema ou componente a partir da comparação de um stress (tensão) aplicado com um strength (resistência) do sistema. Este é apenas um resumo do nosso trabalho para mais detalhes consulte a versão do artigo que publicamos, clique neste link para acessar o trabalho completo https://www.aimspress.com/article/id/65864c60ba35de4cce31c7b2. Sejam o stress Y e o strength X VAs contínuas e independentes, com função de densidade de probabilidade (PDF) f_Y e CDF F_X , respectivamente. A probabilidade SSR (também chamada confiabilidade SSR) é definida como

$$R = P(X < Y) = \int_{-\infty}^{\infty} F_X(x) f_Y(x) dx.$$

Ao aplicar essa metodologia SSR a dados financeiros do mundo real, poderíamos orientar um procedimento de seleção de ações calculando P(X < Y) quando X e Y representam retornos de duas diferentes ações. Em resumo, quando X e Y representam Va´s de retorno e R < 1/2, o investidor deve escolher a ação da variável X. Se R > 1/2, ocorre o oposto. O caso R = 1/2 é inconclusivo. O objetivo central do nosso trabalho foi propor a estimação da confiabilidade através de uma função \mathbb{H} , esta abordagem permite a estimação dos parâmetros sem a necessidade de impor restrições no espaço paramétrico da distribuição de X e Y. Para saber mais sobre a função \mathbb{H} recomendo a leitura do nosso paper o link estará disponível na publicação.

Para este Artigo ja publicado carregamos 4 bases de dados de ações negociadas na bolsa de valores brasileiras os dados foram Açoes do Banco do Brasil (BBAS3), Itaú unibanco (ITUB4), Mineradora Vale (VALE3) e varejista que atualmente foi incorporado pelo grup casas Bahia na época da análise a sigla do ativo era VIIA3. Os dados foram obtidos diretamente do site do yahoo.finance via comando quantmood descrito abaixo.

```
Foram realizados procedimentos de análise descritiva para, visualizar o comportamento dos dados, o gráficos
abaixo demostra a serie real dos preços.
#base2=data.frame(LOGBB,LOGIT,LOGVL,LOGVIA)
preco = BBAS3$BBAS3.SA.Close
DATAS = index(BBAS3)
dados1=ITAU$ITUB4.SA.Close
dados2 =VALE$VALE3.SA.Close
dados3= VIA3$BHIA3.SA.Close
dados_combinados <- data.frame(DATAS,preco,dados1, dados2, dados3)</pre>
names(dados_combinados)<-c('DATAS','BBAS3','VIIA3', 'ITUB4', 'VALE3')</pre>
#Reorganizando os dados para o formato longo usando a função pivot_longer do dplyr
dados_combinados_long <- pivot_longer(dados_combinados, -DATAS, names_to = "Ticker", values_to = "preco
cores <- c("black", "blue", "red", "green")</pre>
ggplot(dados_combinados_long, aes(x = DATAS, y = preco, color = Ticker)) +
 geom_line() +
 labs(x = "Date", y = "Stock Price") +
 scale_x_date(date_labels = "%Y-%m-%d", date_breaks = "30 day") +
 scale_color_manual(values = cores) +
 theme(axis.text.x = element_text(angle = 45, hjust = 1))
                                                                      Ticker
                                                                          BBAS3
```

```
Ticker

BBAS3

ITUB4

VALE3

VIIA3
```

```
# Plotagem usando ggplot2
# ggplot(dados_combinados_long, aes(x = DATAS, y = preco, color = Ticker)) +
# geom_line() +
```

```
# labs(x = "Date", y = "Stock Price") +
# scale_x_date(date_labels = "%Y-%m-%d", date_breaks = "30 day") +
# theme(axis.text.x = element_text(angle = 45, hjust = 1))
```

Note que no intervalo avaliado as ações do setor bancarios obtiveram maior valor em todo o período se comparado com a varejista e a estatal.

Neste trabalho montamos nossa contribuição considerando que os retornos financeiros são independentes, para retirar a dependencia haja visto que é uma serie temporal nos trabalhamos com os incrementos, ou seja, filtramos o fechamentos dos preços diários e tomamos a diferença dos preços do dia posterior e anterior. Em processos similares como movimento browniano temos evidencias axiomática que este procedimento faz com que garantimos a independencia dos dados, para alem disso aplicamos o logaritmos nos retornos e partir de agora vamos nos referir a serie como log retornos de fechamento de preços. este procedimento de trabalhar com os incrementos e logaritmizar esta descrito nas funções abaixo.

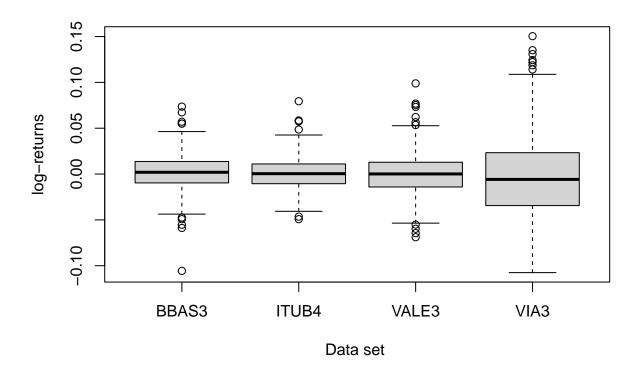
```
#DADOS<-read.csv(file.choose())
#BB=DADOS$bbas3 %>% as.vector()
BB=BBAS3$BBAS3.SA.Close %>% as.vector()
x_div=BB[-1]/BB[-length(BB)] #INCREMENTO
LOGBB=log(x_div)

IT=ITAU$ITUB4.SA.Close %>% as.vector()
IT_div=IT[-1]/IT[-length(IT)]
LOGIT=log(IT_div)

VL=VALE$VALE3.SA.Close %>% as.vector()
VL_div=VL[-1]/VL[-length(VL)]
LOGVL=log(VL_div)

VIA=VIA3$BHIA3.SA.Close %>% as.vector()
VIA_div=VIA[-1]/VIA[-length(VIA)]
LOGVIA=log(VIA_div)
```

Logo após realizamos a análise boxplot para verificar se há outliers ou não nos dados, o código abaixo nos fornece os boxplot.



Nota-se que o boxplot nos indicou a presença de valores descrepante, porém como trabalharemos com distribuição de calda pesada é bom que tenha valores outliers.

Para verificar se há presença de autocorrelação plotamos um gráfico ACF

```
BBAS3=LOGBB;ITUB4=LOGIT;VALE3=LOGVL;VIIA3=LOGVIA
par(mfrow=c(2,2))
acf(BBAS3, main="BBAS3")
acf(ITUB4, main="ITUB4")
acf(VALE3, main="VALE3")
acf(VIIA3, main="VIIA3")
```

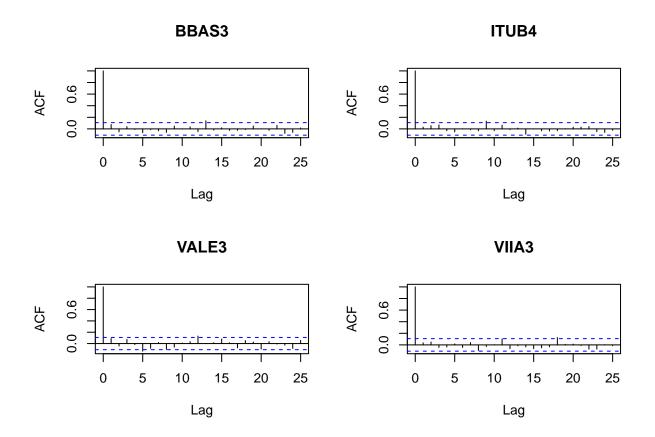


GRÁFICO DE AUTOCORRELAÇÃO

Nota-se que que não ha evidencia de autocorrelação nas quatro bases. Logo abaixo montamos a tabela com as principais medidas descritivas.

```
bases=data.frame(LOGBB,LOGIT,LOGVL,LOGVIA)
descritiva= summary(bases) %>% print()
```

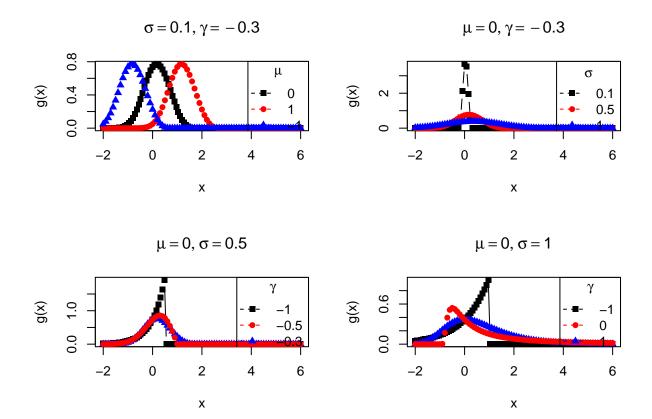
```
##
        LOGBB
                             LOGIT
                                                    LOGVL
##
    Min.
           :-0.105659
                                 :-0.0492130
                                               Min.
                                                       :-0.0689439
                         Min.
##
    1st Qu.:-0.009684
                         1st Qu.:-0.0104991
                                               1st Qu.:-0.0140316
    Median: 0.001940
                         Median : 0.0003995
                                               Median: 0.0001094
##
##
    Mean
           : 0.001203
                         Mean
                                 : 0.0005651
                                               Mean
                                                       :-0.0002258
##
    3rd Qu.: 0.013631
                         3rd Qu.: 0.0109299
                                                3rd Qu.: 0.0128365
           : 0.073551
                                 : 0.0794472
                                                       : 0.0989011
##
    Max.
                         Max.
                                               Max.
        LOGVIA
##
##
    Min.
           :-0.107542
##
    1st Qu.:-0.034388
##
    Median :-0.005851
##
    Mean
            :-0.003017
    3rd Qu.: 0.023058
##
            : 0.150404
```

Como neste trabalho consideramos que $X, Y \sim GEV(\mu, \sigma, \gamma)$, ou seja seguem distribuição GEv, logo apresentaremos como se comporta esta distribuição através dos gráficos da distribuição.

```
mu=0 sigma=0.1
```

```
k=-0.3
x=LOGBB
\#devd(x, loc = 0, scale = 0.1, shape = -0.3)
#fit LOGBB
x_{points} = seq(-2,6, by=0.1)
par(mfrow=c(2,2))
curve(devd(x,0,0.5,-0.3),from=-2, to=6, main=TeX("\sigma=0.1, gamma=-0.3\s"),
     ylab = "g(x)", type="b", pch=15)
lines(x_points, devd(x_points, 1,0.5,-0.3), type="b",
     pch=16.
     ltv=2.
     #lwd=2.0,
     col="red")
lines(x_points, devd(x_points, -1,0.5,-0.3), type="b",
     pch=17,
     1ty=2,
     \#lwd=2.0.
     col="blue")
legend("topright", #inset=.05,
     y=0.5,
     title=TeX("$mu$"), c("0","1", "-1"),
     lty=c(2), pch=15:17, col=c("black", "red", "blue" ))
curve(devd(x,0,0.1,-0.3),from=-2, to=6,main=TeX("$mu=0, gamma=-0.3$"),
     ylab = "g(x)", type="b", pch=15)
lines(x_points, devd(x_points, 0,0.5,-0.3), type="b",
     pch=16,
     1ty=2,
     \#lwd=2.0.
     col="red")
lines(x_points, devd(x_points, 0,1,-0.3), type="b",
    pch=17,
     1ty=2,
     \#lwd=2.0,
     col="blue")
legend("topright", #inset=.05,
     y=0.5,
     title=TeX("$sigma$"), c("0.1","0.5", "1"),
     lty=c(2), pch=15:17, col=c("black", "red", "blue" ))
curve(devd(x,0,0.5,-1),from=-2, to=6,main=TeX("\sum_0, sigma=0.5\sum_),
```

```
ylab = "g(x)", type="b", pch=15)
lines(x_points, devd(x_points, 0,0.5,-0.3), type="b",
     pch=17,
     1ty=2,
     #lwd=2.0,
     col="blue")
lines(x_points, devd(x_points, 0,0.5,-.5), type="b",
     pch=16,
     lty=2,
     #lwd=2.0,
     col="red")
legend("topright", #inset=.05,
      y=0.5,
      title=TeX("$gamma$"), c("-1","-0.5", "-0.3"),
      lty=c(2), pch=15:17, col=c("black", "red", "blue" ))
curve(devd(x,0,1,-1),from=-2, to=6,main=TeX("$mu=0, sigma=1$"),
     ylab = g(x), type=b, pch=15)
lines(x_points, devd(x_points, 0,1,0), type="b",
     pch=17,
     lty=2,
     #lwd=2.0,
     col="blue")
lines(x_points, devd(x_points, 0,1,1), type="b",
     pch=16,
     1ty=2,
     #lwd=2.0,
     col="red")
legend("topright", #inset=.05,
      y=0.5,
      title=TeX("$gamma$"), c("-1","0", "1"),
      lty=c(2), pch=15:17, col=c("black", "red", "blue" ))
```



Note o que cada parâmetro faz nesta distribuição, no primeiro gráfico, o parametro de escala e o de forma estão fixo variamos o parâmetros de localização perceba que ele trasmuta ou para direita o para esquerda a forma da distribuição, ja no segundo gráfico a variamos a escala e os outros ficaram fixos, perceba que esse parâmetro trabalha com a disperção dos dados, e os dois ultimos gráficos colocamos o shape, ou seja, o parâmetro de forma livre e os outros fixos, este parâmetro é muito importante pois ele determina para onde a calda da distribuição esta acentuada e a velocidade que ela decai, ele controla se é calda leve ou pesada. Para além disso, a Gev particulariza 3 distribuição, que são elas Fréchet, Weibull e distribuição Gumbel e o parâmetro de forma que idica em qual caso particular os dados se adequam, porém o objetivo deste trabalho não é focar em casos particulares e sim na distribuição que generaliza, ou seja, nosso interesse é na distribuição GEV.

Para isto vamos estimar os parametros da distribuição gev. As funções abaixo estima marginalmente via pacote extRemes, o método de estimação é por -logverossimilhança.

```
fit_LOGBB = fevd(LOGBB,type="GEV")
parBB1=c(fit_LOGBB$results$par%>% as.list())

fit_LOGIT = fevd(LOGIT,type="GEV")
parIT=c(fit_LOGIT$results$par%>% as.list())

(fit_LOGVL = fevd(LOGVL,type="GEV"))

##
## fevd(x = LOGVL, type = "GEV")
##
## [1] "Estimation Method used: MLE"
##
```

```
##
##
   Negative Log-Likelihood Value: -774.0895
##
##
##
   Estimated parameters:
      location
##
                       scale
                                    shape
  -0.009497271 0.022220793 -0.163093276
##
##
   Standard Error Estimates:
##
       location
                       scale
## 0.0013139580 0.0008637121 0.0205215189
##
##
  Estimated parameter covariance matrix.
                 location
##
                                  scale
## location 1.726486e-06 1.203197e-07 -7.625157e-06
           1.203197e-07 7.459986e-07 -7.217747e-06
## scale
## shape
           -7.625157e-06 -7.217747e-06 4.211327e-04
##
##
   AIC = -1542.179
##
## BIC = -1530.782
parVL=c(fit_LOGVL$results$par%>% as.list())
(fit_LOGVIA = fevd(LOGVIA,type="GEV"))
##
## fevd(x = LOGVIA, type = "GEV")
##
## [1] "Estimation Method used: MLE"
##
##
   Negative Log-Likelihood Value: -567.698
##
##
##
   Estimated parameters:
##
      location
                     scale
## -0.02165616 0.03961411 -0.11696265
##
   Standard Error Estimates:
     location
##
                     scale
## 0.002410209 0.001673711 0.034016012
##
##
   Estimated parameter covariance matrix.
##
                 location
                                  scale
## location 5.809106e-06 8.927438e-07 -2.828261e-05
           8.927438e-07 2.801309e-06 -2.159493e-05
           -2.828261e-05 -2.159493e-05 1.157089e-03
## shape
##
##
   AIC = -1129.396
##
## BIC = -1117.999
parVIA=c(fit_LOGVIA$results$par%>% as.list())
parametros = data.frame(
```

```
Bases = c("", "BBAS3", "ITUB4", "VALE3", "VIA3"),
  Location = c("location", parBB1$location, parIT$location, parVL$location, parVIA$location),
  Scale = c("scale", parBB1$scale, parIT$scale, parVL$scale, parVIA$scale),
  Shape = c("shape", parBB1$shape, parIT$shape, parVL$shape, parVIA$shape)
# Visualização do data frame
print(parametros)
##
     Bases
                        Location
                                               Scale
                                                                    Shape
## 1
                        location
                                               scale
                                                                    shape
## 2 BBAS3 -0.00631083023245223 0.0218504153182118 -0.25353884918813
## 3 ITUB4 -0.00644815643019125 0.0165100146256487 -0.154486777789925
## 4 VALE3 -0.00949727092637728 0.0222207927921888 -0.163093275576926
## 5 VIA3 -0.0216561591952117 0.0396141074349253 -0.116962645348691
Com os parametros estimados vamos demostrar algumas funções para continuar a análise, utilizaremos, as
funções tais como distribuição acumulada GEV, Densidade GEV, função H e função para calcular o parâmetro
de confiabilidade a Fit R.
H<-function(a1, a2, a3, a4, a5){</pre>
  integrand \leftarrow function(y){exp(-a1*y-(a2*y^a3+a4)^(a5))}
  integralv<-integrate(integrand, 0, Inf)$value
 return (integralv) #essa seria a integral original calculada numericamente, para comparações
}
# GEV CDF function
gev_cdf <- function(x, mu, sigma, k) {</pre>
  if (k == 0) {
    p \leftarrow exp(-exp(-(x - mu) / sigma))
  } else {
    p \leftarrow exp(-(1 + k * (x - mu) / sigma)^(-1 / k))
  }
 return(p)
}
## Função para Estimar o R
fit_R=function(x_fit, y_fit){
 m1=y_fit[1]
  s1=y_fit[2]
  g1=y_fit[3]
  m2=x_fit[1]
  s2=x fit[2]
  g2=x_fit[3]
```

H(1, (g2*s1)/(s2*g1), -g1, 1+(g2/s2)*(m1-m2-(s1/g1)), -1/g2),1- H(1, (g1*s2)/(s1*g2), -g2, 1+(g1/s1)*(m2-m1-(s2/g2)), -1/g1))

condicao ta atendida?

 $R_{est=ifelse(m1-(s1/g1)>=m2-(s2/g2),}$

 $if(g1 > 0 \&\& g2 > 0){$

Realizamos também um teste de Kolmogorov-smirnov para verificar se os dados se adequam a distribuição GEV. os códigos para o teste ks está definido abaixo.

```
ks.test(LOGBB, gev_cdf,mu=parBB1$location,sigma=parBB1$scale, k=parBB1$shape)
##
##
   Asymptotic one-sample Kolmogorov-Smirnov test
##
## data: LOGBB
## D = 0.086294, p-value = 0.01467
## alternative hypothesis: two-sided
ks.test(LOGIT, gev_cdf, mu=parIT$location, sigma=parIT$scale, k=parIT$shape)
##
##
   Asymptotic one-sample Kolmogorov-Smirnov test
##
## data: LOGIT
## D = 0.0481, p-value = 0.4299
## alternative hypothesis: two-sided
ks.test(LOGVL, gev_cdf,mu=parVL$location ,sigma=parVL$scale, k=parVL$shape)
##
##
   Asymptotic one-sample Kolmogorov-Smirnov test
##
## data: LOGVL
## D = 0.057048, p-value = 0.2331
## alternative hypothesis: two-sided
ks.test(LOGVIA, gev_cdf,mu=parVIA$location,sigma=parVIA$scale , k=parVIA$shape)
##
##
   Asymptotic one-sample Kolmogorov-Smirnov test
## data: LOGVIA
## D = 0.038916, p-value = 0.6997
## alternative hypothesis: two-sided
```

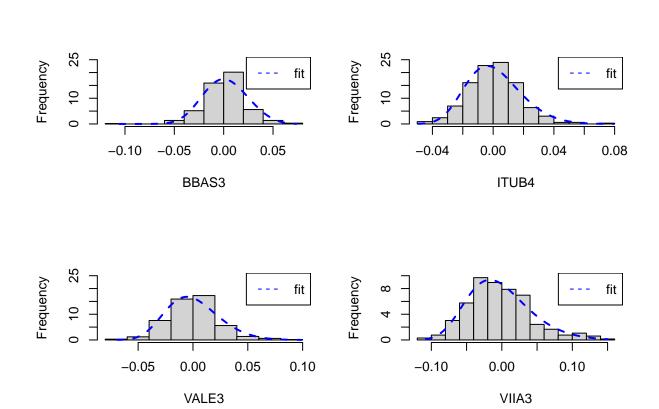
A 5% de confiança apenas a BBAS3 não foi significativa porém plotamos alguns gráficos de como ficou o ajuste da distribuição aos dados e podemos perceber que o ajustou bem graficamente por este motivo

decidimos manter a BBAS3 no trabalho. abaixo o gráfico dos ajuste.

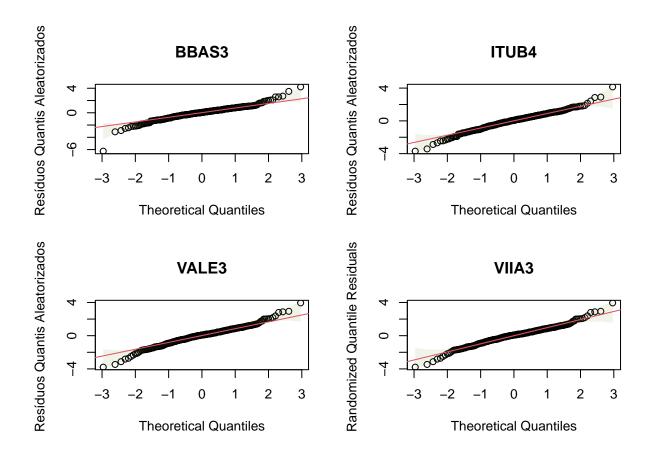
```
# set the plotting area into a 1*2 array
par(mfrow=c(2,2))
hist(LOGBB, freq = FALSE,
     probability = TRUE,
    main = "",
    breaks = 8,
     #col = "blue", border = "white",
    xlab = "BBAS3", ylab = "Frequency",
    ylim = c(0,25)
)
x_points=seq(min(LOGBB), max(LOGBB), abs(min(LOGBB)-max(LOGBB))/100)
x_gev_points=devd(x_points, loc = parBB1$location, scale =parBB1$scale, shape = parBB1$shape)
lines(x_points, x_gev_points, type="1",
      # pch=15,
     1ty=2,
     lwd=2.0,
     col="blue")
legend("topright", #inset=.05,
      y=0.5,
      #title="",
      c("fit"),
      lty=c(2),
      #pch=15,
      col=c("blue"))
hist(LOGIT, freq = FALSE,
    probability = TRUE,
     main = "",
    breaks = 10,
     #col = "blue", border = "white",
    xlab = "ITUB4", ylab = "Frequency",
    ylim = c(0,25)
)
x_points=seq(min(LOGIT), max(LOGIT), abs(min(LOGIT)-max(LOGIT))/100)
x_gev_points=devd(x_points, loc = parIT$location, scale =parIT$scale , shape = parIT$shape)
lines(x_points, x_gev_points, type="l",
      # pch=15,
     1ty=2,
     lwd=2.0,
      col="blue")
legend("topright", #inset=.05,
      y=0.5,
       #title="",
      c("fit"),
      lty=c(2),
       #pch=15,
```

```
col=c("blue"))
hist(LOGVL, freq = FALSE,
    probability = TRUE,
    main = "",
    breaks = 8,
    #col = "blue", border = "white",
    xlab = "VALE3", ylab = "Frequency",
    ylim = c(0,25)
)
x_points=seq(min(LOGVL), max(LOGVL), abs(min(LOGVL)-max(LOGVL))/100)
x_gev_points=devd(x_points, loc = parVL$location, scale =parVL$scale, shape = parVL$shape)
lines(x_points, x_gev_points, type="l",
     # pch=15,
     1ty=2,
     lwd=2.0,
     col="blue")
legend("topright", #inset=.05,
      y=0.5,
      #title="",
      c("fit"),
      lty=c(2),
      #pch=15,
      col=c("blue"))
hist(LOGVIA, freq = FALSE,
    probability = TRUE,
    main = "",
    breaks = 15,
    #col = "blue", border = "white",
    xlab = "VIIA3", ylab = "Frequency",
    ylim = c(0,10)
)
x_points=seq(min(LOGVIA), max(LOGVIA), abs(min(LOGVIA)-max(LOGVIA))/100)
x_gev_points=devd(x_points, loc = parVIA$location, scale =parVIA$scale, shape = parVIA$shape)
lines(x_points, x_gev_points, type="l",
     # pch=15,
     lty=2,
     lwd=2.0,
     col="blue")
legend("topright", #inset=.05,
      y=0.5,
      #title="",
      c("fit"),
```

```
lty=c(2),
#pch=15,
col=c("blue"))
```



Note no grafíco acima o modelo GEV ajustou bem aos dados por isso decidimos avançar com as 4 bases.



O gráfico acima é o gráfico de Resíduos Quantis Aleatorizados, basicamente contrastamos o nosso resíduos para verificar se ha normalidade, este modelo não possui este pressuposto, porém é interessante olhar os comportamento dos resíduos do modelo para ver se não houve anomalias muito grande no modelo.

Para a estimativa da confiabilidade que é o foco central do nosso trabalho utilizamos as expressões analiticas para obter a estimativa de stress-strength descrita na estimação abaixo, também utilizamos um abordagem não paramétrica que consiste em avaliar a quantidade de vezes em que uma ação foi menor que a outra e dividir pelo tamanho do intervalo assim obtemos uma estimativa de stress-strength via contagem e comprimimos para o intervalo 0 a 1 para comparar com a probabilidade via estimativa. Para fins didáticos consideraremos X1 = BBAS3, X2 = ITUB4, X3 = VALE3 e X4 = VIIA3

```
s2=x_fit$scale
  g2=x_fit$shape
  ## condicao ta atendida?
  if(g1 > 0 \&\& g2 > 0){
   R_{est=ifelse(m1-(s1/g1)>=m2-(s2/g2),}
                 H(1, (g2*s1)/(s2*g1), -g1, 1+(g2/s2)*(m1-m2-(s1/g1)), -1/g2),
                 1- H(1, (g1*s2)/(s1*g2), -g2, 1+(g1/s1)*(m2-m1-(s2/g2)), -1/g1))
  }
  if(g1 < 0 & g2 < 0){
   R_{est=ifelse(m1-(s1/g1) \le m2-(s2/g2))}
                H(1, (g2*s1)/(s2*g1), -g1, 1+(g2/s2)*(m1-m2-(s1/g1)), -1/g2),
                 1- H(1, (g1*s2)/(s1*g2), -g2, 1+(g1/s1)*(m2-m1-(s2/g2)), -1/g1))
    #H(1, (g1*s2)/(s1*g2), -g2, 1+(g1/s1)*(m2-m1-(s2/g2)), -1/g1))
 }
  return(R_est)
fitR1<-R hat(LOGVL, LOGBB) %>% round(digits = 4)
fitR1P<-fit_R(parVL,parBB1) %>% round(digits = 4)
fitR2<-R hat(LOGVL, LOGIT) %>% round(digits = 4)
fitR2P<-fit_R(parVL,parIT) %>% round(digits = 4)
fitR3<-R_hat(LOGVL, LOGVIA) %>% round(digits = 4)
fitR3P<-fit_R(parVL,parVIA) %>% round(digits = 4)
# Criar o data frame de confiabilidade
confiabilidade = data.frame(
  Bases = c("", "X3<X1", "X3<X2", "X3<X4"),
 RNP = c("RNP", fitR1, fitR2, fitR3),
 RP = c("RP", fitR1P, fitR2P, fitR3P)
confiabilidade
```

```
## 1 Bases RNP RP
## 1 RNP RP
## 2 X3<X1 0.5242 0.5283
## 3 X3<X2 0.5242 0.5174
## 4 X3<X4 0.4364 0.4506
```

Em resumo, quando X e Y representam Vas de retorno e R < 1/2, é aconselhável que o investidor escolha a variável X. Se R > 1/2, ocorre o oposto. O caso R = 1/2 é inconclusivo. neste caso fixamos o X3 então se R < 1/2 a melhor opção é escolher X3, se maior escolha o par contrário, olhando para o contexto de estimativas pontuais faz total sentido os preços de X1 e X2 (Ações bancárias) são maiores que X3 e X4, logo comparar o modelo está apontando corretamente, por segurança fizemos uma estimativa intervalar via bootstrap omiti o código porque ainda estou trabalhando em uma solução mais rápida e otimizada assim que estiver atulizada eu disponibilizo a estimativa intervalar porém os resultados obtidos tanto para pontual quanto para intervar está definida na tabela abaixo.