Базиси, координати и размерност в крайномерни линейни пространства

Антъни Господинов

1. Да се докаже, че ако $\mathbf{S} = (s_1, \dots, s_n)$ е базис на линейно пространство, а $\mathbf{T} = (t_1, \dots, t_m)$ е линейно независима система вектори в същото линейно пространство, то $n \geq m$

Решение: (Матрична перспеткива) $\mathbf{S}$ е базис и следователно всеки вектор от $\mathbf{T}$ може да се изрази като линейна комбинация на вектори от $\mathbf{S}$ по следния начин:

$$t_i = \lambda_{1,i} s_i + \dots + \lambda_{n,i} s_n \tag{1}$$

Тривиално е да се провери че условието е вярно за $n = 1$. Ще разгледаме случая, в който $n > 1$. Векторите $(t_1, \dots, t_m)$ са линейно зависими тогава и само тогава кога-то съществува тяхна нетъждествено нулева линейна комбинация равна на нулевия вектор на пространството:

$$\alpha_1 t_1 + \dots + \alpha_m t_m = \overrightarrow{0} \qquad\qquad (\alpha_1, \dots, \alpha_m) \neq (0, \dots, 0) \tag{2}$$

Ползвайки (1) и (2) може да изразим условието за линейна зависимост на $t_1, \dots, t_m$ като това следната хомогенна система от линейни уравнения да има нетривиално решение:

$$\begin{pmatrix} \lambda_{1,1} & \lambda_{1,2} & \lambda_{1,3} & \dots & \lambda_{1,m} \\ \lambda_{2,1} & \lambda_{2,2} & \lambda_{2,3} & \dots & \lambda_{2,m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_{n-1,1} & \lambda_{n-1,2} & \lambda_{n-1,3} & \dots & \lambda_{n-1,m} \\ \lambda_{n,1} & \lambda_{n,2} & \lambda_{n,3} & \dots & \lambda_{n,m} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \tag{3}$$

Ще докажем съществуването на това нетривиално решение чрез индукция. Тъй като $\mathbf{T}$ е линейно независима система вектори, то $t_m \neq \overrightarrow{0}$ и съществува индекс j с $\lambda_{j,m} \neq 0$. Без ограничение на общността може да приемем, че $j = n$ и съответно $\lambda_{n,m} \neq 0$. След добавяне на подходящи кратни на ред n към останалите редове на матрицата от (3) с цел елиминация на елементите в колона m получаваме следното еквивалентно матрично уравнение:

$$\begin{pmatrix} \mu_{1,1} & \mu_{1,2} & \mu_{1,3} & \dots & 0 \\ \mu_{2,1} & \mu_{2,2} & \mu_{2,3} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mu_{n-1,1} & \mu_{n-1,2} & \mu_{n-1,3} & \dots & 0 \\ \lambda_{n,1} & \lambda_{n,2} & \lambda_{n,3} & \dots & \lambda_{n,m} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \tag{4}$$

Матрицата вече има вид, които ни позволява да приложим индукция. От ред n може да изразим α_m:

$$\alpha_m = \frac{\lambda_{n,1}\alpha_1 + \cdots + \lambda_{n,m-1}\alpha_{m-1}}{-\lambda_{n,m}}$$

от където следва че решенията на (4) са в биективно съответсвие с решенията на системата:

$$\begin{pmatrix} \mu_{1,1} & \mu_{1,2} & \mu_{1,3} & \cdots & \mu_{1,m-1} \\ \mu_{2,1} & \mu_{2,2} & \mu_{2,3} & \cdots & \mu_{2,m-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mu_{n-1,1} & \mu_{n-1,2} & \mu_{n-1,3} & \cdots & \mu_{n-1,m-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_{m-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \tag{5}$$

Важно е да отбележим, че поне един от елементите в колона $m-1$ на матрицата е ненулев, което е ключово за да можем да приложим индукция, тъй като използвахме тъкмо това свойство на матрицата за да минем от (3) към (4). Това е вярно, защото ако всичките елементи в колона $m-1$ са нули това би значело че t_{m-1} и t_m са линейно зависими(помислете защо).

Явният вид на съответсвието е:

$$(\alpha_1, \ldots, \alpha_{m-1}) \longmapsto \left(\alpha_1, \ldots, \alpha_{m-1}, \frac{\lambda_{n,1}\alpha_1 + \cdots + \lambda_{n,m-1}\alpha_{m-1}}{-\lambda_{n,m}}\right)$$

От където веднага може да съобразим че (4) има нетривиално решение тогава и само тогава когато (5) има нетривиално решение.
Страхотно за нас, тъй като (5) има нетривиално решение по индукционно предположение. $\square$