Действия с матрици

Антъни Господинов

Задача 1. Да се пресметне произведението AB за:

а. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -8 & -4 \\ 9 & 5 \\ -3 & -2 \end{bmatrix}$

б. $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 6 & -4 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$

Задача 2. Нека $A = [a_1, \dots, a_n]$ е вектор ред, а $B = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$ е вектор стълб. Да се пресметнат произведенията AB и BA

Задача 3. Нека A, B и C са матрици с размери $l \times m$, $m \times n$ и $n \times p$. Колко умножения са нужни за да пресметнем произведението AB? В какъв ред трябва да пресметнем тройното произведение ABC, ако искаме да минимизираме броя на умноженията?

Задача 4. Пресметнете $\begin{bmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ и $\begin{bmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^n$

Задача 5. Намерете формула за $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^n$ и я докажете с индукция.

Задача 6. Пресметнете следните произведения чрез блочно умножение:
(`https://en.wikipedia.org/wiki/Block_matrix#Block_matrix_multiplication`)

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right] \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \end{array}\right], \quad \left[\begin{array}{c|cc} 0 & 1 & 2 \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{array}\right] \left[\begin{array}{c|cc} 1 & 2 & 3 \\ \hline 4 & 2 & 3 \\ 5 & 0 & 4 \end{array}\right]$$

Задача 7. Нека D е диагонална матрица с елементи $d_1, \dots, d_n$ и нека $A = (a_{ij})$ е произволна $n \times n$ матрица. Пресметнете произведенията DA и AD.

Задача 8. Докажете, че произведението на две горнотриъгълни матрици също е горнотриъгълна матрица.

Задача 9. Казваме, че матриците A и B комутират, ако $AB = BA$. Да се намерят всички матрици, които комутират с:

а. $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

б. $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

в. $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

Задача 10. *Следата* на квадратна матрица е сумата на елементите по диагонала:

$$\operatorname{tr}(A) = a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn}$$

Докажете, че $\operatorname{tr}(A + B) = \operatorname{tr}(A) + \operatorname{tr}(B)$ и също $\operatorname{tr}(AB) = \operatorname{tr}(BA)$

Задача 11. Докажете, че уравнението $AB - BA = E$ няма решение в пространството на квадратните $n \times n$ матрици с елементи от полето на реалните числа(*понякога това пространство се означава като:* $M_{n,n}(\mathbb{R})$)