Базиси, координати и размерност в крайномерни линейни пространства

Антъни Господинов

Фундаментален факт: Да се докаже, че ако $\mathbf{S} = (s_1, \ldots, s_n)$ е система от линейно независими вектори в линейно пространство, а $\mathbf{T} = (t_1, \ldots, t_m)$ е линейно независима система вектори в същото линейно пространство, които се съдържат в линейната обвивка на $\mathbf{S}$, то $n \geq m$

Доказателство: (Матрична перспеткива) Всеки вектор от $\mathbf{T}$ може да се изрази като линейна комбинация на вектори от $\mathbf{S}$ по следния начин:

$$t_i = \lambda_{1,i} s_i + \cdots + \lambda_{n,i} s_n \tag{1}$$

Тривиално е да се провери че условието е вярно за $n = 1$. Ще разгледаме случая, в който $n > 1$. Да допуснем, че $n < m$. Векторите $(t_1, \ldots, t_m)$ са линейно зависими тогава и само тогава когато съществува тяхна нетъждествено нулева линейна комбинация равна на нулевия вектор на пространството:

$$\alpha_1 t_1 + \cdots + \alpha_m t_m = \overrightarrow{0} \qquad (\alpha_1, \ldots, \alpha_m) \neq (0, \ldots, 0) \tag{2}$$

Ползвайки (1) и (2) може да изразим условието за линейна зависимост на $t_1, \ldots, t_m$ като това следната хомогенна система от линейни уравнения да има нетривиално решение:

$$\begin{pmatrix} \lambda_{1,1} & \lambda_{1,2} & \lambda_{1,3} & \cdots & \lambda_{1,m} \\ \lambda_{2,1} & \lambda_{2,2} & \lambda_{2,3} & \cdots & \lambda_{2,m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_{n-1,1} & \lambda_{n-1,2} & \lambda_{n-1,3} & \cdots & \lambda_{n-1,m} \\ \lambda_{n,1} & \lambda_{n,2} & \lambda_{n,3} & \cdots & \lambda_{n,m} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \tag{3}$$

Ще докажем съществуването на това нетривиално решение чрез индукция. Тъй като $\mathbf{T}$ е линейно независима система вектори, то $t_m \neq \overrightarrow{0}$ и съществува индекс j с $\lambda_{j,m} \neq 0$. Без ограничение на общността може да приемем, че $j = n$ и съответно $\lambda_{n,m} \neq 0$. След добавяне на подходящи кратни на ред n към останалите редове на матрицата от (3) с цел елиминация на елементите в колона m получаваме следното еквивалентно матрично уравнение:

$$\begin{pmatrix} \mu_{1,1} & \mu_{1,2} & \mu_{1,3} & \cdots & 0 \\ \mu_{2,1} & \mu_{2,2} & \mu_{2,3} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mu_{n-1,1} & \mu_{n-1,2} & \mu_{n-1,3} & \cdots & 0 \\ \lambda_{n,1} & \lambda_{n,2} & \lambda_{n,3} & \cdots & \lambda_{n,m} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \tag{4}$$

Матрицата вече има вид, които ни позволява да приложим индукция. От ред n може да изразим α_m:

$$\alpha_m = \frac{\lambda_{n,1}\alpha_1 + \cdots + \lambda_{n,m-1}\alpha_{m-1}}{-\lambda_{n,m}}$$

от където следва че решенията на (4) са в биективно съответсвие с решенията на системата:

$$\begin{pmatrix} \mu_{1,1} & \mu_{1,2} & \mu_{1,3} & \cdots & \mu_{1,m-1} \\ \mu_{2,1} & \mu_{2,2} & \mu_{2,3} & \cdots & \mu_{2,m-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mu_{n-1,1} & \mu_{n-1,2} & \mu_{n-1,3} & \cdots & \mu_{n-1,m-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_{m-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \tag{5}$$

Важно е да отбележим, че колоните на матрицата (5) са линейно независими, което е ключовият факт, който ни позволява да приложим така нареченият поход *структурна индукция*. Интуитивно, по-малката матрица притежава структурните свойства на голямата, от които сме се възползвали. В нашия случай единственото свойство, от което се възползвахме е това, че колоните на голямата матрица са линейно независими. *Доказателството на този факт оставям като задача за любознателния читател.*

Явният вид на съответсвието е:

$$(\alpha_1, \ldots, \alpha_{m-1}) \longmapsto \left(\alpha_1, \ldots, \alpha_{m-1}, \frac{\lambda_{n,1}\alpha_1 + \cdots + \lambda_{n,m-1}\alpha_{m-1}}{-\lambda_{n,m}}\right)$$

От където веднага може да съобразим че (4) има нетривиално решение тогава и само тогава когато (5) има нетривиално решение.
Страхотно за нас, тъй като (5) има нетривиално решение по индукционно предположение. □

Следствие: Всеки два базиса на крайномерно линейно пространство имат равен брой елементи.

Задача 1. Докажете, че множеството $\mathbf{B} = \{(1,2,0)^t, (2,1,2)^t, (3,1,1)^t\}$ е базис на $\mathbb{R}^3$ и намерете координатите на вектора $\vec{v} = (1,2,3)^t$ спрямо този базис.

Задача 2. Намерете базиси за подпространствата $S = \{\, (a,b,c,d) \mid a+c+d = 0 \,\}$ и $T = \{\, (a,b,c,d) \mid c = 2d \,\}$ на $\mathbb{Q}^4$. Каква е размерността на сечението $S \cap T$?

Задача 3. Намерете базис на подпространството $U = \{\, p(x) \mid p(1) = 0 \,\}$ на пространството $\mathbb{Q}^3[x]$ на полиномите с рационални коефициенти от степен по-малка или равна на 3.

Задача 4. Нека $W \subset \mathbb{R}^4$ е пространството от решенията на системата линейни уравнения $AX = 0$, където $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 3 & 0 \end{bmatrix}$. Намерете базис на W.

Задача 5. Нека $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3, v_4)$ е вектор от $\mathbb{R}^4$. Координатите на $\vec{v}$ могат да се разбъркат по 24 различни начина, например като (v_2, v_1, v_3, v_4) или (v_3, v_1, v_4, v_2) и по този начин да получим други вектори от $\mathbb{R}^4$. Линейната обвивка на тези 24 вектора е подпространство S на $\mathbb{R}^4$. Да се намери конкретен вектор $\vec{v}$, за който размерността на S е:
а) едно
б) две
в) три
г) четири

Задача 6. Нека V и W са подпространства на $\mathbb{R}^n$, изпълняващи неравенството:

$$dim(V) + dim(W) > n$$

Да се докаже, че съществува ненулев вектор в сечението на V и W.

Задача 7. Нека A е $n \times m$ матрица и нека A' е получена чрез прилагане на поредица от елементарни преобразования по редове(*това са преобразованията, които правим в метода на Gauss-Jordan*) върху A. Да се докаже че линейната обвивка на вектор-редовете на A съвпада с линейната обвивка на редовете на A'.