

# Действия с матрици

Антъни Господинов

**Задача 1.** Да се пресметне произведението  $AB$  за:

а.  $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} -8 & -4 \\ 9 & 5 \\ -3 & -2 \end{bmatrix}$

б.  $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 6 & -4 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$

**Задача 2.** Нека  $A = [a_1, \dots, a_n]$  е вектор ред, а  $B = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$  е вектор стълб. Да се пресметнат произведенията  $AB$  и  $BA$

**Задача 3.** Нека  $A, B$  и  $C$  са матрици с размери  $l \times t, t \times n$  и  $n \times r$ . Колко умножения са нужни за да пресметнем произведението  $AB$ ? В какъв ред трябва да пресметнем тройното произведение  $ABC$ , ако искаме да минимизираме броя на умноженията?

**Задача 4.** Пресметнете  $\begin{bmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$  и  $\begin{bmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^n$

**Задача 5.** Намерете формула за  $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^n$  и я докажете с индукция.

**Задача 6.** Пресметнете следните произведения с блочно умножение:

$$\left[ \begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array} \right] \left[ \begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \end{array} \right], \left[ \begin{array}{c|cc} 0 & 1 & 2 \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{array} \right] \left[ \begin{array}{c|cc} 1 & 2 & 3 \\ \hline 4 & 2 & 3 \\ 5 & 0 & 4 \end{array} \right]$$

**Задача 7.** Нека  $D$  е диагонална матрица с елементи  $d_1, \dots, d_n$  и нека  $A = (a_{ij})$  е произволна  $n \times n$  матрица. Пресметнете произведенията  $DA$  и  $AD$ .

**Задача 8.** Докажете, че произведението на две горнотриъгълни матрици също е горнотриъгълна матрица.

**Задача 9.** Казваме, че матриците  $A$  и  $B$  комутират, ако  $AB = BA$ . Да се намерят всички матрици, които комутират с:

а.  $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

б.  $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

в.  $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

**Задача 10.** Следата на квадратна матрица е сумата на елементите по диагонала:

$$\text{tr}(A) = a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn}$$

Докажете, че  $\text{tr}(A + B) = \text{tr}(A) + \text{tr}(B)$  и също  $\text{tr}(AB) = \text{tr}(BA)$

**Задача 11.** Докажете, че уравнението  $AB - BA = E$  няма решение в пространството на квадратните  $n \times n$  матрици с елементи от полето на реалните числа (понякога това пространство се означава като:  $M_{n,n}(\mathbb{R})$ )