Афинни многообразия

Антъни Господинов

Дефиниция. Нека k е поле и $f_1, \dots, f_s$ са полиноми от $k[x_1, \dots, x_n]$. Дефинираме множеството:

$$\mathbf{V}(f_1, \dots, f_s) = \{(a_1, \dots, a_n) \in k^n \mid f_i(a_1, \dots, a_n) = 0 \textit{ за всички } 1 \leq i \leq s\}$$

Ще наричаме $\mathbf{V}(f_1, \dots, f_s)$ **афинната многообразие** определена от $f_1, \dots, f_s$. Казано по друг начин, $\mathbf{V}(f_1, \dots, f_s)$ е множеството от решенията на системата уравнения:

$$f_1(x_1, \dots, x_n) = \dots = f_s(x_1, \dots, x_n) = 0$$

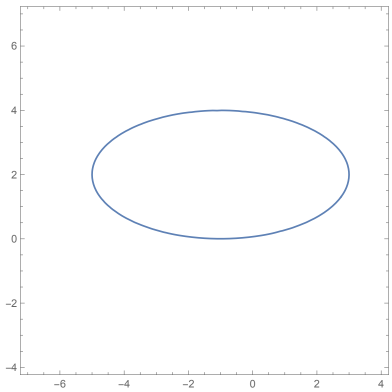
Задача 1. Да се скицират графиките на следните афинни многообразия в $\mathbb{R}^2$:

а. $\mathbf{V}(x^2 + 4y^2 + 2x - 16y + 1)$.

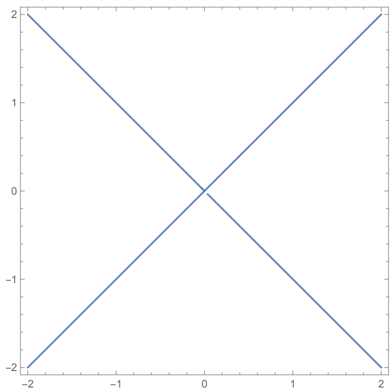
б. $\mathbf{V}(x^2 - y^2)$.

Решение:

а.



б.



Задача 2. Да се скицират графиките на следните афинни многообразия в $\mathbb{R}^3$

а. $\mathbf{V}(x^2 + y^2 + z^2 - 1)$.

б. $\mathbf{V}(x^2 + y^2 - 1)$.

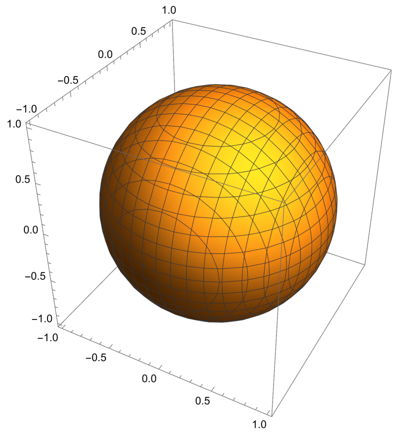
в. $\mathbf{V}(x + 2, y - 1.5, z)$.

г. $\mathbf{V}(xz^2 - xy)$.

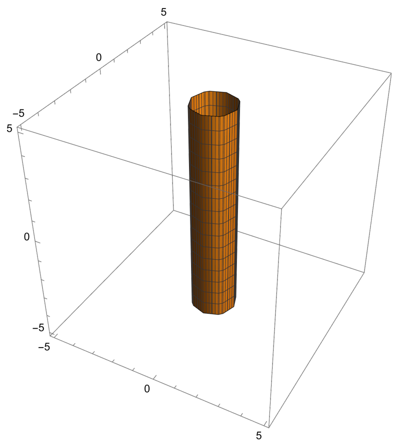
д. $\mathbf{V}(x^4 - zx, x^3 - yx)$.

Решение:

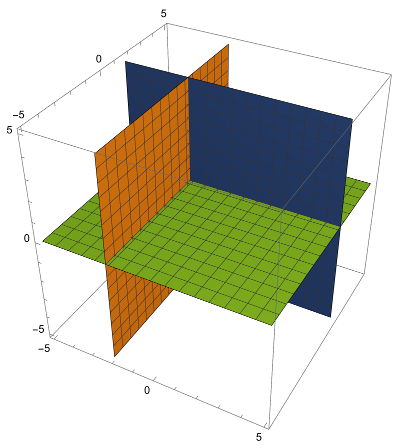
а.



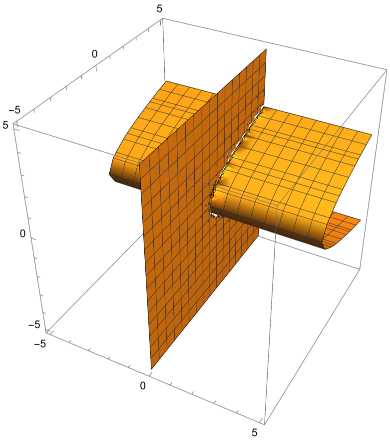
б.



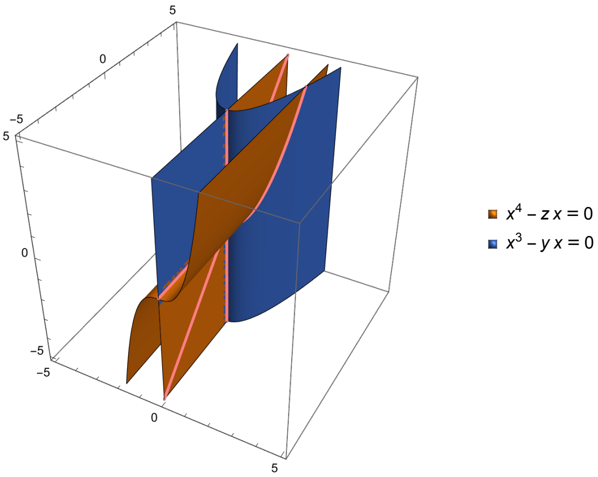
в.



г.



д.



Задача 3. Да се докаже, че ако $f \in \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]$ изчезва във всяка точка от $\mathbb{Z}^n$ то f е тъждествено нулевия полином.

Решение: Ще докажем твърдението с индукция по броя на променливите на f. В случая $n = 1$ от основната теорема на алгебрата знаем че ако f не е тъждествено нулевия полином, то f има най-много $\deg(f) \in \mathbb{N}$ различни корена, от където следва че f е нулевия полином. Нека предположим, че твърдението е вярно за полиномите на най-много n променливи и нека f е полином на $n+1$ променливи, $f \in \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_{n+1}]$ които изчезва във всяка точка от $\mathbb{Z}^{n+1}$. Можем да запишем f като полином на променливата x_{n+1} с коефициенти от $\mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]$

$$f(x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}) = \sum_{k=0}^{m} g_k(x_1, \ldots, x_n)\, x_{n+1}^k \tag{1}$$

За произволни $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{Z}$ полиномът

$$f_{a_1,\ldots,a_n}(x_{n+1}) = f(a_1, \ldots, a_n, x_{n+1}) = \sum_{k=0}^{m} g_k(a_1, \ldots, a_n)\, x_{n+1}^k$$

е полином на една променлива x_{n+1}, който изчезва във всяко цяло число, тъй като $f(x_1, \ldots, x_n, x_{n+1})$ изчезва във всяка точка от $\mathbb{Z}^{n+1}$. По индукционно предположение това значи, че $f_{a_1,\ldots,a_n}$ е тъждествено нулевия полином, откъдето следва че коефициентите му $g_0(a_1,\ldots,a_n),\ldots,g_m(a_1,\ldots,a_n)$ се анулират. Тъй като $a_1,\ldots,a_n \in \mathbb{Z}$ бяха произволни, то значи $g_0,\ldots,g_m$ изчезват във всяка точка от $\mathbb{Z}^n$ и от индукционното ни предположение следва че $g_0,\ldots,g_m$ са тъждествено нулевия полином. От представянето (1) на f като полином на x_{n+1} с коефициенти $g_0,\ldots,g_m$ имаме:

$$f(x_1,\ldots,x_n,x_{n+1}) = \sum_{k=0}^{m} g_k(x_1,\ldots,x_n)\, x_{n+1}^k = \sum_{k=0}^{m} 0\, x_{n+1}^k = 0$$

което доказва, че f е тъждествено нулевия полином. $\square$