

# **EKSPLORASI METODE PENCARIAN TITIK MEDIAN GEOMETRIS OPTIMAL DENGAN MENGGUNAKAN ALGORITMA WEISZFELD**

## **TUGAS AKHIR**

**Karya tulis sebagai salah satu syarat  
untuk memperoleh gelar Sarjana dari  
Institut Teknologi Bandung**

**Oleh  
MELVAN SAFERO LEE  
NIM: 10121063  
(Program Studi Sarjana Matematika)**



**INSTITUT TEKNOLOGI BANDUNG  
Juni 2025**

## **ABSTRAK**

# **EKSPLORASI METODE PENCARIAN TITIK MEDIAN GEOMETRIS OPTIMAL DENGAN MENGGUNAKAN ALGORITMA WEISZFELD**

**Oleh**  
**Melvan Safero Lee**  
**NIM: 10121063**

Titik median geometris adalah suatu pengukuran pemusatan data yang meminimalkan jumlah jarak ke titik sampel. Perkembangan metode algoritma *Weiszfeld* membuat pencarian titik median semakin canggih dalam bidang pembelajaran mesin. Contohnya perkembangan masalah MFLP (*Multi-Facility Location Problem*), sudah memicu jumlah titik median yang tidak tunggal sebagai alternatif meminimalisasi menggunakan package scikit-learn pada *clustering*, perkembangan algoritma  $L_q$  *Weiszfeld* untuk membandingkan performa data yang tidak berbobot sampai penerapan kasus yang berbobot dengan masalah *Weber*. Pada tugas akhir ini, penulis akan melakukan beberapa teknik pencarian titik median geometris dengan metode yang sudah disebutkan sebelumnya dengan data yang diambil berupa data kasus COVID-19, baik untuk kasus yang tak berbobot maupun berbobot. Kemudian dilakukan hal yang sama untuk pemilihan jumlah titik median yang tidak tunggal. Untuk melihat seberapa jauh dari kedua performa pencarian titik median tersebut digunakan jarak galat absolut dengan jarak Euclid. Indeks *Xie-Beni* dilakukan pada kasus *soft clustering* untuk menunjukkan validitas dari pemilihan jumlah titik median geometris. Simulasi menunjukkan bahwa titik median dipengaruhi oleh jarak diantara titik data terdekat dan penyebaran data. Performa dari keseluruhan metode sangat sensitif terhadap penciran dan posisi dari titik klaster terkait.

Kata kunci: titik median geometris, algoritma *Weiszfeld*, MFLP, algoritma  $L_q$  *Weiszfeld*, indeks *Xie-Beni*, kasus COVID-19

## **ABSTRACT**

# **EXPLORATION OF OPTIMAL GEOMETRIC MEDIAN POINT SEARCH METHODS USING WEISZFELD ALGORITHM**

by

**Melvan Safero Lee**

**NIM: 10121063**

The geometric median point is a measure of data centralization that minimizes the sum of the distances to the sample points. The development of the *Weiszfeld* algorithm method makes the search for median points increasingly sophisticated in the field of machine learning. For example, the development of the MFLP (*Multi-Facility Location Problem*) problem has triggered the number of non-single median points as an alternative minimizer using the scikit-learn package in clustering. The development of the  $L_q$  *Weiszfeld* algorithm drives data performance comparison for unweighted data to the application of weighted cases with the *Weber* problem. In this final project, the author will explore several geometric median point search techniques using the previously mentioned methods for COVID-19 data, both for unweighted and weighted cases using Euclidean distance. The *Xie-Beni* index is carried out in the soft clustering case to show the validity of selecting the number of geometric median points. Simulations show that the median point is influenced by the distance between the nearest data points and the spread of the data. The performance of the overall method is very sensitive to outliers and the position of the related cluster points.

Keywords: geometric median point, *Weiszfeld* algorithm, MFLP,  $L_q$  *Weiszfeld* algorithm, *Xie-Beni* index, COVID-19 cases

# **PENGESAHAN**

## **EKSPLORASI METODE PENCARIAN TITIK MEDIAN GEOMETRIS OPTIMAL DENGAN MENGGUNAKAN ALGORITMA WEISZFELD**

Oleh  
**Melvan Safero Lee**  
**NIM: 10121063**  
**(Program Studi Sarjana Matematika)**

Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam  
Institut Teknologi Bandung

Menyetujui,

Bandung, 17 Juni 2025  
Dosen Pembimbing,



Prof. Dr. Agus Yodi Gunawan, S.Si., M.Si.

Tim Penguji:

1. Dr. Adhe Kania, M.Si.
2. Finny Oktariani, S.Si, M.Sc., Ph.D

## **PEDOMAN PENGGUNAAN BUKU TUGAS AKHIR**

Buku Tugas Akhir Sarjana ini tidak dipublikasikan, namun terdaftar dan tersedia di Perpustakaan Institut Teknologi Bandung. Buku ini dapat diakses umum, dengan ketentuan bahwa penulis memiliki hak cipta dengan mengikuti aturan HaKI yang berlaku di Institut Teknologi Bandung. Referensi kepustakaan diperkenankan dicatat, tetapi pengutipan atau peringkasan hanya dapat dilakukan seizin penulis, dan harus disertai dengan kebiasaan ilmiah untuk menyebutkan sumbernya.

Memperbanyak atau menerbitkan sebagian atau seluruh buku Tugas Akhir harus atas izin Program Studi Sarjana Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Institut Teknologi Bandung.

*Tugas Akhir ini dipersembahkan untuk  
Tuhan, Bangsa, dan Almamater*

## KATA PENGANTAR

Puji syukur kepada Tuhan Yang Maha Esa atas kebaikan-Nya penulis dapat menyelesaikan buku tugas akhir ini dalam rangka melengkapi persyaratan dalam menyelesaikan studi pada Program Studi Sarjana Matematika Institut Teknologi Bandung. Adapun judul yang penulis angkat yaitu "Eksplorasi Metode Pencarian Titik Median Geometris Dengan Menggunakan Algoritma Weiszfeld". Tugas akhir ini disusun sebagai syarat untuk memperoleh gelar sarjana di Program Studi Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Institut Teknologi Bandung.

Dalam menyelesaikan tugas akhir ini, penulis mendapatkan berbagai rintangan dan hambatan. Namun, rintangan dan hambatan tersebut dapat diatasi dengan banyaknya dukungan, doa, bantuan, dan bimbingan dari berbagai pihak. Maka dari itu, penulis ingin mengucapkan terima kasih sebanyak-banyaknya kepada semua pihak yang telah membantu penulis dalam menyelesaikan tugas akhir ini, di antaranya:

1. Bapak Amin Husen Lee dan Ibu Suyeni selaku orang tua penulis, serta Mareo Vicakshana Lee selaku adik penulis, yang selalu memberikan perhatian, kasih sayang, doa, dan restu yang mengiringi langkah penulis setiap harinya.
2. Bapak Prof. Dr. Agus Yodi Gunawan, S.Si., M.Si. selaku dosen pembimbing tugas akhir yang telah memberikan bimbingan serta arahan kepada penulis dalam penyusunan Tugas Akhir ini..
3. Ibu Dr. Adhe Kania, M.Si., selaku dosen penguji pertama dalam Seminar I dan Seminar II yang telah bersedia meluangkan waktu untuk menguji penulis.
4. Ibu Finny Oktariani, S.Si, M.Sc., Ph.D, selaku dosen penguji kedua dalam Seminar II yang telah bersedia meluangkan waktu untuk menguji penulis.
5. Ibu Prof. Dr. Nuning Nuraini, S.Si., M.Si., selaku Kepala Prodi Matematika yang membantu penulis dalam menyelesaikan perkuliahan di program studi Matematika.
6. Ibu Dr. Gantina Rachmaputri, S.Si., M.Si. selaku dosen wali penulis, yang telah membantu penulis dalam menyusun rencana studi setiap semesternya dan memberi nasihat serta masukan selama penulis menjalani perkuliahan di Matematika ITB.

7. Sahabat-sahabat penulis terdekat di ITB: Aryadharma, Bryan Guok, Fery, Indra, Felix, Michael, dan teman lain yang selalu membantu penulis dalam kegiatan sehari-hari penulis selama perkuliahan termasuk dalam pengerjaan Tugas Akhir ini, serta menjadi teman belajar penulis.
8. Kakak-kakak penulis yang selalu membantu mendampingi dan mendukung penulis: Kak Marcellino, Kak Fadlan, Kak Albert, Kak Ariansyah, Kak Gerend, dll.
9. Sahabat-sahabat SMA penulis yang juga menjadi teman seperjuangan penulis: Steven, Marvina, Jonwin, Samuel, dan lain-lain yang tidak disebutkan.
10. Sahabat-sahabat seperjuangan program *fast track*: Habiburrohman, Khaznaya, Arrofiatuz, Muhammad Fadhlwan, Tiara, dan Zhafir Wisam
11. Teman-teman HIMATIKA ITB yang sudah menjadi sahabat penulis dalam kehidupan himpunan di tahun terakhir ini.
12. Teman-teman Keluarga Mahasiswa Buddhis ITB dan Unit Kebudayaan Tionghoa yang sudah menjadi sahabat penulis dalam kehidupan keluarga mahasiswa.

Penulis menyadari bahwa Tugas Akhir ini masih jauh dari kata sempurna, masih terdapat banyak kesalahan yang mungkin penulis tidak sadari. Oleh karena itu, penulis meminta maaf dan sangat terbuka terhadap kritik dan saran yang membangun terhadap pengerjaan dan penulisan buku tugas akhir ini. Penulis berharap melalui pengerjaan Tugas Akhir ini, penulis dapat memberikan manfaat baik untuk masyarakat, maupun untuk kemajuan ilmu pengetahuan.

Bandung, 17 Juni 2025

Melvan Safero Lee  
10121063

# DAFTAR ISI

<b>ABSTRAK</b> .....	i
<b>ABSTRACT</b> .....	ii
<b>LEMBAR PENGESAHAN</b> .....	iii
<b>PEDOMAN PENGGUNAAN BUKU TUGAS AKHIR</b> .....	iv
<b>KATA PENGANTAR</b> .....	vi
<b>DAFTAR ISI</b> .....	viii
<b>DAFTAR NOTASI</b> .....	xi
<b>DAFTAR GAMBAR</b> .....	xiv
<b>DAFTAR GAMBAR</b> .....	xiv
<b>DAFTAR TABEL</b> .....	xviii
<b>BAB I PENDAHULUAN</b> .....	1
<b>BAB II TINJAUAN PUSTAKA</b> .....	5
II.1 Median Geometris .....	5
II.2 Metode Penyelesaian Median Geometris .....	6
II.2.1 Algoritma <i>Weiszfeld</i> .....	6
II.2.2 Algoritma $L_q$ Weiszfeld .....	7
II.2.3 Algoritma Masalah <i>Weber</i> .....	8
II.3 <i>Multi-Facility Location Problem</i> (MFLP).....	8
II.3.1 <i>Hard Clustering</i> .....	9
II.3.2 <i>Fuzzy Clustering</i> .....	10
II.3.3 Metode Penyelesaian dengan <i>Hard Clustering</i> .....	10
II.3.4 Metode Penyelesaian dengan <i>Probabilistic Assignments</i> .....	13
II.3.5 Probabilitas dan Pusat .....	14

II.3.6	Diagram Voronoi .....	16
II.3.7	Plot JDF dan CUF .....	17
II.3.8	Kondisi Optimal dan Konvergensi .....	20
II.3.9	Algoritma Modifikasi <i>Weiszfeld</i> untuk MFLP .....	20
II.4	Indeks <i>Xie-Beni</i> .....	22
<b>BAB III MODEL KLASTER DAN DATA SIMULASI .....</b>		<b>23</b>
III.1	Pengambilan Data .....	23
III.2	Asumsi Model .....	23
III.3	Data yang Digunakan .....	23
III.4	Alur Model.....	24
<b>BAB IV HASIL DAN PEMBAHASAN.....</b>		<b>32</b>
IV.1	Skema Klaster $K = 1$ .....	32
IV.1.1	Tanpa Berbobot.....	32
IV.1.2	Berbobot.....	34
IV.2	Skema Klaster $K = 3$ .....	34
IV.2.1	Tanpa Berbobot.....	35
IV.2.2	$L_q$ <i>Weiszfeld</i> .....	36
IV.2.3	Berbobot.....	40
IV.3	Skema Klaster $K = 4$ .....	42
IV.3.1	Tanpa Berbobot.....	42
IV.3.2	$L_q$ <i>Weiszfeld</i> .....	44
IV.3.3	Berbobot.....	46
IV.4	Skema Klaster $K = 5$ .....	49
IV.4.1	Tanpa Berbobot.....	49
IV.4.2	$L_q$ <i>Weiszfeld</i> .....	51
IV.4.3	Berbobot.....	55
IV.5	Skema Klaster $K = 6$ .....	57
IV.5.1	Tanpa Berbobot.....	57
IV.5.2	$L_q$ <i>Weiszfeld</i> .....	59
IV.5.3	Berbobot.....	63
IV.6	Pembahasan Skema .....	65
<b>BAB V SIMPULAN DAN SARAN .....</b>		<b>68</b>

V.1	Simpulan .....	68
V.2	Saran .....	68
<b>DAFTAR PUSTAKA .....</b>		<b>69</b>
<b>LAMPIRAN A: ALGORITMA .....</b>		<b>71</b>
A.1	Algoritma <i>Weiszfeld</i> pada SFLP .....	71
A.2	Algoritma $L_q$ <i>Weiszfeld</i> pada SFLP .....	72
A.3	Algoritma <i>Weiszfeld</i> untuk kasus berbobot (Masalah Weber).....	73
A.4	Algoritma <i>Weiszfeld</i> pada MFLP ( <i>hard clustering</i> ) .....	74
A.5	Algoritma $L_q$ <i>Weiszfeld</i> pada MFLP ( <i>hard clustering</i> ) .....	75
A.6	Algoritma <i>Weiszfeld</i> pada MFLP ( <i>probabilistic assignments</i> ) .....	76
A.7	Algoritma $L_q$ <i>Weiszfeld</i> pada MFLP ( <i>probabilistic assignments</i> ) .....	77
<b>LAMPIRAN B: GAMBAR-GAMBAR .....</b>		<b>78</b>

## DAFTAR NOTASI

<b>Notasi</b>	<b>Arti</b>
$\mathbf{x}_i = (x_i, y_i)$	Titik data ke- <i>i</i> .
$\mathbf{y} = (x, y)$	Titik median.
$w_i$	Bobot pada data ke- <i>i</i> .
$C_q(\mathbf{y})$	Fungsi biaya titik median pada orde ke- <i>q</i> .
$q$	Orde ke- <i>q</i> .
$N$	Jumlah titik data.
$\hat{\mathbf{y}} = (\hat{x}, \hat{y})$	Titik median diperbarui.
$\hat{w}_i$	Bobot diperbarui.
$\mathbf{c}_i$	Titik klaster ke- <i>i</i> .
$\omega_i$	Bobot pada data ke- <i>i</i> untuk MFLP.
$d(\mathbf{x}_i, \mathbf{c}_k)$	Jarak Euclid antara titik data ke- <i>i</i> dengan titik median ke- <i>k</i> .
$K$	Jumlah titik median.
$f(\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \dots, \mathbf{c}_k)$	Fungsi objektif untuk jumlah titik klaster ke- <i>k</i> .
$\nabla f(\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \dots, \mathbf{c}_k)$	Fungsi gradien untuk jumlah titik klaster ke- <i>k</i> .
$\lambda_k(\mathbf{x}_i)$	Bobot diperbarui untuk titik klaster pembaruan ke- <i>k</i> .
$T_k(\mathbf{c})$	Fungsi pembaruan titik median ke- <i>k</i> .
$R_k(\mathbf{c})$	Fungsi gaya resultan pada titik klaster ke- <i>k</i> .
$p_k(\mathbf{x})$	Probabilitas pada titik data dari klaster ke- <i>k</i> .

<b>Notasi</b>	<b>Arti</b>
$D(\mathbf{x})$	Fungsi jarak gabungan.
$E(\mathbf{x})$	Fungsi ketidakpastian klasifikasi.
$h_k(\mathbf{c})$	Fungsi kebalikan gaya resultan pada klaster ke- $k$ .
$XB_{index}$	Indeks <i>Xie-Beni</i> .
$WGSS$	<i>Within-Group Sum of Squares</i> .
$\min_{k < k'} \delta_1(\mathbf{c}_k, \mathbf{c}_{k'})^2$	Jarak antara titik klaster $c_k$ dengan titik klaster $c_{k'}$ .
$AE$	galat absolut.
$AE_{\mathbf{c}_k}$	galat absolut pada klaster ke- $k$ .

## **DAFTAR SINGKATAN**

<b>Notasi</b>	<b>Arti</b>
COVID-19	<i>corona virus disease 2019</i>
MFLP	<i>Multi-Facility Location Problem</i>
SFLP	<i>Single-Facility Location Problem</i>
JDF	<i>Joint Distance Function</i>
CUF	<i>Classification Uncertainty Function</i>

## DAFTAR GAMBAR

<b>Gambar II.1</b>	Ilustrasi Median Geometris .....	5
<b>Gambar II.2</b>	Ilustrasi bagaimana algoritma <i>Weiszfeld</i> diterapkan .....	7
<b>Gambar II.3</b>	Ilustrasi Diagram <i>Voronoi</i> beserta himpunan probabilitas .....	17
<b>Gambar II.4</b>	(a) Peta Plot JDF dan (b) Peta Plot CUF.....	19
<b>Gambar III.1</b>	Representasi data COVID-19.....	23
<b>Gambar III.2</b>	Alur model .....	24
<b>Gambar III.3</b>	Representasi data COVID-19 setelah dimodifikasi.....	25
<b>Gambar III.4</b>	Titik koordinat yang ditandai kotak merah .....	26
<b>Gambar III.5</b>	Ilustrasi algoritma <i>Weiszfeld</i> beserta $L_q$ <i>Weiszfeld</i> . (a) $q = 2.1$ , (b) $q = 2.99$ .....	26
<b>Gambar III.6</b>	Ilustrasi algoritma <i>Weiszfeld</i> untuk masalah Weber .....	27
<b>Gambar III.7</b>	Ilustrasi Tipe <i>Clustering</i> .....	28
<b>Gambar III.8</b>	Diagram Voronoi untuk metode <i>probabilistic assignments</i> ....	28
<b>Gambar III.9</b>	Grafik fungsi objektif pada <i>probabilistic assignments</i> .....	29
<b>Gambar III.10</b>	Plot kontur dan ketidakpastian (a) Plot JDF, (b) Plot CUF ....	29
<b>Gambar IV.1</b>	Plot hasil titik median dengan algoritma <i>Weiszfeld</i> dan $L_q$ <i>Weiszfeld</i> .....	33
<b>Gambar IV.2</b>	Plot hasil Algoritma <i>Weiszfeld</i> pada masalah Weber untuk kasus berbobot .....	34
<b>Gambar IV.3</b>	Plot hasil algoritma <i>Weiszfeld</i> pada titik median tidak tunggal (a) <i>hard clustering</i> dan (b) <i>probabilistic assignments</i> pada $K = 3$ .....	35
<b>Gambar IV.4</b>	(a) Diagram <i>Voronoi</i> dan (b) Grafik fungsi objektif pada $K = 3$ ..	35
<b>Gambar IV.5</b>	(a) Plot JDF dan (b) Plot CUF pada $K = 3$ .....	36
<b>Gambar IV.6</b>	Plot hasil titik median dengan algoritma $L_q$ <i>Weiszfeld</i> pada $L_q$ <i>Weiszfeld</i> tipe <i>hard clustering</i> untuk $K = 3$ .....	37
<b>Gambar IV.7</b>	Plot hasil titik median dengan algoritma $L_q$ <i>Weiszfeld</i> pada $L_q$ <i>Weiszfeld</i> tipe <i>probabilistic assignments</i> untuk $K = 3$ .....	38

<b>Gambar IV.8</b>	(a) Diagram <i>Voronoi</i> , (b) Grafik fungsi objektif, (c) Plot JDF, dan (d) Plot CUF pada $L_q$ <i>Weiszfeld</i> dengan orde $q$ terbaik untuk $K = 3$ .....	39
<b>Gambar IV.9</b>	Plot hasil algoritma <i>Weiszfeld</i> pada titik median tidak tunggal (a) <i>hard clustering</i> dan (b) <i>probabilistic assignments</i> untuk $K = 3$ kasus berbobot.....	40
<b>Gambar IV.10</b>	Plot (a) Diagram <i>Voronoi</i> dan (b) Fungsi objektif untuk $K = 3$ .....	41
<b>Gambar IV.11</b>	(a) Plot JDF dan (b) Plot CUF untuk $K = 3$ .....	41
<b>Gambar IV.12</b>	Plot hasil algoritma <i>Weiszfeld</i> pada titik median tidak tunggal (a) <i>hard clustering</i> dan (b) <i>probabilistic assignments</i> untuk $K = 4$ .....	42
<b>Gambar IV.13</b>	Plot (a) Diagram Voronoi dan (b) Fungsi objektif untuk $K = 4$ .....	43
<b>Gambar IV.14</b>	(a) Plot JDF dan (b) Plot CUF untuk $K = 4$ .....	43
<b>Gambar IV.15</b>	Plot hasil titik median dengan algoritma $L_q$ <i>Weiszfeld</i> pada $L_q$ <i>Weiszfeld</i> tipe <i>hard clustering</i> untuk $K = 4$ .....	44
<b>Gambar IV.16</b>	Plot hasil titik median dengan algoritma $L_q$ <i>Weiszfeld</i> pada $L_q$ <i>Weiszfeld</i> tipe <i>probabilistic assignments</i> untuk $K = 4$ .....	46
<b>Gambar IV.17</b>	(a) Diagram <i>Voronoi</i> , (b) Grafik fungsi objektif, (c) Plot JDF, dan (d) Plot CUF pada $L_q$ <i>Weiszfeld</i> dengan orde $q$ terbaik untuk $K = 4$ .....	47
<b>Gambar IV.18</b>	Plot hasil algoritma <i>Weiszfeld</i> pada titik median tidak tunggal (a) <i>hard clustering</i> dan (b) <i>probabilistic assignments</i> untuk $K = 4$ kasus berbobot.....	48
<b>Gambar IV.19</b>	Plot (a) Diagram Voronoi dan (b) Fungsi objektif untuk $K = 4$ .....	48
<b>Gambar IV.20</b>	(a) Plot JDF dan (b) Plot CUF untuk $K = 4$ .....	48
<b>Gambar IV.21</b>	Plot hasil algoritma <i>Weiszfeld</i> pada titik median tidak tunggal (a) <i>hard clustering</i> dan (b) <i>probabilistic assignments</i> untuk $K = 5$ .....	50
<b>Gambar IV.22</b>	Plot (a) Diagram Voronoi dan (b) Fungsi objektif untuk $K = 5$ .....	50
<b>Gambar IV.23</b>	(a) Plot JDF dan (b) Plot CUF untuk $K = 5$ .....	50
<b>Gambar IV.24</b>	Plot hasil titik median pada $L_q$ <i>Weiszfeld</i> tipe <i>hard clustering</i> untuk $K = 5$ .....	52
<b>Gambar IV.25</b>	Plot hasil titik median pada $L_q$ <i>Weiszfeld</i> tipe <i>probabilistic assignments</i> untuk $K = 5$ .....	53

<b>Gambar IV.26</b>	(a) Diagram <i>Voronoi</i> , (b) Grafik fungsi objektif, (c) Plot JDF, dan (d) Plot CUF pada $L_q$ <i>Weiszfeld</i> dengan orde $q$ terbaik untuk $K = 5$ .....	54
<b>Gambar IV.27</b>	Plot hasil algoritma <i>Weiszfeld</i> pada titik median tidak tunggal (a) <i>hard clustering</i> dan (b) <i>probabilistic assignments</i> untuk $K = 5$ kasus berbobot.....	55
<b>Gambar IV.28</b>	Plot (a) Diagram <i>Voronoi</i> dan (b) Fungsi objektif untuk $K = 5$ .....	56
<b>Gambar IV.29</b>	(a) Plot JDF dan (b) Plot CUF untuk $K = 5$ .....	56
<b>Gambar IV.30</b>	Plot hasil algoritma <i>Weiszfeld</i> pada titik median tidak tunggal (a) <i>hard clustering</i> dan (b) <i>probabilistic assignments</i> untuk $K = 6$ .....	57
<b>Gambar IV.31</b>	Plot (a) Diagram <i>Voronoi</i> dan (b) Fungsi objektif untuk $K = 6$ .....	58
<b>Gambar IV.32</b>	(a) Plot JDF dan (b) Plot CUF untuk $K = 6$ .....	58
<b>Gambar IV.33</b>	Plot hasil titik median pada $L_q$ <i>Weiszfeld</i> tipe <i>hard clustering</i> untuk $K = 6$ .....	59
<b>Gambar IV.34</b>	Plot hasil titik median pada $L_q$ <i>Weiszfeld</i> tipe <i>probabilistic assignments</i> untuk $K = 6$ .....	61
<b>Gambar IV.35</b>	(a) Diagram <i>Voronoi</i> , (b) Grafik fungsi objektif, (c) Plot JDF, dan (d) Plot CUF pada $L_q$ <i>Weiszfeld</i> dengan orde $q$ terbaik untuk $K = 6$ .....	62
<b>Gambar IV.36</b>	Plot hasil algoritma <i>Weiszfeld</i> pada titik median tidak tunggal (a) <i>hard clustering</i> dan (b) <i>probabilistic assignments</i> untuk $K = 6$ kasus berbobot.....	63
<b>Gambar IV.37</b>	Plot (a) Diagram <i>Voronoi</i> dan (b) Fungsi objektif untuk $K = 6$ .....	64
<b>Gambar IV.38</b>	(a) Plot JDF dan (b) Plot CUF untuk $K = 6$ .....	64
<b>Gambar B.1</b>	Pencarian ketinggian dengan menggunakan Google Earth yang ditandai kotak merah di pojok kanan bawah.....	78
<b>Gambar B.2</b>	Algoritma <i>Weiszfeld</i> pada titik median $K = 1$ .....	79
<b>Gambar B.3</b>	Plot awal untuk jumlah klaster $K = 3$ .....	79
<b>Gambar B.4</b>	Plot awal untuk jumlah klaster $K = 4$ .....	80
<b>Gambar B.5</b>	Plot awal untuk jumlah klaster $K = 5$ .....	80
<b>Gambar B.6</b>	Plot awal untuk jumlah klaster $K = 6$ .....	81
<b>Gambar B.7</b>	Plot diagram <i>Voronoi</i> pada algoritma $L_q$ <i>Weiszfeld</i> untuk $K = 3$ .....	81

<b>Gambar B.8</b>	Plot grafik fungsi objektif pada algoritma $L_q$ Weiszfeld untuk $K = 3$ .....	82
<b>Gambar B.9</b>	Plot JDF pada algoritma $L_q$ Weiszfeld untuk $K = 3$ .....	83
<b>Gambar B.10</b>	Plot CUF pada algoritma $L_q$ Weiszfeld untuk $K = 3$ .....	84
<b>Gambar B.11</b>	Plot diagram Voronoi pada algoritma $L_q$ Weiszfeld untuk $K = 4$ .....	85
<b>Gambar B.12</b>	Plot grafik fungsi objektif pada algoritma $L_q$ Weiszfeld untuk $K = 4$ .....	85
<b>Gambar B.13</b>	Plot JDF pada algoritma $L_q$ Weiszfeld untuk $K = 4$ .....	86
<b>Gambar B.14</b>	Plot CUF pada algoritma $L_q$ Weiszfeld untuk $K = 4$ .....	87
<b>Gambar B.15</b>	Plot diagram Voronoi pada algoritma $L_q$ Weiszfeld untuk $K = 5$ ..	88
<b>Gambar B.16</b>	Plot grafik fungsi objektif pada algoritma $L_q$ Weiszfeld untuk $K = 5$ .....	88
<b>Gambar B.17</b>	Plot JDF pada algoritma $L_q$ Weiszfeld untuk $K = 5$ .....	89
<b>Gambar B.18</b>	Plot CUF pada algoritma $L_q$ Weiszfeld untuk $K = 5$ .....	90
<b>Gambar B.19</b>	Plot diagram Voronoi pada algoritma $L_q$ Weiszfeld untuk $K = 6$ ..	91
<b>Gambar B.20</b>	Plot grafik fungsi objektif pada algoritma $L_q$ Weiszfeld untuk $K = 6$ .....	91
<b>Gambar B.21</b>	Plot JDF pada algoritma $L_q$ Weiszfeld untuk $K = 6$ .....	92
<b>Gambar B.22</b>	Plot CUF pada algoritma $L_q$ Weiszfeld untuk $K = 6$ .....	93

## DAFTAR TABEL

<b>Tabel IV.1</b>	Titik koordinat pada titik median .....	32
<b>Tabel IV.2</b>	Titik koordinat pada titik median pada kedua tipe klaster pada $K = 3$ .....	36
<b>Tabel IV.3</b>	Titik koordinat pada titik media pada <i>hard clustering</i> pada $K = 3$	37
<b>Tabel IV.4</b>	Galat absolut antara titik median pada algoritma <i>Weiszfeld</i> dan $L_q$ <i>Weiszfeld</i> untuk <i>hard clustering</i> pada $K = 3$ .....	37
<b>Tabel IV.5</b>	Titik koordinat pada titik median pada <i>probabilistic assignments</i> untuk $K = 3$ .....	38
<b>Tabel IV.6</b>	Galat absolut antara titik median pada algoritma <i>Weiszfeld</i> dan $L_q$ <i>Weiszfeld</i> untuk <i>probabilistic assignments</i> untuk $K = 3$ .....	40
<b>Tabel IV.7</b>	Indeks <i>Xie-Beni</i> pada algoritma $L_q$ <i>Weiszfeld</i> untuk $K = 3$ .....	40
<b>Tabel IV.8</b>	Titik koordinat pada titik median pada kasus berbobot untuk $K = 3$ .....	41
<b>Tabel IV.9</b>	Galat absolut antara titik median pada algoritma <i>Weiszfeld</i> ber- bobot dan tak berbobot untuk $K = 3$ .....	42
<b>Tabel IV.10</b>	Titik koordinat pada titik median pada kedua tipe klaster pada $K = 4$ .....	43
<b>Tabel IV.11</b>	Titik koordinat pada titik media pada <i>hard clustering</i> untuk $K = 4$	44
<b>Tabel IV.12</b>	Galat absolut antara titik median pada algoritma <i>Weiszfeld</i> dan $L_q$ <i>Weiszfeld</i> untuk <i>hard clustering</i> pada $K = 4$ .....	45
<b>Tabel IV.13</b>	Titik koordinat pada titik median pada <i>probabilistic assignments</i> untuk $K = 4$ .....	45
<b>Tabel IV.14</b>	Galat absolut antara titik median pada algoritma <i>Weiszfeld</i> dan $L_q$ <i>Weiszfeld</i> untuk <i>probabilistic assignments</i> pada $K = 4$ .....	45
<b>Tabel IV.15</b>	Indeks <i>Xie-Beni</i> pada algoritma $L_q$ <i>Weiszfeld</i> untuk $K = 4$ .....	46
<b>Tabel IV.16</b>	Titik koordinat pada titik median pada kasus berbobot untuk $K = 4$ .....	49
<b>Tabel IV.17</b>	Galat absolut antara titik median pada algoritma <i>Weiszfeld</i> ber- bobot dan tak berbobot untuk $K = 4$ .....	49

<b>Tabel IV.18</b>	Titik koordinat pada titik median pada kedua tipe klaster pada $K = 5$ .....	51
<b>Tabel IV.19</b>	Titik koordinat pada titik media pada <i>hard clustering</i> untuk $K = 5$ .....	51
<b>Tabel IV.20</b>	Galat absolut antara titik median pada algoritma <i>Weiszfeld</i> dan $L_q$ <i>Weiszfeld</i> untuk <i>hard clustering</i> pada $K = 5$ .....	52
<b>Tabel IV.21</b>	Titik koordinat pada titik median pada <i>probabilistic assignments</i> untuk $K = 5$ .....	53
<b>Tabel IV.22</b>	Galat absolut antara titik median pada algoritma <i>Weiszfeld</i> dan $L_q$ <i>Weiszfeld</i> untuk <i>probabilistic assignments</i> pada $K = 5$ .....	55
<b>Tabel IV.23</b>	Indeks <i>Xie-Beni</i> pada algoritma $L_q$ <i>Weiszfeld</i> untuk $K = 5$ .....	55
<b>Tabel IV.24</b>	Titik koordinat pada titik median pada kasus berbobot untuk $K = 5$ .....	56
<b>Tabel IV.25</b>	Galat absolut antara titik median pada algoritma <i>Weiszfeld</i> berbobot dan tak berbobot untuk $K = 5$ .....	57
<b>Tabel IV.26</b>	Titik koordinat pada titik median pada kedua tipe klaster pada $K = 6$ .....	58
<b>Tabel IV.27</b>	Titik koordinat pada titik media pada <i>hard clustering</i> untuk $K = 6$ .....	60
<b>Tabel IV.28</b>	Galat absolut antara titik median pada algoritma <i>Weiszfeld</i> dan $L_q$ <i>Weiszfeld</i> untuk <i>hard clustering</i> pada $K = 6$ .....	60
<b>Tabel IV.29</b>	Titik koordinat pada titik median pada <i>probabilistic assignments</i> untuk $K = 6$ .....	61
<b>Tabel IV.30</b>	Galat absolut antara titik median pada algoritma <i>Weiszfeld</i> dan $L_q$ <i>Weiszfeld</i> untuk <i>probabilistic assignments</i> pada $K = 6$ .....	63
<b>Tabel IV.31</b>	Indeks <i>Xie-Beni</i> pada algoritma $L_q$ <i>Weiszfeld</i> untuk $K = 6$ .....	63
<b>Tabel IV.32</b>	Titik koordinat pada titik median pada kasus berbobot untuk $K = 6$ .....	65
<b>Tabel IV.33</b>	Galat absolut antara titik median pada algoritma <i>Weiszfeld</i> berbobot dan tak berbobot untuk $K = 6$ .....	65
<b>Tabel IV.34</b>	Indeks <i>Xie-Beni</i> keseluruhan .....	66

# BAB I

## PENDAHULUAN

Median merujuk pada metrik yang digunakan dalam statistik. Median adalah angka tengah dalam daftar angka yang diurutkan secara menaik atau menurun dan dapat lebih menggambarkan kumpulan data daripada rata-rata. Median adalah titik di atas dan di bawah tempat 50% data yang diamati berada sehingga mewakili titik tengah data.

Secara umum, median adalah angka tengah dalam daftar yang diurutkan dari angka menaik atau menurun. Median digunakan dalam studi statistik. Angka-angka tersebut harus diurutkan atau disusun terlebih dahulu dalam urutan nilai dari terendah ke tertinggi atau tertinggi ke terendah untuk menentukan nilai median dalam suatu deret. Jika ada jumlah angka ganjil, nilai median adalah angka yang berada di tengah, dengan jumlah angka yang sama di bawah dan di atas. Jika ada jumlah angka genap dalam daftar, pasangan angka di tengah harus ditentukan, dijumlahkan, dan dibagi dua untuk menemukan nilai median.

Namun, pencarian median tidak hanya satu dimensi saja, melainkan ada istilah lain dalam pencarian median dalam 2 dimensi yaitu median geometris. Dimana median geometris adalah titik yang meminimalkan jumlah jarak ke titik sampel. Beberapa aplikasi bagaimana median geometris dapat digunakan, diantara lain segmentasi pelanggan, data lokasi kasus COVID-19, lokasi pusat gempa, dan masih banyak yang dapat digunakan.

Oleh karena itu, salah satu metode yang memecahkan solusi untuk menganalisis lokasi dari median geometris adalah algoritma optimisasi. Salah satu algoritma optimisasi adalah algoritma *Weiszfeld*. Selain itu, ada algoritma *Weiszfeld* khusus dalam pencarian median geometris, yaitu algoritma  $L_q$  *Weiszfeld*. Metode ini hampir sama dengan metode umum, hanya membedakan adalah pengaruh orde  $q$  digunakan. Tidak hanya metode untuk orde  $q$ , metode ini digunakan juga untuk jumlah titik median yang tidak tunggal.

Pada Tugas Akhir ini, penulis akan menggunakan algoritma *Weiszfeld* dan algoritma  $L_q$  *Weiszfeld* untuk mencari median geometris pada kedua metode, kemudian akan membandingkan seberapa jauh kedua titik median geometris antara kedua metode tersebut berdasarkan galat absolut yang berpengaruh jumlah data beserta lokasinya.

Tidak hanya itu saja, akan membandingkan pengaruh lokasi titik median geometris pada data yang tak berbobot dan data yang berbobot. Selanjutnya akan menerapkan masalah *Multi-Facility Location Problem* yaitu menggunakan metode *hard clustering* dan *fuzzy clustering* atau disebut *probabilistic assignments* dengan kedua metode yang sama tanpa menggunakan paket scikit-learn. Untuk hasil lokasi titik *centroid* optimal pada *fuzzy clustering* akan menghitung *Xie-Beni Index* untuk mengukur validitas dari klaster terhadap pemilihan jumlah titik median geometris yang dikelompokkan pada penyebaran data dan orde  $q$  untuk melihat performa dari metode ini bagus atau tidak.

Data yang digunakan adalah data hasil COVID-19 yang meliputi lokasi negara yang berupa titik pusat (garis lintang, garis bujur). Dimana data tersebut juga terdiri dari jumlah kasus konfirmasi, jumlah orang sembuh, dan jumlah orang kematian.

Berdasarkan latar belakang yang telah diuraikan, penulis merumuskan masalah sebagai berikut.

1. Bagaimana median geometris dapat diinterpretasikan dari data lokasi yang diinginkan?
2. Apa faktor yang berpengaruh pada seberapa jauh titik median geometris antara kedua algortima *Weiszfeld* berdasarkan galat absolut?
3. Apa faktor yang berpengaruh pada seberapa jauh titik median geometris terhadap dengan kasus yang tak berbobot dan berbobot?
4. Bagaimana pengaruh validasi klaster terhadap penyebaran data untuk jumlah titik median geometris tidak tunggal pada metode *probabilistic assignments* beserta orde  $q$ ?

Berdasarkan latar belakang dan rumusan masalah yang telah diuraikan sebelumnya, maka tujuan disusunnya tugas akhir ini adalah sebagai berikut.

1. Menginterpretasikan median geometris dari data lokasi yang diinginkan.
2. Menjelaskan faktor yang berpengaruh pada seberapa jauh titik median geometris antara kedua algortima *Weiszfeld* berdasarkan galat absolut.
3. Menjelaskan faktor yang berpengaruh pada seberapa jauh titik median geometris terhadap dengan kasus yang tak berbobot dan berbobot.

4. Membandingkan indeks validitas dari klaster terhadap pemilihan jumlah titik median geometris yang dikelompokkan pada penyebaran data dan orde  $q$ .

Metode penelitian tugas akhir ini adalah sebagai berikut.

1. Studi literatur. Penulis melakukan kajian terhadap buku, artikel, paper, dan jurnal mengenai metode algoritma *Weiszfeld* dan  $L_q$  *Weiszfeld*, masalah *Multi-Facility Location Problem*, serta masalah Weber dalam pengambilan dan pemilihan data. Selain itu penulis juga melakukan kajian mengenai indeks *Xie-Beni* untuk menentukan indeks validitas terhadap jumlah klaster  $K$ .
2. Konstruksi program. Instrumen yang digunakan untuk dalam implementasi algoritma *Weiszfeld* dan  $L_q$  *Weiszfeld*, masalah *Multi-Facility Location Problem*, masalah Weber, serta indeks *Xie-Beni* adalah software Python yang dijalankan di bawah sistem software Google Colaboratory.
3. Eksperimentasi algoritma. Penulis menyusun dan memodifikasi terkait algoritma pencarian titik median geometris yang optimal yang telah ada dari paper dan jurnal. Algoritma yang telah dimodifikasi kemudian diaplikasikan pada permasalahan yang dapat diselesaikan untuk diinterpretasikan dan diperiksa keefektifan dan validasi mengenai metode tersebut.
4. Perbandingan performa metode. Algoritma yang telah dimodifikasi akan dibandingkan dengan algoritma lama yang memiliki metode pencarian titik median geometris optimal yang sama untuk diperiksa keunggulan dan kelemahan dari masing-masing algoritma.

Tugas akhir ini terdiri dari 5 bab. Pada BAB I, akan dijelaskan mengenai latar belakang sehingga topik ini dipilih, tujuan akhir yang akan dicapai, serta sistematika dalam penulisan tugas akhir. Pada BAB II, akan membahas mengenai teori-teori penting yang terkait dengan metode algoritma beserta masalah yang dirujukan dari paper. Terdapat penjelasan mengenai metode pencarian titik median geometris yang optimal, yaitu algoritma *Weiszfeld* dan algoritma  $L_q$  *Weiszfeld*, kasus masalah Weber, dan kasus *Multi-Facility Location Problem* (MFLP) beserta indeks *Xie-Beni*. Pada BAB III, akan membahas mengenai proses pengerjaan tugas akhir ini secara rinci. Dimulai dengan penjelasan data yang digunakan dan penjelasan metode-metode yang digunakan sampai mendapatkan hasil yang diinginkan. Pada BAB IV, akan ditampilkan hasil interpretasi yang didapat

yaitu lokasi titik median yang optimal untuk setiap metode yang digunakan. Pada BAB V, dibahas mengenai kesimpulan dari tugas akhir ini beserta saran-saran yang dirasa mampu mengembangkan penelitian selanjutnya.

# BAB II

## TINJAUAN PUSTAKA

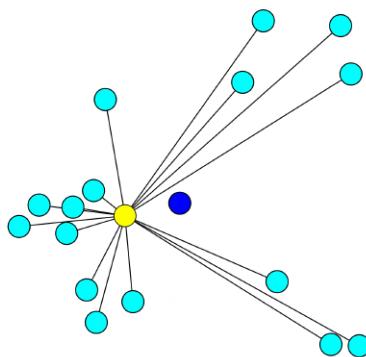
### II.1 Median Geometris

Median geometris adalah titik yang meminimalkan jumlah jarak ke titik sampel berdasarkan geometri. Ini mengeneralisasi median, yang memiliki sifat meminimalkan jumlah jarak atau perbedaan absolut untuk data satu dimensi menurut Drezner et al. (2002). Median geometrik dapat digeneralisasikan ke masalah meminimalkan jumlah jarak tertimbang, yang dikenal sebagai masalah Weber.

Secara umum, untuk himpunan titik  $m$  yang diberikan  $\mathbb{X} = \{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_m\}$  dengan  $\mathbf{x}_i \in \mathbb{R}^2$ , median geometris  $y$  didefinisikan sebagai jumlah peminimal jarak  $L_2$ :

$$\arg \min_{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^2} \sum_{i=1}^m \|\mathbf{x}_i - \mathbf{y}\|_2 \quad (\text{II.1})$$

Di sini, *arg min* berarti nilai argumen  $y$  yang meminimalkan jumlah. Dalam kasus ini, ini adalah titik  $y$  dalam ruang Euclid berdimensi- $n$  dari jumlah semua jarak Euclidean ke  $\mathbf{x}_i$  minimum. Ilustrasi median geometris dapat dirujuk pada Gambar II.1.



**Gambar II.1:** Ilustrasi Median Geometris

## II.2 Metode Penyelesaian Median Geometris

Metode yang memecahkan solusi untuk menganalisis lokasi dari median geometris jika diberikan berbagai titik adalah algoritma optimisasi. Salah satu algoritma optimisasi adalah Algoritma *Weiszfeld*. Algoritma ini adalah salah satu metode untuk memecahkan masalah Fermat-Weber yang secara matematis dapat dinyatakan sebagai masalah untuk mencari  $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^2$  yang memenuhi

$$\min_{\mathbf{y}} \left\{ f(\mathbf{y}) = \sum_{i=1}^N w_i \|\mathbf{y} - \mathbf{x}_i\| \right\} \quad (\text{II.2})$$

dengan  $w_i > 0$ ,  $i = 1, 2, \dots, N$ , merupakan bobot dan vektor  $\mathbf{x}_i \in \mathbb{R}^d$  merupakan titik anchor (Beck and Sabach, 2015). Dengan kata lain, masalah *Fermat-Weber* bertujuan mencari titik median geometri, dalam kasus ini titik  $\mathbf{y}$ , yang menyebabkan jumlah jarak berbobot  $\mathbf{y}$  dengan titik-titik lainnya memiliki jarak berbobot yang paling kecil.

### II.2.1 Algoritma *Weiszfeld*

Menurut Aftab et al. (2014), algoritma *Weiszfeld* mencari rata-rata  $L_1$  dari himpunan titik  $\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_N\}$  dalam  $\mathbb{R}^N$ . Rata-rata  $L_1$  atau median geometrik adalah titik  $\mathbf{y}$  yang meminimalkan fungsi biaya:

$$C_1(\mathbf{y}) = \sum_{i=1}^N \|\mathbf{x}_i - \mathbf{y}\| \quad (\text{II.3})$$

di mana  $\|\cdot\|$  adalah panjang Euclid. Algoritma *Weiszfeld* memperbarui estimasi saat ini  $\mathbf{y}^{(t)}$  menjadi

$$\mathbf{y}^{(t+1)} = \frac{\sum_{i=1}^k w_i^{(t)} \mathbf{x}_i}{\sum_{i=1}^k w_i^{(t)}} \quad (\text{II.4})$$

dimana  $w_i^{(t)} = \frac{1}{\|\mathbf{x}_i - \mathbf{y}^{(t)}\|}$ . Jika semua titik yang diberikan tidak kolinear maka fungsi biaya  $C_q$  memiliki minimum yang unik, dan urutan iterasi  $\mathbf{y}^{(t)}$  akan konvergen ke minimum biaya, kecuali jika terhenti di salah satu titik  $\mathbf{x}_i$ . Untuk algoritma secara lengkap dapat dilihat pada Lampiran A.1 dan ilustrasi secara lengkap dapat dilihat pada Gambar II.2.



**Gambar II.2:** Ilustrasi bagaimana algoritma *Weiszfeld* diterapkan

### II.2.2 Algoritma $L_q$ Weiszfeld

Algoritma  $L_q$  *Weiszfeld* titik median geometris dari himpunan titik  $\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_N\}$  dengan  $N > 2$  dalam  $\mathbb{R}^N$ . Titik median geometrik adalah titik  $\mathbf{y}$  yang meminimalkan fungsi biaya:

$$C_q(\mathbf{y}) = \sum_{i=1}^k \|\mathbf{x}_i - \mathbf{y}\|^{q-3}, 2 \leq q < 3 \quad (\text{II.5})$$

dimana  $\|\cdot\|$  adalah jarak Euclid. Algoritma  $L_q$  Weiszfeld memperbarui estimasi  $\mathbf{y}^{(t)}$  menjadi

$$\mathbf{y}^{(t+1)} = \begin{cases} W(\mathbf{y}^{(t)}) = \frac{\sum_{i=1}^N w_i^{(t)} \mathbf{x}_i}{\sum_{i=1}^N w_i^{(t)}}, \mathbf{y}^{(t)} \notin \mathbf{x}_i \\ \mathbf{y}_j, \mathbf{y}^{(t)} \in \mathbf{x}_j \end{cases} \quad (\text{II.6})$$

dengan  $w_i^{(t)} = \|\mathbf{y}^{(t)} - \mathbf{x}_i\|^{q-3}$ ,  $2 \leq q < 3$ . Untuk  $q = 2$ , maka  $w_i^{(t)}$  sebagai algoritma *Weiszfeld* standar.

Algoritma  $L_q$  *Weiszfeld* berbeda dari algoritma  $L_2$  terutama dalam pemilihan bobot yang diterapkan pada setiap langkah iterasi. Dalam kasus ini, persamaan pembaruan dari (II.6) dengan bobot yang diberikan oleh  $w_i^{(t)} = \|\mathbf{y}^{(t)} - \mathbf{x}_i\|^{q-3}$ . Dimulai dari estimasi awal  $\mathbf{y}^{(0)}$ , algoritma menghasilkan urutan estimasi  $\mathbf{y}^{(t)}$  yang ditemukan dengan memecahkan masalah kuadrat terkecil terbobot, dalam bidang singgung terkini dari *Riemannian manifold*. Solusi yang diperbarui kemudian diproyeksikan kembali pada manifold dan proses diulang hingga konvergensi. Untuk prosedur secara lengkap dapat dilihat pada Lampiran A.2.

### II.2.3 Algoritma Masalah Weber

Menurut Drezner et al. (2002), algoritma *Weiszfeld* dalam masalah *Weber* mencari titik median geometrik dari himpunan titik  $\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_N\}$  dalam  $\mathbb{R}^2$ . Di mana  $\forall \mathbf{x}_N$  memiliki bobot  $w_i$  dalam  $\mathbb{R}^2$ . Fungsi objektifnya adalah mencari lokasi  $\mathbf{y} = (x, y)$  yang meminimalkan:

$$\min_{\mathbf{y}} \left\{ f(\mathbf{y}) = \sum_{i=1}^N w_i \|\mathbf{x}_i - \mathbf{y}\| \right\} \quad (\text{II.7})$$

Di mana fungsi objektif bersifat cekung tegas, jika titik-titik tidak ko-linear maka hanya ada satu optimum lokal, yaitu optimum global. Algoritma *Weiszfeld* memperbarui estimasi dengan memilih titik  $\mathbf{y} = (x, y)$  sebagai pusat gravitasi titik permintaan. Definisikan:

$$\hat{w}_i = \frac{w_i}{\|\mathbf{x}_i - \mathbf{y}\|} \quad (\text{II.8})$$

Pada iterasi berikutnya,  $\mathbf{y} = (x, y)$  digantikan dengan  $\hat{\mathbf{y}} = (\hat{x}, \hat{y})$ , dengan demikian

$$\hat{x} = \frac{\sum_{i=1}^n \hat{w}_i x_i}{\sum_{i=1}^n \hat{w}_i} \quad ; \quad \hat{y} = \frac{\sum_{i=1}^n \hat{w}_i y_i}{\sum_{i=1}^n \hat{w}_i}. \quad (\text{II.9})$$

Iterasi ini diulang hingga jarak antara dua lokasi berurutan kurang dari  $\epsilon > 0$  yang diberikan. Untuk prosedur secara lengkap dapat dilihat pada Lampiran A.3.

## II.3 Multi-Facility Location Problem (MFLP)

Pada subbab sebelumnya, metode yang menemukan median geometris yang optimal dari sekumpulan data dikenal sebagai masalah lokasi Fermat–Weber (juga disebut masalah lokasi fasilitas tunggal), berdasarkan lokasi dan bobotnya, dalam arti meminimalkan jumlah jarak tertimbang yang ditempuh dari data diberikan. Metode yang terkenal untuk menyelesaikan masalah ini adalah metode *Weiszfeld*, metode gradien yang meng-ekspresikan dan memperbarui titik tengah yang dicari sebagai kombinasi cembung dari titik-titik data.

Pada subbab ini, akan memperkenalkan istilah permasalahan dalam mencari berbagai

titik median geometris selain satu median geometris, istilah ini dikenal sebagai masalah lokasi multi-fasilitas, masalah ini adalah untuk menemukan sejumlah titik median geometris (yang diberikan) untuk melayani berbagai data seperti di atas. Setiap data ditugaskan ke satu titik median, dan masalahnya (juga disebut masalah lokasi-alokasi) adalah untuk menentukan lokasi median geometris yang optimal, serta penugasan data yang optimal (penugasan tidak ada dalam kasus titik median geometris tunggal). Di sisi lain, permasalahan ini serupa dengan metode *fuzzy clustering* atau pengklusteran dari berbagai data yang diberikan.

Berdasarkan masalah ini, dengan memisalkan  $\mathbf{X} = \{\mathbf{x}_i : i = 1, 2, \dots, N\}$  adalah himpunan dari  $N$  titik data pada  $\mathbb{R}^2$ , dengan diberikan beban  $\{w_i > 0 : i = 1, 2, \dots, N\}$ . Biasanya, titik  $\{\mathbf{x}_i\}$  merupakan lokasi pada titik, dimana beban  $\{w_i\}$  adalah tuntunan pada setiap titik.

Jika diberikan bilangan bulat  $1 \leq K < N$ , *Multi-Facility Location Problem* adalah untuk menemukan  $K$  median geometris, dan menugaskan setiap titik data ke satu titik median geometris, sehingga meminimalkan jumlah jarak tertimbang sebagai berikut:

$$\min_{c_1, c_2, \dots, c_K} \sum_{k=1}^K \sum_{\mathbf{x}_i \in C_k} w_i d(\mathbf{x}_i, \mathbf{c}_k) \quad (\text{II.10})$$

dimana  $\{\mathbf{c}_k\}$  adalah lokasi dari titik median geometris, dan  $C_k$  adalah kluster atau titik median yang ditugaskan ke titik median geometris ke- $k$ . Untuk pengelompokan berdasarkan bilangan bulat  $K$  akan dibahas pada subbab berikutnya.

### II.3.1 Hard Clustering

Pengklusteran atau *clustering* adalah algoritma *unsupervised learning* yang mengatur dan mengklasifikasikan objek, titik data, atau pengamatan yang berbeda ke dalam kelompok atau kluster berdasarkan kesamaan atau pola. Ada berbagai cara untuk menggunakan pengklusteran dalam machine learning, mulai dari eksplorasi awal kumpulan data hingga pemantauan proses yang sedang berlangsung. Contoh kluster dapat mencakup genre musik, berbagai kelompok pengguna, segmen utama segmentasi pasar, jenis lalu lintas jaringan pada kluster server, kelompok teman dalam jaringan sosial, atau kategori lainnya. Proses pengklusteran dapat menggunakan satu fitur data saja atau dapat menggunakan semua fitur yang ada dalam data.

Pada *hard clustering* yang juga dikenal sebagai pengelompokan tegas atau pengelompokan tradisional menurut Mahmood (2024), adalah teknik yang menetapkan setiap titik data, dalam hal ini, dokumen atau kata, ke dalam satu kluster. Penetapan ini didasarkan pada ukuran kesamaan, seperti kesamaan kosinus atau jarak Euclidean, yang menghitung kesamaan antara titik data. *Hard clustering* juga berguna apabila diinginkan pengelompokan yang jelas dan tidak tumpang tindih serta tidak ada ambiguitas dalam penugasan.

### **II.3.2 Fuzzy Clustering**

Sedangkan *fuzzy clustering* atau pengelompokan lunak merupakan pembelajaran tanpa pengawasan yang mengelompokkan sampel data ke dalam klaster dengan bobot atau probabilitas yang berbeda. Nama lain dari *fuzzy clustering* adalah *probabilistic assignments*. Berbeda dengan teknik pengelompokan keras seperti *k-means* yang menempatkan setiap sampel data tepat pada satu klaster, pengelompokan *fuzzy* memungkinkan sampel data masuk ke lebih dari satu klaster. Dengan demikian, pengelompokan *fuzzy* menimbulkan ketidakpastian dalam segmentasi data. Teknik ini memberikan hasil yang lebih bermuansa, memungkinkan pengelompokan yang tumpang tindih dan menangkap ketidakpastian dalam data. Ini dapat membantu ketika dokumen atau kata dapat memiliki banyak interpretasi atau termasuk dalam beberapa topik secara bersamaan.

Penelitian ini berfokus pada teknik pencarian beberapa titik median geometris dengan menerapkan masalah multi-fasilitas lokasi yang hampir serupa dengan teknik *fuzzy clustering*. Di mana penelitian ini akan memfokuskan bagaimana interpretasi pada beberapa titik median geometris terhadap beberapa titik data dengan menggunakan *hard clustering* dan *fuzzy clustering* dengan dibuat dan dimodifikasi algoritma yang diambil dari Iyigun and Ben-Israel (2010)

### **II.3.3 Metode Penyelesaian dengan Hard Clustering**

Berdasarkan pada Persamaan (II.10) sebelumnya, akan dipilih bilangan bulat  $K = 1$ , maka persamaan tersebut akan menjadi:

$$\min_{\mathbf{c} \in \mathbb{R}^2} \sum_{i=1}^N \omega_i d(\mathbf{x}_i, \mathbf{c}) \quad (\text{II.11})$$

dimana jika diberikan  $\mathbf{X}$  dan  $\{\omega_i : i = 1, 2, \dots, N\}$  di atas, dimana dicari titik  $\mathbf{c} = \{\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \dots, \mathbf{c}_k\} \in \mathbb{R}^2$  meminimalkan jumlah dari jarak berbobot.

Apabila titik  $\{\mathbf{x}_i\}$  tidak kolinear, seperti yang diasumsikan di seluruh bagian, fungsi objektif dari (II.11) adalah sebagai berikut:

$$f(\mathbf{c}) = \sum_{i=1}^N \omega_i d(\mathbf{x}_i, \mathbf{c}) \quad (\text{II.12})$$

di mana fungsi objektif bersifat cekung ketat, dan Persamaan (II.11) memiliki solusi optimal tunggal. Dengan demikian gradien dari Persamaan (II.12) tidak terdefinisi jika  $\mathbf{c}$  bertepatan dengan salah satu titik data  $\{\mathbf{x}_i\}$ .

Untuk  $\mathbf{c} \notin \mathbf{X}$ ,

$$\nabla f(\mathbf{c}) = - \sum_{i=1}^N \omega_i \frac{\mathbf{x}_i - \mathbf{c}}{\|\mathbf{x}_i - \mathbf{c}\|} \quad (\text{II.13})$$

dan titik median optimal  $\mathbf{c}^*$ , jika tidak di dalam  $\mathbf{X}$  ditandai dengan  $\nabla f(\mathbf{c}^*) = 0$ , mengekspresikannya sebagai gabungan cekung dari titik-titik  $\mathbf{x}_i$ ,

$$\mathbf{c}^* = \sum_{i=1}^N \lambda_i \mathbf{x}_i \quad (\text{III.14})$$

dengan bobot

$$\lambda_i = \frac{\omega_i / \|\mathbf{x}_i - \mathbf{c}^*\|}{\sum_{m=1}^N \omega_m / \|\mathbf{x}_m - \mathbf{c}\|} \quad (\text{III.15})$$

yang bergantung pada  $\mathbf{c}^*$ . Hasil melingkar ini memunculkan iterasi *Weiszfeld*,

$$\mathbf{c}_+ = T(\mathbf{c}) \quad (\text{III.16})$$

dimana  $\mathbf{c}_+$  adalah titik median geometris yang telah diperbarui,  $\mathbf{c}$  adalah titik median

geometris saat ini, dan

$$T(\mathbf{c}) := \begin{cases} \sum_{i=1}^N \left( \frac{\omega_i / \|\mathbf{x}_i - \mathbf{c}\|}{\sum_{m=1}^N \omega_m / \|\mathbf{x}_m - \mathbf{c}\|} \right) \mathbf{x}_i, & \text{jika } \mathbf{c} \notin \mathbf{X}; \\ \mathbf{c}, & \text{jika } \mathbf{c} \in \mathbf{X}. \end{cases} \quad (\text{II.17})$$

Untuk memperluas  $\nabla f(\mathbf{c})$  ke semua  $\mathbf{c}$ , maka berdasarkan Kuhn (1973), memodifikasinya sebagai  $\nabla f(\mathbf{c}) = -R(\mathbf{c})$ , dimana

$$R(\mathbf{c}) := \begin{cases} -\nabla f(\mathbf{c}), & \text{jika } \mathbf{c} \notin \mathbf{X}; \\ \max\{0, \|R^j\| - \omega_j\} \frac{R^j}{\|R^j\|}, & \text{jika } \mathbf{c} \in \mathbf{X}. \end{cases} \quad (\text{II.18})$$

dimana

$$R^j = \sum_{i \neq j} \frac{\omega_i}{\|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j\|} (\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j) \quad (\text{II.19})$$

adalah resultan gaya dari  $N - 1$  gaya yang besarnya  $\omega_i$  dan arah  $\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j, i \neq j$ . Sifat-sifat pemetaan  $R(\cdot)$ ,  $T(\cdot)$ , pusat optimal  $\mathbf{c}^*$  dan sembarang titik  $\mathbf{x}_j \in \mathbf{X}$  berikut ini dapat dibuktikan berdasarkan Kuhn:

$$\mathbf{c} = \mathbf{c}^* \iff R(\mathbf{c}) = 0 \quad (\text{II.20a})$$

$$\mathbf{c}^* \in \text{conv}(\mathbf{X}) \quad (\text{lambung cembung } \mathbf{X}) \quad (\text{II.20b})$$

$$\mathbf{c} = \mathbf{c}^* \iff T(\mathbf{c}) = \mathbf{c}, \mathbf{c} \notin \mathbf{X}. \quad (\text{II.20c})$$

$$\text{Jika } T(\mathbf{c}) \neq \mathbf{c} \text{ maka } f(T(\mathbf{c})) < f(\mathbf{c}). \quad (\text{II.20d})$$

$$x_j = \mathbf{c}^* \iff w_j \geq \|R^j\|. \quad (\text{II.20e})$$

$$\text{Jika } \mathbf{x}_j \neq \mathbf{c}^*, \text{ arah dari } \textit{steepest descent} \text{ dari } f \text{ di } \mathbf{x}_j \text{ adalah } R^j / \|R^j\|. \quad (\text{II.20f})$$

$$\text{Jika } \mathbf{x}_j \neq \mathbf{c}^*, \exists \delta > 0 \text{ sehingga } 0 < \|\mathbf{c} - \mathbf{x}_j\| \implies \|T^s(\mathbf{c}) - \mathbf{x}_j\| > \delta, \forall s. \quad (\text{II.20g})$$

$$\lim_{\mathbf{c} \rightarrow \mathbf{x}_j} \frac{\|T(\mathbf{c}) - \mathbf{x}_j\|}{\|\mathbf{c} - \mathbf{x}_j\|} = \frac{\|R^j\|}{w_j} \quad (\text{II.20h})$$

$$\forall \mathbf{c}_0, \text{ jika } \#\mathbf{c}_r := T^r(\mathbf{c}_0) \in \mathbf{X}, \text{ maka } \lim_{r \rightarrow \infty} \mathbf{c}_r = \mathbf{c}^*. \quad (\text{II.20i})$$

Untuk algoritma secara lengkap dapat dilihat pada Lampiran A.4 dan untuk modifikasi dengan  $L_q$  Weiszfeld dapat dilihat pada Lampiran A.5.

### II.3.4 Metode Penyelesaian dengan *Probabilistic Assignments*

Untuk  $1 < K < N$ , masalah pada Persamaan (II.10) merupakan metode *hard clustering*. Pada metode ini, akan digunakan *probabilistic assignments* (*soft clustering* atau *fuzzy clustering*) dengan probabilitas keanggotaan titik median geometris,

$$p_k(\mathbf{x}) = \text{Prob}\{\mathbf{x} \in \mathcal{C}_k\}, k = 1, 2, \dots, K$$

diasumsikan hanya bergantung pada jarak  $\{d(\mathbf{x}, \mathbf{c}_k) : k = 1, 2, \dots, K\}$  titik  $\mathbf{x}$  dari titik median  $K$ .

Asumsi yang masuk akal adalah

"Penugasan ke suatu titik median lebih mungkin jika semakin dekat"

dan cara sederhana untuk memodelkan asumsi ini adalah

$$p_k(\mathbf{x})d(\mathbf{x}, \mathbf{c}_k) = D(\mathbf{x}), k = 1, 2, \dots, K \quad (\text{II.21})$$

di mana  $D(\cdot)$  adalah fungsi dari  $\mathbf{x}$ , yang tidak bergantung pada  $k$ .

Dengan menggunakan fakta bahwa probabilitas bertambah menjadi satu, kita dapatkan dari Persamaan (II.21),

$$p_k(\mathbf{x}) = \frac{\prod_{j \neq k} d(\mathbf{x}, \mathbf{c}_j)}{\sum_{l=1}^K \prod_{m \neq l} d(\mathbf{x}, \mathbf{c}_m)}, k = 1, 2, \dots, K, \quad (\text{II.22})$$

dan pada kasus spesial  $K = 2$ ,

$$p_1(\mathbf{x}) = \frac{d(\mathbf{x}, \mathbf{c}_2)}{d(\mathbf{x}, \mathbf{c}_1) + d(\mathbf{x}, \mathbf{c}_2)} \quad ; \quad p_2(\mathbf{x}) = \frac{d(\mathbf{x}, \mathbf{c}_1)}{d(\mathbf{x}, \mathbf{c}_1) + d(\mathbf{x}, \mathbf{c}_2)}. \quad (\text{II.23})$$

Dengan menyingkat  $p_k(\mathbf{x})$  dengan  $p_k$ , Persamaan (II.21) merupakan kondisi optimal untuk masalah ekstrem

$$\min \left\{ \sum_{k=1}^K \sum_{\mathbf{x} \in \mathcal{C}_k} p_k^2(\mathbf{x})d(\mathbf{x}, \mathbf{c}_k) : \sum_{k=1}^K p_k(\mathbf{x}) = 1, p_k(\mathbf{x}) \geq 0, k = 1, 2, \dots, K \right\} \quad (\text{II.24})$$

Dengan variabel  $\{p_k\}$ . Kuadrat probabilitas dalam Persamaan (II.24) dijelaskan sebagai

alat untuk menghaluskan tujuan dasar,  $\min\{||\mathbf{x} - \mathbf{c}_k|| : k = 1, 2, \dots, K\}$ , berdasarkan Teboulle (2007).

Persamaan (II.10) dengan demikian dapat didekati dengan masalah minimisasi

$$\begin{aligned} \min_{\{p_k(\mathbf{x}_i)\}} \quad & \sum_{k=1}^K \sum_{i=1}^N p_k^2(\mathbf{x}_i) \omega_i d(\mathbf{x}_i, \mathbf{c}_k) \\ \text{s.t.} \quad & \sum_{k=1}^K p_k(\mathbf{x}_i) = 1, \quad i = 1, 2, \dots, N, \\ & p_k(\mathbf{x}_i) \geq 0, \quad k = 1, 2, \dots, K, \quad i = 1, 2, \dots, N, \end{aligned} \quad (\text{II.25})$$

dengan dua set variabel, pusat  $\{\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \dots, \mathbf{c}_K\}$  dan probabilitas  $\{p_k(\mathbf{x}_i) : k = 1, 2, \dots, K, i = 1, 2, \dots, N\}$ . Probabilitas dan pusat dari masalah perkiraan dari Persamaan (II.25) masing-masing sesuai dengan penugasan dan pusat dari masalah asli pada Persamaan (II.10).

Fungsi objektif dari Persamaan (II.25) dinotasikan sebagai:

$$f(\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \dots, \mathbf{c}_k) = \sum_{i=1}^N p_k^2(\mathbf{x}_i) \omega_i d(\mathbf{x}_i, \mathbf{c}_k). \quad (\text{II.26})$$

### II.3.5 Probabilitas dan Pusat

Akan meninjau bahwa Persamaan (II.25) memiliki dua himpunan variabel, *centroid*  $\{\mathbf{c}_k\}$  dan probabilitas  $\{p_k(\mathbf{x}_i)\}$ . Pendekatan alami adalah dengan memperbaiki satu set variabel, dan meminimalkan Persamaan (II.25) terhadap set lainnya, kemudian memperbaiki set lainnya, dst. Dengan demikian, akan mengubah antara

- masalah probabilitas, yaitu berdasarkan Persamaan (II.25) dengan pusat yang diberikan, dan
- masalah pusat, berdasarkan Persamaan (II.25) dengan probabilitas yang diberikan,

dan memperbarui solusi mereka sebagai berikut.

- Perbaruan probabilitas. Dengan centroid yang diberikan, dan jarak  $d(\mathbf{x}_i, \mathbf{c}_k)$  dihitung untuk semua pusat  $\mathbf{c}_k$  dan titik data  $\mathbf{x}_i$ , probabilitas minimal diberikan

secara eksplisit oleh Persamaan (II.22),

$$p_k(\mathbf{x}_i) = \frac{\prod_{j \neq k} d(\mathbf{x}_i, \mathbf{c}_j)}{\sum_{l=1}^K \prod_{m \neq l} d(\mathbf{x}_i, \mathbf{c}_m)}, k = 1, 2, \dots, K, \quad (\text{II.27})$$

- Pembaruan *centroid*. Dengan menetapkan probabilitas  $p_k(\mathbf{x}_i)$  dalam Persamaan (II.25), fungsi objektif pada Persamaan (II.26) adalah fungsi yang dapat dipisahkan dari pusat-pusat *centroid*,

$$f(\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \dots, \mathbf{c}_k) = \sum_{k=1}^K f_k(\mathbf{c}_k), \quad (\text{II.28})$$

dimana

$$f_k(\mathbf{c}) = \sum_{i=1}^N p_k^2(\mathbf{x}_i) \omega_i \|\mathbf{x}_i - \mathbf{c}\|, k = 1, 2, \dots, K \quad (\text{II.29})$$

Masalah pusat dengan demikian terbagi menjadi  $K$  masalah bertipe *hard clustering*, yang dihubungkan dengan probabilitas. Gradien dari Persamaan (II.29), jika pun ada, adalah

$$\nabla f_k(\mathbf{c}) = - \sum_{i=1}^N \frac{p_k^2(\mathbf{x}_i) \omega_i}{\|\mathbf{x}_i - \mathbf{c}\|} (\mathbf{x}_i - \mathbf{c}), k = 1, 2, \dots, K \quad (\text{II.30})$$

Dengan menjadikan gradien sebagai nol, dapat diperoleh *centroid* optimal  $\{\mathbf{c}_1^*, \mathbf{c}_2^*, \dots, \mathbf{c}_K^*\}$  sebagai kombinasi cembung

$$\mathbf{c}_k^* = \sum_{i=1}^N \lambda_k(\mathbf{x}_i) \mathbf{x}_i, \quad (\text{II.31a})$$

dari titik data, dengan bobot  $\lambda_k(\mathbf{x}_i)$  diberikan dengan

$$\lambda_k(\mathbf{x}_i) = \frac{p_k^2(\mathbf{x}_i) \omega_i / \|\mathbf{x}_i - \mathbf{c}_k^*\|}{\sum_{j=1}^N p_k^2(\mathbf{x}_j) / \|\mathbf{x}_j - \mathbf{c}_k^*\|}, k = 1, 2, \dots, K, i = 1, 2, \dots, N \quad (\text{II.31b})$$

Himpunan *centroid* optimal untuk masalah pada Persamaan (II.25) dapat diambil

sebagai perkiraan dari sekumpulan centroid optimal untuk masalah asli pada Persamaan (II.10), dan probabilitas keanggotaan centroid  $\{p_k(\mathbf{x}_i)\}$  dapat digunakan untuk menetapkan data ke centroid. Persamaan (II.31a)-(II.31b) menginduksi pemetaan  $K$  menjadi  $T_k : \mathbf{c} \rightarrow T_k(\mathbf{c})$ ,  $k = 1, 2, \dots, K$ ,

$$T_k(\mathbf{c}) = \sum_{i=1}^N \left( \frac{p_k^2(\mathbf{x}_i)\omega_i/\|\mathbf{x}_i - \mathbf{c}\|}{\sum_{j=1}^N p_k^2(\mathbf{x}_j)\omega_j/\|\mathbf{x}_m - \mathbf{c}\|} \right) \mathbf{x}_i \quad (\text{II.32a})$$

untuk  $\mathbf{c}$  berbeda dengan titik data  $\{\mathbf{x}_j : j = 1, 2, \dots, N\}$ , dan dengan kontinuitas,

$$T_k(\mathbf{x}_j) = \mathbf{x}_j, j = 1, 2, \dots, N \quad (\text{II.32b})$$

### II.3.6 Diagram Voronoi

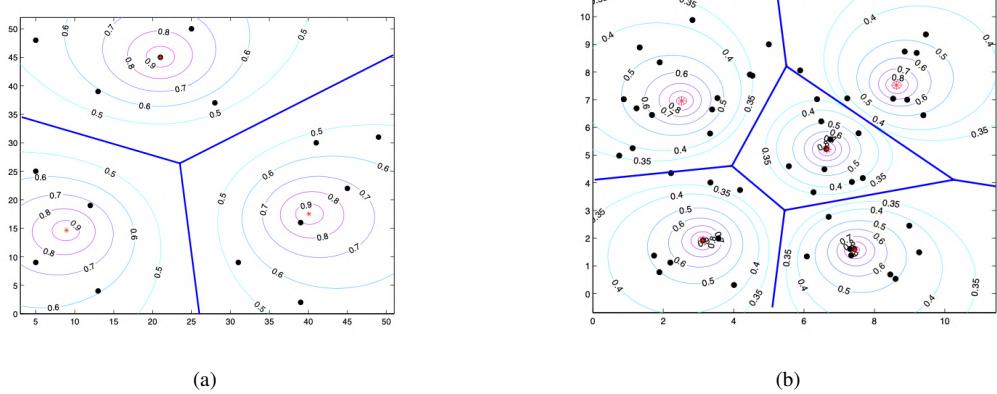
Dalam *Multi-Facility Location Problem* (MFLP) berdasarkan Persamaan (II.10) setiap titik median melayani sekelompok data di wilayah tertentu. Wilayah-wilayah ini secara alami diberikan oleh probabilitas keanggotaan dari masalah perkiraan dari Persamaan (II.25). Untuk sembarang dua pusat  $\mathbf{c}_j, \mathbf{c}_k$  tempat kedudukan titik  $\mathbf{x}$  dengan  $p_j(\mathbf{x}) = p_k(\mathbf{x})$  dinyatakan oleh Persamaan (II.27) direpresentasikan sebagai:

$$\|\mathbf{x} - \mathbf{c}_j\| = \|\mathbf{x} - \mathbf{c}_k\| \quad (\text{II.33})$$

dan dengan demikian merupakan sebuah hiperbidang (garis dalam  $\mathbb{R}^2$ ). Bagian dari hiperbidang pada Persamaan (II.33) dimana

$$p_j(\mathbf{x}) = p_k(\mathbf{x}) \geq p_m(\mathbf{x}), \forall m \neq j, k \quad (\text{II.34})$$

kosong, dibatasi atau tidak dibatasi. Peristiwa ini menyebutnya batas umum dari kluster  $\mathcal{C}_j$  dan  $\mathcal{C}_k$ . Batas umum tersebut membentuk diagram *Voronoi* dari pusat-pusatnya. Setiap sel *Voronoi* adalah polihedron, dan merupakan wilayah alami fasilitasnya, dengan meninjau Gambar II.3 (a) dan Gambar II.3 (b).



**Gambar II.3:** Ilustrasi Diagram *Voronoi* beserta himpunan probabilitas

Apabila ditinjau pada kedua gambar tersebut, setiap gambar yang memiliki setiap sel *Voronoi* adalah poligon cembung (dalam 2D) atau polihedron cembung (dalam 3D). Di sisi lain, sisi yang ditandai warnai biru merupakan batas antar wilayah berjarak sama terhadap dua lokasi terdekat, hal ini menunjukkan bahwa tingkat probabilitas diterapkan di dalam wilayah sel *Voronoi*. Selain itu, titik di dalam merupakan titik median atau disebut titik klaster sebagai pusat wilayah sel *Voronoi*. Di mana diagram *Voronoi* adalah grafik ganda dari triangulasi *Delaunay*.

### II.3.7 Plot JDF dan CUF

Meninjau dua konsep yang berguna dari pengelompokan probabilistik, yang berfungsi untuk mengukur kualitas solusi dari masalah pada Persamaan (II.25). Dari model

$$p_k(\mathbf{x})d(\mathbf{x}, c_k) = D(\mathbf{x}), k = 1, 2, \dots, K$$

dan fakta bahwa probabilitas bertambah menjadi satu, kita memperoleh,

$$D(\mathbf{x}) = \frac{\prod_{j=1}^K d(\mathbf{x}, \mathbf{c}_j)}{\sum_{l=1}^K \prod_{m \neq l} d(\mathbf{x}, \mathbf{c}_m)}, k = 1, 2, \dots, K, \quad (\text{II.35})$$

yang (hingga suatu konstanta) merupakan rata-rata harmonik jarak  $\{d(\mathbf{x}, \mathbf{c}_j) : j = 1, 2, \dots, K\}$ . Secara khusus,

$$D(\mathbf{x}) = \frac{d(\mathbf{x}, \mathbf{c}_1)d(\mathbf{x}, \mathbf{c}_2)}{d(\mathbf{x}, \mathbf{c}_1) + d(\mathbf{x}, \mathbf{c}_2)}, \text{ untuk } K = 2 \quad (\text{II.36})$$

Fungsi  $D(\mathbf{x})$  disebut fungsi jarak gabungan (JDF) di  $\mathbf{x}$ . Fungsi ini bergantung pada  $K$  *centroid*, dan memiliki sifat berguna berikut: untuk pusat optimal, sebagian besar titik data terkandung dalam himpunan tingkat bawah  $D(\mathbf{x})$ . Peristiwa tersebut menyebut properti ini perkiraan kontur.

JDF dari himpunan  $\mathbf{X} = \{\mathbf{x}_i : i = 1, 2, \dots, N\}$  didefinisikan sebagai penjumlahan, atas  $\mathbf{X}$ , nilai-nilai  $D(\mathbf{x})$

$$D(\mathbf{X}) = \sum_{i=1}^N D(\mathbf{x}_i), \quad (\text{II.37})$$

dan merupakan ukuran kedekatan pelanggan dengan fasilitas masing-masing: semakin rendah nilai  $D(\mathbf{X})$ , semakin baik himpunan centroid  $\{\mathbf{c}_k\}$ . JDF memiliki dimensi jarak. Dengan menormalkannya, kita memperoleh fungsi tanpa dimensi,

$$E(\mathbf{x}) = KD(\mathbf{x}) / \left( \prod_{i=1}^N d(\mathbf{x}, \mathbf{c}_j) \right)^{1/K}, \quad (\text{II.38})$$

dengan 0/0 diartikan sebagai nol.  $E(\mathbf{x})$  adalah rata-rata harmonik jarak  $\{d(\mathbf{x}, \mathbf{c}_j) : j = 1, 2, \dots, K\}$  dibagi dengan rata-rata geometriknya. Maka  $0 \leq E(\mathbf{x}) \leq 1$ , dengan  $E(\mathbf{x}) = 0$  jika setiap  $d(\mathbf{x}, \mathbf{c}_j) = 0$ , yaitu jika  $\mathbf{x}$  adalah pusat klaster, dan  $E(\mathbf{x}) = 1$  jika dan hanya jika semua probabilitas  $p_j(\mathbf{x})$  sama.  $E(\mathbf{x})$  dapat dituliskan, menggunakan dengan menggunakan Persamaan (II.22), sebagai rata-rata geometrik probabilitas (hingga suatu konstanta),

$$E(\mathbf{x}) = K \left( \prod_{j=1}^K p_j(\mathbf{x}) \right)^{1/K} \quad (\text{II.39})$$

Secara khusus, untuk  $K = 2$ ,

$$E(x) = 2 \frac{\sqrt{d(\mathbf{x}, \mathbf{c}_1)d(\mathbf{x}, \mathbf{c}_2)}}{d(\mathbf{x}, \mathbf{c}_1) + d(\mathbf{x}, \mathbf{c}_2)} = 2\sqrt{p_1(\mathbf{x})p_2(\mathbf{x})}. \quad (\text{II.40})$$

$E(\mathbf{x})$  merupakan ketidakpastian dalam mengklasifikasikan titik  $\mathbf{x}$ , sehingga dapat ditu-

liskan sebagai

$$E(\mathbf{x}) = \exp\{-I(p(\mathbf{x}), \frac{1}{K}\mathbf{1})\} \quad (\text{II.41})$$

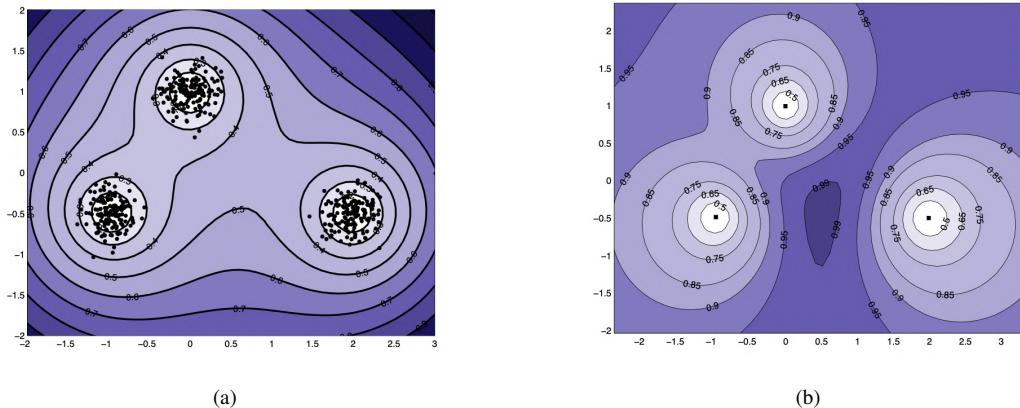
dimana  $I(p(\mathbf{x}), \frac{1}{K}\mathbf{1})$  adalah jarak *Kullback–Leibler*, antara distribusi

$$p(\mathbf{x}) = (p_1(\mathbf{x}), p_2(\mathbf{x}), \dots, p_K(\mathbf{x})) \text{ dan } \frac{1}{K}\mathbf{1} \left( \frac{1}{K}, \frac{1}{K}, \dots, \frac{1}{K} \right)$$

Distribusi terakhir,  $\frac{1}{K}\mathbf{1}$  dan  $E(\mathbf{x}) = 0 \iff \mathbf{x}$  sebagai pusat. Dapat dikatakan  $E(\mathbf{x})$  fungsi ketidakpastian klasifikasi (CUF), pada  $\mathbf{x}$ . CUF dari himpunan data  $\mathbf{X} = \{\mathbf{x}_i : i = 1, 2, \dots, N\}$  didefinisikan sebagai

$$E(\mathbf{X}) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N E(\mathbf{x}_i), \quad (\text{II.42})$$

Untuk menjelaskan secara detail bagaimana plot JDF dan CUF dapat diinterpretasikan dapat dilihat pada Gambar II.4.



**Gambar II.4:** (a) Peta Plot JDF dan (b) Peta Plot CUF

Pada Gambar II.4 (a) menunjukkan pusat-pusat, dan beberapa set level JDF, yang mengilustrasikan properti perkiraan kontur, yaitu bahwa himpunan tingkat bawah JDF menangkap titik-titik data. Sedangkan pada Gambar II.4 (b) menunjukkan beberapa himpunan tingkat CUF, dengan warna yang lebih gelap menunjukkan ketidakpastian yang lebih tinggi. Ketidakpastian minimal ( $E(\mathbf{x}) = 0$ ) jika  $\mathbf{x}$  adalah salah satu pusat. Perhatikan bercak ketidakpastian maksimal ( $E(\mathbf{x}) \geq 0,99$ ) di tengah, di mana satu tidak berbeda antara ketiga pusat.

### II.3.8 Kondisi Optimal dan Konvergensi

Gradien dari Persamaan (II.30) tidak terdefinisi (0/0) jika  $\mathbf{c}$  bertepatan dengan salah satu titik data. Untuk itu, akan memodifikasi gradien, dengan berdasarkan Kuhn (1973), dan menunjukkan gradien yang dimodifikasi dengan  $-R_k$ . Jika pusat  $c_k$  bukan salah satu titik data, akan menggunakan Persamaan (II.30) dengan perubahan tanda,

$$R_k(c_k) = \sum_{i=1}^N \frac{p_k^2(\mathbf{x}_i)\omega_i}{\|\mathbf{x}_i - \mathbf{c}_k\|} (\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j) \quad (\text{II.43})$$

Jika tidak, jika pusat  $\mathbf{c}_k$  bertepatan dengan titik data  $\mathbf{x}_j$  maka  $\mathbf{x}_j$  pasti termasuk dalam *centroid* ke- $k$  dan, dengan Persamaan (II.27),

$$p_k(\mathbf{x}_j) = 1, p_m(\mathbf{x}_j) = 0, \forall m \neq k \quad (\text{II.44})$$

Dalam kasus ini definisikan,

$$R_k(\mathbf{x}_j) = \max\{\|R_k^j\| - p_k^2(\mathbf{x}_j)\omega_j, 0\} \frac{R_k^j}{\|R_k^j\|} \quad (\text{II.45a})$$

dimana

$$R_k^j = \sum_{i \neq j} \frac{p_k^2(\mathbf{x}_j)\omega_i}{\|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j\|} (\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j) \quad (\text{II.45b})$$

Untuk algoritma secara lengkap dapat dilihat pada Lampiran A.6 dan untuk modifikasi dengan  $L_q$  *Weiszfeld* dapat dilihat pada Lampiran A.7.

### II.3.9 Algoritma Modifikasi *Weiszfeld* untuk MFLP

Algoritma *Weiszfeld* dalam pencarian titik median geometris dapat diinterpretasikan dengan data yang diberikan begitu juga untuk Algoritma  $L_q$  *Weiszfeld* berdasarkan Aftab dkk.. Namun, metode ini hanya ditujukan pada titik median yang tunggal. Dengan demikian, diperlukan metode yang lain untuk menyelesaikan masalah dalam pencarian beberapa titik median geometris. Dan ada algoritma *Weiszfeld* lain dalam memecahkan masalah untuk titik median geometris yang tidak tunggal, melainkan dengan menerapkan masalah *Multi-Facility Location Problem* (MFLP). Keunggulan dengan menerapkan masalah *Multi-Facility Location Problem* adalah mampu mengintepretasikan titik cluster median yang lebih valid dengan adanya beberapa titik median karena lebih mudah dikelompokkan.

Proses-proses pada algoritma modifikasi *Weiszfeld* pada masalah pencarian titik median geometris yang tidak tunggal adalah sebagai berikut dengan menyelesaikan persamaan dari Persamaan (II.25).

### 1. Inisialisasi Data, Parameter, dan Titik *Centroid*

Data yang digunakan meliputi titik data yang memiliki titik koordinat pada setiap data  $\mathcal{D} = \{\mathbf{x}_i : i = 1, 2, \dots, N\}$ , dimana beban diberi pada masing-masing titik data  $\{\omega_i : i = 1, 2, \dots, N\}$ ,  $K$  sebagai jumlah *centroid* yang diasumsikan sebagai pusat sembarang  $\{\mathbf{c}_k : k = 1, 2, \dots, K\}$ , galat  $\epsilon > 0$  sebagai kriteria pemberhentian jika konvergen.

### 2. Menghitung Jarak

Semua *centroid* masing-masing akan dihitung jarak antara semua titik data dengan setiap *centroid* masing-masing  $\{d(\mathbf{x}, \mathbf{c}_k) : k = 1, 2, \dots, K\} \forall \mathbf{x} \in \mathcal{D}$ .

### 3. Menghitung Probabilitas pada *centroid*

Semua jarak antara titik data dengan *centroid* masing-masing akan dihitung probabilitas  $\{p_k(\mathbf{x}) : \mathbf{x} \in \mathcal{D}, k = 1, 2, \dots, K\}$  dengan menggunakan Persamaan (II.27)

### 4. Pembaruan Titik Pusat

Dengan menggunakan Persamaan (II.32a)-(II.32b), perbarui semua titik-titik *centroid*  $\{\mathbf{c}_k^+ = T_k(\mathbf{c}_k) : k = 1, 2, \dots, K\}$ .

### 5. Mengecek Kekonvergenan

Dengan menggunakan kriteria kekonvergenan, akan memeriksa jika  $\sum_{k=1}^K d(\mathbf{c}_k^+, \mathbf{c}_k) < \epsilon$ . Jika konvergen, maka iterasi tersebut berhenti dan didapat hasil titik koordinat dari masing-masing *centroid* yang sudah dioptimalkan, jika tidak akan mengulang ke langkah 2 pada iterasi berikutnya.

Iterasi dari algoritma terdiri dari  $K$  pembaruan  $\{\mathbf{c}_k^+ = T_k(\mathbf{c}_k) : k = 1, 2, \dots, K\}$ , di mana probabilitas dalam Persamaan (II.32a) dihitung pada Langkah 3. Fungsi objektif pada Persamaan (II.28) berubah pada setiap iterasi, karena perubahan probabilitas.

Bisa ditulis Persamaan (II.32a) sebagai

$$T_k(\mathbf{c}) = \sum_{i=1}^N \left( \frac{\frac{p_k^2(\mathbf{x}_i)\omega_i}{\|\mathbf{x}_i - \mathbf{c}\|}}{\sum_{j=1}^N \frac{p_k^2(\mathbf{x}_j)\omega_j}{\|\mathbf{x}_j - \mathbf{c}\|}} \right) \mathbf{x}_i - \mathbf{c} + \mathbf{c} = \sum_{i=1}^N \left( \frac{\frac{p_k^2(\mathbf{x}_i)\omega_i}{\|\mathbf{x}_i - \mathbf{c}\|}}{\sum_{j=1}^N \frac{p_k^2(\mathbf{x}_j)\omega_j}{\|\mathbf{x}_j - \mathbf{c}\|}} \right) (\mathbf{x}_i - \mathbf{c}) + \mathbf{c}$$

didapat, dari Persamaan (II.43),

$$T_k(\mathbf{c}) = \mathbf{c} + h_k(\mathbf{c})R_k(\mathbf{c}) \quad (\text{II.46})$$

dengan

$$h_k(\mathbf{c}) = \frac{1}{\sum_{j=1}^N \frac{p_k^2(\mathbf{x}_j)\omega_j}{\|\mathbf{x}_j - \mathbf{c}\|}} \quad (\text{II.47})$$

menunjukkan bahwa algoritma ini adalah metode gradien, mengikuti arah resultan  $R_k(\mathbf{c})$  dengan langkah dengan panjang  $h_k(\mathbf{c})R_k(\mathbf{c})$ , kecuali untuk titik data  $N \{ \mathbf{x}_j : j = 1, 2, \dots, N \}$  yang dibiarkan tetap oleh  $T_k$ .

## II.4 Indeks Xie-Beni

Menurut Desgraupes (2017) dan Lathief et al. (2019), indeks *Xie-Beni* merupakan indeks dari metode *fuzzy clustering*, indeks ini juga berlaku untuk *hard clustering*, akan tetapi jarang digunakan karena tidak efektif. Indeks ini didefinisikan sebagai hasil bagi antara galat kuadrat rata-rata dan jarak kuadrat minimum antara titik-titik dalam klaster untuk jumlah klaster dua atau lebih. Galat kuadrat rata-rata, dalam kasus *hard clustering*, hanyalah kuantitas  $\frac{1}{N}WGSS$ , dengan kata lain rata-rata jarak kuadrat semua titik terhadap barisenter klaster tempat mereka berada. Persamaan indeks Xie-Beni dapat dituliskan sebagai:

$$XB_{index} = \frac{1}{N} \frac{WGSS}{\min_{k < k'} \delta_1(\mathbf{c}_k, \mathbf{c}_{k'})^2} \quad (\text{II.48})$$

$$\text{dengan } WGSS = \sum_{i=1}^k \sum_{k=1}^n p_{ik}^m \|\mathbf{x}_k - \mathbf{c}_i\|$$

Indeks ini menunjukkan apakah nilai ini lebih baik data atau tidak berdasarkan jumlah titik klaster dan penyebaran lokasi data atau dikenal sebagai validasi penentuan jumlah klaster. Jika indeks mendekati nol, maka validasi klaster tersebut lebih baik.

# BAB III

## MODEL KLASTER DAN DATA SIMULASI

### III.1 Pengambilan Data

Dalam tugas akhir ini, penulis menggunakan sumber data utama, yaitu data COVID-19 untuk setiap negara. Data ini diperoleh dari website *Kaggle* milik Sur, S. (2024) untuk memprediksi titik median yang optimal. Selain itu, data ini disertai dengan jumlah kasus konfirmasi, orang sembuh, kasus kritis, dan kematian yang bisa dilihat pada Gambar III.1.

### III.2 Asumsi Model

Data dari *Kaggle* yang penulis peroleh merupakan data jumlah kasus COVID-19 dari tahun 2019 sampai dengan 2024. Data ini diperbarui hingga sekarang untuk memperkirakan jumlah kasus COVID-19 sekarang. Dengan kata lain, semua data jumlah kasus COVID-19 dari setiap negara diperbarui pada hari yang sama.

### III.3 Data yang Digunakan

	country	code	confirmed	recovered	critical	deaths	lastChange	lastUpdate	latitude	longitude
0	Andorra	AD	48015	47563	0	165	2024-02-11T22:05:54+00:00	2024-08-09T09:13:41+00:00	42.546245	1.601554
1	UAE	AE	1067030	1054525	0	2349	2024-02-11T22:01:57+00:00	2024-08-09T09:13:41+00:00	NaN	NaN
2	Afghanistan	AF	234174	211080	0	7996	2024-06-04T00:18:51+00:00	2024-08-09T09:13:41+00:00	33.939110	67.709953
3	Antigua and Barbuda	AG	9106	8954	0	146	2024-02-11T22:01:12+00:00	2024-08-09T09:13:41+00:00	17.060816	-61.796428
4	Anguilla	AI	3904	3	0	12	2024-06-04T00:14:26+00:00	2024-08-09T09:13:41+00:00	NaN	NaN

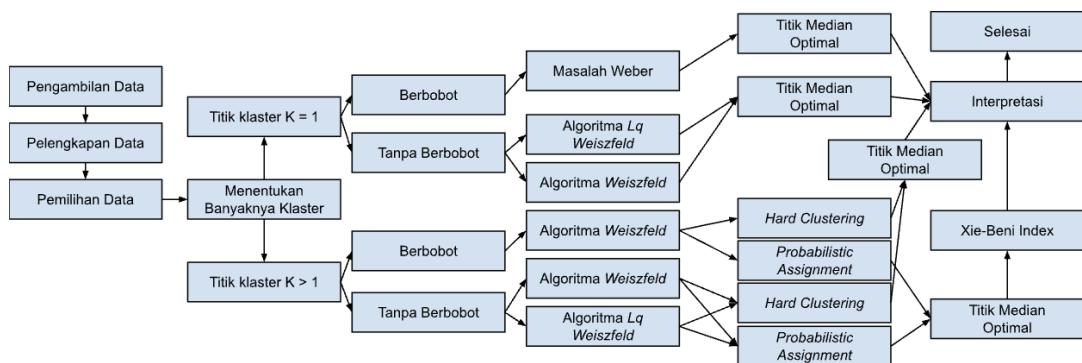
Gambar III.1: Representasi data COVID-19

Data ini terdiri 248 negara yang disertai kode negara. Dimana masing-masing negara memiliki jumlah kasus konfirmasi, jumlah orang sembuh, jumlah kasus kritis, dan jumlah kematian. Hanya 23 data negara yang jumlahnya tidak diketahui atau dengan kata lain negara ini merupakan departemen luar negeri. Data ini diperbarui hingga

sekarang untuk memperkirakan jumlah kasus COVID-19 sekarang. Dengan kata lain, semua data jumlah kasus COVID-19 dari setiap negara diperbarui pada hari yang sama. Selain itu, titik pada setiap data adalah letak secara geografis, di mana terdiri dari garis bujur dan garis lintang. Akan tetapi, karena tidak semua data memiliki lokasi titik koordinat sebenarnya, maka akan diasumsikan titik koordinat berasal dari kota besar. Karena data tersebut tidak disertai dengan ketinggian, sehingga diperlukan modifikasi data yang akan bahas di subbab alur model.

### III.4 Alur Model

Secara garis besar model akan melakukan proses seperti pada Gambar III.2. Model akan melakukan proses tersebut sebanyak 3 pemilihan data yang akan dibahas pada bagian berikutnya.



**Gambar III.2:** Alur model

#### 1. Pelengkapan Data

Sebelum melakukan pemilihan, data tersebut terlebih dahulu melengkapi data dengan menambahkan fitur beserta titik-titik koordinat yang tidak ada. Ditinjau bahwa data tersebut tidak disertai dengan ketinggian, sehingga ditambahkan fitur baru yaitu ketinggian. Dimana ketinggian dari masing-masing data dapat dicari dengan menggunakan Google Earth dengan menggunakan titik koordinat yang sudah ada, apabila titik koordinat tidak diberikan, akan diasumsikan bahwa titik koordinat berasal dari kota besar dari negara masing-masing. Apabila ditinjau pada lampiran di bawah, lokasi yang ditandai biru merupakan titik data yang memiliki titik koordinat yang dimana ketinggian diketahui yang ditandai kotak merah pada pojok kanan bawah. Setelah data tersebut dilengkapi, data tersebut menambah tiga kolom yang bisa dilihat di Gambar III.3 yang ditandai

	country	code	confirmed	recovered	critical	deaths	lastChange	lastUpdate	latitude	longitude	altitude	information	altidue (m)
0	Andorra	AD	48015	47563	0	165	2024-02-11T22:05:54+00:00	2024-08-09T09:13:41+00:00	42.546245	1.601554	0.017793	NaN	1977.0
1	UAE	AE	1067030	1054525	0	2349	2024-02-11T22:01:57+00:00	2024-08-09T09:13:41+00:00	25.218247	55.242192	-0.000009	Dubai	-1.0
2	Afghanistan	AF	234174	211080	0	7996	2024-06-04T00:18:51+00:00	2024-08-09T09:13:41+00:00	33.939110	67.709953	0.033912	NaN	3768.0
3	Antigua and Barbuda	AG	9106	8954	0	146	2024-02-11T22:01:12+00:00	2024-08-09T09:13:41+00:00	17.060816	-61.796428	0.000603	NaN	67.0
4	Anguilla	AI	3904	3	0	12	2024-06-04T00:14:26+00:00	2024-08-09T09:13:41+00:00	18.216142	-63.062444	0.000216	The Valley	24.0
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
243	Yemen	YE	11945	9124	0	2159	2024-02-11T22:02:34+00:00	2024-08-09T09:13:41+00:00	15.552727	48.516388	0.008919	NaN	991.0
244	Mayotte	YT	42027	2964	0	188	2024-06-04T00:19:24+00:00	2024-08-09T09:13:41+00:00	-12.780176	45.227044	0.000387	Mamoudzou	43.0
245	South Africa	ZA	4076463	3912506	192	102595	2024-02-11T22:15:25+00:00	2024-08-09T09:13:41+00:00	-30.559482	22.937506	0.009963	NaN	1107.0
246	Zambia	ZM	349304	341316	0	4069	2024-06-04T00:26:18+00:00	2024-08-09T09:13:41+00:00	-13.133897	27.849332	0.010845	NaN	1205.0
247	Zimbabwe	ZW	266359	258888	12	5740	2024-06-04T00:28:51+00:00	2024-08-09T09:13:41+00:00	-19.015438	29.154857	0.011187	NaN	1243.0

**Gambar III.3:** Representasi data COVID-19 setelah dimodifikasi

kotak merah. Dari 248 data negara, hanya terdapat 65 data yang tidak memiliki titik koordinat berdasarkan sumber.

## 2. Pemilihan Data

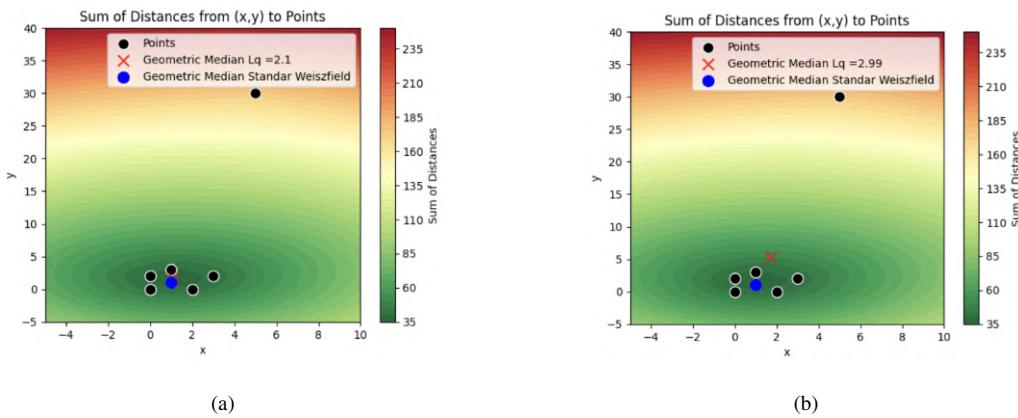
Setelah melakukan modifikasi data, data tersebut akan dipilih berdasarkan kriteria ketinggian. Dimana penulis mengasumsikan bahwa data tersebut berada di daratan, yaitu ketinggian tidak boleh di dalam laut atau kurang dari 0 meter. Setelah dilakukan pemilihan data, data yang digunakan untuk memprediksi lokasi titik median optimal adalah dengan menggunakan titik koordinat yang sudah ada atau sudah dilengkapi sebelumnya pada Gambar III.4 yang ditandai kotak merah.

## 3. Simulasi

Pada simulasi ini, akan dibagi menjadi dua bagian berdasarkan jumlah klaster atau titik median geometris. Untuk titik klaster yang tunggal, akan digunakan metode algoritma *Weiszfeld* dan algoritma  $L_q$  *Weiszfeld* untuk menginterpretasikan seberapa jauh titik median geometris diperoleh antara kedua Algoritma *Weiszfeld* pada Gambar III.5. Untuk algoritma  $L_q$  *Weiszfeld*, akan menggunakan orde  $q$  dengan  $q \in \{2.1, 2.5, 2.9, 2.99\}$ . Untuk kasus yang berbobot, akan diterapkan masalah *Weber* yaitu algoritma *Weiszfeld* khusus untuk yang berbobot pada Gambar III.6 di bawah. Hasil titik median optimal pada kasus berbobot akan membandingkan dengan titik median optimal yang tidak berbobot seberapa jauh kedua titik tersebut.

	country	code	confirmed	recovered	critical	deaths	lastChange	lastUpdate	latitude	longitude	altitude	information	altitude (m)
0	Andorra	AD	48015	47563	0	165	2024-02-11T22:05:54+00:00	2024-08-09T09:13:41+00:00	42.546245	1.601554	0.017793	NaN	1977.0
1	UAE	AE	1067030	1054525	0	2349	2024-02-11T22:01:57+00:00	2024-08-09T09:13:41+00:00	25.218247	55.242192	-0.000009	Dubai	-1.0
2	Afghanistan	AF	234174	211080	0	7996	2024-06-04T00:18:51+00:00	2024-08-09T09:13:41+00:00	33.939110	67.709953	0.033912	NaN	3768.0
3	Antigua and Barbuda	AG	9106	8954	0	146	2024-02-11T22:01:12+00:00	2024-08-09T09:13:41+00:00	17.060816	-61.796428	0.000603	NaN	67.0
4	Anguilla	AI	3904	3	0	12	2024-06-04T00:14:26+00:00	2024-08-09T09:13:41+00:00	18.216142	-63.062444	0.000216	The Valley	24.0
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
243	Yemen	YE	11945	9124	0	2159	2024-02-11T22:02:34+00:00	2024-08-09T09:13:41+00:00	15.552727	48.516388	0.008919	NaN	991.0
244	Mayotte	YT	42027	2964	0	188	2024-06-04T00:19:24+00:00	2024-08-09T09:13:41+00:00	-12.780176	45.227044	0.000387	Mamoudzou	43.0
245	South Africa	ZA	4076463	3912506	192	102595	2024-02-11T22:15:25+00:00	2024-08-09T09:13:41+00:00	-30.559482	22.937506	0.009963	NaN	1107.0
246	Zambia	ZM	349304	341316	0	4069	2024-06-04T00:26:18+00:00	2024-08-09T09:13:41+00:00	-13.133897	27.849332	0.010845	NaN	1205.0
247	Zimbabwe	ZW	266359	258888	12	5740	2024-06-04T00:28:51+00:00	2024-08-09T09:13:41+00:00	-19.015438	29.154857	0.011187	NaN	1243.0

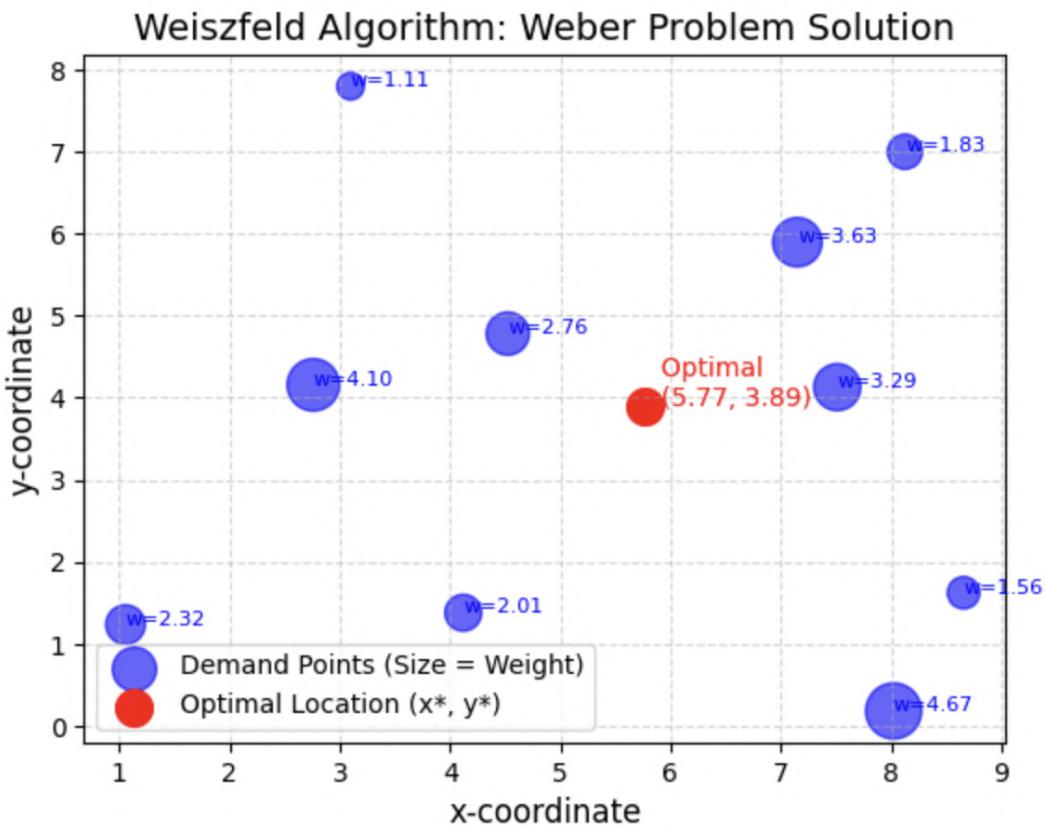
**Gambar III.4:** Titik koordinat yang ditandai kotak merah



**Gambar III.5:** Ilustrasi algoritma Weiszfeld beserta  $L_q$  Weiszfeld.

(a)  $q = 2.1$ , (b)  $q = 2.99$

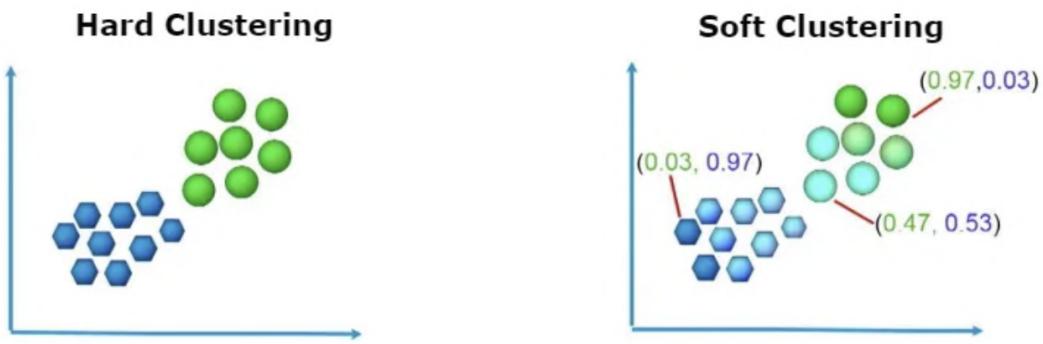
Untuk kasus yang jumlah titik median geometris yang tidak tunggal (untuk  $K > 1$ ), akan diterapkan masalah MFLP, yaitu mencari titik median yang optimal untuk jumlah titik klaster lebih dari satu. Dengan menerapkan kedua algoritma yang sama pada kasus titik klaster yang tunggal, akan mensimulasikan dua jenis *clustering* untuk kasus titik klaster tidak tunggal. Pada jenis pertama berupa *hard clustering* yaitu permasalahan pada *Multi-Facility Location Problem*, dimana tidak disertai dengan probabilitas. Pada jenis kedua berupa *probabilistic assignments* yaitu serupa dengan istilah *fuzzy clustering*. Dimana metode ini membagi kelas probabilitas berdasarkan jumlah titik klaster atau titik median yang digunakan, semakin tinggi probabilitas dari *centroid* masing-masing



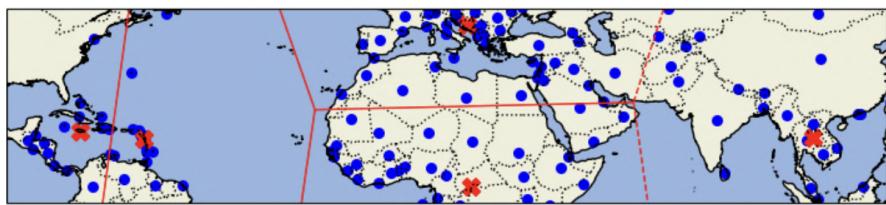
**Gambar III.6:** Ilustrasi algoritma *Weiszfeld* untuk masalah Weber

pada data masing-masing akan ditugaskan pada *centroid* yang mudah ditarik terhadap data. Apabila meninjau pada ilustrasi pada masalah *Multi-Facility Location Problem* berdasarkan Gambar III.7 di bawah, pada metode *hard clustering* yang dirujuk pada gambar sebelah kiri, data masing-masing yang terletak pada titik koordinat tertentu hanya menarik salah satu *centroid*, dimana diantara centroid yang memiliki jarak terdekat pada data tersebut akan menjadi pemilik *centroid* yang dikelompokkan. Kemudian pada metode *probabilistics assignments* yang dirujuk pada gambar di sebelah kanan, data masing-masing bisa dikelompokkan dengan jumlah *centroid* terbanyak yang digunakan, setiap data dari *centroid* diberi masing-masing peluang  $p(x) \in [0, 1]$ , di mana semakin tinggi probabilitas  $p(x)$ , maka makin dekat dengan *centroid* yang ditugaskan.

Untuk memperjelas bagaimana data masing-masing dari jumlah *centroid* diberikan, akan dilihat pada Gambar III.8. Pada gambar tersebut, jika diberikan jumlah sebanyak  $n$  *centroid*, maka akan dipartisi menjadi  $n$  wilayah, dimana setiap wilayah dapat diwakili pada masing-masing *centroid*, jika data tersebut berada di dalam wilayah yang dekat



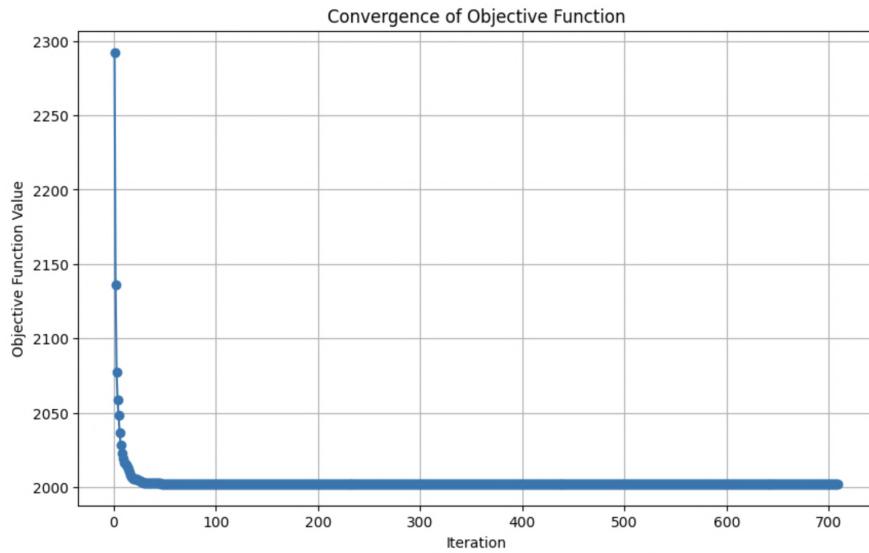
Gambar III.7: Ilustrasi Tipe *Clustering*



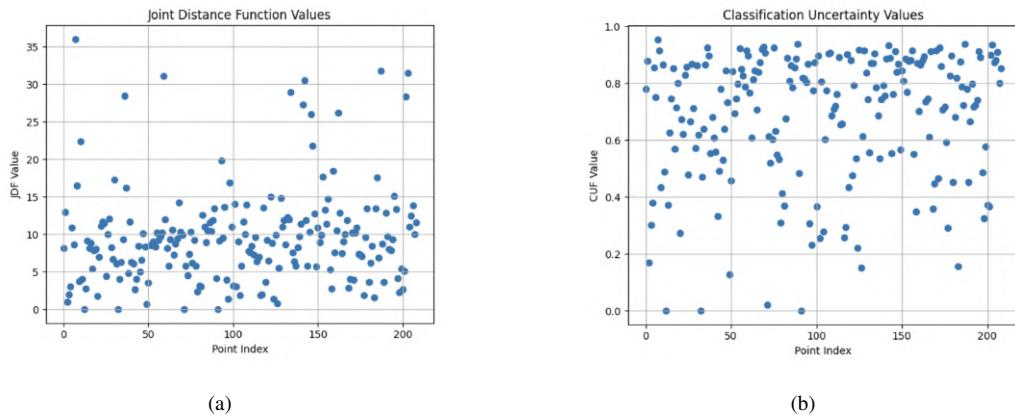
Gambar III.8: Diagram Voronoi untuk metode *probabilistic assignments*

dengan *centroid*, maka titik tersebut dapat diwakili pada wilayah di dalam *centroid* terdekat, hal ini menyebabkan probabilitas pada masing-masing *centroid* berpengaruh pada pembagian wilayah *centroid*, dimana jika lokasi berada di wilayah *centroid* tertentu, maka peluang  $p(x)$  diambil yang tertinggi.

Selain memplot *Voronoi* diagram terkait klasifikasi *centroid* data, pada *fuzzy clustering* juga memplot fungsi objektif konvergensi untuk menentukan nilai dari  $f(x)$  setelah konvergen dari Persamaan (II.26). Selain itu, akan diplot juga untuk plot JDF dan plot CUF. Pada plot JDF yang merujuk pada Gambar III.10 (a), akan meninjau apakah data tersebut merupakan pencilan berdasarkan jarak antara semua titik klaster yang digunakan. Semakin besar nilai JDF maka titik data tersebut berpotensi pencilan karena jaraknya jauh dari semua *centroid* terhitung dari Persamaan (II.35). Pada plot CUF yang merujuk pada Gambar III.10 (b), akan meninjau apakah data tersebut konsisten atau tidak dari Persamaan (II.42), jika konsisten maka nilai dari data tersebut rendah, yang menunjukkan bahwa beberapa prediksi meyakinkan.



**Gambar III.9:** Grafik fungsi objektif pada *probabilistic assignments*



**Gambar III.10:** Plot kontur dan ketidakpastian

(a) Plot JDF, (b) Plot CUF

Setelah mendapatkan hasil titik klaster yang optimal, akan menghitung indeks Xie-Beni untuk melihat berapa nilai  $XB_{index}$  berdasarkan jumlah klaster diuji, untuk indeks dipakai hanya untuk metode *probabilistic assignments*. Nilai  $XB_{index}$  terendah akan dipilih sebagai jumlah klaster yang valid. Untuk metode  $L_q$  Weiszfeld, dilakukan serupa dengan menggunakan *hard clustering* dan *probabilistic assignments*, memplot diagram Voronoi, menghitung konvergensi fungsi objektif, dan plot JDF beserta plot CUF. Hanya yang membedakan untuk penentuan indeks dari Xie-Beni, akan membagi kasus untuk jumlah klaster dipilih dengan orde  $q$  pada  $q \in \{2.1, 2.5, 2.9, 2.99\}$ . Kemudian akan

dipilih orde  $q$  terbaik, di mana menghasilkan nilai  $X B_{index}$  terkecil untuk memperoleh validitas klaster terbaik, kemudian akan diinterpretasikan seberapa jauh antara metode *Weiszfeld* dan metode  $L_q$  *Weiszfeld*. Untuk metode dengan berbobot, dilakukan serupa untuk kasus tak terbobot, mulai dari pencarian titik pusat optimal dengan metode *hard clustering* dan *probabilistic assignments*, memplot diagram *Voronoi*, menghitung konvergensi fungsi objektif, plot JDF beserta plot CUF, dan menghitung indeks *Xie-Beni*. Tetapi hanya algoritma *Weiszfeld* yang dipakai untuk membandingkan titik klaster optimal untuk berbobot dan tak berbobot.

Untuk membandingkan seberapa jauh titik pusat optimal dari model algoritma  $L_q$  *Weiszfeld* dan model algoritma *Weiszfeld* tersebut akurat, diperlukan sebuah pengukuran galat yaitu galat absolut pada 2 dimensi. Diberikan persamaan galat absolut sebagai berikut:

$$AE = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} \quad (\text{II.52})$$

Untuk kasus jumlah titik pusat lebih dari satu, akan digunakan jumlah klaster sebanyak  $k = 3, 4, 5$ , dan  $6$  sesuai dengan titik lokasi pusat dari benua atau wilayah besar. Berikut lokasi titik klaster  $c_k$  beserta titik koordinatnya akan digunakan:

1. Asia dengan titik koordinat (87.33, 43.68).
2. Eropa dengan titik koordinat (9.90, 49.84).
3. Afrika dengan titik koordinat (17.05, 2.07).
4. Amerika Utara dengan titik koordinat (-100.17, 48.17).
5. Amerika Tengah dengan titik koordinat (-86.32, 13.19).
6. Amerika Selatan dengan titik koordinat (-55.75, -15.46).
7. Eurasia dengan titik koordinat (69.55, 44.25).
8. Oseania dengan titik koordinat (160.00, -10.00).

Untuk jumlah klaster dipilih, akan digunakan lokasi titik klaster sebagai berikut:

1. Untuk  $k = 3$ , dipilih titik klaster pada wilayah Eurasia, Amerika Tengah, dan Afrika.

2. Untuk  $k = 4$ , dipilih titik klaster pada wilayah Eurasia, Amerika Utara, Amerika Selatan, dan Afrika.
3. Untuk  $k = 5$ , dipilih titik klaster pada wilayah Asia, Eropa, Amerika Utara, Amerika Selatan, dan Afrika.
4. Untuk  $k = 6$ , dipilih titik klaster pada wilayah Asia, Eropa, Amerika Utara, Amerika Selatan, Afrika, dan Oseania.

# BAB IV

## HASIL DAN PEMBAHASAN

Bab ini membahas bagaimana metode pencarian titik median geometris optimal dapat digunakan sesuai dengan alur model yang telah dijelaskan secara teoritis pada bab III.

### IV.1 Skema Klaster $K = 1$

Untuk skema titik median tunggal akan digunakan algoritma *Weiszfeld* dan  $L_q$  *Weiszfeld* beserta masalah Weber untuk kasus berbobot. Berikut adalah hasil sebagai berikut:

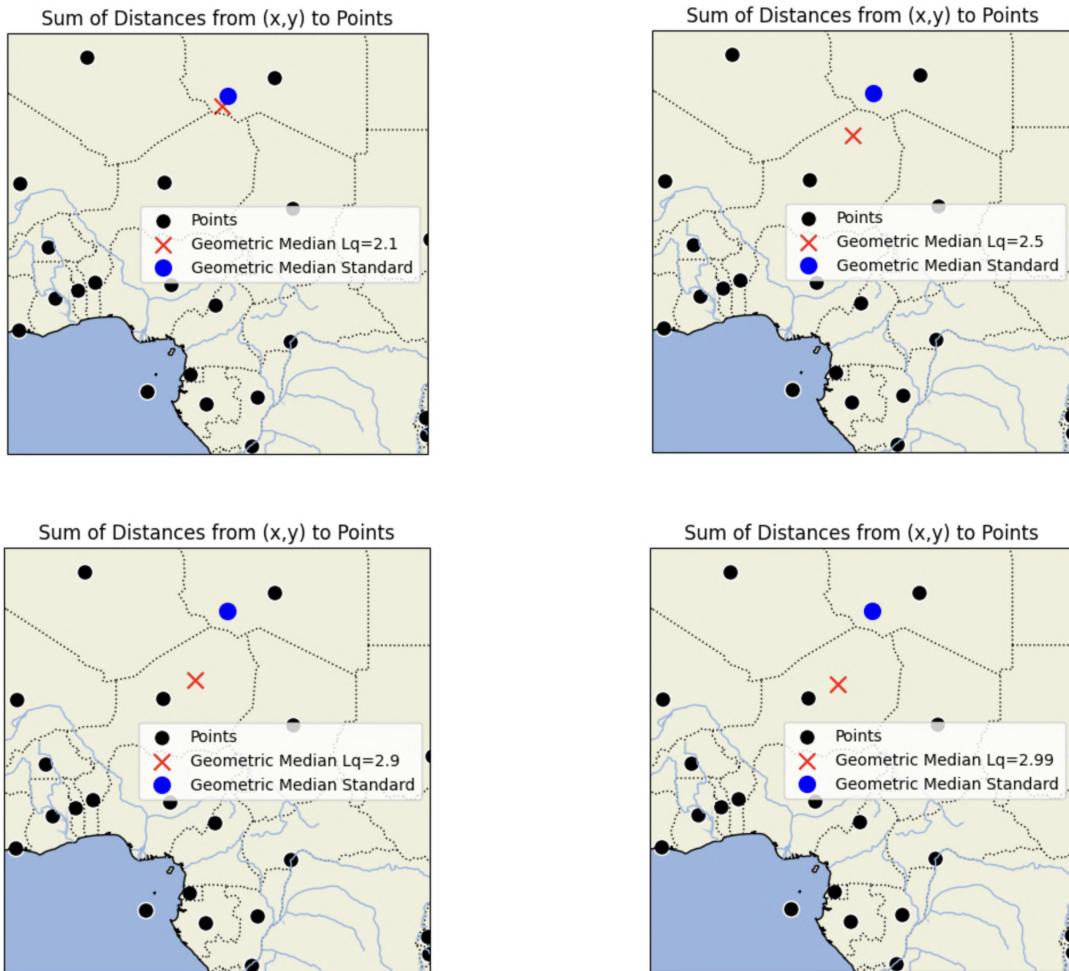
#### IV.1.1 Tanpa Berbobot

Untuk titik median tunggal akan dihitung rata-rata titik koordinat pada semua titik yang ada, kemudian apabila diterapkan algoritma *Weiszfeld* hasil plot dapat dilihat pada Gambar B.2. Selanjutnya akan menerapkan algoritma  $L_q$  *Weiszfeld* dengan orde  $q$  dengan  $q \in \{2.1, 2.5, 2.9, 2.99\}$ , dengan hasil plot dapat dilihat pada Gambar IV.1. Untuk koordinat titik median pada hasil kedua algoritma yang digunakan beserta galat absolut yakni perbedaan jarak diantara kedua titik median dicari dapat dilihat pada Tabel IV.1.

**Tabel IV.1:** Titik koordinat pada titik median

Metode	$x$	$y$	AE
Standar	13.36	24.87	0
$q = 2.1$	12.94	23.96	1.00
$q = 2.5$	11.66	21.29	3.96
$q = 2.9$	10.71	19.19	6.26
$q = 2.99$	10.54	18.74	6.75

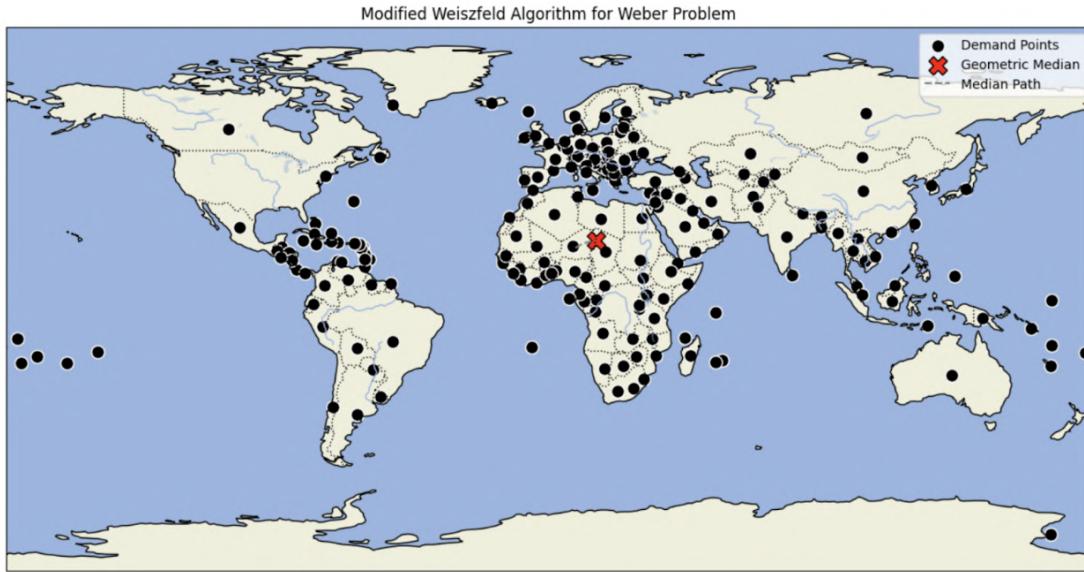
Dapat dilihat bahwa semakin mendekati orde  $q = 3$ , maka jarak perbedaan semakin jauh bergantung pada semakin dekat jarak diantara lokasi data diberikan.



**Gambar IV.1:** Plot hasil titik median dengan algoritma Weiszfeld dan  $L_q$  Weiszfeld

#### IV.1.2 Berbobot

Untuk kasus yang berbobot, akan digunakan  $w_i$  sebagai bobot rasio antara kematian dan jumlah konfirmasi kasus pada setiap data masing-masing dengan rentang  $w_i \in [0, 100]$ . Dengan menerapkan algoritma *Weiszfeld* dalam masalah *Weber*, hasil plot titik median dapat dilihat pada Gambar IV.2. Apabila ditinjau lokasi dari titik median pada algoritma



Gambar IV.2: Plot hasil Algoritma *Weiszfeld* pada masalah *Weber* untuk kasus berbobot

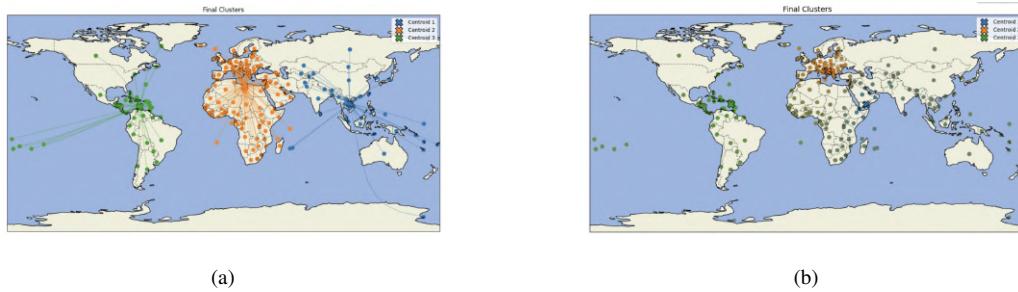
*Weiszfeld* pada masalah *Weber*, didapat titik koordinat optimal dari titik median adalah  $(15.80, 19.20)$  dengan jarak sebesar 6.17.

#### IV.2 Skema Klaster $K = 3$

Untuk skema titik median tidak tunggal akan digunakan kedua algoritma sama pada skema sebelumnya untuk kasus tak berbobot, akan tetapi untuk kasus berbobot hanya digunakan algoritma *Weiszfeld*. Akan diterapkan masalah MFLP dengan menggunakan *hard clustering* dan *probabilistic assignments* atau *soft clustering* untuk mencari titik median yang optimal, selain itu akan menggunakan indeks *Xie-Beni* untuk mengecek validitas dari pemilihan jumlah titik median tersebut. Indeks *Xie-Beni* hanya digunakan pada tipe klaster *probabilistic assignments*. Untuk pemilihan klaster, disesuaikan dengan lokasi titik klaster diberikan pada bab sebelumnya.

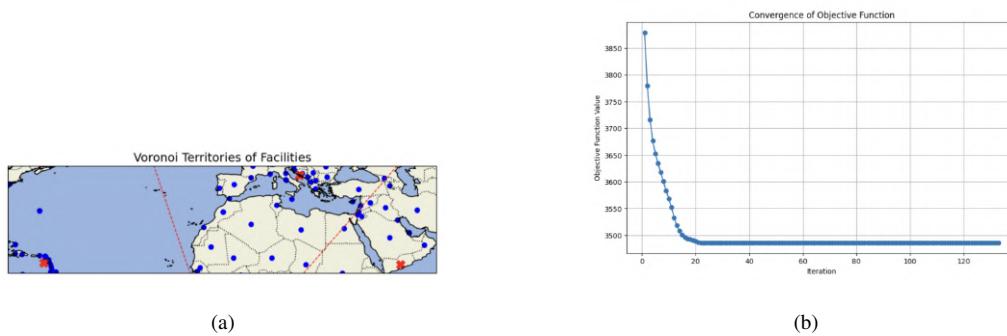
#### IV.2.1 Tanpa Berbobot

Untuk titik median berjumlah tiga, akan diplot data beserta titik median awal yang diberikan pada Gambar B.3. Selanjutnya akan menerapkan *hard clustering* dan *probabilistic assignments* dimana hasil plot pada kedua tipe tersebut dapat dilihat pada Gambar IV.3.

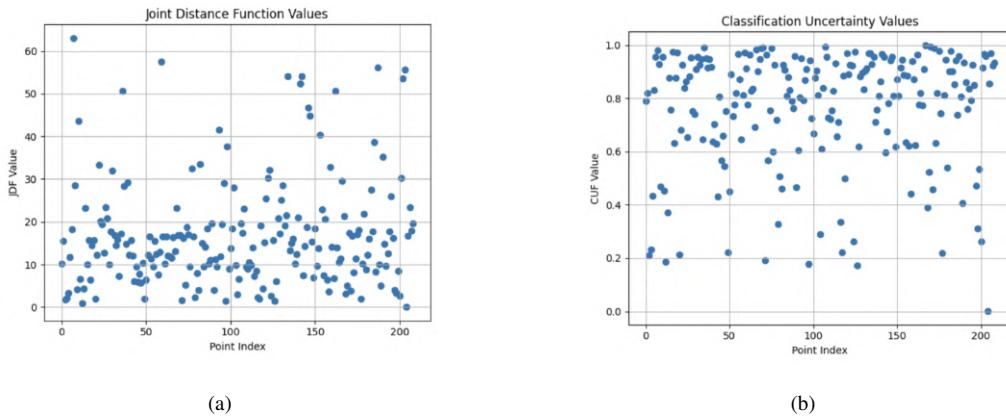


**Gambar IV.3:** Plot hasil algoritma *Weiszfeld* pada titik median tidak tunggal (a) *hard clustering* dan (b) *probabilistic assignments* pada  $K = 3$

Kemudian akan disajikan juga untuk diagram *Voronoi*, grafik fungsi objektif, plot JDF, dan plot CUF pada Gambar IV.4 dan Gambar IV.5.



**Gambar IV.4:** (a) Diagram *Voronoi* dan (b) Grafik fungsi objektif pada  $K = 3$



**Gambar IV.5:** (a) Plot JDF dan (b) Plot CUF pada  $K = 3$

Dimana titik median optimal didapat pada kedua tipe klaster dapat dilihat pada Tabel IV.2.

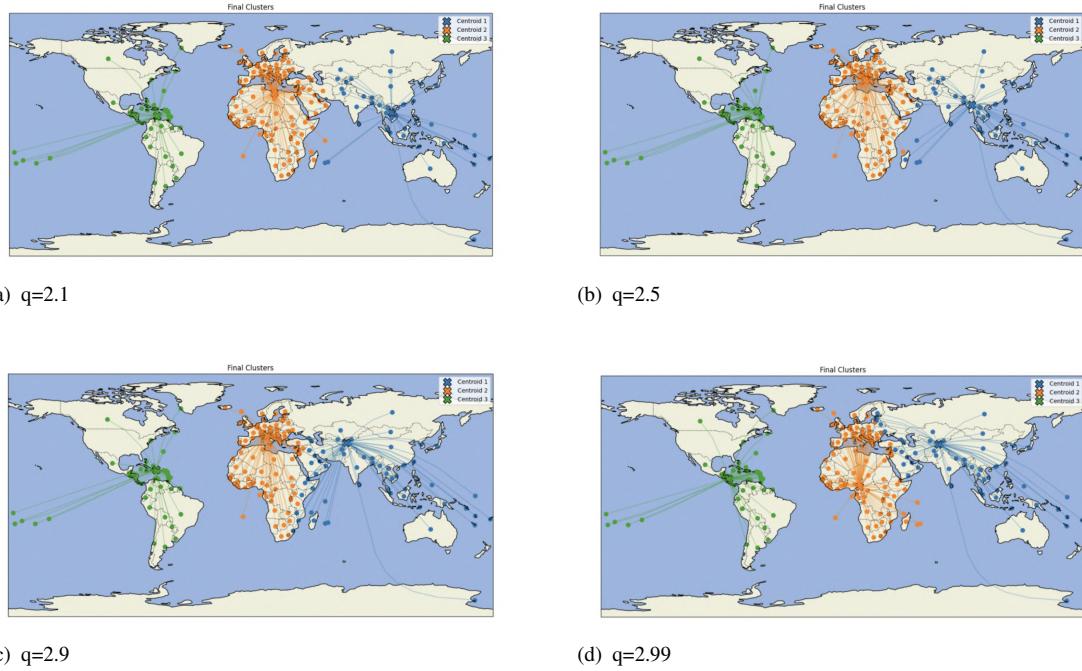
**Tabel IV.2:** Titik koordinat pada titik median pada kedua tipe klaster pada  $K = 3$

Metode	Hard	Soft
$c_1$	(105.22, 16.14)	(48.52, 15.55)
$c_2$	(17.68, 30.84)	(16.92, 43.31)
$c_3$	(-69.74, 13.75)	(-63.35, 16.00)

Untuk *hard clustering*, titik di laut hanya terjadi pada *centroid* ke-3. Di mana titik tersebut berada di laut dengan jarak 148 km ke pulau Aruba. Sedangkan untuk *probabilistic assignments*, terdapat 2 titik berada di laut. Dimana *centroid* ke-2 berada di laut berjarak 1.6 km dekat dengan pulau Novo Selo, Kroasia, sedangkan untuk *centroid* ke-3 berada di laut berjarak dekat dengan pulau Montserrat sekitar 153 km. Berdasarkan grafik fungsi objektif, nilai  $f(x)$  konvergen sekitar 3490. Apabila dihitung indeks *Xie-Beni* didapat nilai sebesar 0.5592.

### IV.2.2 $L_q$ Weiszfeld

Untuk metode kali ini akan menggunakan orde  $q$  yang sama pada kasus jumlah titik median yang tunggal. Dengan menerapkan tipe klaster yang sama diperoleh hasil plot, pada *hard clustering* dapat dilihat pada Gambar IV.6. Di mana titik koordinat didapat



**Gambar IV.6:** Plot hasil titik median dengan algoritma  $L_q$  Weiszfeld pada  $L_q$  Weiszfeld tipe *hard clustering* untuk  $K = 3$

beserta galat absolut pada plot *hard clustering* pada di Tabel IV.3 dan Tabel IV.4 di bawah.

**Tabel IV.3:** Titik koordinat pada titik media pada *hard clustering* pada  $K = 3$

Metode	Standar	$q = 2.1$	$q = 2.5$	$q = 2.9$	$q = 2.99$
$c_1$	(105.22, 16.14)	(104.07, 16.29)	(96.11, 21.76)	(71.28, 38.85)	(71.28, 38.86)
$c_2$	(17.68, 30.84)	(17.28, 32.70)	(17.20, 40.52)	(12.46, 43.94)	(12.35, 7.37)
$c_3$	(-69.74, 13.75)	(-69.08, 14.07)	(-62.94, 17.25)	(-70.15, 18.72)	(-85.02, 12.98)

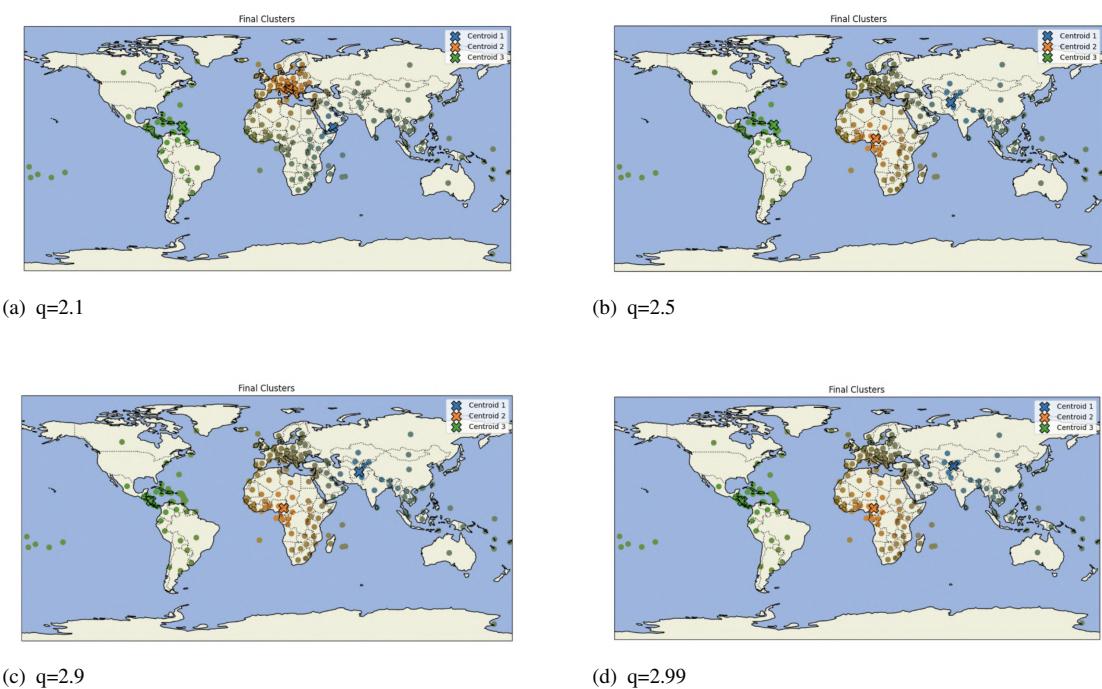
**Tabel IV.4:** Galat absolut antara titik median pada algoritma Weiszfeld dan  $L_q$  Weiszfeld untuk *hard clustering* pada  $K = 3$

Metode	$q = 2.1$	$q = 2.5$	$q = 2.9$	$q = 2.99$
$AE_{c_1}$	1.16	10.70	40.84	40.84
$AE_{c_2}$	1.90	9.69	14.10	24.07
$AE_{c_3}$	0.73	7.65	4.99	15.30

Terdapat 2 titik lokasi berada di laut. Untuk  $c_2$ , hanya terjadi pada  $q = 2.1$  terletak di

laut yang berjarak sekitar 170 km dekat dengan negara Libya. Untuk  $c_3$ , pada  $q = 2.1$ , titik tersebut terletak di laut yang berjarak sekitar 205 km ke pulau Aruba terdekat, dan pada  $q = 2.5$ , titik tersebut terletak di laut berjarak sekitar 16 km ke pulau Saint Kitts dan Nevis terdekat.

Lalu pada hasil plot pada *probabilistic assignments* dapat dilihat pada Gambar IV.7 beserta diagram *Voronoi*, grafik fungsi objektif, plot JDF, dan plot CUF dapat dilihat pada Gambar B.7 - Gambar B.11. Dengan orde  $q$  terbaik dapat dilihat komponen plot pada Gambar IV.8. Di mana titik koordinat didapat beserta galat absolut pada plot

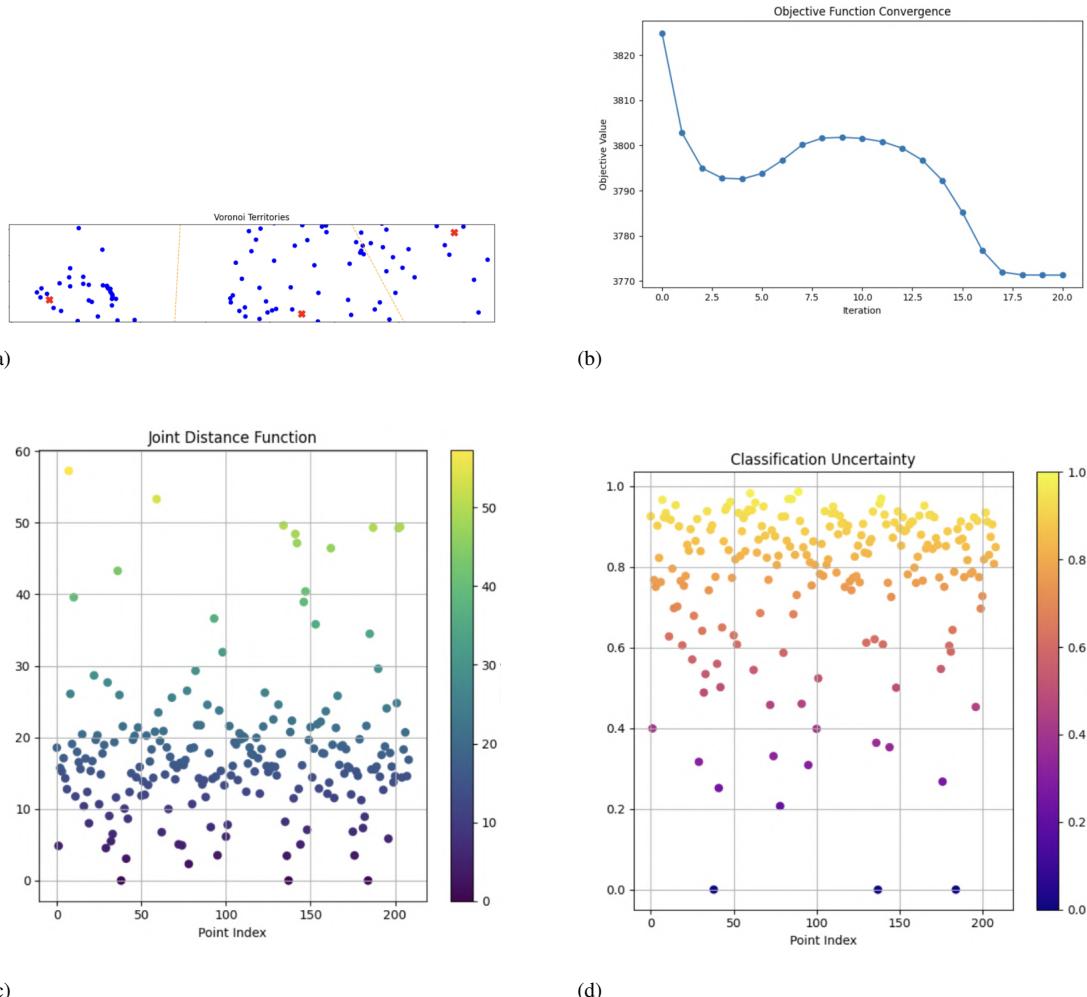


**Gambar IV.7:** Plot hasil titik median dengan algoritma  $L_q$  Weiszfeld pada  $L_q$  Weiszfeld type *probabilistic assignments* untuk  $K = 3$

*probabilistic assignments* pada di Tabel IV.5 dan Tabel IV.6 di bawah.

**Tabel IV.5:** Titik koordinat pada titik median pada *probabilistic assignments* untuk  $K = 3$

Metode	Standar	$q = 2.1$	$q = 2.5$	$q = 2.9$	$q = 2.99$
$c_1$	(48.52, 15.55)	(48.52, 15.55)	(67.71, 33.94)	(67.71, 33.94)	(71.28, 38.86)
$c_2$	(16.92, 43.31)	(16.21, 43.91)	(12.35, 7.37)	(12.35, 7.37)	(12.35, 7.37)
$c_3$	(-63.35, 16.00)	(-63.11, 16.36)	(-62.78, 17.36)	(-85.21, 12.87)	(-85.21, 12.87)



**Gambar IV.8:** (a) Diagram Voronoi, (b) Grafik fungsi objektif, (c) Plot JDF, dan (d) Plot CUF pada  $L_q$  Weiszfeld dengan orde  $q$  terbaik untuk  $K = 3$

**Tabel IV.6:** Galat absolut antara titik median pada algoritma *Weiszfeld* dan  $L_q$  *Weiszfeld* untuk *probabilistic assignments* untuk  $K = 3$

Metode	$q = 2.1$	$q = 2.5$	$q = 2.9$	$q = 2.99$
$AE_{c_1}$	0	26.57	26.57	32.58
$AE_{c_2}$	0.93	36.23	36.23	36.23
$AE_{c_3}$	0.43	1.47	22.08	22.08

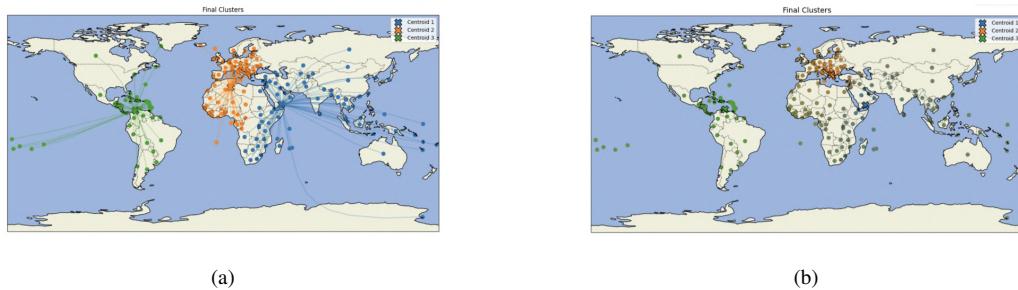
Berdasarkan tabel tersebut, hanya ada satu titik koordinat yang berada di laut yaitu pada  $q = 2.1$ ,  $c_3$  berada di laut yang berjarak sekitar 106 km ke pulau Montserrat. Berdasarkan grafik fungsi objektif, nilai  $f(x)$  akan naik seiring dengan menaikkan orde  $q$ , di mana nilai tersebut bisa mencapai sekitar lebih dari 3770. Apabila dihitung dengan indeks *Xie-Beni* didapat nilai berdasarkan Tabel IV.7.

**Tabel IV.7:** Indeks *Xie-Beni* pada algoritma  $L_q$  *Weiszfeld* untuk  $K = 3$

Metode	$q = 2.1$	$q = 2.5$	$q = 2.9$	$q = 2.99$
$XB_{index}$	1.0277	0.4875	0.4693	0.4025

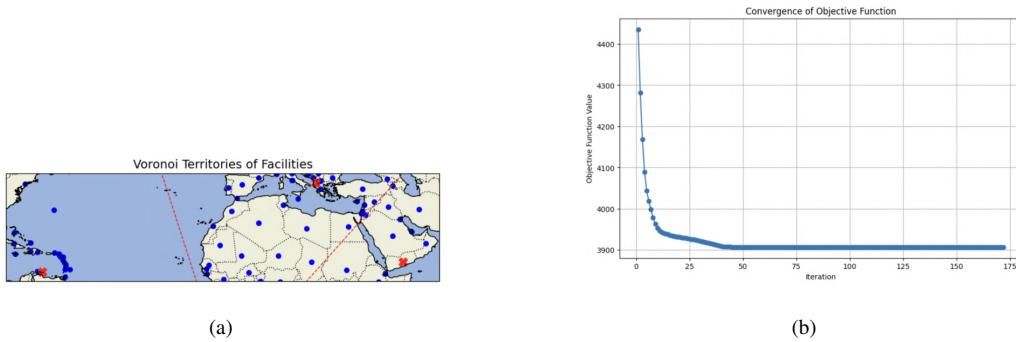
### IV.2.3 Berbobot

Untuk kasus berbobot, hanya menerapkan algoritma *Weiszfeld* dengan menggunakan kedua tipe klaster, berikut adalah hasil plot pada kedua tipe pada Gambar IV.9.

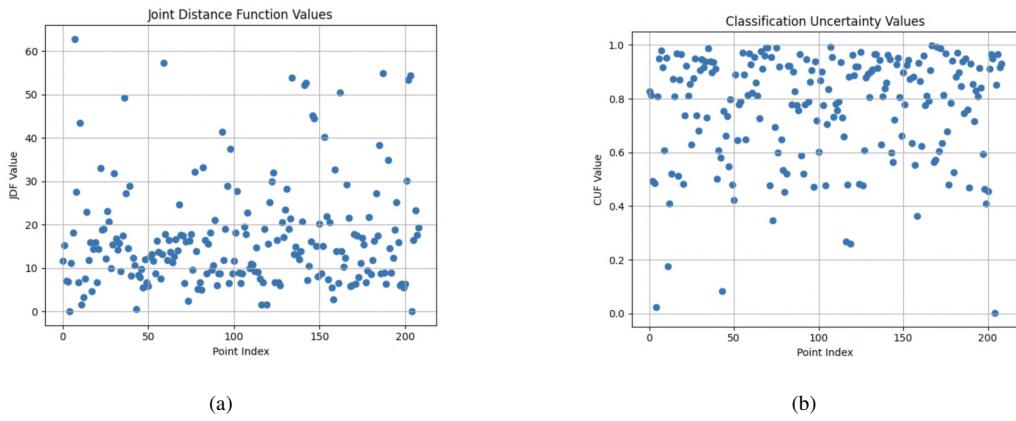


**Gambar IV.9:** Plot hasil algoritma *Weiszfeld* pada titik median tidak tunggal (a) *hard clustering* dan (b) *probabilistic assignments* untuk  $K = 3$  kasus berbobot

Kemudian akan diplot juga untuk diagram *Voronoi*, grafik fungsi objektif, plot JDF, dan plot CUF pada Gambar IV.10 dan Gambar IV.11.



**Gambar IV.10:** Plot (a) Diagram *Voronoi* dan (b) Fungsi objektif untuk  $K = 3$



**Gambar IV.11:** (a) Plot JDF dan (b) Plot CUF untuk  $K = 3$

Dimana titik median optimal didapat untuk *hard clustering* dan *probabilistic assignments* beserta galat absolut dapat dilihat pada Tabel IV.8 dan Tabel IV.9.

**Tabel IV.8:** Titik koordinat pada titik median pada kasus berbobot untuk  $K = 3$

Metode	Hard	Soft
$c_1$	(48.52, 15.55)	(48.52, 15.55)
$c_2$	(6.03, 29.91)	(20.15, 41.12)
$c_3$	(-73.13, 10.63)	(-68.49, 12.33)

**Tabel IV.9:** Galat absolut antara titik median pada algoritma *Weiszfeld* berbobot dan tak berbobot untuk  $K = 3$

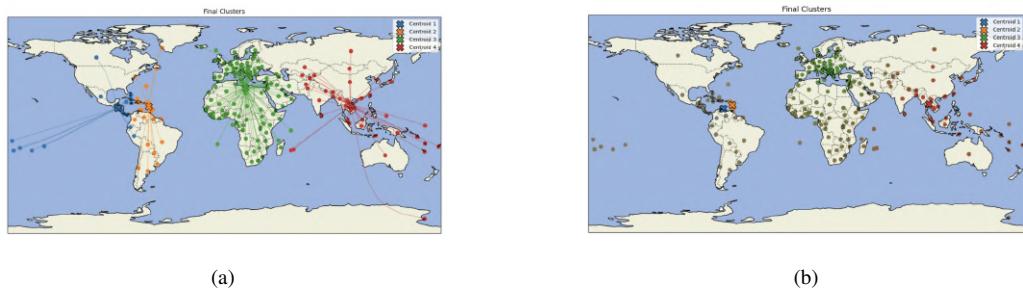
Metode	Hard	Soft
$AE_{c_1}$	56.70	0
$AE_{c_2}$	12.49	3.90
$AE_{c_3}$	6.77	6.32

Berdasarkan tabel tersebut, hanya ada satu titik koordinat yang berada di laut yaitu pada  $q = 2.1$ ,  $c_3$  berada di laut yang berjarak sekitar 106 km ke pulau Montserrat. Berdasarkan grafik fungsi objektif, nilai  $f(x)$  naik sebesar 400, dengan nilai tersebut mencapai maksimum sekitar 3900. Apabila dihitung indeks *Xie-Beni* didapat nilai sebesar 0.6268.

### IV.3 Skema Klaster $K = 4$

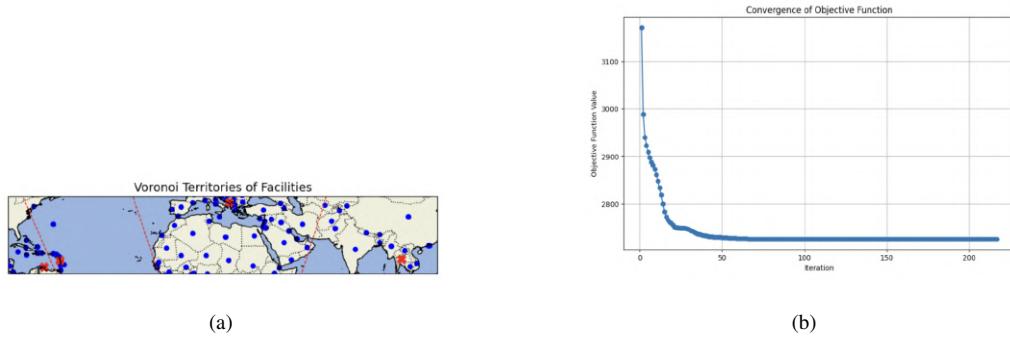
#### IV.3.1 Tanpa Berbobot

Untuk titik median berjumlah empat, akan diplot titik data beserta titik median awal yang diberikan yang dimana dapat ditinjau pada Gambar B.4. Dengan menerapkan *hard clustering* dan *probabilistic assignments*, berikut adalah hasil plot pada kedua tipe pada Gambar IV.12.

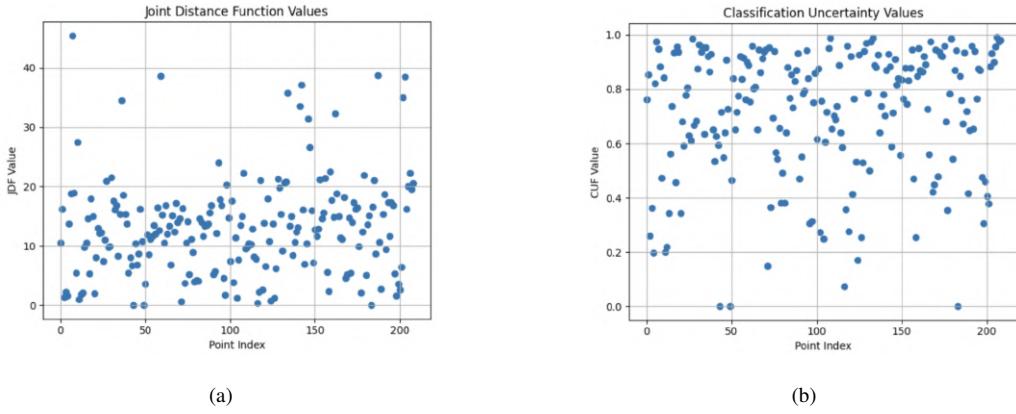


**Gambar IV.12:** Plot hasil algoritma *Weiszfeld* pada titik median tidak tunggal (a) *hard clustering* dan (b) *probabilistic assignments* untuk  $K = 4$

Kemudian akan disajikan juga untuk diagram *Voronoi*, grafik fungsi objektif, plot JDF, dan plot CUF pada Gambar IV.13 dan Gambar IV.14.



**Gambar IV.13:** Plot (a) Diagram Voronoi dan (b) Fungsi objektif untuk  $K = 4$



**Gambar IV.14:** (a) Plot JDF dan (b) Plot CUF untuk  $K = 4$

Dimana titik median optimal didapat pada kedua tipe tersebut dapat dilihat pada Tabel IV.10.

**Tabel IV.10:** Titik koordinat pada titik median pada kedua tipe klaster pada  $K = 4$

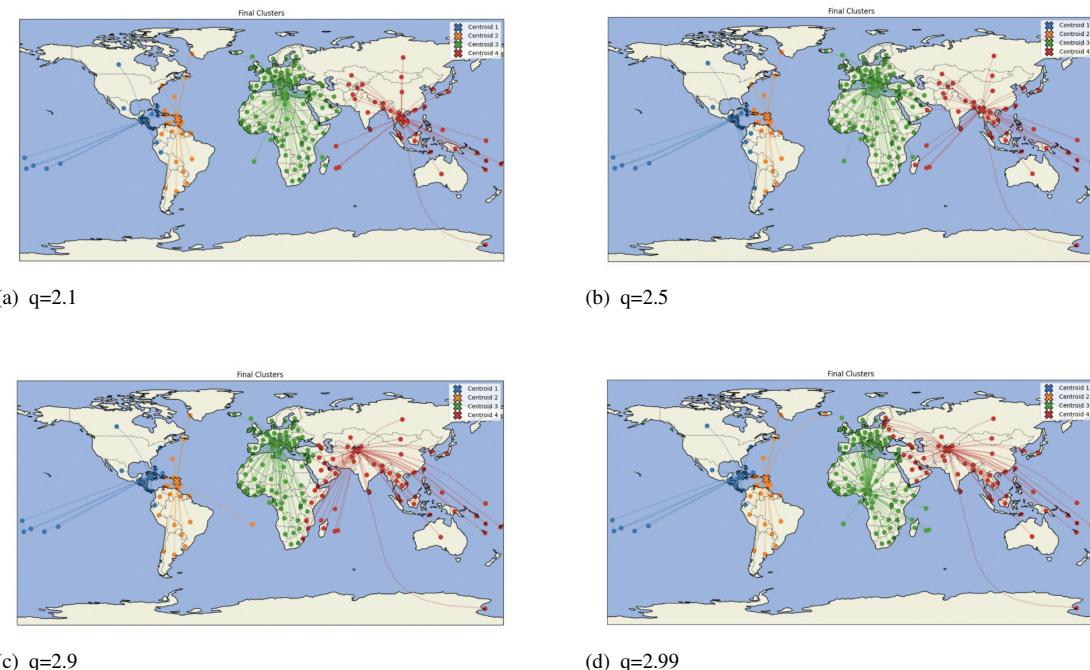
Metode	Hard	Soft
$c_1$	(-88.20, 14.14)	(-68.93, 12.10)
$c_2$	(-62.57, 15.36)	(-61.37, 15.42)
$c_3$	(17.68, 30.84)	(19.03, 42.43)
$c_4$	(105.22, 16.14)	(100.99, 15.87)

Untuk tipe *hard clustering* hanya satu titik yang berada di laut, yaitu pada *centroid* ke-2 berada di laut dengan jarak 117 km ke pulau Guadeloupe terdekat. Sedangkan untuk

*probabilistic assignments*, tidak ada titik median berada di laut. Berdasarkan grafik fungsi objektif, nilai  $f(x)$  konvergen sekitar lebih dari 2700. Apabila dihitung indeks *Xie-Beni* didapat nilai sebesar 0.5244.

#### IV.3.2 $L_q$ Weiszfeld

Dengan metode yang sama dengan orde  $q$  yang sama, apabila diterapkan tipe klaster yang sama diperoleh hasil plot, pada *hard clustering* dapat dilihat pada Gambar IV.15. Di mana titik koordinat didapat beserta galat absolut pada plot *hard clustering* pada di



**Gambar IV.15:** Plot hasil titik median dengan algoritma  $L_q$  Weiszfeld pada  $L_q$  Weiszfeld tipe *hard clustering* untuk  $K = 4$

Tabel IV.11 dan Tabel IV.12 di bawah.

**Tabel IV.11:** Titik koordinat pada titik media pada *hard clustering* untuk  $K = 4$

Metode	Standar	$q = 2.1$	$q = 2.5$	$q = 2.9$	$q = 2.99$
$c_1$	(-88.20, 14.14)	(-87.37, 14.40)	(-86.24, 15.20)	(-81.38, 19.30)	(-81.38, 19.30)
$c_2$	(-62.57, 15.36)	(-62.47, 15.72)	(-62.36, 16.85)	(-61.73, 16.00)	(-62.75, 17.29)
$c_3$	(17.68, 30.84)	(17.28, 32.70)	(17.20, 40.52)	(12.46, 43.94)	(12.35, 7.37)
$c_4$	(105.22, 16.14)	(104.07, 16.29)	(96.10, 21.76)	(71.28, 38.85)	(71.28, 38.86)

**Tabel IV.12:** Galat absolut antara titik median pada algoritma *Weiszfeld* dan  $L_q$  *Weiszfeld* untuk *hard clustering* pada  $K = 4$

Metode	$q = 2.1$	$q = 2.5$	$q = 2.9$	$q = 2.99$
$AE_{c_1}$	0.87	2.23	8.55	8.55
$AE_{c_2}$	0.37	1.50	1.06	1.94
$AE_{c_3}$	1.90	9.69	14.10	24.07
$AE_{c_4}$	1.16	10.71	40.84	40.84

Terdapat 2 titik koordinat yang berada di dalam laut. Untuk  $c_2$ , pada  $q = 2.1$ , titik median terletak di laut yang berjarak sekitar 85 km ke pulau Guadeloupe terdekat, dan pada  $q = 2.5$ , titik median terletak di dalam laut yang berjarak sekitar 19 km ke pulau Montserrat terdekat. Untuk  $c_3$ , hanya terjadi pada  $q = 2.1$ , dimana titik tersebut berada di laut yang berjarak 197 km ke daratan Libya terdekat.

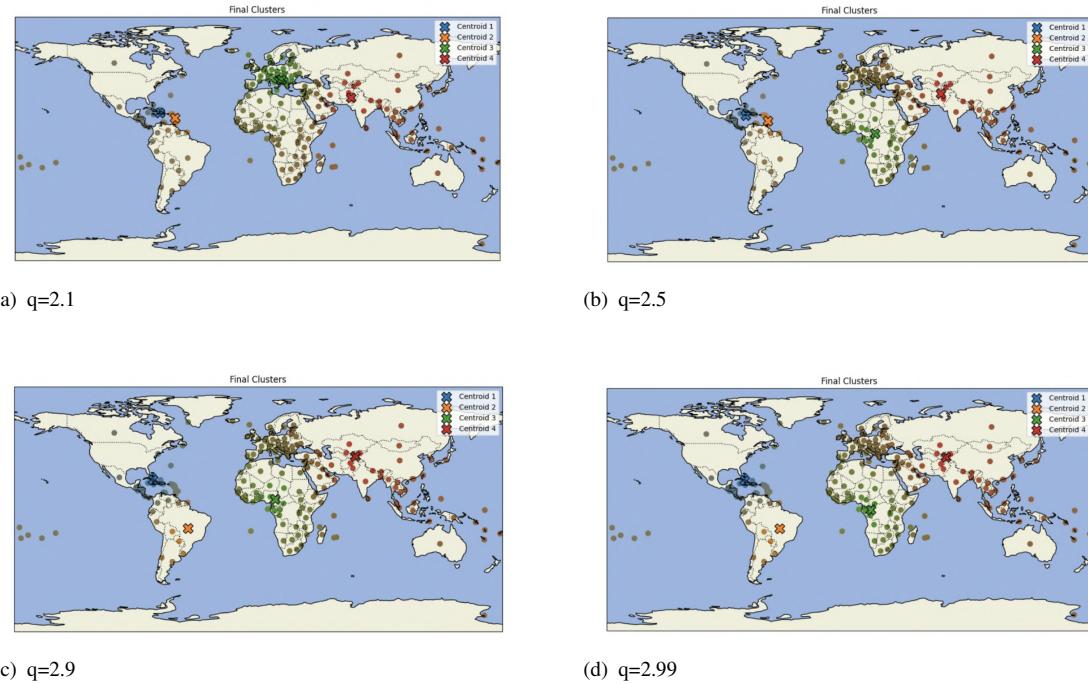
Lalu pada hasil plot pada *probabilistic assignments* dapat dilihat pada Gambar IV.16 beserta diagram *Voronoi*, grafik fungsi objektif, plot JDF, dan plot CUF dapat dilihat pada Gambar B.11 - Gambar B.14. Dengan orde  $q$  terbaik dapat dilihat komponen plot pada Gambar IV.17. Di mana titik koordinat didapat beserta galat absolut pada tipe *probabilistic assignments* pada di Tabel IV.13 dan Tabel IV.14 di bawah.

**Tabel IV.13:** Titik koordinat pada titik median pada *probabilistic assignments* untuk  $K = 4$

Metode	Standar	$q = 2.1$	$q = 2.5$	$q = 2.9$	$q = 2.99$
$c_1$	(-68.93, 12.10)	(-72.29, 18.97)	(-77.30, 18.11)	(-77.78, 21.52)	(-77.78, 21.52)
$c_2$	(-61.37, 15.42)	(-61.37, 15.42)	(-60.98, 13.91)	(-51.93, -14.24)	(-51.93, -14.23)
$c_3$	(19.03, 42.43)	(17.64, 43.82)	(18.58, 4.37)	(18.58, 4.37)	(15.83, -0.23)
$c_4$	(100.99, 15.87)	(69.35, 30.38)	(69.35, 30.38)	(69.35, 30.38)	(71.28, 38.86)

**Tabel IV.14:** Galat absolut antara titik median pada algoritma *Weiszfeld* dan  $L_q$  *Weiszfeld* untuk *probabilistic assignments* pada  $K = 4$

Metode	$q = 2.1$	$q = 2.5$	$q = 2.9$	$q = 2.99$
$AE_{c_1}$	7.65	10.30	12.93	12.93
$AE_{c_2}$	0	1.56	31.13	31.12
$AE_{c_3}$	1.97	38.06	38.06	42.78
$AE_{c_4}$	34.81	34.81	34.81	37.57



**Gambar IV.16:** Plot hasil titik median dengan algoritma  $L_q$  Weiszfeld pada  $L_q$  Weiszfeld tipe probabilistic assignments untuk  $K = 4$

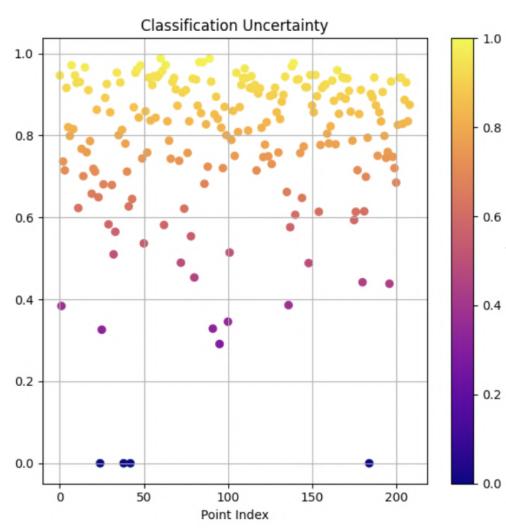
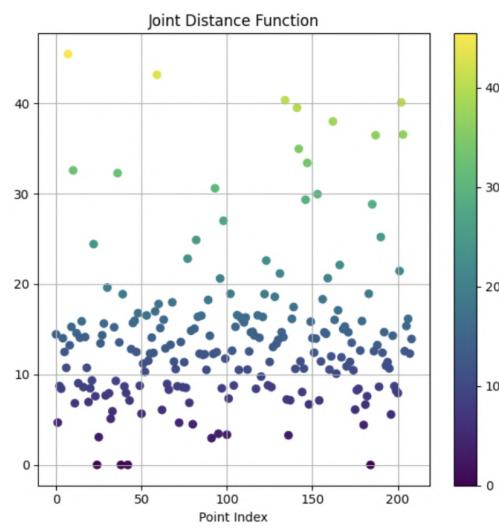
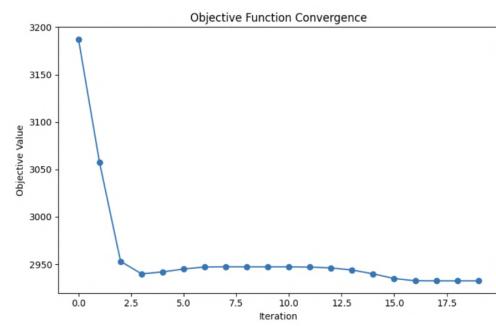
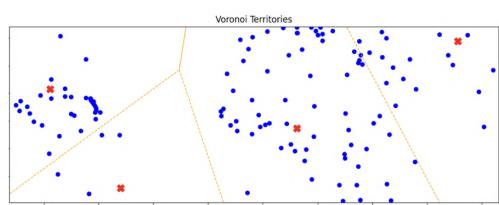
Berdasarkan tabel tersebut, hanya satu titik terletak di dalam laut yaitu pada  $q = 2.1$ ,  $c_3$  berada di laut yang berjarak sekitar 106 km ke pulau Montserrat. Berdasarkan grafik fungsi objektif, nilai  $f(x)$  naik sebesar 100-200 seiring naiknya orde  $q$  dengan nilai tersebut tercapai maksimum sekitar 2970. Apabila dihitung dengan indeks *Xie-Beni* didapat nilai berdasarkan Tabel IV.15.

**Tabel IV.15:** Indeks *Xie-Beni* pada algoritma  $L_q$  Weiszfeld untuk  $K = 4$

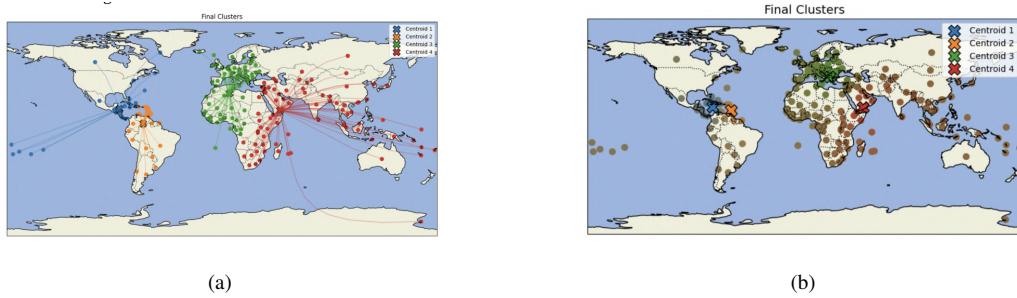
Metode	$q = 2.1$	$q = 2.5$	$q = 2.9$	$q = 2.99$
$XB_{index}$	12.7200	5.9259	0.9337	1.0129

### IV.3.3 Berbobot

Untuk kasus berbobot, hanya menerapkan algoritma *Weiszfeld* dengan menggunakan kedua tipe klaster, berikut adalah hasil plot pada kedua tipe pada Gambar IV.18.

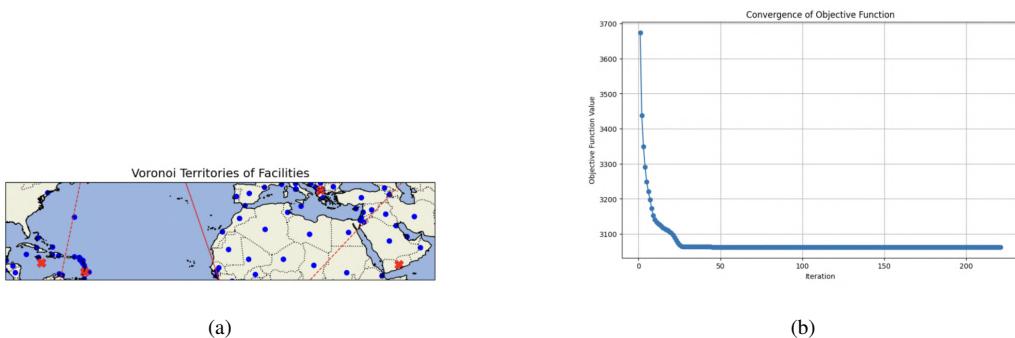


**Gambar IV.17:** (a) Diagram Voronoi, (b) Grafik fungsi objektif, (c) Plot JDF, dan (d) Plot CUF pada  $L_q$  Weiszfeld dengan orde  $q$  terbaik untuk  $K = 4$

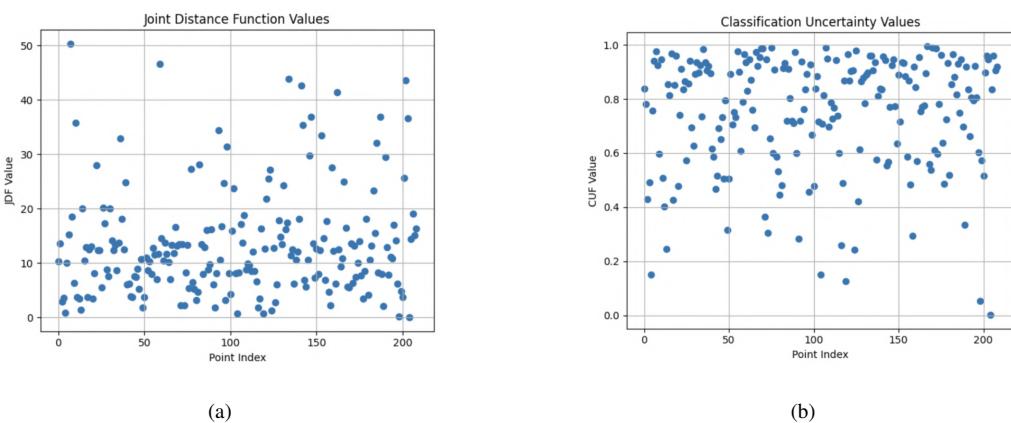


**Gambar IV.18:** Plot hasil algoritma Weiszfeld pada titik median tidak tunggal (a) *hard clustering* dan (b) *probabilistic assignments* untuk  $K = 4$  kasus berbobot

Kemudian akan disajikan juga untuk diagram *Voronoi*, grafik fungsi objektif, plot JDF, dan plot CUF pada Gambar IV.19 dan Gambar IV.20.



**Gambar IV.19:** Plot (a) Diagram Voronoi dan (b) Fungsi objektif untuk  $K = 4$



**Gambar IV.20:** (a) Plot JDF dan (b) Plot CUF untuk  $K = 4$

Dimana titik median optimal didapat untuk *hard clustering* dan *probabilistic assignments* beserta galat absolut dapat dilihat pada Tabel IV.16 dan Tabel IV.17.

**Tabel IV.16:** Titik koordinat pada titik median pada kasus berbobot untuk  $K = 4$

Metode	Hard	Soft
$c_1$	(-85.96, 16.81)	(-76.12, 16.29)
$c_2$	(-65.93, 4.35)	(-61.06, 13.20)
$c_3$	(6.03, 29.91)	(21.03, 41.51)
$c_4$	(48.52, 15.55)	(48.52, 15.55)

**Tabel IV.17:** Galat absolut antara titik median pada algoritma *Weiszfeld* berbobot dan tak berbobot untuk  $K = 4$

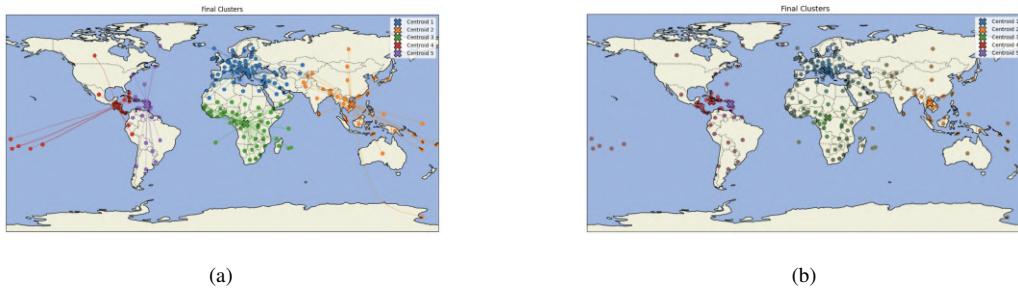
Metode	Hard	Soft
$AE_{c_1}$	3.49	8.32
$AE_{c_2}$	11.51	2.24
$AE_{c_3}$	11.69	2.27
$AE_{c_4}$	56.70	52.47

Berdasarkan tabel diatas, terdapat titik klaster berada di laut. Untuk  $c_1$ , pada *hard clustering*, titik tersebut berada di laut sekitar 35 km dekat dengan salah satu pulau milik Honduras, sedangkan pada *probabilistic assignments*, titik tersebut berada di laut juga dengan berjarak sekitar 195 km dekat dengan pulau Jamaika. Untuk  $c_2$ , hanya titik terjatuh di laut pada *probabilistic assignments* dengan berjarak 7 km dekat dengan pulau Saint Vincent dan Grenadines. Berdasarkan grafik fungsi objektif, nilai  $f(x)$  meningkat sebesar 300, dimana nilai tersebut mencapai maksimum sekitar lebih dari 3050. Apabila dihitung indeks *Xie-Beni* didapat nilai sebesar 0.5654.

## IV.4 Skema Klaster $K = 5$

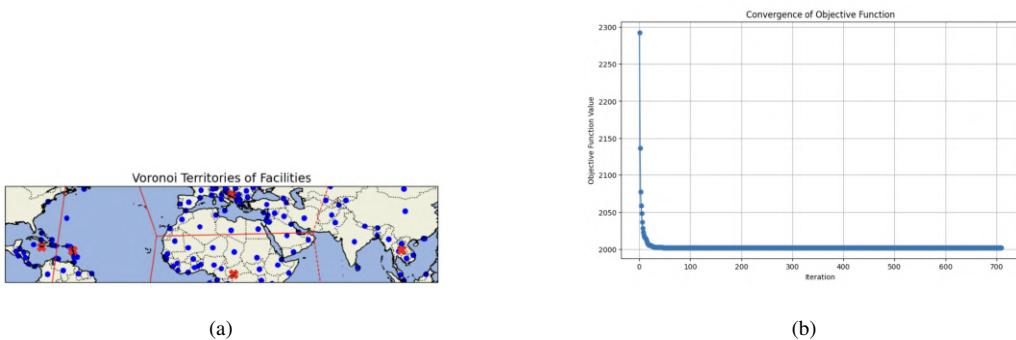
### IV.4.1 Tanpa Berbobot

Untuk titik median berjumlah lima, akan diplot data beserta titik median awal yang diberikan pada Gambar B.5. Dengan menerapkan *hard clustering* dan *probabilistic assignments*, berikut adalah hasil plot pada kedua tipe pada Gambar IV.21.

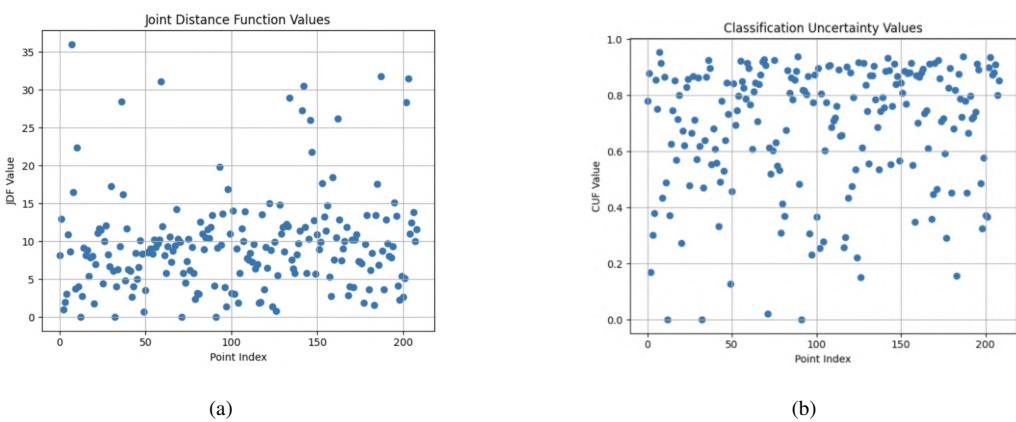


**Gambar IV.21:** Plot hasil algoritma *Weiszfeld* pada titik median tidak tunggal (a) *hard clustering* dan (b) *probabilistic assignments* untuk  $K = 5$

Kemudian akan disajikan juga untuk diagram *Voronoi*, grafik fungsi objektif, plot JDF, dan plot CUF pada Gambar IV.22 dan Gambar IV.23.



**Gambar IV.22:** Plot (a) Diagram Voronoi dan (b) Fungsi objektif untuk  $K = 5$



**Gambar IV.23:** (a) Plot JDF dan (b) Plot CUF untuk  $K = 5$

Dimana titik median optimal pada kedua tipe, dapat dilihat pada Tabel IV.18.

**Tabel IV.18:** Titik koordinat pada titik median pada kedua tipe klaster pada  $K = 5$

Metode	Hard	Soft
$c_1$	(17.61, 44.38)	(17.68, 43.92)
$c_2$	(108.04, 15.56)	(102.60, 16.46)
$c_3$	(19.44, -0.59)	(18.59, 4.36)
$c_4$	(-88.20, 14.14)	(-77.30, 18.11)
$c_5$	(-62.57, 15.36)	(100.99, 15.87)

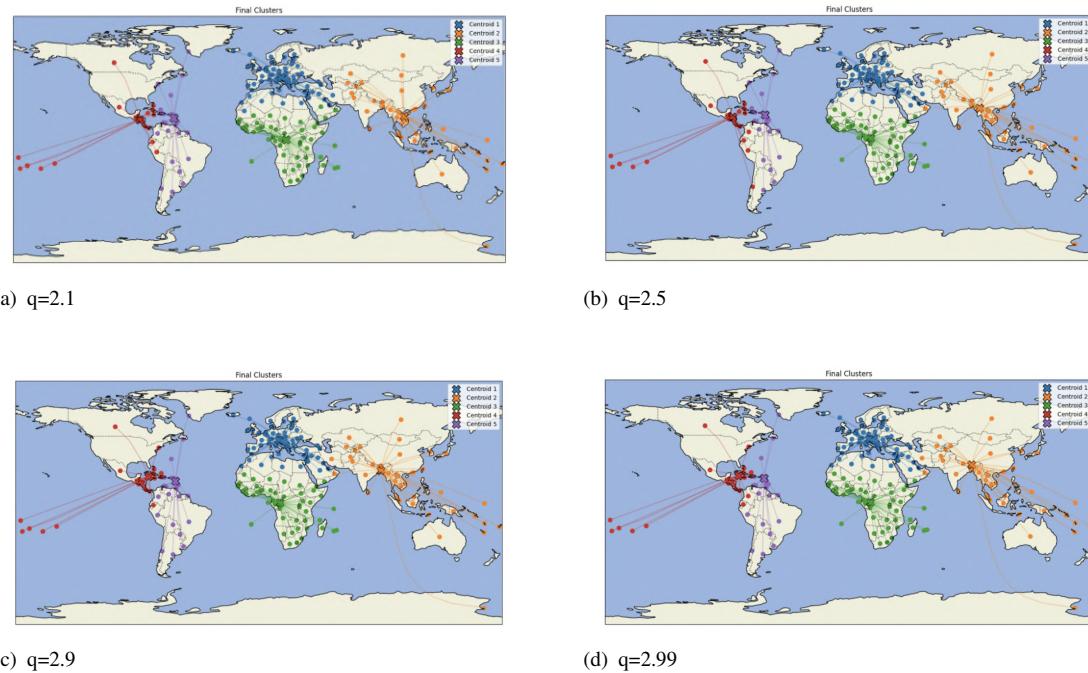
Untuk *hard clustering* hanya satu titik berada di dalam laut, yaitu pada *centroid* ke-5 berada di laut dengan jarak 117 km ke pulau Guadeloupe terdekat. Sedangkan untuk *probabilistic assignments*, hanya titik yang sama, yaitu pada *centroid* ke-5 berada di laut berjarak 7 km dekat dengan pulau Guadeloupe. Berdasarkan grafik fungsi objektif, nilai  $f(x)$  konvergen sekitar 2000. Apabila dihitung indeks *Xie-Beni* didapat nilai sebesar 0.5970.

#### IV.4.2 $L_q$ Weiszfeld

Untuk metode kali ini akan menggunakan orde  $q$  yang sama pada kasus jumlah titik median yang tunggal. Dengan menerapkan tipe klaster yang sama diperoleh hasil plot, pada *hard clustering* dapat dilihat pada Gambar IV.24. Di mana titik koordinat didapat beserta galat absolut pada plot *hard clustering* pada di Tabel IV.19 dan Tabel IV.20 di bawah.

**Tabel IV.19:** Titik koordinat pada titik media pada *hard clustering* untuk  $K = 5$

Metode	Standar	$q = 2.1$	$q = 2.5$	$q = 2.9$	$q = 2.99$
$c_1$	(17.61, 44.38)	(16.41, 44.90)	(15.23, 45.12)	(15.00, 46.15)	(15.00, 46.15)
$c_2$	(108.04, 15.56)	(106.03, 16.90)	(95.96, 21.91)	(90.36, 23.69)	(90.43, 27.51)
$c_3$	(19.44, -0.59)	(19.60, -0.19)	(15.83, -0.23)	(15.83, -0.23)	(15.83, -0.23)
$c_4$	(-88.20, 14.14)	(-87.37, 14.40)	(-86.24, 15.20)	(-81.38, 19.30)	(-81.38, 19.30)
$c_5$	(-62.57, 15.36)	(-62.47, 15.72)	(-62.36, 16.85)	(-61.73, 16.00)	(-62.77, 17.36)



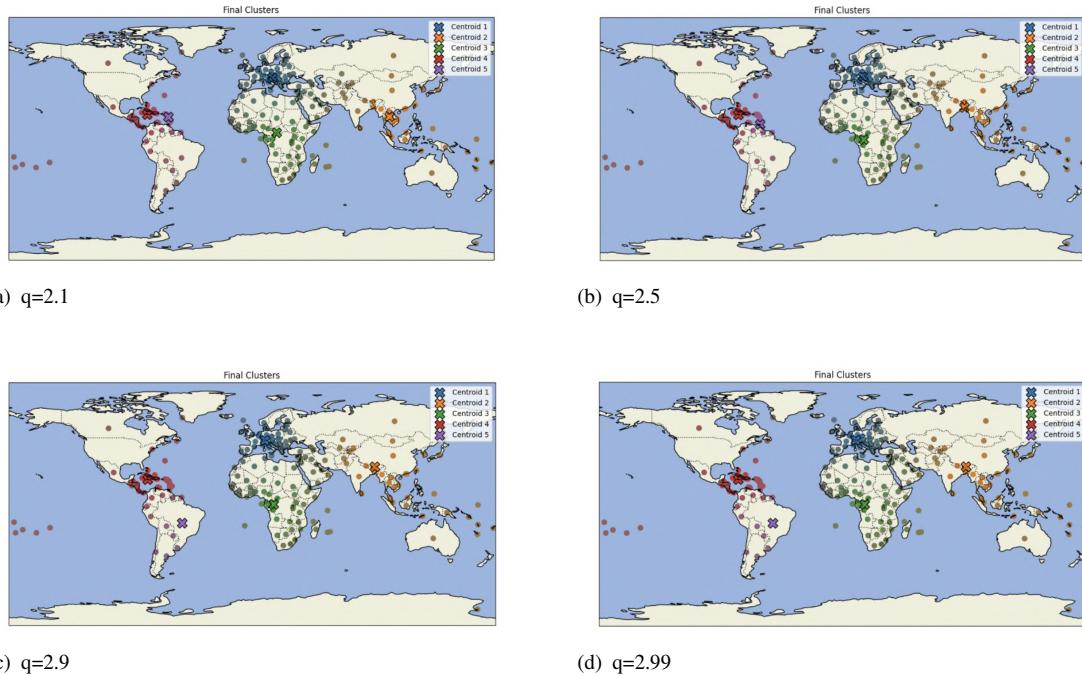
**Gambar IV.24:** Plot hasil titik median pada  $L_q$  Weiszfeld tipe *hard clustering* untuk  $K = 5$

**Tabel IV.20:** Galat absolut antara titik median pada algoritma Weiszfeld dan  $L_q$  Weiszfeld untuk *hard clustering* pada  $K = 5$

Metode	$q = 2.1$	$q = 2.5$	$q = 2.9$	$q = 2.99$
$AE_{c_1}$	1.31	2.49	3.15	3.15
$AE_{c_2}$	2.42	13.65	19.46	21.28
$AE_{c_3}$	0.43	3.63	3.63	3.63
$AE_{c_4}$	0.87	2.23	8.55	8.55
$AE_{c_5}$	0.37	1.50	1.06	2.01

Hanya satu titik klaster yang berada di laut, yakni hanya terjadi pada titik  $c_5$ . Pada  $q = 2.1$ , titik tersebut terletak di laut yang berjarak sepanjang 86 km dari pulau Guadeloupe terdekat, dan pada  $q = 2.5$ , titik tersebut terletak di laut yang berjarak sekitar 13 km dekat pulau Montserrat.

Lalu pada hasil plot pada *probabilistic assignments* dapat dilihat pada Gambar IV.25 beserta diagram *Voronoi*, grafik fungsi objektif, plot JDF, dan plot CUF dapat dilihat pada Gambar B.15 - Gambar B.18. Dengan orde  $q$  terbaik dapat dilihat komponen plot pada Gambar IV.26.

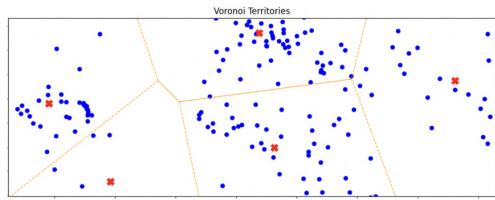


**Gambar IV.25:** Plot hasil titik median pada  $L_q$  Weiszfeld tipe *probabilistic assignments* untuk  $K = 5$

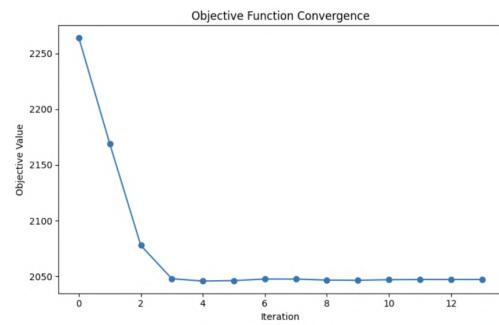
Di mana titik koordinat didapat beserta galat absolut pada plot *probabilistic assignments* pada di Tabel IV.21 dan Tabel IV.22 di bawah.

**Tabel IV.21:** Titik koordinat pada titik median pada *probabilistic assignments* untuk  $K = 5$

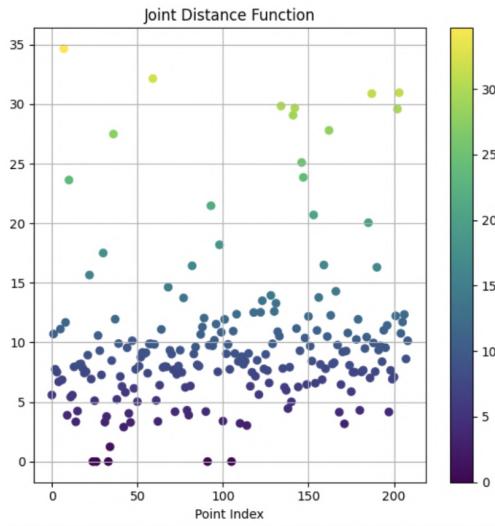
Metode	Standar	$q = 2.1$	$q = 2.5$	$q = 2.9$	$q = 2.99$
$c_1$	(17.68, 43.92)	(15.20, 45.10)	(15.00, 46.15)	(9.56, 47.17)	(9.56, 47.17)
$c_2$	(102.60, 16.46)	(102.52, 16.46)	(90.36, 23.69)	(90.43, 27.51)	(90.43, 27.51)
$c_3$	(18.59, 4.36)	(18.58, 4.37)	(15.83, -0.23)	(15.82, -0.23)	(15.83, -0.23)
$c_4$	(-77.30, 18.11)	(-77.30, 18.11)	(-77.30, 18.11)	(-77.30, 18.11)	(-77.30, 18.11)
$c_5$	(-61.81, 16.00)	(-61.73, 16.00)	(-61.22, 10.69)	(-51.93, -14.24)	(-51.93, -14.23)



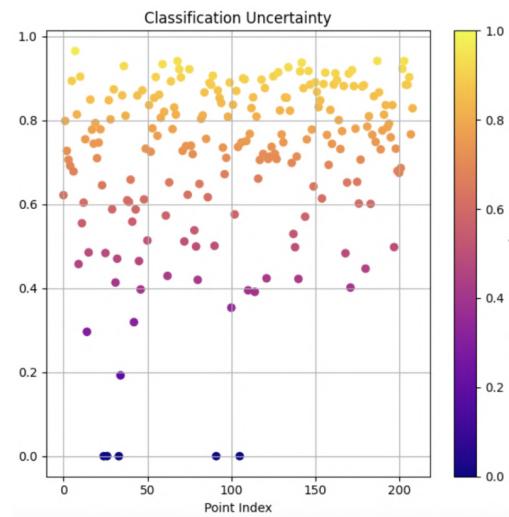
(a)



(b)



(c)



(d)

**Gambar IV.26:** (a) Diagram Voronoi, (b) Grafik fungsi objektif, (c) Plot JDF, dan (d) Plot CUF pada  $L_q$  Weiszfeld dengan orde  $q$  terbaik untuk  $K = 5$

**Tabel IV.22:** Galat absolut antara titik median pada algoritma *Weiszfeld* dan  $L_q$  *Weiszfeld* untuk *probabilistic assignments* pada  $K = 5$

Metode	$q = 2.1$	$q = 2.5$	$q = 2.9$	$q = 2.99$
$AE_{c_1}$	2.75	3.49	8.75	8.75
$AE_{c_2}$	0.08	14.22	16.44	16.44
$AE_{c_3}$	0.01	5.36	5.36	5.36
$AE_{c_4}$	0	0	0	0
$AE_{c_5}$	0.08	5.34	31.81	31.81

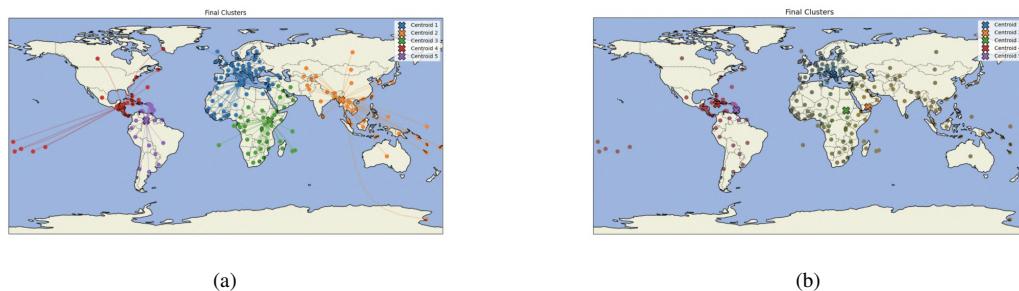
Berdasarkan tabel tersebut, tidak ada titik klaster berada di laut pada orde  $q$  tertentu. Fungsi objektif akan lebih cepat konvergen seiring dengan naiknya orde  $q$  karena dekat dengan titik data diberikan. Berdasarkan grafik fungsi objektif, nilai  $f(x)$  ada yang turun maupun naik seiring dengan naiknya orde  $q$  dengan secara keseluruhan nilai tersebut konvergen sekitar 2000. Apabila dihitung dengan indeks *Xie-Beni* didapat nilai berdasarkan Tabel IV.23.

**Tabel IV.23:** Indeks *Xie-Beni* pada algoritma  $L_q$  *Weiszfeld* untuk  $K = 5$

Metode	$q = 2.1$	$q = 2.5$	$q = 2.9$	$q = 2.99$
$XB_{index}$	3.7009	3.1905	0.6464	0.6503

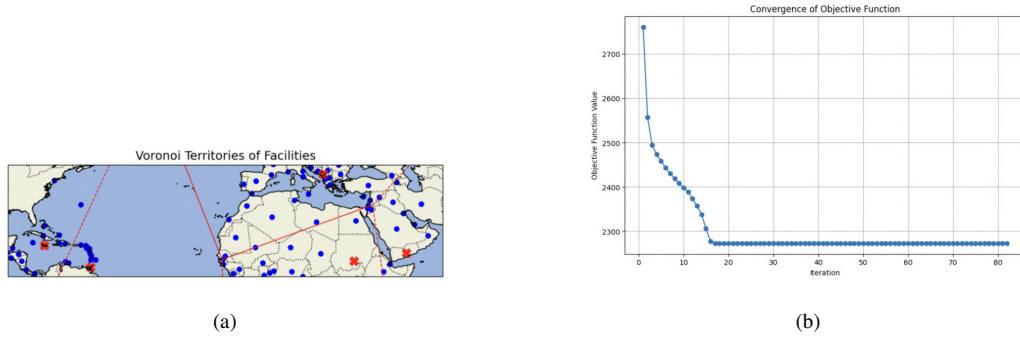
#### IV.4.3 Berbobot

Untuk kasus berbobot, hanya menerapkan algoritma *Weiszfeld* dengan menggunakan kedua tipe klaster, berikut adalah hasil plot pada kedua tipe pada Gambar IV.27.

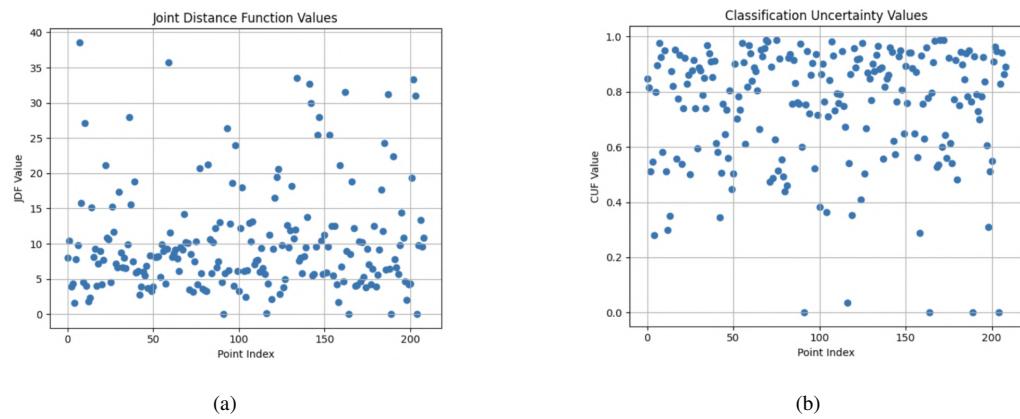


**Gambar IV.27:** Plot hasil algoritma *Weiszfeld* pada titik median tidak tunggal (a) *hard clustering* dan (b) *probabilistic assignments* untuk  $K = 5$  kasus berbobot

Kemudian akan diplot juga untuk diagram *Voronoi*, grafik fungsi objektif, plot JDF, dan plot CUF pada Gambar IV.28 dan Gambar IV.29.



**Gambar IV.28:** Plot (a) Diagram *Voronoi* dan (b) Fungsi objektif untuk  $K = 5$



**Gambar IV.29:** (a) Plot JDF dan (b) Plot CUF untuk  $K = 5$

Dimana titik median optimal didapat untuk *hard clustering* dan *probabilistic assignments* beserta galat absolut dapat dilihat pada Tabel IV.24 dan Tabel IV.25.

**Tabel IV.24:** Titik koordinat pada titik median pada kasus berbobot untuk  $K = 5$

Metode	Hard	Soft
$c_1$	(15.00, 46.15)	(19.44, 42.81)
$c_2$	(90.43, 27.51)	(48.51, 15.55)
$c_3$	(15.83, -0.22)	(30.22, 12.86)
$c_4$	(-81.38, 19.30)	(-77.30, 18.09)
$c_5$	(-62.77, 17.36)	(-61.23, 13.16)

**Tabel IV.25:** Galat absolut antara titik median pada algoritma *Weiszfeld* berbobot dan tak berbobot untuk  $K = 5$

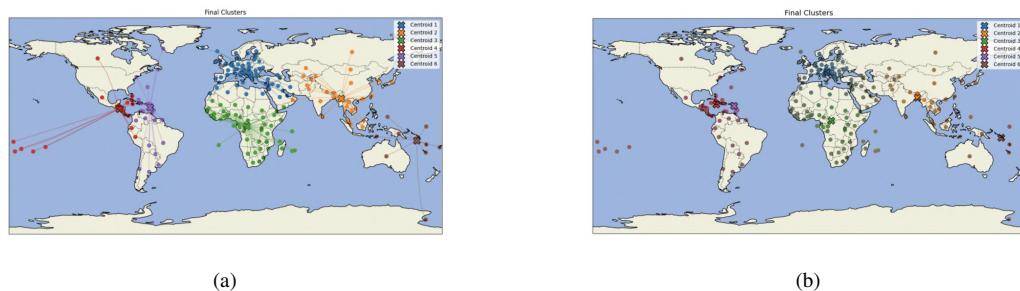
Metode	Hard	Soft
$AE_{c_1}$	3.15	2.08
$AE_{c_2}$	21.28	54.10
$AE_{c_3}$	3.63	14.41
$AE_{c_4}$	8.55	0.02
$AE_{c_5}$	2.01	2.90

Dari tabel tersebut, tidak ada titik klaster berada di laut pada kedua tipe *clustering* untuk kasus berbobot. Berdasarkan grafik fungsi objektif, nilai  $f(x)$  naik sebesar 250 hingga nilai  $f(x)$  mencapai hampir sekitar 2300. Apabila dihitung indeks *Xie-Beni* didapat nilai sebesar 0.6535.

## IV.5 Skema Klaster $K = 6$

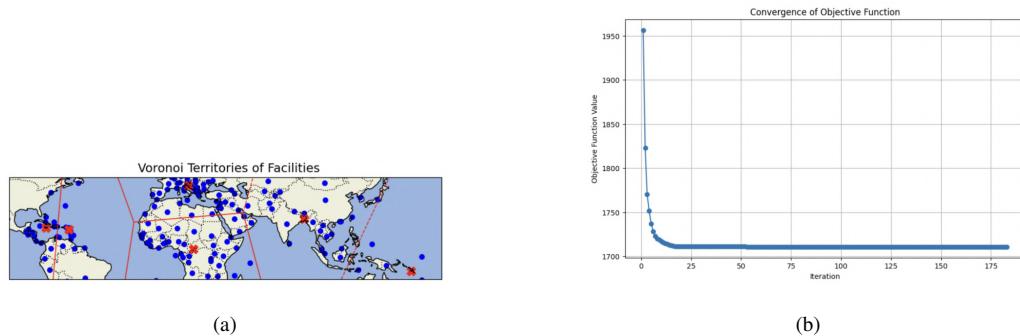
### IV.5.1 Tanpa Berbobot

Untuk titik median berjumlah enam, akan diplot data beserta titik median awal yang diberikan pada Gambar B.6. Dengan menerapkan *hard clustering* dan *probabilistic assignments*, berikut adalah hasil plot pada kedua tipe pada Gambar IV.30.

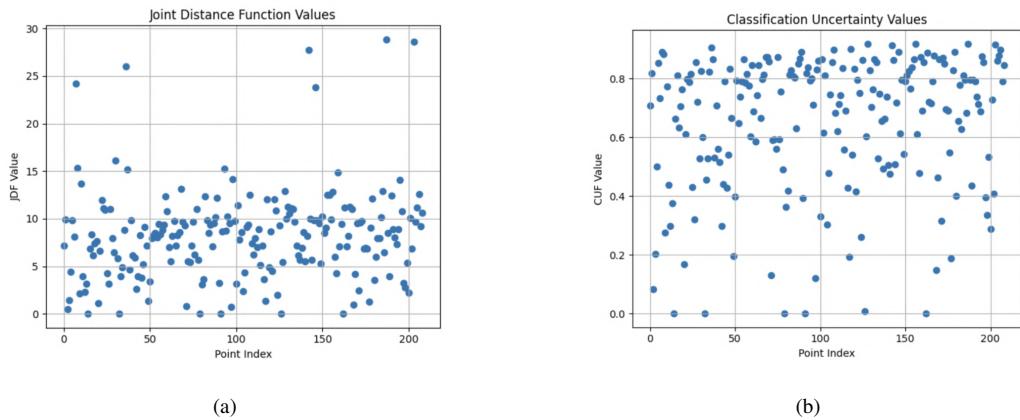


**Gambar IV.30:** Plot hasil algoritma *Weiszfeld* pada titik median tidak tunggal (a) *hard clustering* dan (b) *probabilistic assignments* untuk  $K = 6$

Kemudian akan diplot juga untuk diagram *Voronoi*, grafik fungsi objektif, plot JDF, dan plot CUF pada Gambar IV.31 dan Gambar IV.32.



**Gambar IV.31:** Plot (a) Diagram *Voronoi* dan (b) Fungsi objektif untuk  $K = 6$



**Gambar IV.32:** (a) Plot JDF dan (b) Plot CUF untuk  $K = 6$

Dimana titik median optimal didapat pada kedua tipe tersebut dapat dilihat pada Tabel IV.26.

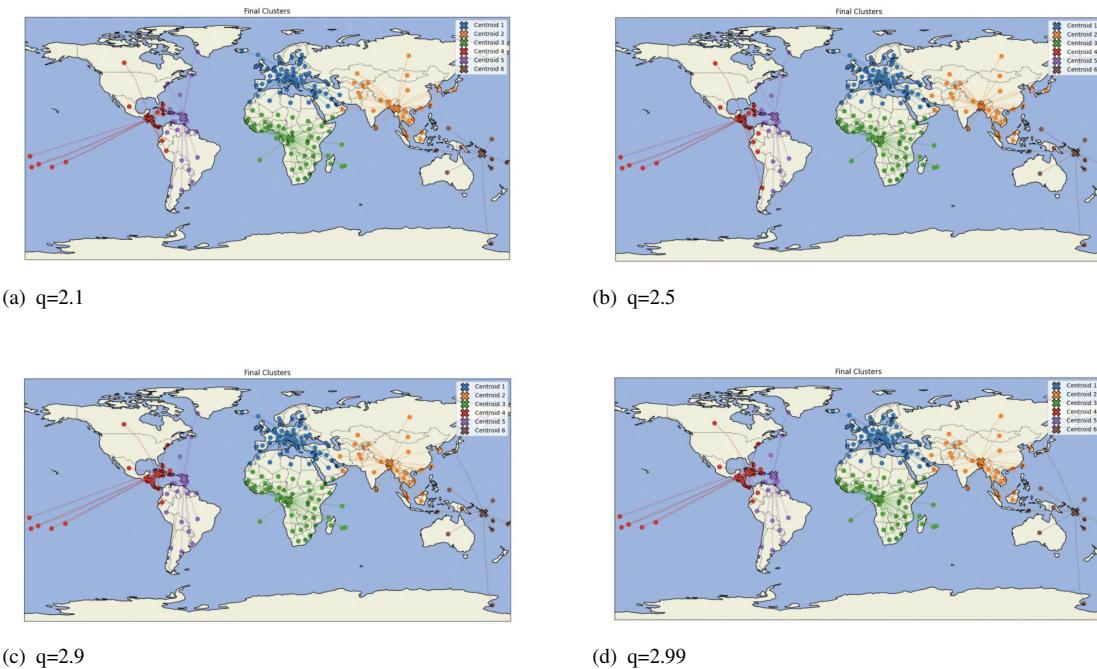
**Tabel IV.26:** Titik koordinat pada titik median pada kedua tipe klaster pada  $K = 6$

Metode	Hard	Soft
$c_1$	(17.19, 44.64)	(15.20, 45.10)
$c_2$	(96.22, 22.73)	(90.36, 23.68)
$c_3$	(17.86, -0.30)	(18.56, 4.35)
$c_4$	(-88.20, 14.14)	(-77.30, 18.11)
$c_5$	(-62.57, 15.36)	(-62.22, 16.77)
$c_6$	(158.94, -12.40)	(160.16, -9.65)

Untuk *hard clustering* hanya satu titik berada di dalam laut, yaitu pada *centroid* ke-6 berada di laut dengan jarak 149 km ke salah satu pulau milik Kepulauan Solomon. Sedangkan untuk *probabilistic assignments*, tidak ada titik klaster berada di laut. Berdasarkan grafik fungsi objektif, nilai  $f(x)$  konvergen hingga sekitar lebih dari 1700. Apabila dihitung indeks *Xie-Beni* didapat nilai sebesar 0.5592.

#### IV.5.2 $L_q$ Weiszfeld

Untuk metode kali ini akan menggunakan orde  $q$  yang sama pada kasus jumlah titik median yang tunggal. Dengan menerapkan tipe klaster yang sama diperoleh hasil plot, pada *hard clustering* dapat dilihat pada Gambar IV.33. Di mana titik koordinat didapat



**Gambar IV.33:** Plot hasil titik median pada  $L_q$  Weiszfeld tipe *hard clustering* untuk  $K = 6$

beserta galat absolut pada plot *hard clustering* pada di Tabel IV.27 dan Tabel IV.28 di bawah.

**Tabel IV.27:** Titik koordinat pada titik media pada *hard clustering* untuk  $K = 6$

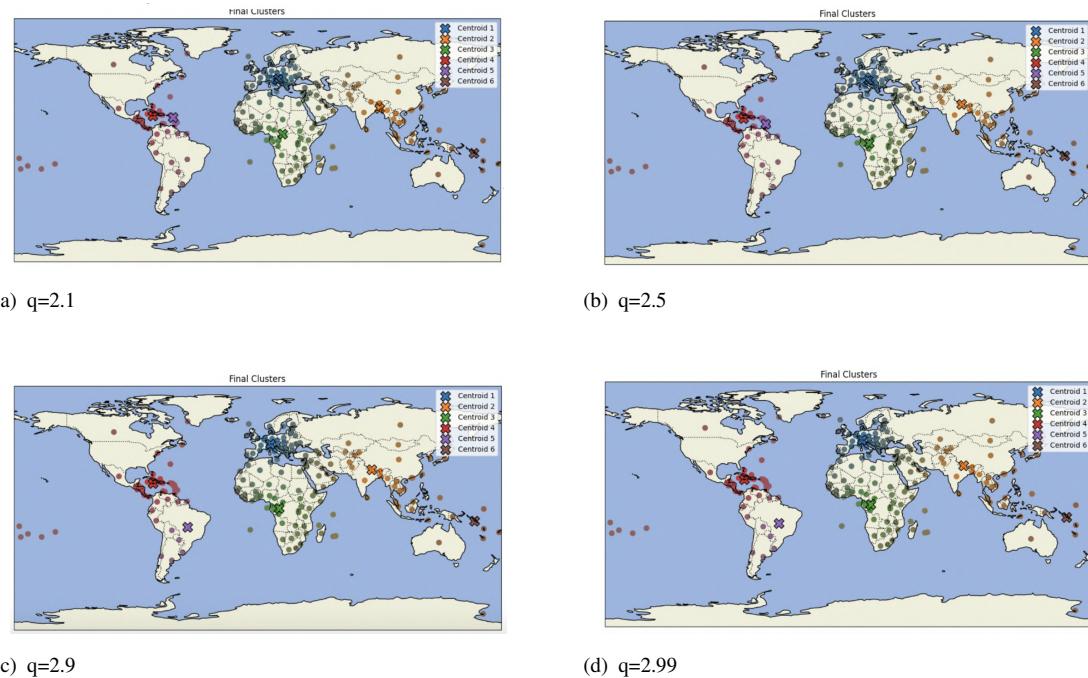
Metode	Standar	$q = 2.1$	$q = 2.5$	$q = 2.9$	$q = 2.99$
$\mathbf{c}_1$	(17.19, 44.64)	(17.09, 44.73)	(15.22, 45.12)	(15.00, 46.15)	(15.00, 46.15)
$\mathbf{c}_2$	(96.22, 22.73)	(96.05, 22.09)	(90.43, 23.72)	(90.43, 27.52)	(90.43, 27.52)
$\mathbf{c}_3$	(17.86, -0.30)	(17.23, -0.14)	(15.83, -0.23)	(15.83, -0.23)	(15.83, -0.23)
$\mathbf{c}_4$	(-88.20, 14.14)	(-87.37, 14.40)	(-86.24, 15.20)	(-81.38, 19.30)	(-81.38, 19.30)
$\mathbf{c}_5$	(-62.57, 15.36)	(-62.47, 15.72)	(-62.36, 16.85)	(-61.73, 16.00)	(-62.77, 17.36)
$\mathbf{c}_6$	(158.94, -12.40)	(159.60, -11.47)	(160.16, -9.65)	(160.16, -9.65)	(160.16, -9.65)

**Tabel IV.28:** Galat absolut antara titik median pada algoritma *Weiszfeld* dan  $L_q$  *Weiszfeld* untuk *hard clustering* pada  $K = 6$

Metode	$q = 2.1$	$q = 2.5$	$q = 2.9$	$q = 2.99$
$AE_{\mathbf{c}_1}$	0.13	2.03	2.66	2.66
$AE_{\mathbf{c}_2}$	0.66	5.87	7.51	7.51
$AE_{\mathbf{c}_3}$	0.65	2.03	2.03	2.03
$AE_{\mathbf{c}_4}$	0.87	2.23	8.55	8.55
$AE_{\mathbf{c}_5}$	0.37	1.50	1.06	2.01
$AE_{\mathbf{c}_6}$	0.94	3.01	3.01	3.01

Hanya dua titik klaster berada di dalam laut. Untuk titik  $c_5$ , pada  $q = 2.1$ , titik tersebut berada di laut yang berjarak sepanjang 86 km dari pulau Guadeloupe terdekat, dan pada  $q = 2.5$ , titik tersebut terletak di laut yang berjarak sekitar 13 km dekat pulauMontserrat. Kemudian untuk titik  $c_6$ , hanya terjadi pada  $q = 2.1$ , yaitu terletak di laut sekitar 27 km dekat dengan salah satu pulau milik Kepulauan Solomon.

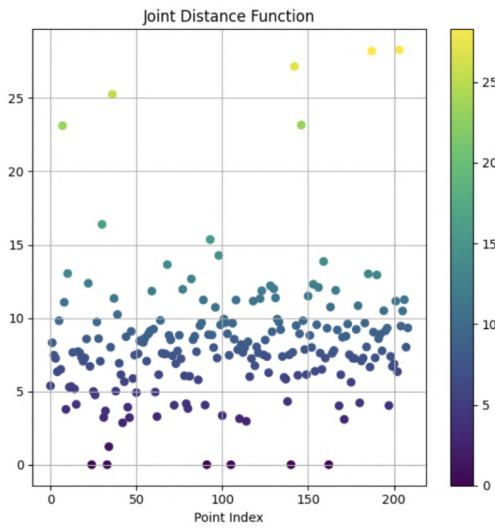
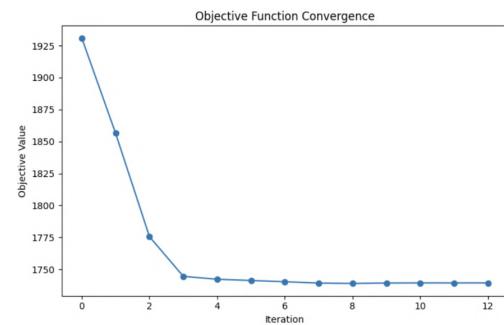
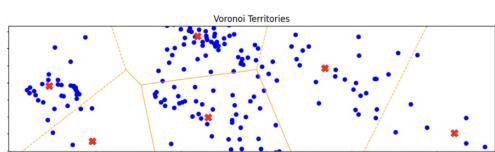
Lalu pada hasil plot pada *probabilistic assignments* dapat dilihat pada Gambar IV.34 beserta diagram *Voronoi*, grafik fungsi objektif, plot JDF, dan plot CUF dapat dilihat pada Gambar B.19 - Gambar B.22. Dengan orde  $q$  terbaik dapat dilihat komponen plot pada Gambar IV.35. Di mana titik koordinat didapat beserta galat absolut pada plot *probabilistic assignments* pada di Tabel IV.29 dan Tabel IV.30 di bawah.



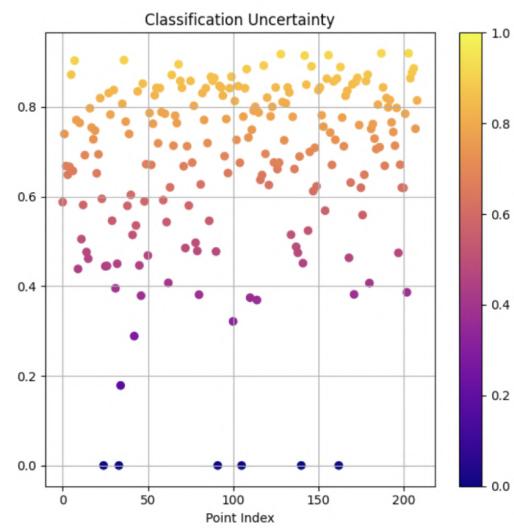
**Gambar IV.34:** Plot hasil titik median pada  $L_q$  Weiszfeld tipe *probabilistic assignments* untuk  $K = 6$

**Tabel IV.29:** Titik koordinat pada titik median pada *probabilistic assignments* untuk  $K = 6$

Metode	Standar	$q = 2.1$	$q = 2.5$	$q = 2.9$	$q = 2.99$
$c_1$	(15.20, 45.10)	(15.20, 45.10)	(15.00, 46.15)	(9.56, 47.17)	(9.56, 47.17)
$c_2$	(90.36, 23.68)	(90.36, 23.69)	(84.12, 28.39)	(84.12, 28.39)	(84.12, 28.39)
$c_3$	(18.56, 4.35)	(18.58, 4.37)	(15.83, -0.23)	(15.83, -0.23)	(15.83, -0.23)
$c_4$	(-77.30, 18.11)	(-77.30, 18.11)	(-77.30, 18.11)	(-77.30, 18.11)	(-77.30, 18.11)
$c_5$	(-62.22, 16.77)	(-62.21, 16.79)	(-60.98, 13.91)	(-51.93, -14.23)	(-51.93, -14.23)
$c_6$	(160.16, -9.65)	(160.16, -9.65)	(160.16, -9.65)	(160.16, -9.65)	(160.16, -9.65)



(c)  $q=2.9$



(d)  $q=2.99$

**Gambar IV.35:** (a) Diagram Voronoi, (b) Grafik fungsi objektif, (c) Plot JDF, dan (d) Plot CUF pada  $L_q$  Weiszfeld dengan orde  $q$  terbaik untuk  $K = 6$

**Tabel IV.30:** Galat absolut antara titik median pada algoritma *Weiszfeld* dan  $L_q$  *Weiszfeld* untuk *probabilistic assignments* pada  $K = 6$

Metode	$q = 2.1$	$q = 2.5$	$q = 2.9$	$q = 2.99$
$AE_{c_1}$	0	1.07	6.01	6.01
$AE_{c_2}$	0.01	7.82	7.82	7.82
$AE_{c_3}$	0.03	5.33	5.33	5.33
$AE_{c_4}$	0	0	0	0
$AE_{c_5}$	0.02	3.12	32.66	32.66
$AE_{c_6}$	0	0	0	0

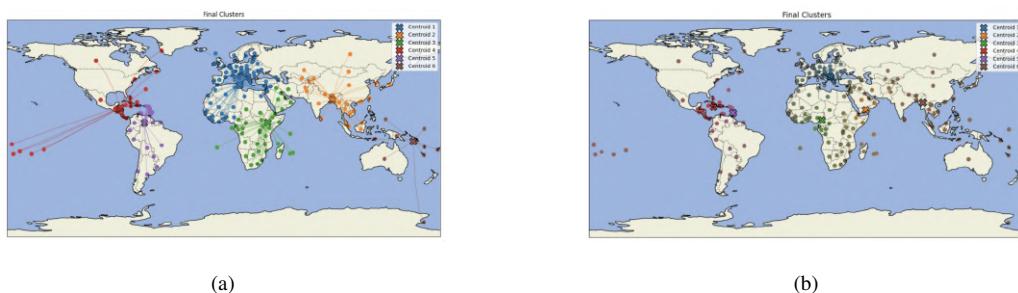
Berdasarkan tabel tersebut, tidak ada titik klaster berada di laut. Dengan kata lain, hampir seluruh titik klaster menempel di titik data berdasarkan orde  $q$ . Berdasarkan grafik fungsi objektif  $f(x)$ , nilai  $f(x)$  konvergen hingga sekitar 1700-1750, artinya hampir tidak ada perubahan nilai  $f(x)$  seiring naiknya orde  $q$ . Apabila dihitung dengan indeks *Xie-Beni* didapat nilai berdasarkan Tabel IV.31.

**Tabel IV.31:** Indeks *Xie-Beni* pada algoritma  $L_q$  *Weiszfeld* untuk  $K = 6$

Metode	$q = 2.1$	$q = 2.5$	$q = 2.9$	$q = 2.99$
$XB_{index}$	3.1656	2.5179	0.4757	0.4791

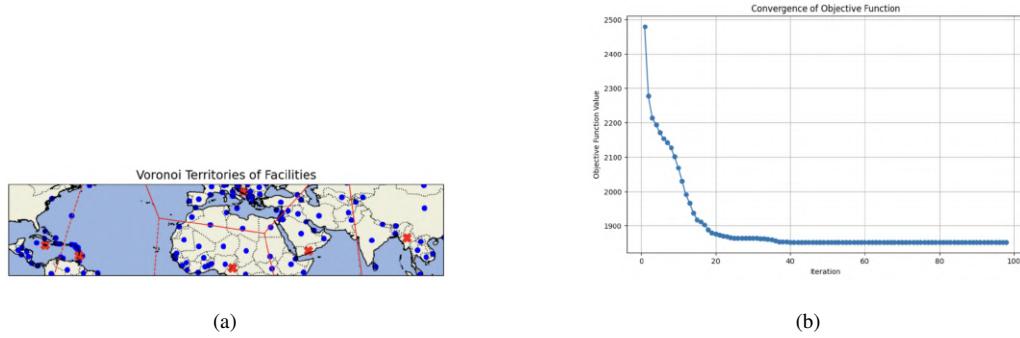
### IV.5.3 Berbobot

Untuk kasus berbobot, hanya menerapkan algoritma *Weiszfeld* dengan menggunakan kedua tipe klaster, berikut adalah hasil plot pada kedua tipe pada Gambar IV.36.

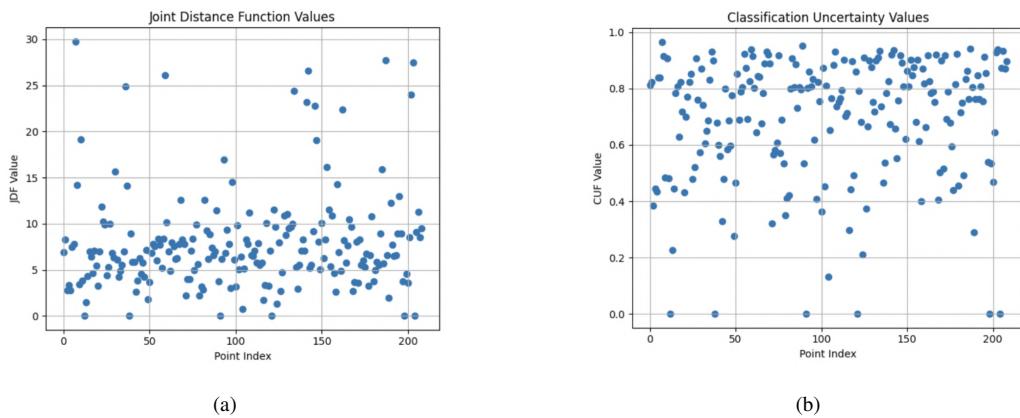


**Gambar IV.36:** Plot hasil algoritma *Weiszfeld* pada titik median tidak tunggal (a) *hard clustering* dan (b) *probabilistic assignments* untuk  $K = 6$  kasus berbobot

Kemudian akan diplot juga untuk diagram *Voronoi*, grafik fungsi objektif, plot JDF, dan plot CUF pada Gambar IV.37 dan Gambar IV.38.



**Gambar IV.37:** Plot (a) Diagram *Voronoi* dan (b) Fungsi objektif untuk  $K = 6$



**Gambar IV.38:** (a) Plot JDF dan (b) Plot CUF untuk  $K = 6$

Dimana titik median optimal didapat untuk *hard clustering* dan *probabilistic assignments* beserta galat absolut dapat dilihat pada Tabel IV.32 dan Tabel IV.33.

**Tabel IV.32:** Titik koordinat pada titik median pada kasus berbobot untuk  $K = 6$

Metode	Hard	Soft
$c_1$	(13.13, 35.97)	(19.50, 43.06)
$c_2$	(90.36, 23.69)	(48.52, 15.55)
$c_3$	(36.73, 4.86)	(12.35, 7.37)
$c_4$	(-85.96, 16.81)	(-77.30, 18.11)
$c_5$	(-65.93, 4.35)	(-61.23, 13.16)
$c_6$	(157.91, -10.69)	(95.96, 21.91)

**Tabel IV.33:** Galat absolut antara titik median pada algoritma *Weiszfeld* berbobot dan tak berbobot untuk  $K = 6$

Metode	Hard	Soft
$c_1$	9.57	4.76
$c_2$	5.67	0.01
$c_3$	19.56	6.91
$c_4$	3.49	0
$c_5$	11.51	3.74
$c_6$	2.00	71.54

Terdapat beberapa titik klaster yang berada di laut. Untuk  $c_1$ , hanya terjadi pada *hard clustering*. Titik tersebut berada di laut sekitar 97 km dekat dengan pulau Malta. Lalu untuk  $c_6$ , hanya terjadipada tipe serupa yakni *hard clustering*, dengan jarak sepanjang 214 km dekat dengan salah satu pulau milik Kepulauan Solomon. Berdasarkan grafik fungsi objektif  $f(x)$ , nilai fungsi objektif naik sebesar 150, sehingga nilai  $f(x)$  konvergen hingga sekitar 18500. Apabila dihitung indeks *Xie-Beni* didapat nilai sebesar 0.9320.

## IV.6 Pembahasan Skema

Setelah dilakukan simulasi berdasarkan alur model dan skema pemilihan jumlah titik median, berikut adalah hasil indeks *Xie-Beni* keseluruhan pada Tabel IV.34 dibawah ini.

**Tabel IV.34:** Indeks *Xie-Beni* keseluruhan

	Standar	$q = 2.1$	$q = 2.5$	$q = 2.9$	$q = 2.99$	Standar Berbobot
$k = 3$	0.5592	<b>1.0277</b>	<b>0.4875</b>	<b>0.4693</b>	<b>0.4025</b>	<b>0.5654</b>
$k = 4$	0.5244	12.7200	5.9259	0.9337	1.0129	0.6268
$k = 5$	0.5970	3.7009	3.1905	0.6464	0.6503	0.6535
$k = 6$	<b>0.4257</b>	3.1656	2.5179	0.4757	0.4791	0.9320

Untuk algoritma *Weiszfeld* tanpa berbobot, jumlah titik median  $k = 6$  merupakan pemilihan yang valid dengan  $XB_{index}$  sebesar 0.4257. Dengan menggunakan algoritma  $L_q$  *Weiszfeld*, dengan orde  $q \in \{2.1, 2.5, 2.9, 2.99\}$ , jumlah klaster  $k = 3$  memiliki indeks *Xie-Beni* paling baik dengan nilai indeks sebesar 1.0227, 0.4875, 0.4693, dan 0.4025 berturut-turut.

Di sisi lain, fungsi objektif  $f(x)$  pada keseluruhan berpengaruh pada pemilihan jumlah klaster maupun orde  $q$  pada  $L_q$ . Hal ini dapat dibuktikan berdasarkan pada grafik fungsi objektif pada masing-masing bahwa nilai fungsi tersebut semakin menurun dengan menambahkan jumlah titik median dipilih, hal tersebut membuat model tersebut lebih baik. Di sisi lain, fungsi objektif juga mempengaruhi kinerja konvergensi dan optimasi yang unggul, yaitu ketika orde  $q$  pada  $L_q$  semakin tinggi atau mendekati batas, maka nilai fungsi objektif tersebut akan lebih konvergen dengan mereduksi iterasi pada algoritma pencarian titik median optimal. Selain itu, menaiki orde  $q$  akan berpengaruh pada peningkatan nilai fungsi objektif. Hal tersebut membuat model tersebut tidak menjamin lebih baik. Untuk pemilihan jumlah klaster  $K$  juga mempengaruhi apakah grafik tersebut juga *overfitting* atau tidak, di mana jumlah  $K$  lebih banyak akan menyebabkan *overfitting*. Ada beberapa grafik pada kasus orde  $q$  tertentu memiliki konvergensi  $f(x)$  yang baik dengan fluktuasi rendah. Apabila membandingkan fungsi objektif antara  $\omega_i$  tak berbobot dan berbobot, nilai fungsi objektif pada kasus tak berbobot justru lebih baik karena nilai fungsi objektif lebih rendah daripada kasus berbobot.

Untuk plot JDF dan plot CUF secara keseluruhan, pada plot JDF terlihat bahwa plot ini cukup bagus karena banyak data berada di rentang nilai JDF antara 0 sampai 15, namun ada beberapa titik data yang merupakan pencilan atau misklasifikasi karena data tersebut terlalu bising disebabkan lokasi tersebut berada di daerah terpencil. Pada plot CUF terlihat bahwa banyak data dengan nilai mendekati 1, hal ini menyebabkan

banyak data tersebut misklasifikasi sehingga data tersebut menunjukkan ketidakpastian. Selain itu, beberapa fluktuasi menunjukkan titik-titik yang ambigu, sehingga banyak titik berada pada nilai mendekati 1. Dapat disimpulkan bahwa dataset yang dipilih memiliki beberapa data pencilan yang mempengaruhi plot JDF dan plot CUF.

Berdasarkan hasil plot secara keseluruhan, baik titik median tunggal maupun tidak tunggal, titik median geometris dapat diinterpretasikan perbedaan lokasi titik pada algoritma *Weiszfeld* dan  $L_q$  *Weiszfeld*, maupun algoritma *Weiszfeld* tak berbobot dan berbobot. Titik median optimal dipengaruhi oleh data yang merupakan titik pencilan atau tidak, selain itu jumlah titik data juga pengaruh apakah titik data tersebut berkumpulan atau tidak. Hal ini dikarenakan terdapat beberapa titik median yang menempel pada salah satu titik data atau berdekatan sehingga konvergensi titik median optimal lebih cepat. Selain itu nilai indeks *Xie-Beni* kurang baik secara keseluruhan, di mana nilai  $XB_{index}$  ada yang lebih dari 1, hal ini dikarenakan dataset yang digunakan mengandung beberapa titik pencilan sehingga sangat sensitif terhadap nilai  $XB_{index}$ . Terlebih lagi, nilai dari *AE* sangat besar dari hasil keseluruhan berdasarkan tabel yang sudah dianalisa.

Di sisi lain, terdapat beberapa titik median yang berada di laut sehingga perlu ada asumsi tambahan supaya titik median jatuh di daratan. Ditambah lagi bahwa metode yang digunakan juga terbatas, sehingga ada kendala ketika menjalankan sebuah program. Misalnya membuat sebuah diagram *Voronoi*, di mana diagram tersebut tidak bisa memilih jumlah klaster sebanyak  $K = 2$  karena keterbatasan alat pemisah data.

# **BAB V**

## **SIMPULAN DAN SARAN**

### **V.1 Simpulan**

Berdasarkan penelitian yang telah dilakukan, dapat diambil beberapa kesimpulan sebagai berikut:

1. Algoritma *Weiszfeld* dapat diinterpretasikan titik median geometris dari data lokasi yang diinginkan terutama untuk kasus berbobot dan tanpa berbobot.
2. Titik median geometris pada kedua algortima Weiszfeld dipengaruhi oleh beberapa data yang merupakan pencilan, jumlah data yang dimiliki baik data tersebut berkumpulan di suatu daerah tertentu berdasarkan galat absolut.
3. Titik median geometris pada kasus berbobot dan tak berbobot dipengaruhi oleh nilai bobot masing-masing data, di mana semakin tinggi nilai bobot akan menjauhi titik data tersebut.
4. Validitas klaster dipengaruhi oleh dataset yang bising untuk jumlah titik median geometris tidak tunggal pada metode *probabilistic assignments* beserta orde  $q$ .

### **V.2 Saran**

Adapun saran oleh penulis untuk penelitian selanjutnya adalah sebagai berikut.

1. Lokasi titik median optimal berada di dalam laut, perlu dikembangkan cara penyesuaian supaya titik median optimal tidak jatuh ke laut.
2. Perbandingan metode pencarian titik median geometris tidak memeriksa keberadaan bola, maka diperlukan *Riemannian manifold* supaya mengecek apakah berada di dasar bumi atau tidak.
3. Perlu dikembangkan atau cari metode alternatif, hal ini dikarenakan metode tersebut terbatas sehingga ada kendala ketika dijalankan suatu program.

## DAFTAR PUSTAKA

- Aftab, K., Hartley, R., and Trumpf, J. (2014). Generalized Weiszfeld Algorithms for  $L_q$  Optimization. *IEEE*, 37(4):728 – 745. 6
- Beck, A. and Sabach, S. (2015). Weiszfeld's Method: Old and New Results. *Journal of Optimization Theory and Applications*, 164:1–40. 6
- Desgraupes, B. (2017). *Clustering Indices*. Lab Modal'X, Paris, France. 22
- Drezner, Z., Klamroth, K., Schöbel, A., and Wesolowsky, G. O. (2002). *The Weber Problem*, pages 1–36. Springer, Berlin, Germany. 5, 8
- Iyigun, C. and Ben-Israel, A. (2010). A Generalized Weiszfeld Method for the Multi-Facility Location Problem. *Operations Research Letters*, 38(3):207 – 214. 10
- Kalczynski, P. and Drezner, Z. (2024). Further Analysis of the Weber Problem. *Networks and Spatial Economics*.
- Kuhn, H. W. (1973). A note on Fermat's problem. *Mathematical Programming*, 4:98–107. 12, 20
- Lathief, M. F., Soesanti, I., and Permanasari, A. E. (2019). Combination of Fuzzy C-Means, Xie-Beni Index, and Backpropagation Neural Network for Better Forecasting Result. Technical Report DOI:10.5220/0009858200720077, Universitas Gadjah Mada, Yogyakarta, Indonesia. 22
- Mahmood, M. (2024). Hard Clustering Vs Soft Clustering in NLP. <https://medium.com/@mohamad.razzi.my/hard-clustering-vs-soft-clustering-in-nlp-da8f1f2ba2ec>. Accessed: 2025-12-06. 10
- Sur, S. (2024). COVID-19 Global Impact Tracker. <https://www.kaggle.com/datasets/shreyasur965/covid-19-global-impact-tracker>. Accessed: 2024-11-25. 23
- Teboulle, M. (2007). A Unified Continuous Optimization Framework for Center-Based Clustering Methods. *Journal of Machine Learning*, 8:65–102. 14

## **LAMPIRAN**

# LAMPIRAN A

## ALGORITMA

### A.1 Algoritma Weiszfeld pada SFLP

---

**Algorithm 1:** Algoritma Weiszfeld dalam mencari median geometris

---

**Input :**  $points, \epsilon, k, iter$

**Output :**  $y$

Create an array  $points x_i$  from sample data,  $x_i \in \mathbb{R}^N$

$$u^{(0)} \leftarrow \sum_{i=1}^k x_i / k$$

**for**  $t: 1$  to  $iter$  **do**

$$y^{(t)} \leftarrow u^{(t-1)}$$

**for**  $i: 1$  to  $k$  **do**

$$d_i^{(t)} \leftarrow ||y^{(t)} - x_i||$$

**if**  $d_i^{(t)} \neq 0$  **then**

$$w_i^{(t)} \leftarrow 1/d_i^{(t)}$$

**else**

$$w_i^{(t)} \leftarrow 0$$

**end**

**end**

$$u^{(t)} \leftarrow \sum_{n=1}^k w_i^{(t)} x_i / \sum_{n=1}^k w_i^{(t)}$$

**if**  $||u^{(t)} - u^{(t-1)}|| < \epsilon$  **then**

**Stop, return**  $u^{(t)}$

**end**

$$u^{(t)} \leftarrow y^{(t)}$$

**end**

---

## A.2 Algoritma $L_q$ Weiszfeld pada SFLP

---

**Algorithm 2:** Algoritma  $L_q$  Weiszfeld dalam mencari median geometris

---

**Input :**  $points, \epsilon, k, iter$

**Output :**  $y$

Create an array  $points$   $x_i$  from sample data,  $x_i \in \mathbb{R}^N$

$$u^{(0)} \leftarrow \sum_{i=1}^k x_i / k$$

**for**  $t: 1$  to  $iter$  **do**

$$y^{(t)} \leftarrow u^{(t-1)}$$

**for**  $i: 1$  to  $k$  **do**

$$d_i^{(t)} \leftarrow ||y^{(t)} - x_i||^q$$

**if**  $d_i^{(t)} \neq 0$  **then**

$$| w_i^{(t)} \leftarrow d_i^{(t)q-3}$$

**else**

$$| w_i^{(t)} \leftarrow 0$$

**end**

**end**

$$u^{(t)} \leftarrow \sum_{n=1}^k w_i^{(t)} x_i / \sum_{n=1}^k w_i^{(t)}$$

**if**  $||u^{(t)} - u^{(t-1)}||^q < \epsilon$  **then**

| Stop, return  $u^{(t)}$

**end**

$$u^{(t)} \leftarrow y^{(t)}$$

**end**

---

### A.3 Algoritma Weiszfeld untuk kasus berbobot (Masalah Weber)

---

**Algorithm 3:** Algoritma  $L_q$  Weiszfeld dalam mencari median geometris

---

**Input :**  $points, \epsilon, n, w_i, max\_iter$

**Output :**  $x', y'$

Create an array  $points$   $(x_i, y_i)$  with  $w_i$  from sample data,  $(x_i, y_i) \in \mathbb{R}^2$

$$x' \leftarrow \sum_{i=1}^n w_i x_i / \sum_{i=1}^n w_i$$

$$y' \leftarrow \sum_{i=1}^n w_i y_i / \sum_{i=1}^n w_i$$

$$t = 0$$

**while**  $t < max\_iter$  **do**

**for**  $i: 1$  to  $n$  **do**

$$| \quad d_i^{(t)} \leftarrow \sqrt{(x' - x_i)^2 + (y' - y_i)^2}$$

**end**

**if**  $d_i^{(t)} \neq 0$  **then**

$$| \quad \hat{w}_i^{(t)} \leftarrow w_i / d_i^{(t)}$$

$$| \quad \hat{x}^{(t)} \leftarrow \sum_{i=1}^n \hat{w}_i^{(t)} x_i / \sum_{i=1}^n \hat{w}_i^{(t)}$$

$$| \quad \hat{y}^{(t)} \leftarrow \sum_{i=1}^n \hat{w}_i^{(t)} y_i / \sum_{i=1}^n \hat{w}_i^{(t)}$$

**else**

$$| \quad \hat{x}^{(t)} \leftarrow x_i$$

$$| \quad \hat{y}^{(t)} \leftarrow y_i$$

**end**

**if**  $\sqrt{(\hat{x}^{(t)} - x')^2 + (\hat{y}^{(t)} - y')^2} \geq \epsilon$  **then**

$$| \quad x' \leftarrow \hat{x}^{(t)}$$

$$| \quad y' \leftarrow \hat{y}^{(t)}$$

**else**

**Stop, return**  $\hat{x}^{(t)}, \hat{y}^{(t)}$

**end**

$$| \quad t \leftarrow t + 1$$

**end**

---

## A.4 Algoritma Weiszfeld pada MFLP (*hard clustering*)

---

**Algorithm 4:** Algoritma Weiszfeld pada MFLP (*hard clustering*)

---

**Input:** array  $points \mathbf{X} = \{\mathbf{x}_i\}$  with  $\omega_i$  in  $\mathbb{R}^2$ ,  $\epsilon$ , array  $initial\_centroids$  in  $\mathbb{R}^2$ ,  
 $max\_iter$

**Output:**  $centroids, assignments$

$K \leftarrow \text{length}(initial\_centroids)$

$N \leftarrow \text{length}(points)$

$centroids \leftarrow \text{copy}(initial\_centroids)$

$converged \leftarrow \text{False}$

**for**  $iteration : 1$  **to**  $max\_iter$  **do**

**for**  $i : 1$  **to**  $N$  **do**

**for**  $k : 1$  **to**  $K$  **do**

$d_k^{(i)} \leftarrow \|\mathbf{x}_i - \mathbf{c}_k\|$

**end**

$I_i^* \leftarrow \arg \min_k (d_k^{(i)})$

**end**

$\mathcal{I} \leftarrow \{I_i^*\}$

**for**  $k : 1$  **to**  $K$  **do**

**for**  $j : 1$  **to**  $\|I_k^*\|$  **do**

$f_j^{(k)} \leftarrow \omega_j / \|\mathbf{x}_j - \mathbf{c}_k\|$

**end**

$s_k \leftarrow \sum_j f_j^{(k)}$

**if**  $\mathbf{c}_k \notin I_k^*$  **then**

$\mathbf{c}'_k \leftarrow \sum_j f_j^{(k)} \mathbf{x}_j / s_k$

**else**

$R^{(j)} \leftarrow \sum_{j \neq i} \omega_j (\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i) / \|\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i\|$

$\mathbf{c}'_k \leftarrow \max\{0, \|R^{(j)}\| - \omega_j\} \frac{R^{(j)}}{\|R^{(j)}\|}$

**end**

**end**

$d(\mathbf{c}_k, \mathbf{c}'_k) \leftarrow \|\mathbf{c}_k - \mathbf{c}'_k\|$

**if**  $d(\mathbf{c}_k, \mathbf{c}'_k) < \epsilon$  **then**

**Stop**,  $converged \leftarrow \text{True}$

**else**

$\mathbf{c}_k \leftarrow \mathbf{c}'_k$

**end**

**end**

---

## A.5 Algoritma $L_q$ Weiszfeld pada MFLP (*hard clustering*)

---

**Algorithm 5:** Algoritma  $L_q$  Weiszfeld pada MFLP (*hard clustering*)

---

**Input:** array *points*  $\mathbf{X} = \{\mathbf{x}_i\}$  with  $\omega_i$  in  $\mathbb{R}^2$ ,  $\epsilon$ , array *initial\_centroids* in  $\mathbb{R}^2$ , *max\_iter*, q

**Output:** *centroids, assignments*

$K \leftarrow \text{length}(\text{initial\_centroids})$

$N \leftarrow \text{length}(\text{points})$

*centroids*  $\leftarrow \text{copy}(\text{initial\_centroids})$

*converged*  $\leftarrow \text{False}$

**for** *iteration* : 1 **to** *max\_iter* **do**

**for** *i* : 1 **to** *N* **do**

**for** *k* : 1 **to** *K* **do**

$| d_k^{(i)} \leftarrow \|\mathbf{x}_i - \mathbf{c}_k\|^q$

**end**

$I_i^* \leftarrow \arg \min_k (d_k^{(i)})$

**end**

$\mathcal{I} \leftarrow \{I_i^*\}$

**for** *k*: 1 **to** *K* **do**

**for** *j*: 1 **to**  $\|I_k^*\|$  **do**

$| f_j^{(k)} \leftarrow \omega_j / \|\mathbf{x}_j - \mathbf{c}_k\|^q$

**end**

$s_k \leftarrow \sum_j f_j^{(k)}$

**if**  $\mathbf{c}_k \notin I_k^*$  **then**

$| \mathbf{c}'_k \leftarrow \sum_j f_j^{(k)} \mathbf{x}_j / s_k$

**else**

$| R^{(j)} \leftarrow \sum_{j \neq i} \omega_j (\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i) / \|\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i\|^q$

$| \mathbf{c}'_k \leftarrow \max\{0, \|R^{(j)}\|^q - \omega_j\} \frac{R^{(j)}}{\|R^{(j)}\|^q}$

**end**

**end**

$d(\mathbf{c}_k, \mathbf{c}'_k) \leftarrow \|\mathbf{c}_k - \mathbf{c}'_k\|^q$

**if**  $d(\mathbf{c}_k, \mathbf{c}'_k) < \epsilon$  **then**

**Stop**, *converged*  $\leftarrow \text{True}$

**else**

$| \mathbf{c}_k \leftarrow \mathbf{c}'_k$

**end**

**end**

---

## A.6 Algoritma Weiszfeld pada MFLP (*probabilistic assignments*)

---

**Algorithm 6:** Algoritma Weiszfeld pada MFLP (*probabilistic assignments*)

---

**Input:** array  $points \mathbf{X} = \{\mathbf{x}_i\}$  with  $\omega_i$  in  $\mathbb{R}^2$ ,  $\epsilon$ , array  $initial\_centroids$  in  $\mathbb{R}^2$ ,  
 $max\_iter$

**Output:**  $centroids, assignments$

$K \leftarrow \text{length}(initial\_centroids)$ ;  $N \leftarrow \text{length}(points)$   
 $centroids \leftarrow \text{copy}(initial\_centroids)$ ;  $converged \leftarrow \text{False}$

**for**  $iteration : 1$  **to**  $max\_iter$  **do**

**for**  $i : 1$  **to**  $N$  **do**

**for**  $k : 1$  **to**  $K$  **do**

$| d_k^{(i)} \leftarrow \|\mathbf{x}_i - \mathbf{c}_k\|$

**end**

**for**  $k : 1$  **to**  $K$  **do**

$| p_k^{(i)} = \prod_{j \neq k} d_j^{(i)} / \sum_{m=1}^K \prod_{j \neq m} d_j^{(i)}$

**end**

$| I_i^* \leftarrow \arg \min_k (p_k^{(i)})$

**end**

**for**  $k : 1$  **to**  $K$  **do**

**for**  $j : 1$  **to**  $\|I_k^*\|$  **do**

$| f_j^{(k)} \leftarrow (p_k^{(i)})^2 \omega_j / \|\mathbf{x}_j - \mathbf{c}_k\|$

**end**

$| s_k \leftarrow \sum_j f_j^{(k)}$

**if**  $\mathbf{c}_k \notin I_k^*$  **then**

$| \mathbf{c}'_k \leftarrow \sum_j (p_k^{(i)})^2 f_j^{(k)} \mathbf{x}_j / s_k$

**else**

$| R^{(j)} \leftarrow \sum_{j \neq i} \omega_j (\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i) / \|\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i\|$

$| \mathbf{c}'_k \leftarrow \max\{0, \|R^{(j)}\| - \omega_j\} \frac{R^{(j)}}{\|R^{(j)}\|}$

**end**

**end**

$| d(\mathbf{c}_k, \mathbf{c}'_k) \leftarrow \|\mathbf{c}_k - \mathbf{c}'_k\|$

**if**  $d(\mathbf{c}_k, \mathbf{c}'_k) < \epsilon$  **then**

**Stop**,  $converged \leftarrow True$

**else**

$| \mathbf{c}_k \leftarrow \mathbf{c}'_k$

**end**

**end**

---

## A.7 Algoritma $L_q$ Weiszfeld pada MFLP (*probabilistic assignments*)

---

**Algorithm 7:** Algoritma  $L_q$  Weiszfeld pada MFLP (*probabilistic assignments*)

---

**Input:** array *points*  $\mathbf{X} = \{\mathbf{x}_i\}$  with  $\omega_i$  in  $\mathbb{R}^2$ ,  $\epsilon$ , array *initial\_centroids* in  $\mathbb{R}^2$ , *max\_iter*

**Output:** *centroids, assignments*

$K \leftarrow \text{length}(\text{initial\_centroids})$ ;  $N \leftarrow \text{length}(\text{points})$

*centroids*  $\leftarrow \text{copy}(\text{initial\_centroids})$ ; *converged*  $\leftarrow \text{False}$

**for** *iteration* : 1 **to** *max\_iter* **do**

**for** *i* : 1 **to** *N* **do**

**for** *k* : 1 **to** *K* **do**

$d_k^{(i)} \leftarrow \|\mathbf{x}_i - \mathbf{c}_k\|^q$

**end**

**for** *k* : 1 **to** *K* **do**

$p_k^{(i)} = \prod_{j \neq k} d_j^{(i)} / \sum_{m=1}^K \prod_{j \neq m} d_j^{(i)}$

**end**

$I_i^* \leftarrow \arg \min_k (p_k^{(i)})$

**end**

**for** *k*: 1 **to** *K* **do**

**for** *j*: 1 **to**  $\|I_k^*\|$  **do**

$f_j^{(k)} \leftarrow (p_k^{(i)})^2 \omega_j / \|\mathbf{x}_j - \mathbf{c}_k\|^q$

**end**

$s_k \leftarrow \sum_j f_j^{(k)}$

**if**  $\mathbf{c}_k \notin I_k^*$  **then**

$\mathbf{c}'_k \leftarrow \sum_j (p_k^{(i)})^2 f_j^{(k)} \mathbf{x}_j / s_k$

**else**

$R^{(j)} \leftarrow \sum_{j \neq i} \omega_j (\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i) / \|\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i\|^q$

$\mathbf{c}'_k \leftarrow \max\{0, \|R^{(j)}\|^q - \omega_j\} \frac{R^{(j)}}{\|R^{(j)}\|^q}$

**end**

**end**

$d(\mathbf{c}_k, \mathbf{c}'_k) \leftarrow \|\mathbf{c}_k - \mathbf{c}'_k\|^q$

**if**  $d(\mathbf{c}_k, \mathbf{c}'_k) < \epsilon$  **then**

**Stop**, *converged*  $\leftarrow \text{True}$

**else**

$\mathbf{c}_k \leftarrow \mathbf{c}'_k$

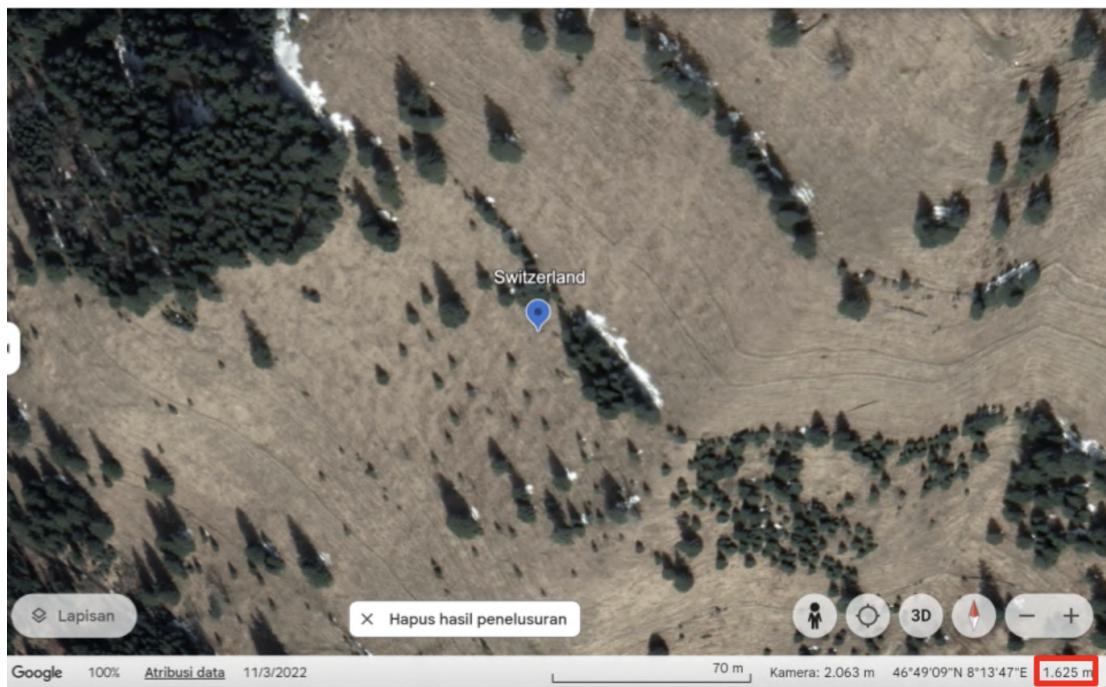
**end**

**end**

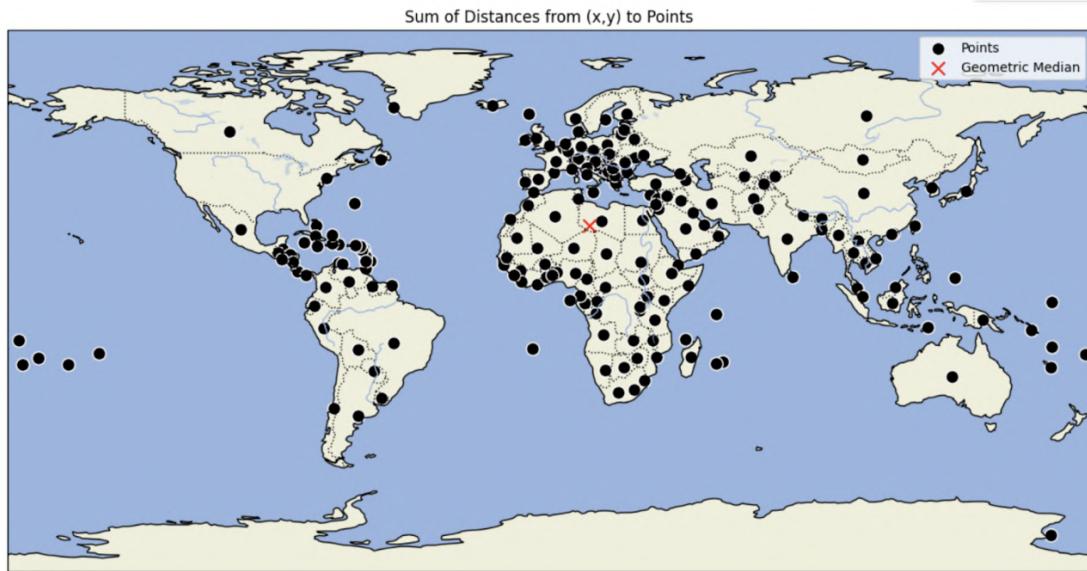
---

## LAMPIRAN B

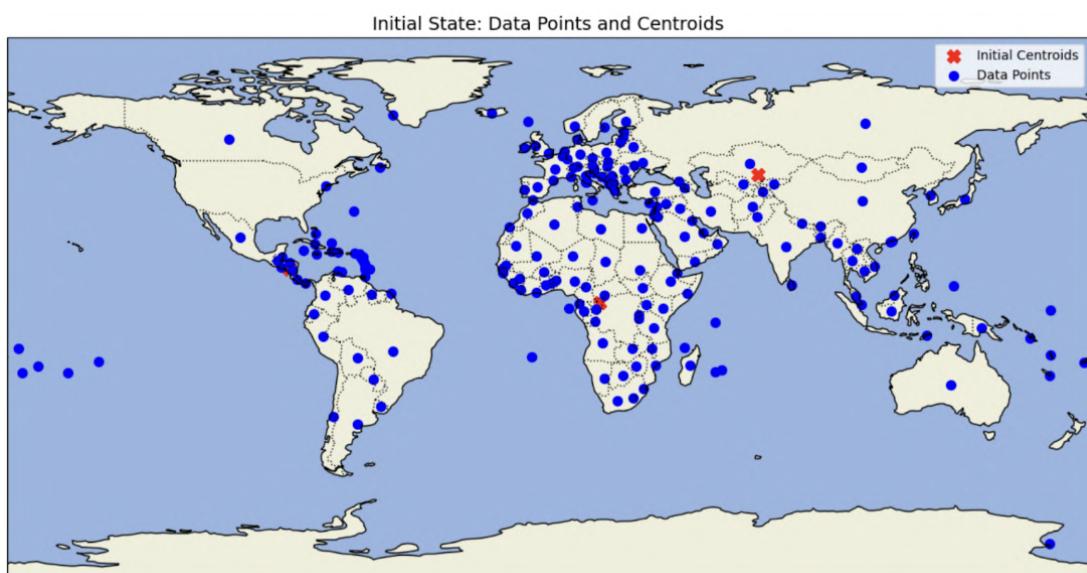
### GAMBAR-GAMBAR



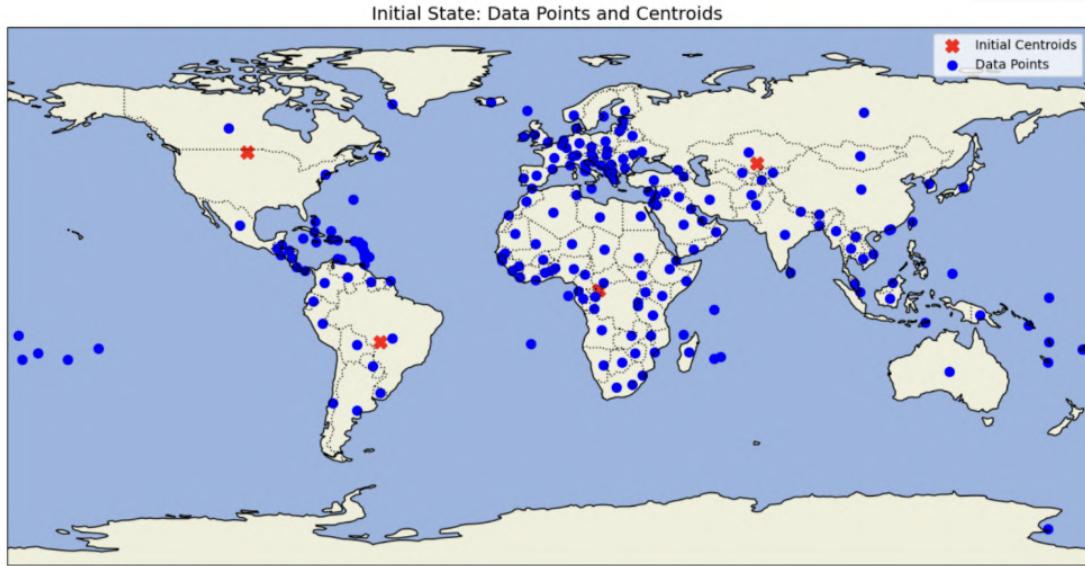
**Gambar B.1:** Pencarian ketinggian dengan menggunakan Google Earth yang ditandai kotak merah di pojok kanan bawah.



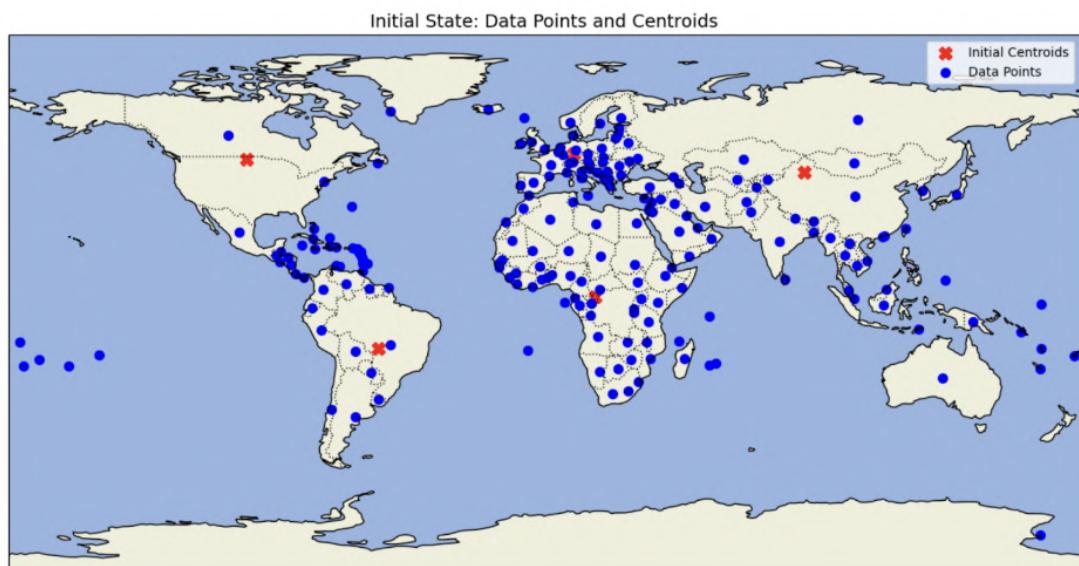
**Gambar B.2:** Algoritma Weiszfeld pada titik median  $K = 1$ .



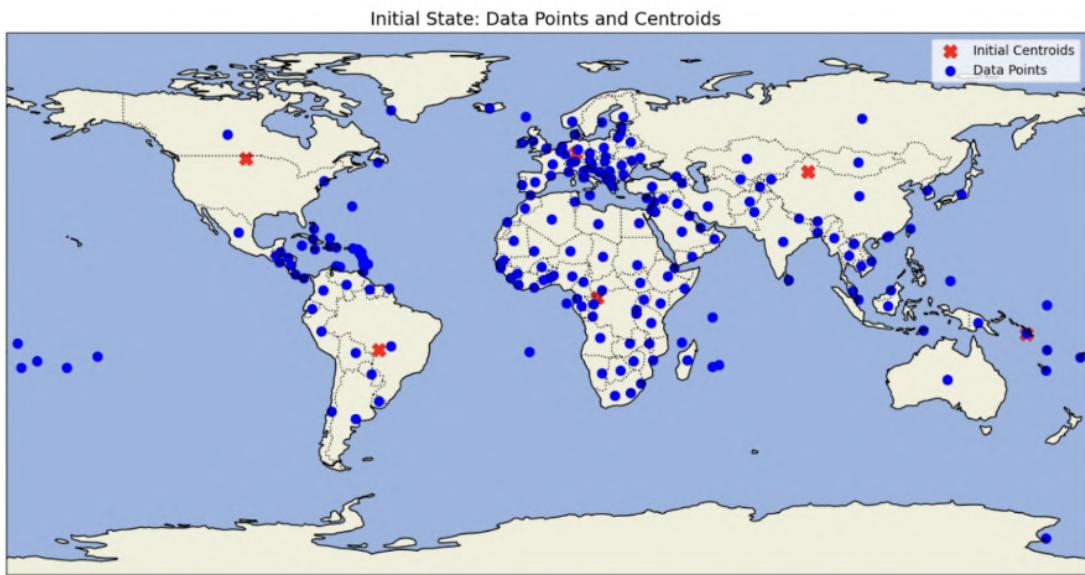
**Gambar B.3:** Plot awal untuk jumlah klaster  $K = 3$



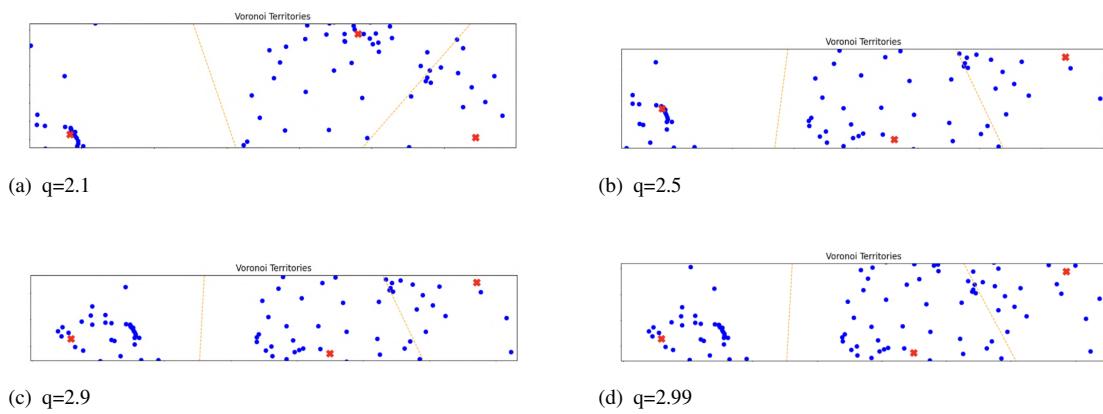
**Gambar B.4:** Plot awal untuk jumlah klaster  $K = 4$



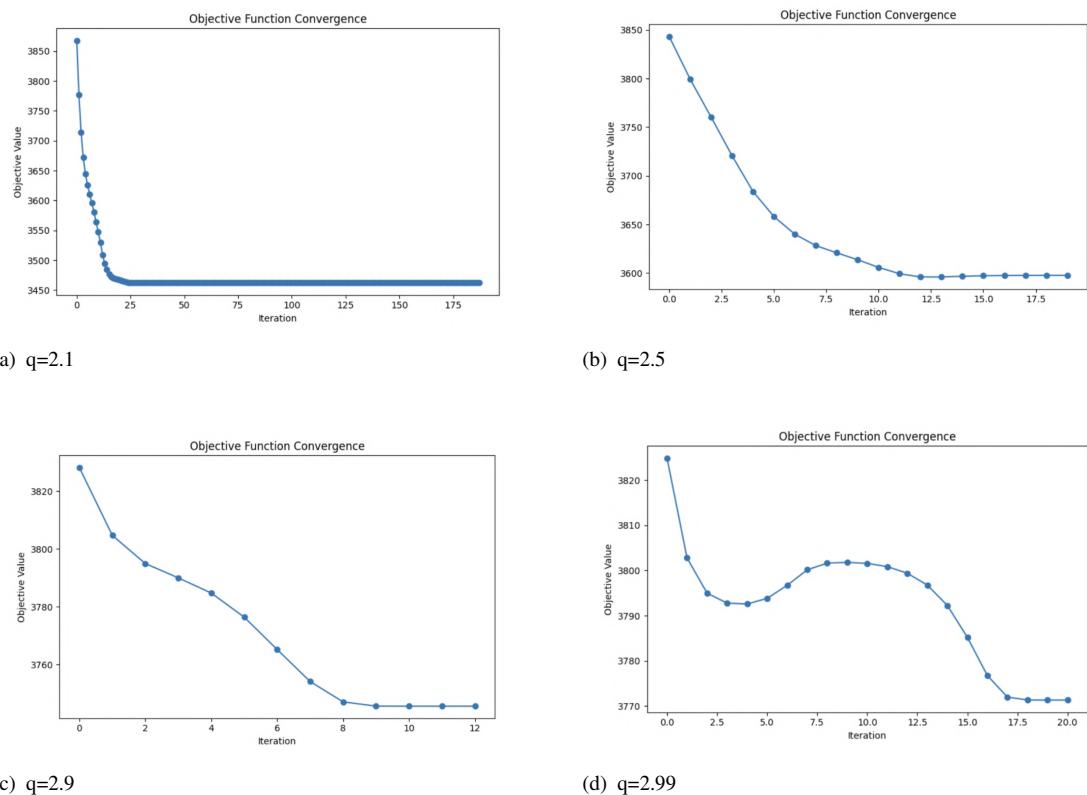
**Gambar B.5:** Plot awal untuk jumlah klaster  $K = 5$



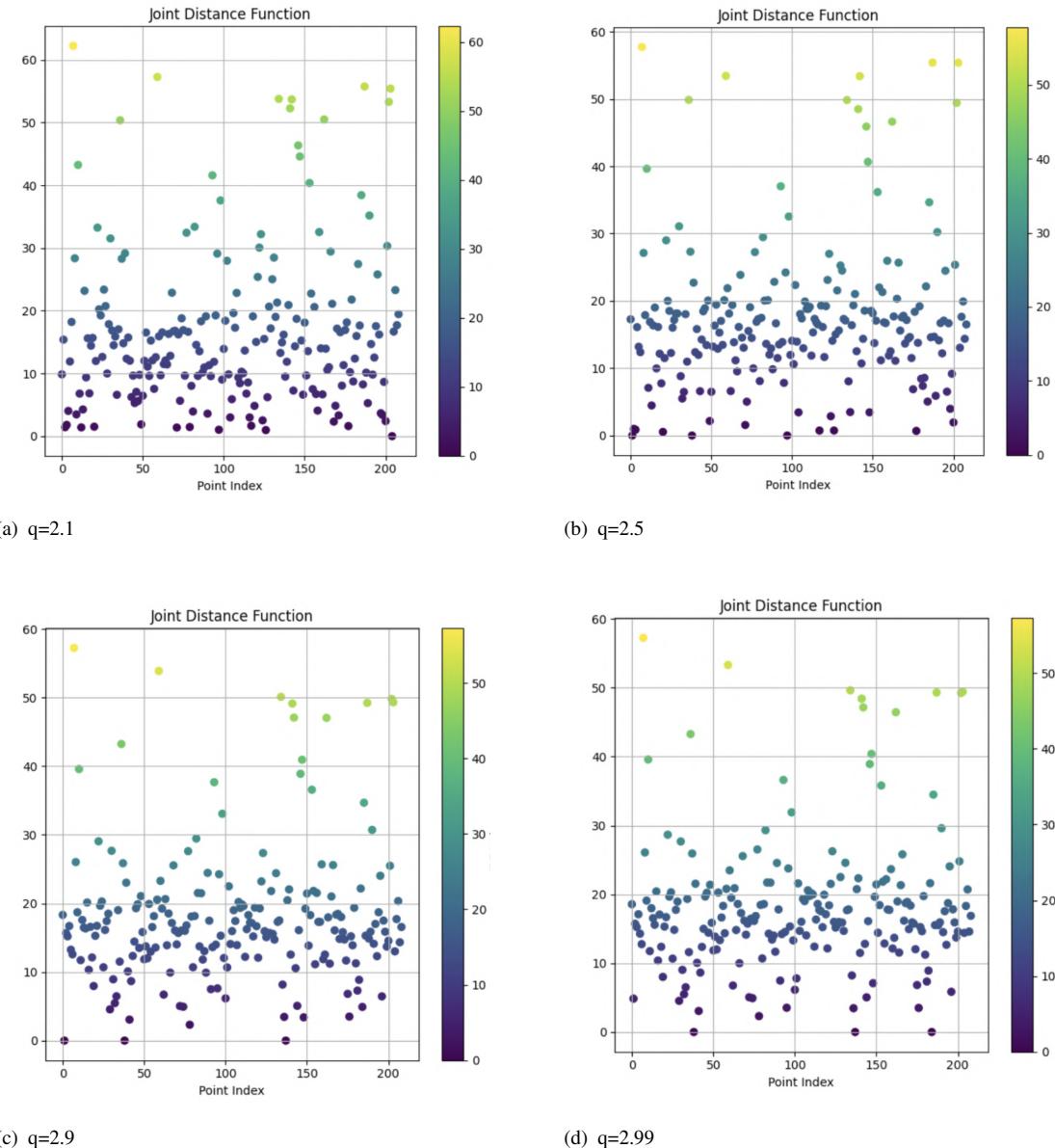
**Gambar B.6:** Plot awal untuk jumlah klaster  $K = 6$



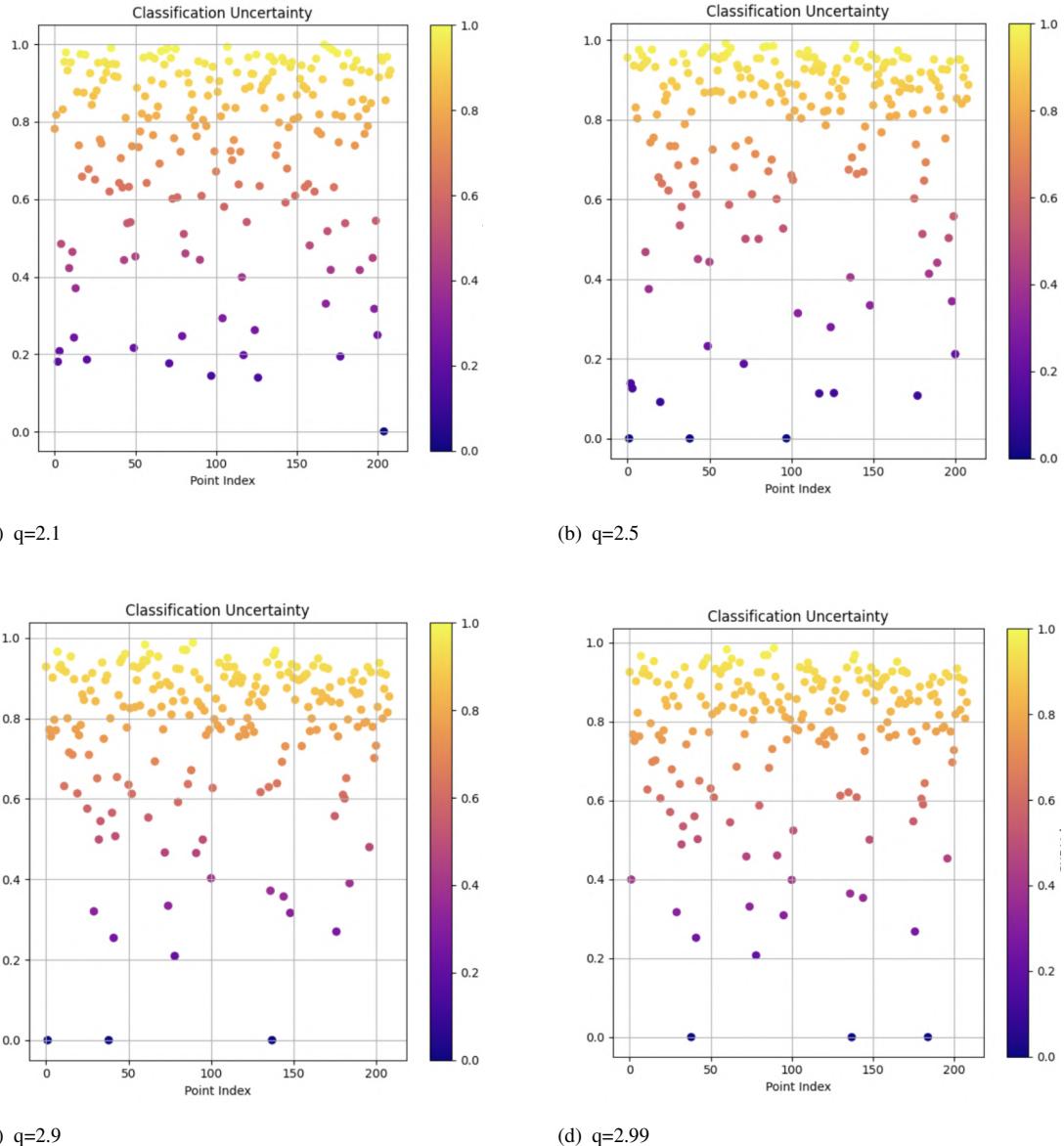
**Gambar B.7:** Plot diagram *Voronoi* pada algoritma  $L_q$  Weiszfeld untuk  $K = 3$



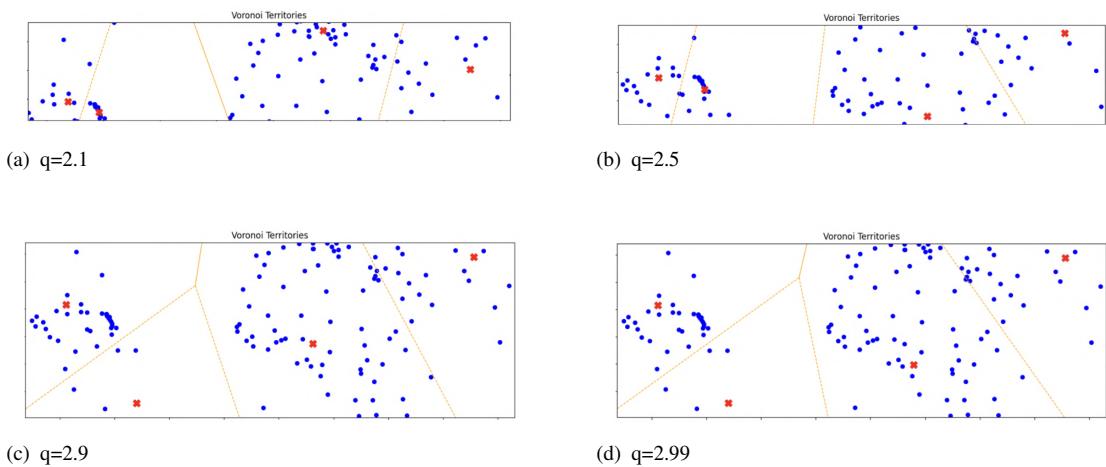
**Gambar B.8:** Plot grafik fungsi objektif pada algoritma  $L_q$  Weiszfeld untuk  $K = 3$



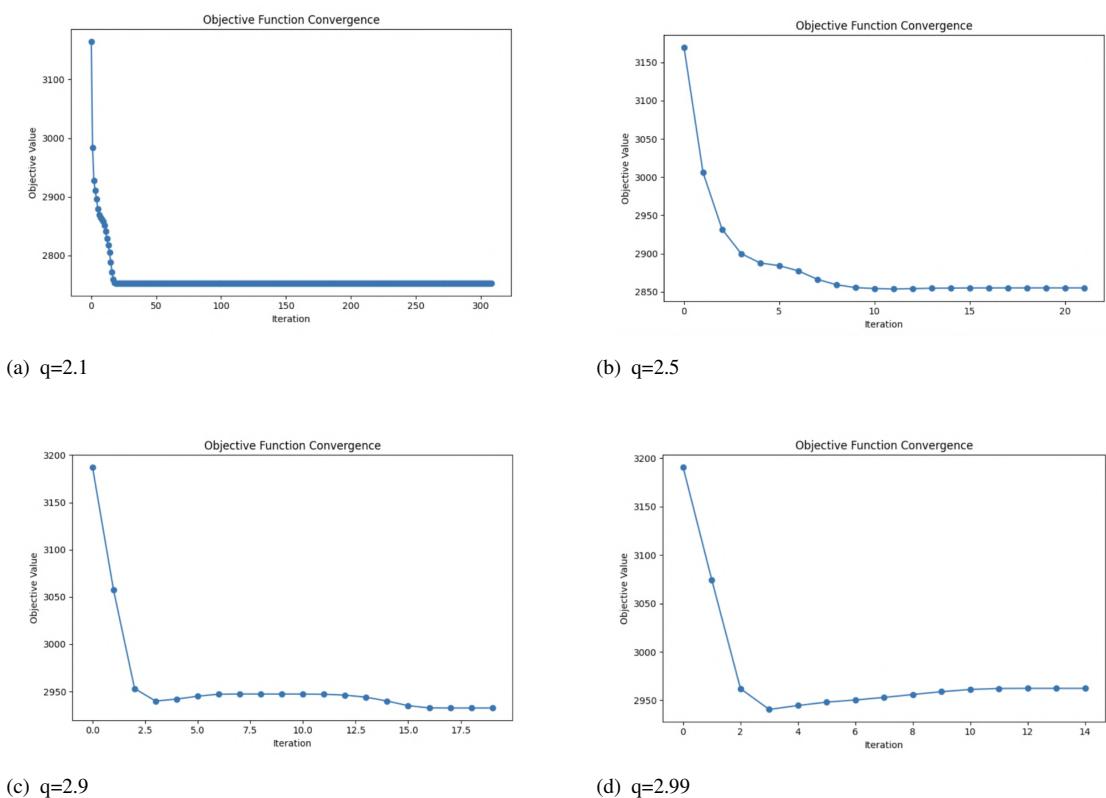
**Gambar B.9:** Plot JDF pada algoritma  $L_q$  Weiszfeld untuk  $K = 3$



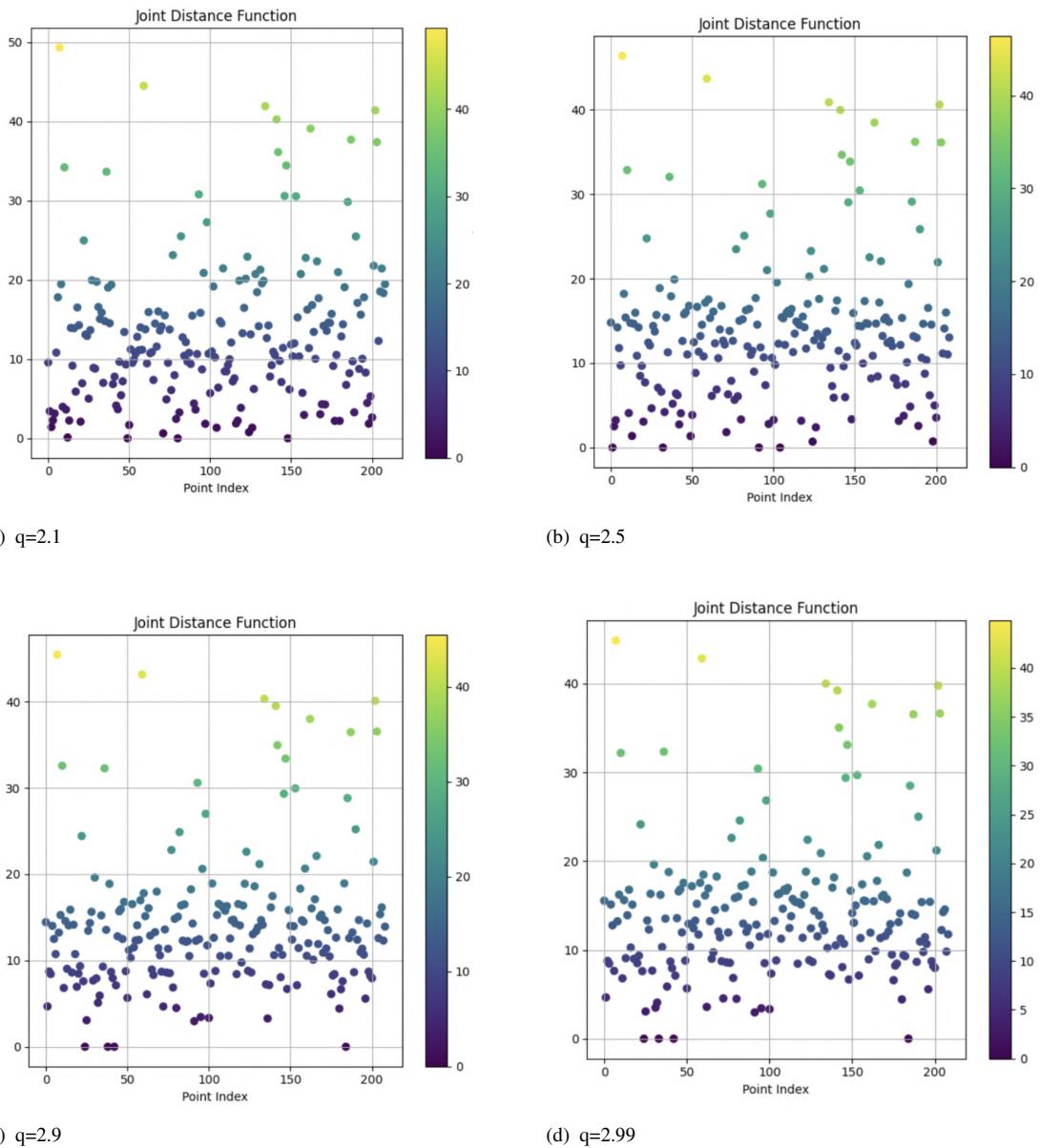
**Gambar B.10:** Plot CUF pada algoritma  $L_q$  Weiszfeld untuk  $K = 3$



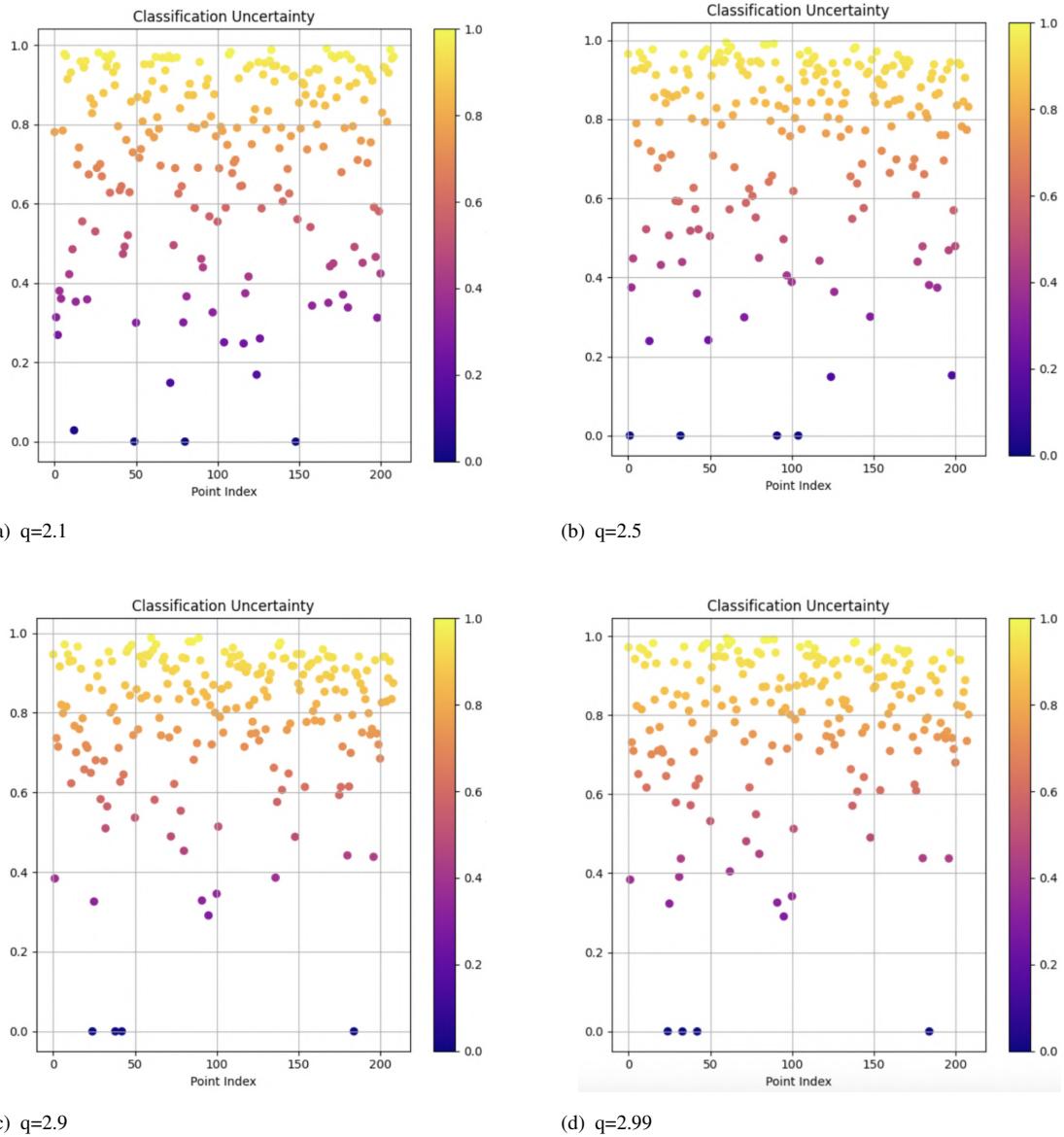
**Gambar B.11:** Plot diagram Voronoi pada algoritma  $L_q$  Weiszfeld untuk  $K = 4$



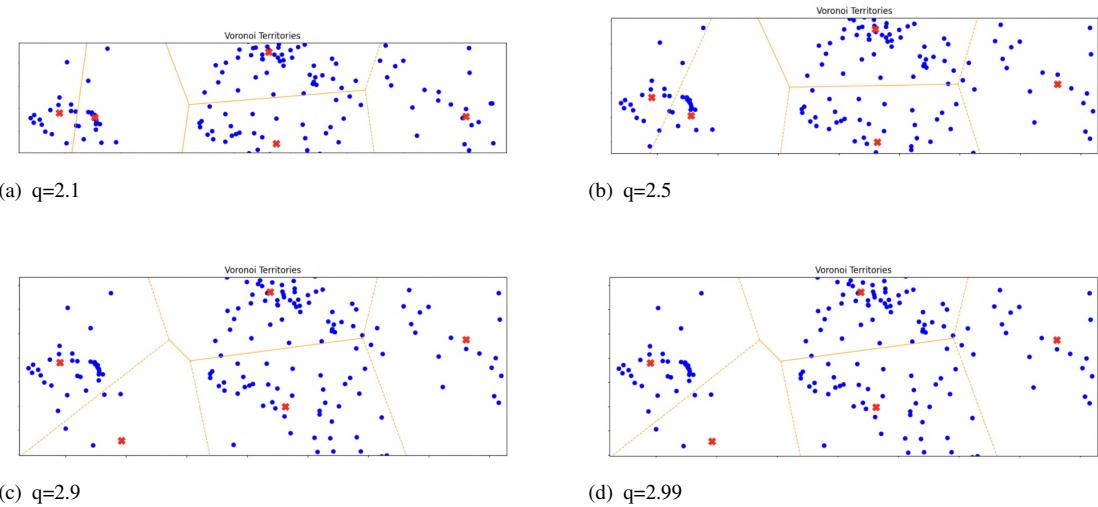
**Gambar B.12:** Plot grafik fungsi objektif pada algoritma  $L_q$  Weiszfeld untuk  $K = 4$



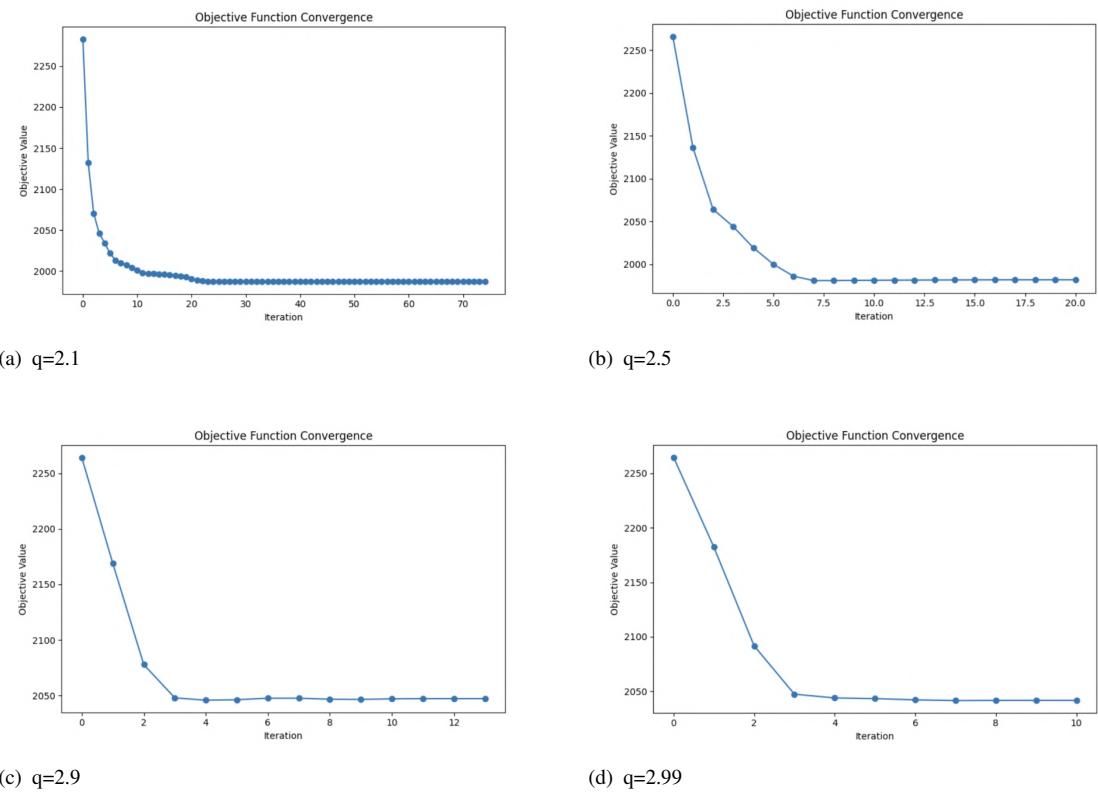
**Gambar B.13:** Plot JDF pada algoritma  $L_q$  Weiszfeld untuk  $K = 4$



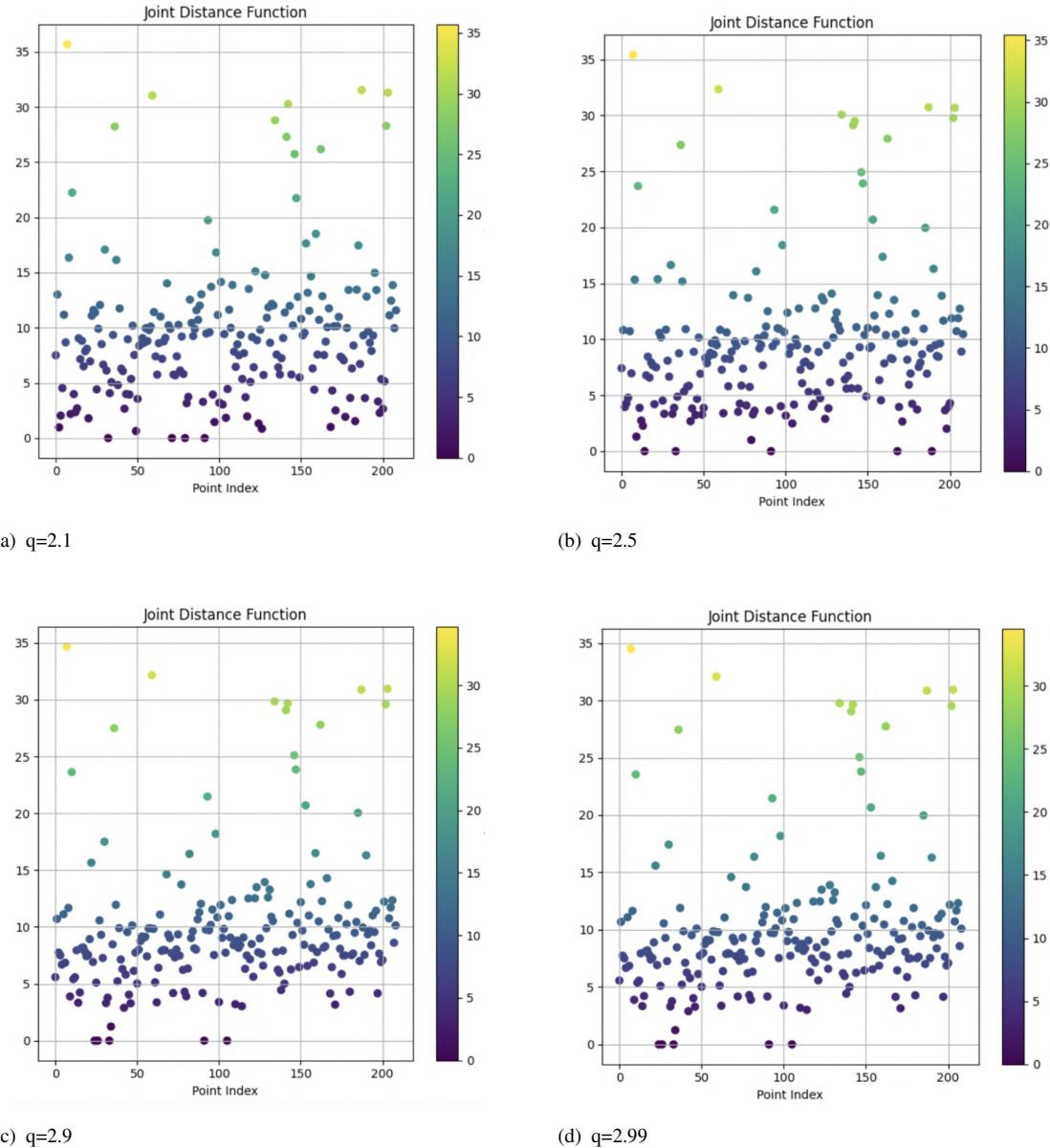
**Gambar B.14:** Plot CUF pada algoritma  $L_q$  Weiszfeld untuk  $K = 4$



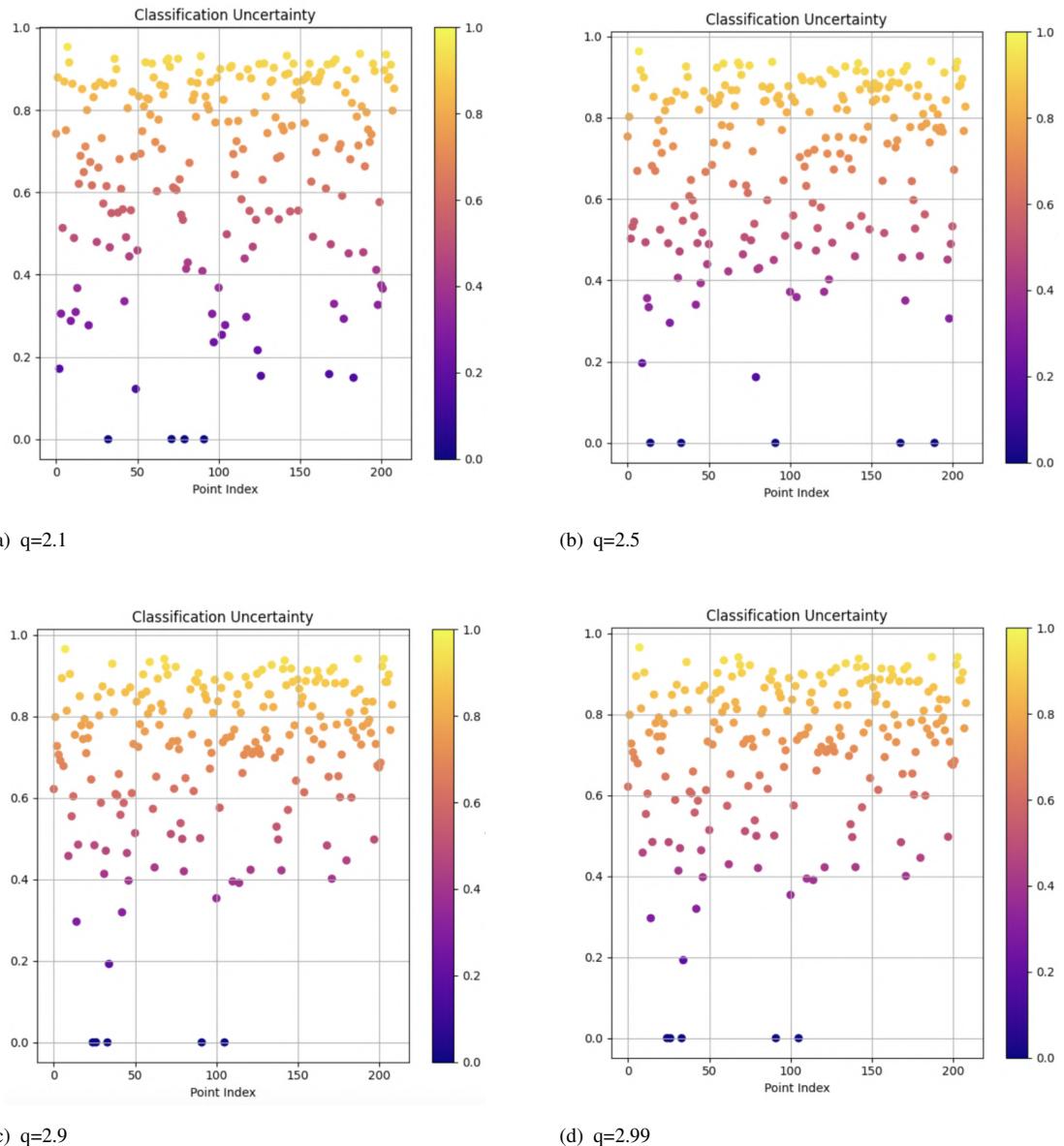
**Gambar B.15:** Plot diagram *Voronoi* pada algoritma  $L_q$  Weiszfeld untuk  $K = 5$



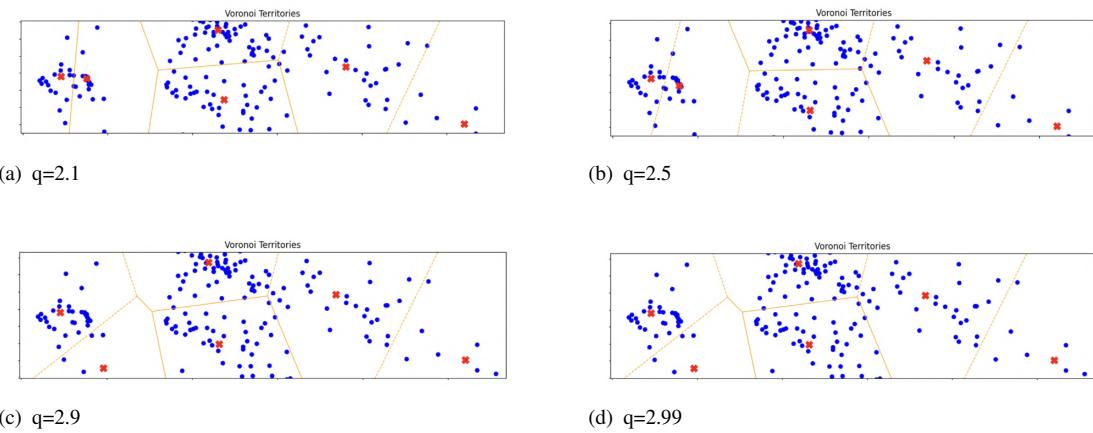
**Gambar B.16:** Plot grafik fungsi objektif pada algoritma  $L_q$  Weiszfeld untuk  $K = 5$



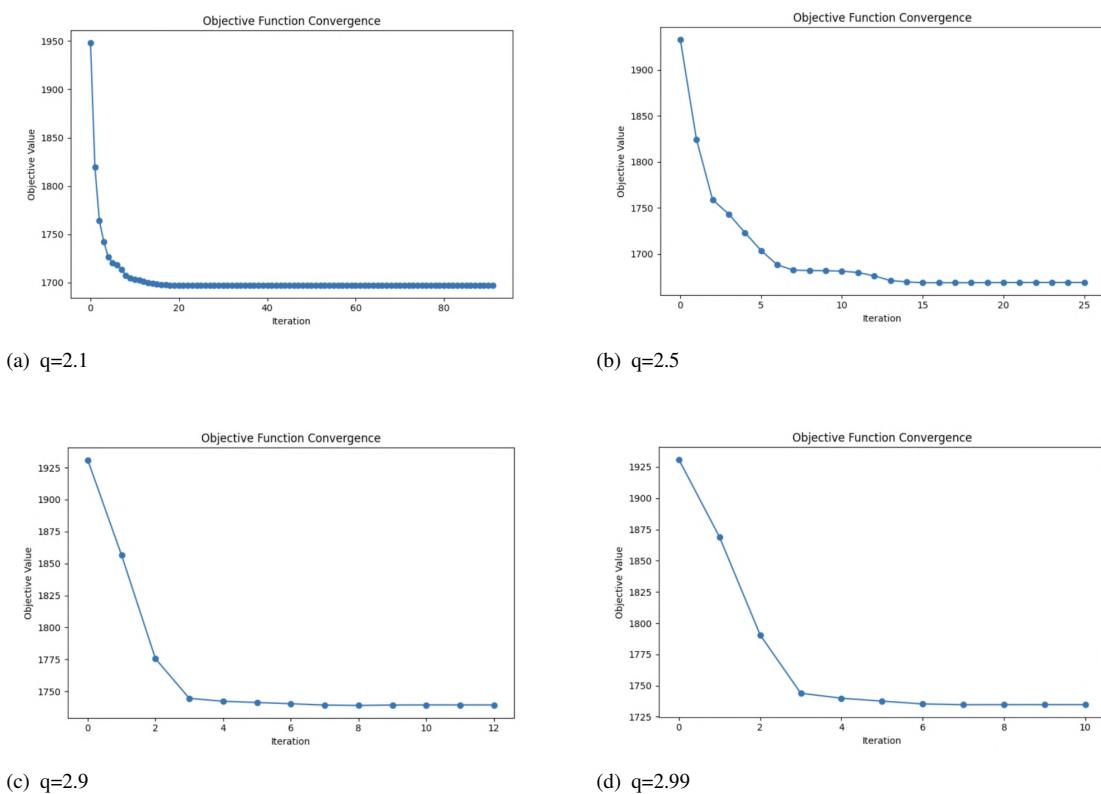
**Gambar B.17:** Plot JDF pada algoritma  $L_q$  Weiszfeld untuk  $K = 5$



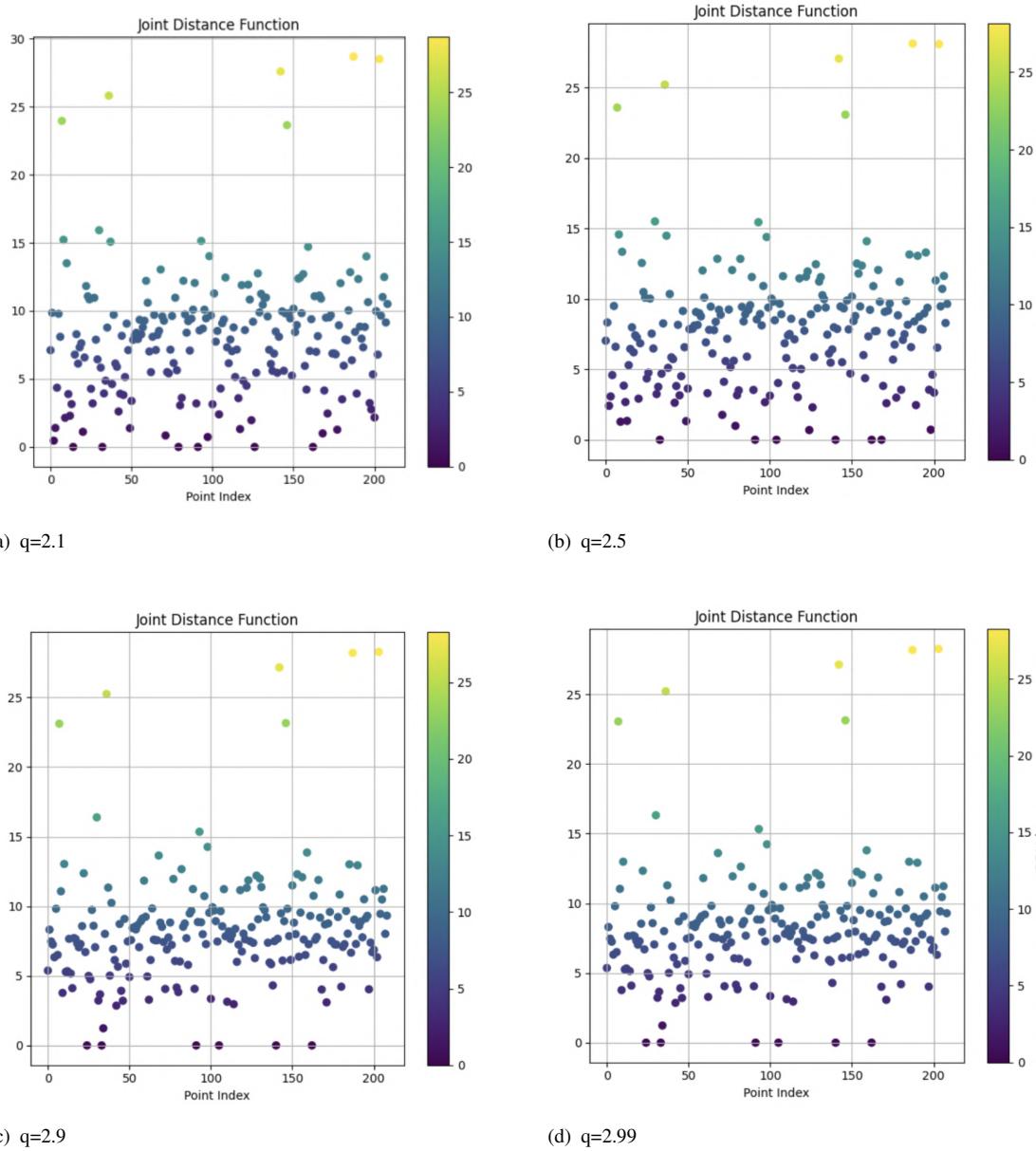
**Gambar B.18:** Plot CUF pada algoritma  $L_q$  Weiszfeld untuk  $K = 5$



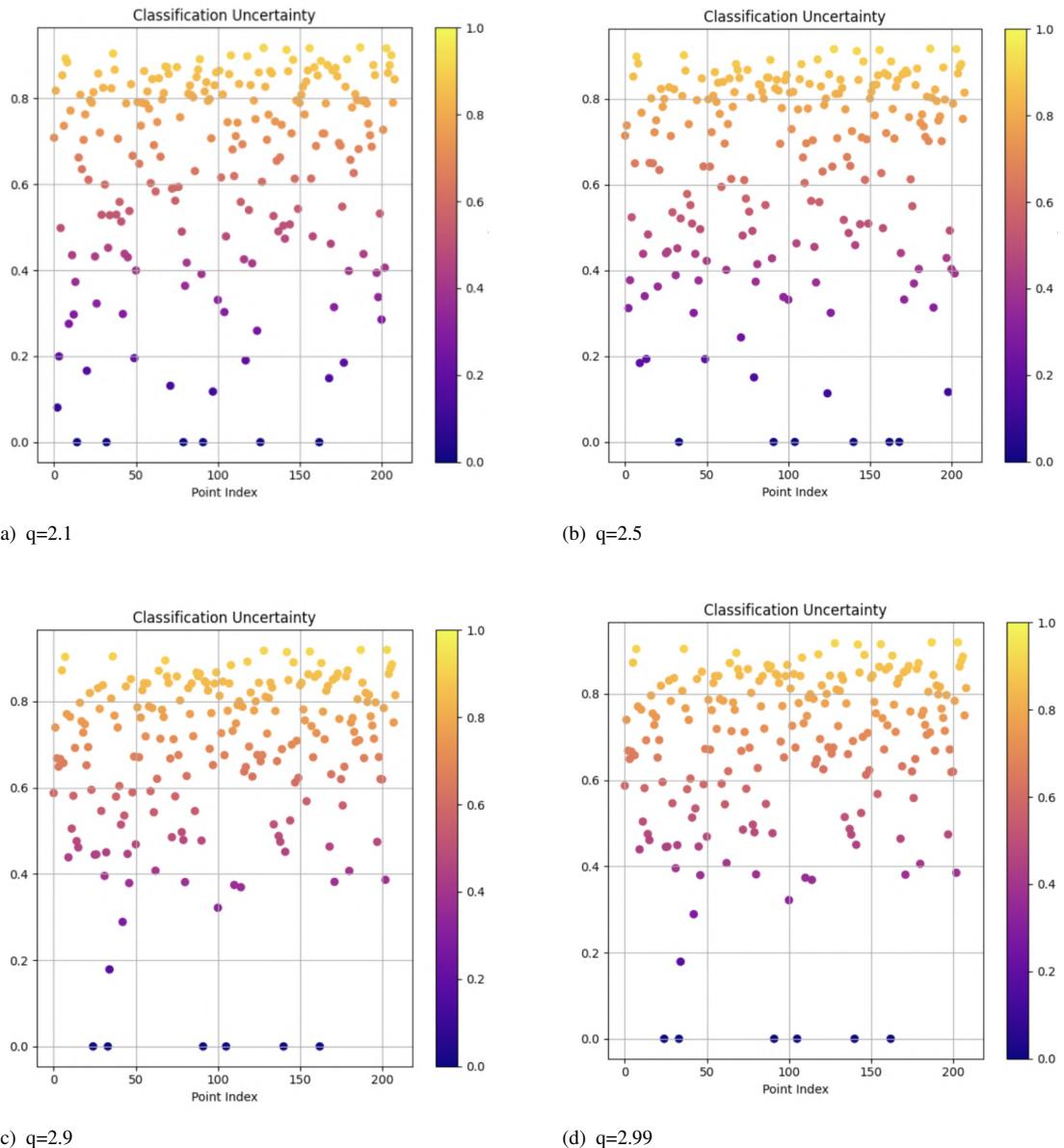
**Gambar B.19:** Plot diagram *Voronoi* pada algoritma  $L_q$  Weiszfeld untuk  $K = 6$



**Gambar B.20:** Plot grafik fungsi objektif pada algoritma  $L_q$  Weiszfeld untuk  $K = 6$



**Gambar B.21:** Plot JDF pada algoritma  $L_q$  Weiszfeld untuk  $K = 6$



**Gambar B.22:** Plot CUF pada algoritma  $L_q$  Weiszfeld untuk  $K = 6$