[75.12] ANÁLISIS NUMÉRICO 1

TRABAJO PRÁCTICO 2

1ER CUATRIMESTRE 2021

Descomposición de señales mediante series de Fourier a través de resolución de problema de cuadrados mínimos

---

Curso 5 - Cátedra Sassano.
17 de junio de 2021

Resumen: Se proponen 5 ejercicios donde se resuelve la determinación de los coeficientes de la serie de Fourier de una señal cuadrada periódica a través de la técnica de cuadrados mínimos. Para ello se solicita implementar en Python3 el cálculo de los sistemas lineales que aparecen al plantear el problema utilizando los métodos de resolución estudiados en clase.

Instrucciones de entrega: Aplican las mismas que el TP1. En caso de no entregar un archivo IPYNB, se debe adjuntar un instructivo para reproducir exactamente los resultados presentados.

Fecha de entrega final: 21 de julio de 2021.

1. Forma general de la serie de Fourier de una señal cuadrada

- a) Defina matemáticamente la expresión de una señal cuadrada periódica de amplitud $\{1; -1\}$ volt, periodo T y *duty cycle* $D_c = 50\,\%$. El *duty cycle* se define como $D_c \triangleq \frac{\text{Duracion de la parte positiva de la señal}}{\text{Duracion total de la señal}} \cdot 100\,\%$.
- b) Muestre detalladamente el desarrollo de la descomposición en serie de Fourier. Exprese los coeficientes a_k y b_k como números reales y defina el rango del índice k adecuadamente.
- c) En términos numéricos, por qué cree que es mejor utilizar una representación en serie de Fourier en vez de la señal cuadrada?

2. Determinación de coeficientes de Fourier por ajuste de funciones

La señal cuadrada se puede expresar como una serie de Fourier de la siguiente manera

$$x(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} a_k \cdot \sin(k\,\omega_0\,t) + \sum_{k=1}^{+\infty} b_k \cdot \cos(k\,\omega_0\,t) \quad \text{con} \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{T} \tag{2.1}$$

Dado que no es posible evaluar los infinitos términos de la descomposición, se requiere encontrar los coeficientes de la serie de Fourier utilizando una aproximación por cuadrados mínimos. Se solicita:

- a) si la cantidad máxima de términos a computar es k_{max}, determine la expresión de la función de ajuste $s(t)$ a utilizar.
- b) desarrolle y detalle el procedimiento que lleva a la formulación de las ecuaciones normales para resolver el problema de cuadrados mínimos planteado.
- c) dado que se tiene un problema de aproximación, exprese matemáticamente la relación que debe cumplir la cantidad de muestras a tomar de la función a aproximar.
- d) muestre la forma que debe tener el sistema a resolver y la función $s(t)$ para $k_{max} = 1, 3, 144$.

3. Resolución mediante eliminación gaussiana con pivoteo parcial

- a) Describa en no más de 1 página el método de eliminación gaussiana con pivoteo parcial.
- b) Implementar en Python3 la resolución del sistema de ecuaciones planteado para un k_{max} genérico utilizando el método de Gauss con pivoteo parcial.
- c) Con el algoritmo implementado, calcular los coeficientes de Fourier para cada $k_{max} = \{1, 3, 13, 34, 55, 144\}$. Tome 432 muestras de la función cuadrada y un periodo de 1 ms. No hace falta mostrar los valores.
- d) Graficar 1000 muestras de un periodo de la señal cuadrada ideal superpuesta con las curvas obtenidas para cada k_{max} utilizando la serie de Fourier correspondiente.
- e) Cuántos valores de k cree que son necesarios para representar en forma exacta a la función cuadrada? Por qué?

4. Resolución mediante el método iterativo de Gauss-Seidel

- a) Describa en no más de 1 página el método iterativo de Gauss-Seidel.
- b) Implementar en Python3 la resolución del sistema de ecuaciones planteado para un k_{max} genérico utilizando el método de Gauss-Seidel.
- c) Con el algoritmo implementado, calcular los coeficientes de Fourier para cada $k_{max} = \{1, 3, 13, 34, 55, 144\}$. Tome 432 muestras de la función cuadrada y un periodo de 1 ms. No hace falta mostrar los valores. Utilice una tolerancia máxima relativa de 0,1 %, utilizando como medida de distancia la norma infinito. Detenga el algoritmo con un mensaje de error si la cantidad de iteraciones es mayor a 500. Respecto al vector solución inicial estimado, puede asumirlo como cero.
- d) Graficar 1000 muestras de un periodo de la señal cuadrada ideal superpuesta con las curvas obtenidas para cada k_{max} utilizando la serie de Fourier correspondiente.

5. Comparación entre métodos de solución utilizados

- a) Crear una tabla donde para cada k_{max} se calcule el error de coeficientes Δ obtenidos con los dos métodos programados. Para ello utilizar la siguiente propuesta de error: se definen $\mathbf{a_G} \in \mathbb{R}^{1\times 2k_{max}}$ y $\mathbf{b_G} \in \mathbb{R}^{1\times 2k_{max}}$ como los vectores con los coeficientes obtenidos utilizando la eliminación de Gauss con pivoteo parcial. De la misma manera, $\mathbf{a}_{GS} \in \mathbb{R}^{1\times 2k_{max}}$ y $\mathbf{b}_{GS} \in \mathbb{R}^{1\times 2k_{max}}$, son los vectores con los coeficientes obtenidos a través del método de Gauss-Seidel. Por lo tanto se definen los vectores $\mathbf{c}_G = [\mathbf{a}_G\ \mathbf{b}_G]$ y $\mathbf{c}_{GS} = [\mathbf{a}_{GS}\ \mathbf{b}_{GS}]$.

  Una forma útil de estudiar globalmente la diferencia entre los dos métodos es calculando $\Delta = \| \mathbf{c}_G - \mathbf{c}_{GS} \|$ para cada k_{max} elegido. O sea, se está computando la distancia entre las dos representaciones (algo asi como el "error").

- b) Para cada k_{max}, calcular el error cuadrático global al utilizar el método de Gauss-Seidel, definido como $\varepsilon = \| x - s \| = \sqrt{\sum_{j=1}^{m} \left[x(t_j) - s(t_j)\right]^2}$. Luego, graficar dichos errores en un gráfico ε vs k_{max}.

- c) Crear una tabla donde para cada k_{max} se muestre: a) el número de condición del sistema a resolver, es decir, el del problema de cuadrados mínimos; b) la norma infinito de la matriz del método de Gauss-Seidel; c) el radio espectral de la matriz del método de Gauss-Seidel. ¿Qué observaciones y conclusiones puede hacer? Se recomienda repasar la clase teórica sobre el tema.

- d) Existirá un valor de k para el cual el error se haga prácticamente igual a cero? Justifique su respuesta, analizando el fenómeno de Gibbs y los errores involucrados en la resolución.

- e) Cuáles son los errores presentes en la resolución del problema? Indique en que parte de la resolución aparece cada uno de ellos.

6. Funciones de biblioteca permitidas

Para facilitar la implementación, utilizar las siguientes funciones que proveen las bibliotecas de Python.

- Para definir la función cuadrada a muestrear: `https://numpy.org/doc/stable/reference/generated/numpy.heaviside.html`

- Para calcular normas: `https://numpy.org/doc/stable/reference/generated/numpy.linalg.norm.html`

- Para verificar que no se esté dividiendo por un número casi nulo: `https://docs.python.org/dev/library/math.html#math.isclose`

- Para el cálculo del radio espectral: `https://numpy.org/doc/stable/reference/generated/numpy.linalg.eig.html`
- Solo para calcular el número de condición de las matrices, se permite utilizar la función de inversión de matrices. No está permitido utilizarla para otro propósito: `https://numpy.org/doc/stable/reference/generated/numpy.linalg.inv.html`
- Para multiplicación de matrices: `https://numpy.org/doc/stable/reference/generated/numpy.dot.html`