TP d'Algo/Complexité/Calculabilité

CIMBE Pierre-Alexandre
LAGNIEZ Jean-Marc
LESNYAK Viktor
RAFIK Ahmed

November 17, 2013

1 Partie théorique

1.1 Partie algorithmique

1.2 Partie complexité

1.3 Partie calculabilité

1.3.1 Exercie 7

1. **Comment enumérer les couples d'entiers?**
2. **Donner les fonctions de codage et de décodage f1 → x et f2 → y**
3. **Montrer que l'on peut coder les triplets. Géneraliser aux k-uplets.**
4. **Pensez-vous que l'on peut coder les éléments de l'intervalle [0,1]. Justifier.**

1. Soit (x,y) $\in \mathbb{N} * \mathbb{N}$, alors faire x + y et trié par ordre lexicographique
2. La fonction de codage est :

$$z = \frac{(x+y)(x+y+1)}{2} + y$$

   Pour les fonction de décodage, posons t tel que

$$t = x + y$$

On va prendre t tel que si t augmente de 1 alors

$$\frac{t(t+1)}{2} > z$$

sinon on a

$$\frac{t(t+1)}{2} \leq z$$

La fonction de décodage de y est:

$$z = \frac{t(t+1)}{2} + y$$

$$y = z - \frac{t(t+1)}{2}$$

La fonction de décodage de x est:

$$x = t - y$$

$$x = -z + t + \frac{t(t+1)}{2}$$

$$x = -z + \frac{t(t+3)}{2}$$

3. Pour coder les triplets, il suffit de coder deux entier et coder le résultat et le dernier entier.

$$h(x, y, z) = c(x, c(y, z))$$

On peut repeter se raisonement pour les k-uplets, ainsi on a

$$k(x1, x2...xk) = c(x1, c(x2, ...c(xk - 1, xk))$$

4. On ne peut pas coder les éléments de l'intervalle [0,1] car l'ensemble n'est pas dénombrable. On utilise la diagonal de cantor sur cette ensemble.
Supposons que l'on puisse numeroter $\mathbb{N} \rightarrow$ [0,1] et on en définie la suite S telle que tout éléments de [0,1] soit élément de la suite S. Et on définie un réel r tel que la partie entière est égal à 0 et que chaque décimal en position n est égal à sn(n)[1]+1 si sn(n) est différent de 9 et sn(n)-1 si sn(n) est égal à 9.
Par construction, r n'est pas dans S sinon on aurait un Sn tel que

$$Sn(n) = r(n) = Sn(n) + 1$$

ou

$$Sn(n) = r(n) = Sn(n) - 1$$

C'est absurbe, ainsi ce n'est pas dénombrable.

[1] la nème décimal du nème élément de S

1.3.2 Exercice 8

1. Les fonctions primitives récursives sont toutes les fonctions que l'on peut construire à partir des fonctions de base pas composition et récursion primitive.

   Exemple

   Soit les fonctions primitives:
   O $\in \mathbb{N}^0$, $\pi_i^k \in \mathbb{N}^k$ et SUC $\mathbb{N}^1$

   $$O() = 0$$

   $$\pi_i^k(x_1, x_2..., x_k) = x_i$$

   $$SUC(x_1) = x_1 + 1$$

   Soit la fonction qu'on utilise pour la récursion primitive:
   g $\in \mathbb{N}^1$

   $$g() = SUC(O())$$

   Soit la fonction recursive primitive:
   f $\in \mathbb{N}^1$

   $$f(0) = g()$$

   $$f(SUC(n)) = \pi_1^2(f(n), n)$$

2. yoloooooooo je ne sais pas

3. (a) Soit la fonction somme défini ainsi:
   Sum $\in \mathbb{N}^2$

   $$Sum(0, y) = \pi_1^1(y) = y$$

   $$Sum(Suc(x), y) = \pi_2^3(x, Sum(x, y), y)$$

   (b) Soit la fonction Mult défini ainsi:
   Mult $\in \mathbb{N}^2$

   $$Mult(O, y) = 0() = 0$$

   $$Mult(1, y) = \pi_1^1(y) = y$$

   $$Mult(Suc(x), y) = \pi_2^3(x, Sum(Mult(x, y), y), y)$$

   (c) Soit la fonction puissance défini aisni:
   $X^Y \in \mathbb{N}^2$

   $$X^Y(x, 0) = Suc(0()) = 1$$

   $$X^Y(x, Suc(y)) = \pi_2^3(x, Mult(X^Y(x, y), x), y)$$

(d) Soit la fonction prédecesseurs tel que:
Pred $\in \mathbb{N}^1$

$$Pred(0) = O() = 0$$

$$Pred(Suc(x)) = \pi_1^2(x, Pred(x))$$

(e) Soit la fonction soustraction tel que:
X-Y $\in \mathbb{N}^2$

$$X - Y(0, y) = 0() = 0$$

$$X - Y(x, 0) = \pi_1^1(x) = x$$

$$X - Y(x, y) = \pi_2^3(x, X - Y(Pred(x), Pred(y)), y))$$

(f) Soit la fonction sg tel que: sg $\in \mathbb{N}^1$

$$sg(0) = 0() = 0$$

$$sg(Suc(x)) = \pi_1^2(1, Suc(x))$$

(g) Soit la fonction X $>$ Y tel que :
X$>$Y $\in \mathbb{N}^2$

$$X > Y(0, y) = 0$$

$$X > Y(x, 0) = 1$$

$$X > Y(x, y) = \pi_2^3(x, X > Y(Pred(x), Pred(y)), y)$$

Soit la fonction X $\geq$ Y tel que :
X$\geq$Y $\in \mathbb{N}^2$

$$X \geq Y(0, 0) = 1$$

$$X \geq Y(0, y) = 0$$

$$X \geq Y(x, 0) = 1$$

$$X \geq Y(x, y) = \pi_2^3(x, X > Y(Pred(x), Pred(y)), y)$$

4. (a) Voici la fonction d'Ackerman pour 0 $\leq$ m $\leq$ 3 et 0 $\leq$ n $\leq$ 4

m/n	0	1	2	3	4
0	1	2	3	4	5
1	2	3	4	5	6
2	3	5	7	9	11
3	5	13	28	58	118

(b) Fesons une preuve par récurrence

$$A_0(n) = Suc(n) = n + 1$$

Hypothèse: A_m(n) est primitive récursive
Montrons que A_{m+1}(n) est primitive récursive

Si n = 0, on a que $A_{m+1}(n) = A_m(1)$. D'après l'hypothèse de réccurence, on a que $A_m(n)$ est primitive récursive. Donc $A_{m+1}(n)$ est primitf recursive

Si n > 0, on a que $A_{m+1}(n) = A_m(A_{m+1}(n))$.
Posons n' = $A_{m+1}(n)$. Donc on a $A_m(n')$. D'après l'hypothèse de réccurence, on a que $A_m(n)$ est primitive récursive pour tous $n \in \mathbb{N}$.
Donc $A_{m+1}(n)$ est primitif recursive.

(c) Fesons une preuve par récurrence

$$A_0(n) = n + 1$$

n+1 > n donc c'est vrai au premier rang
Hypothèse: $A_m(n) > n$
Montrons que $A_{m+1}(n) > n$

Maitenant, on applique une récurrence sur n
n = 0 : $A_{m+1}(1) > 1 > 0$ Hypothèse: $A_{m+1}(n) > n$
Montrons que: $A_{m+1}(n+1) > n+1$
On utilise les deux hypothèse de réccurence:

$$Am + 1(n + 1) = Am(Am + 1(n)) > Am + 1(n) > n$$

Ainsi
$$Am + 1(n) \geq n + 1$$

Donc
$$Am + 1(n + 1) > n + 1$$

On peux donc conclure que $A_m(n) > n$

(d) Il faut montrer que $A_{m+1}(n) - A_m(n) \geq 0$
Fesons une preuve par récurrence sur m

$$A_0(n + 1) - A_0(n) = n + 1 - n = 1$$

Hypothèse: $A_m(n+1) - A_m(n) > 0$
Montrons que $A_{m+1}(n+1) - A_{m+1}(n) > 0$
$A_{m+1}(n+1) = A_m(A_{m+1}(n)) > A_m(n)$
On peut conclure que
$A_m(n+1) - A_m(n) > 0$

(e) Pour n = 0: $A_{m+1}(0) = A_m(1)$. De plus, d'après la question précédente, on a que $A_m(1) > A_m(0)$

Pour n > 0: $A_{m+1}(n) = A_m(A_{m+1}(n-1))$. De plus on a que $A_m(n-1) > n - 1 \rightarrow A_m(n-1) \geq n$

Comme la fonction est strictement croissante, on a que $A_m(A_m(n\text{-}1)) \geq A_m(n)$

On peux en conclure que
$A_{m+1}(n) = A_m(A_{m+1}(n\text{-}1)) \geq A_m(n)$

(f) D'après les question précédente, on a montré que $A_{m+1}(n) \geq A_m(n)$ et que $A_m(n+1) > A_m(n)$. Ceci prouve que A_m^k est strictement croissante.

(g) Fesons une preuve pas récurrence sur k.
Au cas de base, on a bien A_{m+1}(n) $\geq A_m$(n)
Hypothèse: A_{m+1}(n + k) $\geq A_m^k$(n)
Montrons que : A_{m+1}(n + k + 1) $\geq A_m^{k+1}$(n)
D'après l'hypothèse de réccurence, on a

$$A_m^{k+1} = A_m(A_m^k(n)) \leq A_m(A_{m+1}(n+k))$$

De plus:

$$A_{m+1}(n+k+1) = A_m(A_{m+1}(n+k))$$

On peut conclure que:

$$A_m^{k+1} = A_m(A_m^k(n)) \leq A_{m+1}(n+k+1)$$

(h) Fesons une preuve par l'absurbe, soit la fonction d'Ackermann primitive récursive.

Sois la fonction
$$f : \mathbb{N} \to \mathbb{N} : n \to A(n, 2n)$$

Comme la fonction d'Ackerman est primitive récursive alors f est primitive récursive.