TP d'Algo/Complexité/Calculabilité

CIMBE Pierre-Alexandre
LAGNIEZ Jean-Marc
LESNYAK Viktor
RAFIK Ahmed

November 3, 2013

1 Partie théorique

1.1 Partie algorithmique

1.2 Partie complexité

1.3 Partie calculabilité

1.3.1 Exercice 7

1. **Comment enumérer les couples d'entiers?**
2. **Donner les fonctions de codage et de décodage $f_1 \rightarrow x$ et $f_2 \rightarrow y$**
3. **Montrer que l'on peut coder les triplets. Géneraliser aux k-uplets.**
4. **Pensez-vous que l'on peut coder les éléments de l'intervalle [0,1]. Justifier.**

1. Soit (x,y) $\in \mathbb{N} * \mathbb{N}$, alors faire x + y et trié par ordre lexicographique
2. La fonction de codage est :

$$z = \frac{(x+y)(x+y+1)}{2} + y$$

   Pour les fonction de décodage, posons t tel que

$$t = x + y$$

La fonction de décodage de y est:

$$z = \frac{t(t+1)}{2} + y$$

$$y = z - \frac{t(t+1)}{2}$$

La fonction de décodage de x est:

$$x = t - y$$

$$x = -z + t + \frac{t(t+1)}{2}$$

$$x = -z + \frac{t(t+3)}{2}$$

3. Pour coder les triplets, il suffit de coder deux entier et coder le résultat et le dernier entier.
$$h(x, y, z) = c(x, c(y, z))$$
On peut repeter se raisonement pour les k-uplets, ainsi on a
$$k(x1, x2...xk) = c(x1, c(x2, ...c(xk - 1, xk))$$

4. On ne peut pas coder les éléments de l'intervalle [0,1] car l'ensemble n'est pas dénombrable. On utilise la diagonal de cantor sur cette ensemble.
Supposons que l'on puisse numeroter $\mathbb{N} \rightarrow$ [0,1] et on en définie la suite S telle que tout éléments de [0,1] soit élément de la suite S. Et on définie un réel r tel que la partie entière est égal à 0 et que chaque décimal en position n est égal à sn(n)[1]+1 si sn(n) est différent de 9 et sn(n)-1 si sn(n) est égal à 9.
Par construction, r n'est pas dans S sinon on aurait un Sn tel que
$$Sn(n) = r(n) = Sn(n) + 1$$
ou
$$Sn(n) = r(n) = Sn(n) - 1$$
C'est absurbe, ainsi ce n'est pas dénombrable.

1.3.2 Exercice 8

1. Les fonctions primitives récursives sont toutes les fonctions que l'on peut construire à partir des fonctions de base pas composition et récursion primitive.

[1] la nème décimal du nème élément de S

Exemple:

Soit les fonctions primitives:
O $\in \mathbb{N}^0$, $\pi_i^k \in \mathbb{N}^k$ et SUC $\mathbb{N}^1$

$$O() = 0$$
$$\pi_i^k(x_1, x_2 ..., x_k) = x_i$$
$$SUC(x_1) = x_1 + 1$$

2.