UNIVERSIDAD DE GUANAJUATO

TRABAJO FIN DE GRADO

Título del trabajo

Realizado por

Guillermo Alberto Jiménez Frías

Para la obtención del título de
Grado en Licenciatura en Matemáticas

Dirigido por
Nombre del profesor tutor

Realizado en el departamento de
Matemáticas de la UG

Verano 2022

Agradecimientos

Quiero agradecer a X por...

También quiero agradecer a Y por...

Resumen

Incluya aquí un resumen de los aspectos generales de su trabajo, en español.

Palabras clave: Palabra clave 1, palabra clave 2, ..., palabra clave N

Abstract

This section should contain an English version of the Spanish abstract.

Keywords: Keyword 1, keyword 2, ..., keyword N

Índice general

1. Introducción

2. Clasificación de EDPs

Breve introducción al capítulo

¿Qué motiva su clasificación? Hablar de lo siguiente:

2.1. Clasificación de Problemas Físicos

Los problemas en física e ingeniería se clasifican en general en tres categorías: **problemas de equilibrio, problemas de eigenvalores y problemas de propagación.**

Los problemas dde equilibrio son problemas estado estacionarios en los cuales la configuración de equilibrio ϕ en un dominio D esta determinada al resolver la ecuación diferencial

$$L[\phi] = f \qquad \text{en} \quad D,$$

sujeta a condiciones de frontera

$$B_t[\phi] = g_t.$$

Entre los ejemplos se incluyen flujos estacionarios viscosos, distribuciones de temperatura estacionaria, equilibrio de tensión en estructuras elasticas. Aunque haya una aparente diversidad en tales problemas, las ecuaciones que gobiernan problemas de equilibrio son *elipticas*.

Problemas de valores propios pueden ser pensados como extensiones de problemas de equilibrio en los que se deben determinar los valores criticos de ciertos parámetros además de las configuraciones de estado estacionario correspondientes.

Matemáticamente, debemos encontrar constantes $\lambda \in \mathbb{R}$, y funciones correspondientes ϕ, tales que la ecuacion diferencial

$$L[\phi] = \lambda M[\phi] \qquad \text{en}\, D,$$

y las condiciones de frontera

$$B_t[\phi] = \lambda E_t[\phi] \qquad \text{en}\partial D$$

Ejemplos típicos incluyen pandeo y estabilidad de estructuras, resonancia en circuitos electricos y acusticos problemas de frecuencia natural en vibraciones.

Los operadores L y M son de tipo elípticos.

Problemas de propagación son problemas de valor inicial que tienen una naturaleza transitiva o de estado no estacionario. La intención es predecir el comportamiento de un sistema a partir de un sistema inicial. Lo cual puede ser hecho al resolver la ecuación diferencial

$$L[\phi]f \qquad \text{en} D$$

con las condiciones iniciales

$$I_t[\phi] = h_t$$

y sujeta a las condiciones

$$B_t[\phi] = g_t$$

con fronteras abiertas. D es abierto.

Show a Picture

Ejemplos típicos incluyen incluyen la propagación de ondas de presión en un fluido, propagación de calor, y el desarrollo de vibraciones auto-exitadas. Todos estos problemas son de tipo *parabolico* o *hiperbolico*.

2.2. Clasificación de Ecuaciones

Dentro de los problemas arriba descritos, se pueden presentar diferentes ecuaciones que también se pueden clasificar dependiendo del tipo de comportamiento. Para ello se requiere desarrollar el concepto de **características**.

Sean $a_1, a_2, \ldots, f_1, f_2$ funciones de $x, y, u(x, y)$ y $v(x, y)$ y consideremos el siguiente sistema simultáneo de primer orden cuasi-lineal.

$$\begin{aligned} a_1\, u_x + b_1\, u_y + c_1\, v_x + d_1\, v_y &= f_1 \\ a_2\, u_x + b_2\, u_y + c_2\, v_x + d_2\, v_y &= f_2 \end{aligned}$$

Nota: Un sistema de ecuaciones cuasi-lineal es aquel en el que las derivadas de orden más alto ocurren de manera lineal.

El sistema de ecuaciones de arriba es lo suficientemente general para representar muchos de los problemas científicos en donde los modelos matemáticos son de segundo orden.

Supongamos que la solución para u y v es conocida del estado inicial en alguna Γ. (Por ahora nos limitamos a considerar un dominio en el cual las discontinuidades en Γ no ocurren). Para algún punto P en la curva Γ nosotros conocemos las derivas de u y v y sus derivadas direccionales en las direcciones bajo la curva.

En general, si la solución existe en todos los puntos, la derivada direccional de u en la dirección w sería $\nabla u \cdot w$.

Incluir Imagen

Ahora, queremos saber si el comportamiento de la solución arriba de P esta únicamente determinado por la información debajo y sobre la curva. Esto es, nos preguntamos si los datos son suficientes para determinar la derivada direccional en P en direcciones que se encuentran por encima de la curva.

Para ello, sea θ el álgulo con la horizontal que especifica una dirección en la cual σ mide la distancia. Si u_x y u_y son conocidas en P, la derivada direccional es

$$u_{\sigma|\theta} = \nabla u \cdot (\cos\theta, \sin\theta) = u_x \cos\theta + u_y \sin\theta = u_x \frac{dx}{d\sigma} + u_y \frac{dy}{d\sigma}, \tag{2.1}$$

por lo que debemos preguntarnos bajo que condiciones las derivadas u_x, u_y, v_x, y v_y son determinadas de forma única en P por los valores de u y v en Γ.

En P se satisface

$$du = u_\sigma\, d\sigma = u_x\, dx + u_y\, dy\, dv = v_\sigma\, d\sigma = v_x\, dx + v_y\, dy \tag{2.2}$$

y junto con el sistema de ecuaciones para u y v, tenemos el sistema en forma matricial

$$\begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ dx & dy & 0 & 0 \\ 0 & 0 & dx & dy \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_x \\ u_y \\ v_x \\ v_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ du \\ dv \end{bmatrix}$$

Con u y v conocidos en P las funciones coeficiente $a_1, a_2, \ldots, f_1, f_2$ son conocidas. Con las direcciones de Γ conocidas, dx, dy son conocidas; y si u y v son conocidas a lo largo de Γ, du, dv son también conocidas. Por lo tanto, una solución única para u_x, u_y, v_x, v_y existe si la matriz tiene determinante distinto de cero.

El caso donde el determinante es cero, implica que una multiplicidad de soluciones es posible. Por tanto, las derivadas parciales no se determinan de manera única. En consecuencia, discontinuidades en las derivadas parciales pueden ocurrir al cruzar Γ.

De aquí surge la motivación de extender la teoría para poder considerar soluciones en donde tengamos estas situaciones, pues si hay discontinuidades la derivada no existe.

Al igualar el determinante a cero obtenermos la *ecuación característica*

$$(a_1c_1 - a_2c_1)(\, dy)^2 - (a_1d_2 - a_2d_1 + b_1c_2 - b_2c_1)\, dx\, dy + (b_1d_2 - b_2 - d_1)(\, dx)^2 = 0,$$

la cual es una ecuación cuadrática en $dy/\, dx$.

En resumen, si la curva Γ en P tiene una pendiente que satisface la ecuación característica, entonces las derivadas parciales $u_x u_y, v_x, v_y$ no se determinan de manera única por los valores de u y v en Γ.

Las direcciones dadas por la ecuación característica son conocidas como **direcciones características**. Las direcciones caracteristicas pueden ser reales y distintas de cero, reales e identicas, o imaginarias dependiendo de si el discriminante

$$(a_1 d_2 - a_2 d_1 + b_1 c_2 - b_2 c_1)^2 - 4(a_1 c_2 - a_2 c_1)(b_1 d_2 - b_2 d_1)$$

es positivo, cero ó negativo.

Este también es un criterio para clasificar el sistema de ecuaciones como **hiperbólico, parabólico ó elíptico**, respectivamente.

El sistema es *hiperbólico* si el discriminante es positivo, es decir, si hay dos direcciones reales características. Es *parabólico* si el discriminante es cero, y *elíptico* si no tiene direcciones características reales.

Ahora, consideremos una ecuación cuasi-lineal de segundo orden

$$a\, u_{xx} + b\, u_{xy} + c\, u_{yy} = f,$$

donde a, b, c, f son funciones de x, y, y, u_x y u_y.

Podemos obtener una clasificación de esta ecuación al transformarla a un sistema de ecuaciones de primer orden. También se puede hacer de manera directa. Para ello, vamos a pedir la condición de que los valores de u, u_x y u_y en Γ sea suficientes para determinar u_{xx}, u_{xy} y u_{yy} de manera única de tal forma que la ecuación de arriba se satisfaga. Nos podemos convencer de esto último al pasar al sistema lineal.

Si tales derivadas existen, debemos tener que

$$\begin{aligned} d(u_x) &= u_{xx}\, dx + u_{xy}\, dy \\ d(u_y) &= u_{xy}\, dx + u_{yy}\, dy \end{aligned}$$

Entonces tenemos

$$\begin{bmatrix} a & b & c \\ dx & dy & 0 \\ 0 & dx & dy \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{xx} \\ u_{xy} \\ u_{yy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f \\ d(u_x) \\ d(u_y) \end{bmatrix}$$

Entonces, la solución para u_{xx}, u_{xy}, u_{yy} existe y es única a menos de que el determinante de la matriz sea cero, esto es

$$a(\, dy)^2 - d(\, dy)(\, dx) + c(\, dx)^2 = 0$$

en este caso, a ecuación $a\, u_{xx} + b\, u_{xy} + c\, u_{yy} = f$ es **hiperbólico** si $b^2 - 4ac > 0$, **parabólico** si $b^2 - 4ac = 0$ y **elíptica** si $b^2 - 4ac < 0$.

Hay que notar que a, b, c son funciones de x, y, u, u_x, u_y, por lo que una ecuaciónn puede cambiar su tipo dependiendo de la región donde se evaluen.

En el caso hiperbólico, existen dos curvas características reales. Dado que las derivadas de orden alto están indeterminadas a lo largo de esas curvas, ellas proveen caminos para la propagación de discontinuidades. Las ondas de choque y otras discontinuidades se puede propagar por las características.

Considere la ecuación de onda

$$u_{xx} - \alpha^2 u_{yy} = 0, \qquad \alpha \text{constante}$$

las curvas características son

$$(\,dy)^2 - \alpha^2(\,dx)^2 = 0$$

con lo que

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = \alpha^2$$

por lo que

$$y \pm \alpha x = \beta$$

la cuales son lineas rectas.

2.3. Ecuaciones Parabólicas

Leyes físicas cuantitativas son una idealización de la realidad. A medida que el conocimiento crece observamos que una situación fisica puede ser idealizada matemáticamente, no de forma única.

Ahora bien, muchos fenómenos físicos involucran razones de cambio, que matemáticamente se puede traducir en derivadas parciales. De esta manera, junto con algunas simplificaciones se pueden derivar "modelos matemáticos"que consisten en Ecuaciones Diferenciales Parciales (EDPs). Al encontrar ó aproximar las soluciones de las EDPs podríamos en principio predecir la evolución del fenómeno. Sin embargo, hay algunos modelos mejores que otros.

Hadamard examinó el problema de caracterizar formulaciones ideales razonables, asertó que un problema físico esta *bien planteado* si su solución *existe*, es *única*, y *depende continuamente de los datos auxiliares.*

El criterio para un problema bien planteado es físicamente razonable en la mayoria de casos. Existencia y unicidad son una afirmación del *principio de determinismo* sin la cual los experimentos no podrían ser repetidos con la expectativa de obtener datos consistentes. La dependencia continua se refiere a la consistencia con los datos, -*un pequeño cambio en cualquiera de los datos del problema auxiliar debe producir un pequeño cambio correpondiente en la solución.*

Los problemas que veremos aquí se suponen que están planteados apropiadamente. La existencia y unicidad se aseguran por lo general mediante suposiciones físcias razonables. La existencia y unicidad puede llegar a ser unt ema ocmplicado, pero veremos algunos teoremas clásicos.

Ecuaciones diferenciales parabólicas que aparecen en problemas científicos y en ingeniería son a menudo de la forma

$$u_t = L(u)$$

donde $L(u)$ es un operador diferencial parcial elíptico de segundo orden, que puede o no ser lineal.

Difusion en medios isotrópicos, conducción del calor en un medio isotrópico, flujos en medios porosos, flujos de capa límite sobre un dominio plano, etc. se pueden modelar mediante la ecuación parabólica

$$u_t = div[fgradu] = \nabla \cdot [f \nabla u \tag{2.3}$$

donde f puede ser constante, una función del espacio de coordenadas, o función de $u, \nabla u$ o ambos.

Muchos problemas de la teoría general de ecuaciones parábolicas (existencia, unicidad, suavidad de las soluciones, etc.) han sido desarrolladas en detalle por Friedman.

Un teorema típico de unicidad para el problema de valores iniciales y de frontera

$$L(u) = g(x,t)u_{xx} - u_t = f(x,t,u,u_x) \qquad \text{en} \quad D + B_T$$

u(x,0) = $\phi(x,0)$, $\quad t = 0(2.4)$

es

Teorema de Unicidad: Si la ecuación parabólica (cuasilineal) tiene coeficientes acotados $g(x,t)$ en $D + B_T(D : a < x < b, B_T : 0 < t < T)$ y si $f(x,t,u,w)$ es monotona decreciente en u, entonces existe a lo más una solución de las ecuaciones.

3. Ecuaciones Cuasilineales

Breve introducción al capítulo

¿Qué son? Habla de los sistemas

3.1. Intro

4. Anexos

4.1. Esquema General de las Leyes de Conservación

Consideramos un medio líquido, gas o sólido que ocupa una región o dominio (abierto y conexo) $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, donde n es la dimensión del espacio.

Denotamos

$$u = u(x,t), \qquad\qquad x \in \Omega, \quad t \geq 0$$

a una función, llamada *función de estado,* la cual dependiendo del problema podrá representar temperatura o bien, la concentración de una sustancia, etc. Para el análisis de las leyes de conservación, se requiere un dominio de balance escogido arbitrariamente $\Omega' \subset \Omega$, y un intervalo de tiempo arbitrario $[t_1, t_2]$.

En general, u puede ser función vectorial: $u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^n$. En particular para u es una función escalar para $n = 1$.

El caso u escalar, incluye también, en general, una función fuente escalar $f = f(x,t), f : \Omega \times [0,t) \longrightarrow \mathbb{R}$ y un campo vectorial flujo, $\phi(x,t), \phi : \Omega \times [0,t) \longrightarrow \mathbb{R}^n$.

Por ejemplo, si u representa la temperatura, f podría representar una fuente interna de calor, por ejemplo, una corriente eléctrica en el alambre y ϕ representa una ley física que determina la manera como cambia u, por ejemplo, la ley de calor de Fourier.

La ley básica de balance establece que el cambio total de la cantidad u contenida en Ω' entre los tiempos t_1 y t_2 debe igualar el flujo total a través de la frontera Ω' entre los tiempos t_1 y t_2 y el incremento o decremento de la cantidad u produciendo por la fuente f, dentro de Ω' en el mismo intervalo de tiempo. En forma matemática esto queda expresado como

$$\int_{\Omega'} u(x,t_2)\,dx - \int_{\Omega'} u(x,t_1)\,dx = -\int_{t_1}^{t_2}\int_{\partial\Omega'} \phi(x,t)\cdot \mathbf{n}\,dS\,dt + \int_{t_1}^{t_2}\int_{\Omega'} f(x,t)\,dx\,dt.$$

Si se supone que u tiene primera derivada continua respecto de t, por medio del teorema fundamental del cálculo y del teorema de Fubini se obtiene

$$\int_{\Omega'} \frac{\partial}{\partial t} u(x,t)\,dx = -\int_{\partial\Omega'} \phi(x,t)\cdot \mathbf{n}\,dS + \int_{\Omega'} f(x,t)\,dx.$$

Al utilizar el teorema de la divergencia, podemos escribir

$$\int_{\Omega'} \frac{\partial}{\partial} u(x,t) + \operatorname{div}\phi(x,t) - f(x,t)\,)\,dx = 0.$$

La cual es *la forma global o integral de la ley de conservación evolutiva.* Si se supone la continuidad del integrando, dado que la región $\Omega' \subset \Omega$ fue arbitraria, se obtiene la forma local o diferencial de la ley de conservación evolutiva

$$u_t(x,t) + \operatorname{div}\phi(x,t) - f(x,t) = 0.$$

4.2. Ecuación de Burgers

Una ecuación cuasilieneal de primer orden muy importante es la *ecuación de Burgers*

$$u_t + u\, u_x = 0,$$

la cual es una EDP no lineal que se obtiene al sustituir en la ley de de conservación evolutiva $f \equiv 0$ y $\phi = u^2/2$.

Más generalmente la ecuación

$$u_t + g(u)\, u_x = 0$$

se ha usado para modelar el tráfico de automóviles en una vía muy transitada, la dinámica de ciertos gases o en el modelado de la esquistosomiasis. En le caso del tráfico $\nabla\phi$ representa la cnatidad de automóviles que pasan por un punto dado y es función de la densidad de automóviles u. Diferentes funciones g se han econtrado experimentalmente y ejemplos sencillos han sido extensivamente estudiados, por ejemplo,

$$\begin{array}{ll} g(u) = cu(1-u) & \\ g(u) = cu & \text{flujo lineal} \\ g(u) = u^2/2 & \quad \text{flujo cuadrático.} \end{array}$$

La ecuación

$$u_t + g(u)\, u_x = 0$$

puede ser resuelta por el método de las características.

Tenemos el sistema característico

$$\begin{aligned} &\frac{dt}{d\tau}(s,\tau) = 1, \\ &\frac{dx}{d\tau}(s,\tau) = g(u(s,\tau)), \\ &\frac{du}{d\tau}(s,\tau) = 0. \end{aligned}$$

Así $u(s,\tau) = c_1, t(s,\tau) = \tau + c_2$ y $x(s,\tau) = g(c_1)\tau + c_3$. Si se dan las condiciones iniciales para $\tau = 0$

$$x(s,0) = x_0(s), \quad t(s,0) = t_0(s) \quad \text{y} \quad u(s,0) = u_0(s),$$

se obtiene la solución

$$\begin{aligned} t(s,\tau) &= \tau + t_0(s) \\ x(s,\tau) &= g(u_0(s))\tau + x_0(s) \\ u(s,\tau) &= u_0(s). \end{aligned}$$

Ejemplo: Resuelva el problema de valor inicial

$$u_t + uu_x = 0$$

$$u(x,0)=\begin{cases}0, & x<0,\\ 1, & x\geq 0.\end{cases}$$

Para este problema la condición inicial puede ser representada paramétricamente como

$$t(s,0)=0,\quad x(s,0)=s,\quad u(s,0)=u(x(s,0),0)$$

Para las características tenemos el sistema

$$\begin{aligned}&\frac{dt}{d\tau}(s,\tau)=1,\\ &\frac{dx}{d\tau}(s,\tau)=u(s,\tau),\\ &\frac{du}{d\tau}(s,\tau)=0.\end{aligned}$$

Al integrar se obtiene

$$\begin{aligned}t(s,\tau) &= \tau,\\ u(s,\tau) &= u(s,0)=\begin{cases}0, & s<0,\\ 1, & s\geq 0.\end{cases}\\ x(s,\tau) &= s+\tau\cdot\begin{cases}0, & s<0,\\ 1, & s\geq 0.\end{cases}\end{aligned}$$

Las características pueden construirse ahora partiendo de las condiciones iniciales; por ejemplo, la característica que pasa por el punto $(-2,0)$ es $x=-2$ y la característica que pasa por $(2,0)$ es $x=2+t$. Entonces tenemos $u(-2,t)=0$ y $u(2+t,t)=1$, para $t>0$. De esta manera se ha obtenido la solución del problema en forma paramétrica.

Índice de figuras

Índice de extractos de código

5. Bibliografía