



UNIVERSIDAD DE
GUANAJUATO

TRABAJO FIN DE GRADO

Título del trabajo

Realizado por
Guillermo Alberto Jiménez Frías

Para la obtención del título de
Grado en Licenciatura en Matemáticas

Dirigido por
Nombre del profesor tutor

Realizado en el departamento de
Matemáticas de la UG

Verano 2022

Agradecimientos

Quiero agradecer a X por...

También quiero agradecer a Y por...

Resumen

Incluya aquí un resumen de los aspectos generales de su trabajo, en español.

Palabras clave: Palabra clave 1, palabra clave 2, ..., palabra clave N

Abstract

This section should contain an English version of the Spanish abstract.

Keywords: Keyword 1, keyword 2, ..., keyword N

Índice general

1. Introducción	1
2. Clasificación de EDPs	2
2.1. Clasificación de Problemas Físicos	2
2.2. Clasificación de Ecuaciones	3
3. Ecuaciones Cuasilineales	13
3.1. Intro	13
4. Método de Características	14
4.1.	14
5. Leyes de CONservación Hiperbólicas	15
5.1.	15
6. Métodos Numéricos	16
6.1.	16
7. Anexos	17
7.1. Esquema General de las Leyes de Conservación	17
7.2. Ecuación de Burgers	18
8. Bibliografía	22

1. Introducción

2. Clasificación de EDPs

Breve introducción al capítulo

¿Qué motiva su clasificación? Hablar de lo siguiente:

2.1. Clasificación de Problemas Físicos

Los problemas en física e ingeniería se clasifican en general en tres categorías: **problemas de equilibrio, problemas de eigenvalores y problemas de propagación.**

Los problemas de equilibrio son problemas estado estacionarios en los cuales la configuración de equilibrio ϕ en un dominio D esta determinada al resolver la ecuación diferencial

$$L[\phi] = f \quad \text{en } D,$$

sujeta a condiciones de frontera

$$B_t[\phi] = g_t.$$

Entre los ejemplos se incluyen flujos estacionarios viscosos, distribuciones de temperatura estacionaria, equilibrio de tensión en estructuras elasticas. Aunque haya una aparente diversidad en tales problemas, las ecuaciones que gobiernan problemas de equilibrio son *elípticas*.

Problemas de valores propios pueden ser pensados como extensiones de problemas de equilibrio en los que se deben determinar los valores criticos de ciertos parámetros además de las configuraciones de estado estacionario correspondientes.

Matemáticamente, debemos encontrar constantes $\lambda \in \mathbb{R}$, y funciones correspondientes ϕ , tales que la ecuacion diferencial

$$L[\phi] = \lambda M[\phi] \quad \text{en } D,$$

y las condiciones de frontera

$$B_t[\phi] = \lambda E_t[\phi] \quad \text{en } \partial D$$

Ejemplos típicos incluyen pandeo y estabilidad de estructuras, resonancia en circuitos electricos y acusticos problemas de frecuencia natural en vibraciones.

Los operadores L y M son de tipo elípticos.

Problemas de propagación son problemas de valor inicial que tienen una naturaleza transitiva o de estado no estacionario. La intención es predecir el comportamiento

de un sistema a partir de un sistema inicial. Lo cual puede ser hecho al resolver la ecuación diferencial

$$L[\phi]f \quad \text{en } D$$

con las condiciones iniciales

$$I_t[\phi] = h_t$$

y sujeta a las condiciones

$$B_t[\phi] = g_t$$

con fronteras abiertas. D es abierto.

Show a Picture

Ejemplos típicos incluyen incluyen la propagación de ondas de presión en un fluido, propagación de calor, y el desarrollo de vibraciones auto-excitadas. Todos estos problemas son de tipo *parabolico* o *hiperbolico*.

2.2. Clasificación de Ecuaciones

Dentro de los problemas arriba descritos, se pueden presentar diferentes ecuaciones que también se pueden clasificar dependiendo del tipo de comportamiento. Para ello se requiere desarrollar el concepto de **características**.

Sean $a_1, a_2, \dots, f_1, f_2$ funciones de $x, y, u(x, y)$ y $v(x, y)$ y consideremos el siguiente sistema simultáneo de primer orden cuasi-lineal.

$$\begin{aligned} a_1 u_x + b_1 u_y + c_1 v_x + d_1 v_y &= f_1 \\ a_2 u_x + b_2 u_y + c_2 v_x + d_2 v_y &= f_2 \end{aligned}$$

Nota: Un sistema de ecuaciones cuasi-lineal es aquel en el que las derivadas de orden más alto ocurren de manera lineal.

El sistema de ecuaciones de arriba es lo suficientemente general para representar muchos de los problemas científicos en donde los modelos matemáticos son de segundo orden.

Supongamos que la solución para u y v es conocida del estado inicial en alguna Γ . (Por ahora nos limitamos a considerar un dominio en el cual las discontinuidades en Γ no ocurren). Para algún punto P en la curva Γ nosotros conocemos las derivas de u y v y sus derivadas direccionales en las direcciones bajo la curva.

En general, si la solución existe en todos los puntos, la derivada direccional de u en la dirección w sería $\nabla u \cdot w$.

Incluir Imagen

Ahora, queremos saber si el comportamiento de la solución arriba de P está únicamente determinado por la información debajo y sobre la curva. Esto es, nos preguntamos si los datos son suficientes para determinar la derivada direccional en P en direcciones que se encuentran por encima de la curva.

Para ello, sea θ el ángulo con la horizontal que especifica una dirección en la cual σ mide la distancia. Si u_x y u_y son conocidas en P , la derivada direccional es

$$\begin{aligned} u_{\sigma|\theta} &= \nabla u \cdot (\cos \theta, \sin \theta) \\ &= u_x \cos \theta + u_y \sin \theta \\ &= u_x \frac{dx}{d\sigma} + u_y \frac{dy}{d\sigma}, \end{aligned}$$

por lo que debemos preguntarnos bajo que condiciones las derivadas u_x, u_y, v_x , y v_y son determinadas de forma única en P por los valores de u y v en Γ .

En P se satisface

$$\begin{aligned} du &= u_\sigma d\sigma = u_x dx + u_y dy \\ dv &= v_\sigma d\sigma = v_x dx + v_y dy \end{aligned}$$

y junto con el sistema de ecuaciones para u y v , tenemos el sistema en forma matricial

$$\begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ dx & dy & 0 & 0 \\ 0 & 0 & dx & dy \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_x \\ u_y \\ v_x \\ v_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ du \\ dv \end{bmatrix}$$

Con u y v conocidos en P las funciones coeficiente $a_1, a_2, \dots, f_1, f_2$ son conocidas. Con las direcciones de Γ conocidas, dx, dy son conocidas; y si u y v son conocidas a lo largo de Γ , du, dv son también conocidas. Por lo tanto, una solución única para u_x, u_y, v_x, v_y existe si la matriz tiene determinante distinto de cero.

El caso donde el determinante es cero, implica que una multiplicidad de soluciones es posible. Por tanto, las derivadas parciales no se determinan de manera única. En consecuencia, discontinuidades en las derivadas parciales pueden ocurrir al cruzar Γ .

De aquí surge la motivación de extender la teoría para poder considerar soluciones en donde tengamos estas situaciones, pues si hay discontinuidades la derivada no existe.

Al igualar el determinante a cero obtenemos la *ecuación característica*

$$(a_1 c_1 - a_2 c_1)(dy)^2 - (a_1 d_2 - a_2 d_1 + b_1 c_2 - b_2 c_1) dx dy + (b_1 d_2 - b_2 - d_1)(dx)^2 = 0,$$

la cual es una ecuación cuadrática en dy/dx .

En resumen, si la curva Γ en P tiene una pendiente que satisface la ecuación característica, entonces las derivadas parciales u_x, u_y, v_x, v_y no se determinan de manera única por los valores de u y v en Γ .

Las direcciones dadas por la ecuación característica son conocidas como **direcciones características**. Las direcciones características pueden ser reales y distintas de cero, reales e idénticas, o imaginarias dependiendo de si el discriminante

$$(a_1 d_2 - a_2 d_1 + b_1 c_2 - b_2 c_1)^2 - 4(a_1 c_2 - a_2 c_1)(b_1 d_2 - b_2 d_1)$$

es positivo, cero ó negativo.

Este también es un criterio para clasificar el sistema de ecuaciones como **hiperbólico, parabólico ó elíptico**, respectivamente.

El sistema es *hiperbólico* si el discriminante es positivo, es decir, si hay dos direcciones reales características. Es *parabólico* si el discriminante es cero, y *elíptico* si no tiene direcciones características reales.

Ahora, consideremos una ecuación cuasi-lineal de segundo orden

$$a u_{xx} + b u_{xy} + c u_{yy} = f,$$

donde a, b, c, f son funciones de x, y, u_x y u_y .

Podemos obtener una clasificación de esta ecuación al transformarla a un sistema de ecuaciones de primer orden. También se puede hacer de manera directa. Para ello, vamos a pedir la condición de que los valores de u, u_x y u_y en Γ sea suficientes para determinar u_{xx}, u_{xy} y u_{yy} de manera única de tal forma que la ecuación de arriba se satisfaga. Nos podemos convencer de esto último al pasar al sistema lineal.

Si tales derivadas existen, debemos tener que

$$\begin{aligned} d(u_x) &= u_{xx} dx + u_{xy} dy \\ d(u_y) &= u_{xy} dx + u_{yy} dy \end{aligned}$$

Entonces tenemos

$$\begin{bmatrix} a & b & c \\ dx & dy & 0 \\ 0 & dx & dy \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{xx} \\ u_{xy} \\ u_{yy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f \\ d(u_x) \\ d(u_y) \end{bmatrix}$$

Por lo que la solución para u_{xx}, u_{xy}, u_{yy} existe y es única a menos de que el determinante de la matriz sea cero, esto es

$$a(dy)^2 - d(dy)(dx) + c(dx)^2 = 0$$

en este caso, la ecuación $a u_{xx} + b u_{xy} + c u_{yy} = f$ es **hiperbólico** si $b^2 - 4ac > 0$, **parabólico** si $b^2 - 4ac = 0$ y **elíptica** si $b^2 - 4ac < 0$.

Hay que notar que a, b, c son funciones de x, y, u, u_x, u_y , por lo que una ecuación puede cambiar su tipo dependiendo de la región donde se evalúen.

En el caso hiperbólico, existen dos curvas características reales. Dado que las derivadas de orden alto están indeterminadas a lo largo de esas curvas, ellas proveen caminos para la propagación de discontinuidades. Las ondas de choque y otras discontinuidades se puede propagar por las características.

Considere la ecuación de onda

$$u_{xx} - \alpha^2 u_{yy} = 0, \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

las curvas características son

$$(dy)^2 - \alpha^2(dx)^2 = 0$$

con lo que

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = \alpha^2$$

por lo que

$$y \pm \alpha x = \beta$$

la cuales son líneas rectas.

Como ejemplo más complejo, consideremos las ecuaciones para un flujo de gas irrotacional isentrópico en 2D

$$\begin{aligned} uu_x + vu_y + \rho^{-1}p_x &= 0 \\ uv_x + vv_y + \rho^{-1}p_y &= 0 \\ (\rho u)_x + (\rho v)_y &= 0 \\ v_x + u_y &= 0 \end{aligned}$$

$$p\rho^{-\gamma} = Cte, \quad \frac{dp}{d\rho} = c^2$$

donde (u, v) es la velocidad, p es la presión, ρ densidad, c es la velocidad del sonido y γ razón de calores específicos ($\gamma = 1,4$).

Esto implica

$$(u^2 - c^2)u_x + (uv)u_y + (uv)v_x + (v^2 - c^2)v_y - u_y + v_x = 0.$$

Sea $5c^2 = 6(c^*)^2 - (u^2 + v^2)$, donde c^* es una velocidad del sonido referencia que corresponde a la velocidad del sonido cuando la velocidad dle flujo $[(u^2 + v^2)]^{1/2}$ es igual a c .

El problema se puede poner en forma adimensional definiendo

$$u' = u/c^*, \quad v' = v/c^*, \quad c' = c/c^*, \quad x' = x/l, \quad y' = y/l,$$

donde l es la mitad del ancho del dominio.

Sustituyendo las formas adimensionales y eliminando las primas, tenemos la ecuación de arriba con

$$c^2 = 1,2 - 0,2(u^2 + v^2)$$

lo que implica

$$\begin{bmatrix} u^2 - c^2 & uv & uv & v^2 - c^2 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ dx & dy & 0 & 0 \\ 0 & 0 & dx & dy \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_x \\ u_y \\ v_x \\ v_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ du \\ dv \end{bmatrix}.$$

Las curvas caraterísticas están dadas por

$$\begin{aligned} \left(\frac{dy}{dx} \right)_+ &= \frac{uv + c[u^2 + v^2 - c^2]^{1/2}}{u^2 - c^2} \\ \left(\frac{dy}{dx} \right)_- &= \frac{uv - c[u^2 + v^2 - c^2]^{1/2}}{u^2 - c^2} \end{aligned}$$

Cuando el flujo es subsónico, $u^2 + v^2 < c^2$, las características son complejas, y la ecuación es por lo tanto elíptica. El número de Frobenius es $Fr = \frac{u^2+v^2}{c^2} < 1$.
s Cuando el flujo es transónico $u^2 + v^2 = c^2$, por lo que la ecuación es parabólica y $Fr = 1$.

Cuando el flujo es supersónico $u^2 + v^2 > c^2$, por lo que la ecuación es hiperbólica y $Fr > 1$.

Ecuaciones Hiperbólicas

Muchos problemas de valor inicial que consisten en propagaciones se pueden describir por *ecuaciones hiperbólicas*. Estas surgen en problemas de transporte como mecánica de ondas, dinámica de gases, vibraciones, entre otras áreas.

Para iniciar el análisis de éstas ecuaciones, consideremos la ecuación de onda

$$u_{tt} - u_{xx} = 0$$

donde la solución se puede calcular de manera directa a través de la *formula de D'Alembert*.

Supongamos que u es lo suficientemente suave de tal forma que u_{tt} y u_{xx} son continuas. Consideremos el siguiente cambio de coordenadas

$$\theta = x + t, \quad \psi = x - t, \quad u(x, t) = v(\theta, \psi)$$

entonces

$$x = \frac{\theta + \psi}{2}, \quad t = \frac{\theta - \psi}{2}$$

y

$$v(\theta, \psi) = u\left(\frac{\theta + \psi}{2}, \frac{\theta - \psi}{2}\right).$$

Luego

$$\partial_{\theta}v = \frac{1}{2}u_x + \frac{1}{2}u_t \quad \text{y} \quad \partial_{\psi}v = \frac{1}{2}u_x - \frac{1}{2}u_t$$

Notemos que

$$\begin{aligned} \partial_{\psi}\partial_{\theta}v &= \partial_{\psi}\left(\frac{1}{2}u_x + \frac{1}{2}u_t\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}u_{xx} - \frac{1}{2}u_{xt}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}u_{xt} - \frac{1}{2}u_{tt}\right) \\ &= \frac{1}{4}(u_{xx} - u_{tt}) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Por lo que $v_{\theta\psi} = 0$, llegando a que v es de la forma $v = f(\theta) + g(\psi)$, donde f, g son funciones diferenciables arbitrarias. En consecuencia, regresando a nuestra ecuación inicial tenemos que

$$u(x, t) = f(x + t) + g(x - t).$$

Por el problema de valor inicial tenemos las condiciones

$$\begin{cases} u(x, 0) &= F(x) \\ u_t(x, 0) &= G(x) \end{cases}$$

Entonces

$$f(x) + g(x) = F(x) \quad \text{y} \quad f'(x) - g'(x) = G(x)$$

con lo que

$$f'(x) = \frac{F'(x) + G(x)}{2} \quad \text{y} \quad g'(x) = \frac{F'(x) - G(x)}{2}$$

Que al integrar se obtiene

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{2}\left(F(x) + \int_0^x G(\nu) d\nu\right) + K_1 \\ g(x) &= \frac{1}{2}\left(F(x) - \int_0^x G(\nu) d\nu\right) + K_2 \end{aligned}$$

en donde K_1 y K_2 son constantes de integración. Luego, la solución general es

$$\begin{aligned} u(x, t) &= f(x + t) + g(x - t) \\ &= \frac{1}{2}\left[F(x + t) + \int_0^{x+t} G(\nu) d\nu\right] + K_1 \\ &\quad + \frac{1}{2}\left[F(x - t) - \int_0^{x-t} G(\nu) d\nu\right] + K_2 \\ &= \frac{1}{2}\left[F(x + t) + F(x - t) + \int_{x-t}^{x+t} G(\nu) d\nu\right] + K_3 \end{aligned}$$

que, por las condiciones iniciales, tenemos $u(x, 0) = F(x) = F(x) + K_3$, por lo que $K_3 = 0$.

$$u(x, t) = \frac{1}{2}\left[F(x + t) - F(x - t) + \int_{x-t}^{x+t} G(\nu) d\nu\right]$$

Una importante observación es evidente de la fórmula anterior. El valor de la solución en (x_0, t_0) depende solo de los valores iniciales del eje X ubicados entre las líneas $x - t = x_0 - t_0$ y $x + t = x_0 + t_0$. A este segmento se le conoce como el intervalo de dependencia del punto (x_0, t_0) .

Muestra Imagen

Nota: La información viaja a velocidad finita en las soluciones de las ecuaciones hiperbólicas.

Por otro lado, la región de puntos (x, t) en donde la solución es influenciada por el punto inicial $(x_0, 0)$ es la región acotada por las líneas $x + t = x_0$ y $x - t = x_0$. A esto se le conoce como el *dominio de influencia* del punto $(x_0, 0)$.

así, vemos que las características ($x + t = Cte$ es la ecuación $u_{xx} - u_{tt} = 0$) juegan un rol básico en el desarrollo de soluciones para ecuaciones hiperbólicas.

Muestra Imagen

Lo siguiente lo medio inclui en el anexo 2

Sea $[x_0, x_1]$ una sección del ducto. Entonces la masa en $[x_0, x_1]$ es $\int_{x_0}^{x_1} u(x, t) dx$ y la razón de cambio de masa es $\frac{d}{dt} \int_{x_0}^{x_1} u(x, t) dx$.

Principio físico:

La razón de cambio de masa está dada por la cantidad de material que entra y sale por las fronteras dado por el flujo f .

Mostrar Imagen

Luego **Cositas que menciones en el anexo 2**

Creo que en esta parte es oportuno mencionar ciertos flujos y lo que modela, p.e. $f = f(u_x) = -vu_x$, la cual provoca la ecuación del calor que es parabólica.

Lo anterior fue de la página 6 de las notas

¿Qué pasa para ecuaciones más generales? Ya sean lineales o no lineales

Primero notemos que la ecuación de transporte

$$u_t + a u_x = 0,$$

con a constante, satisface el hecho de que cualquier solución de ésta es solución a una ecuación de onda

$$u_{tt} - a^2 u_{xx}$$

pues

$$u_{tt} = \partial_t(-a u_x) = -a \partial_x(u_t) = a^2 u_{xx}.$$

También notemos que la ecuación de onda es hiperbólica, $0 - 4 * 1 * (-a^2) = 4a^2 > 0$ independientemente del signo de a .

Analicemos entonces el problema de valor inicial con la ecuación de transporte

$$\begin{cases} u_t + au_x = 0 \\ u(x, t) = u_0(x) \end{cases}$$

La solución es

$$u(x, t) = u_0(x - at)$$

Mostrar Imagen

Ahora nos preguntamos, ¿qué sucedería si tenemos el coeficiente variable $a = a(x)$? Y más aún, ¿Podemos encontrar solución?

Para ello desarrollaremos y aplicaremos un procedimiento muy usado para intentar resolver muchos problemas de éste tipo y más generales, el *método de las características*.

Busquemos una curva $(x(t), t)$ en el espacio fase en donde $u(x, t)$ es constante

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{d}{dt}u(x(t), t) \\ &= u_x \frac{dx}{dt} + u_t \end{aligned}$$

Por lo que al comparar con nuestro problema de coeficiente variable, la ecuación para la curva característica en este caso es

$$\frac{dx}{dt} = a(x(t))$$

la cual es una ecuación diferencial ordinaria.

Observemos que, si $a = \text{Cte.}$, entonces $x(t) = x_0 + at$. Por lo que si $u(x, t)$ es constante sobre la curva, en particular $u(x, t) = u_0(x_0)$, donde $x_0 = x - at$; y por lo tanto

$$u(x, t) = u_0(x - at)$$

Otro caso es si $a(x) = x$. La ecuación característica es

$$\frac{dx}{dt} = x'(t) = a(x(t)) = x(t),$$

con lo que la curva característica resulta ser $x(t) = x_0 e^t$. La solución general del problema de valor inicial resulta ser $u(x, t) = u_0(x e^{-t})$.

En general, $\frac{dx}{dt} = a(x(t))$ se puede resolver por separación de variables.

Notemos que por el teorema de existencia y unicidad de EDO's podemos ver que dos curvas características con condiciones iniciales distintas nunca se intersectan. Sin embargo, esto no se garantiza con ecuaciones no-lineales.

Cuando dos curvas caracterpisticas chocan, podemos tener la formación de discontinuidades.

Como podemos ver, la información se propaga a velocidad finita en ecuaciones hiperbólicas, pero también veremos que esta información viaja a distintas velocidades en distintas partes del dominio en ecuaciones no-lineales.

¿Qué ocurre en sistemas no-lineales?

Motivación física: Consideremos leyes de conservación escalares.

Consideremos un ducto con sección transversal suficientemente corta con respecto a la longitud del ducto, de tal forma que el material que está pasando con densidad $u(x, t)$ no varía mucho en la sección transversal.

De ésta manera, el ducto se puede considerar unidimensional, sea x la posición axial del ducto y t el tiempo.

Supongamos que el fluido que está pasando por el ducto está sujeto a una dinámica con un flujo expresado en masa por unidad de área por unidad de tiempo dado por la función f . Así, $u = u(x, t)$ es la densidad en x a tiempo t y f es el flujo. Si $f > 0$ el flujo se mueve a la derecha; respectivamente si $f < 0$ el flujo se mueve a la izquierda.

Vamos a considerar un principio de conservación de masa

Conservación: Caso hiperbólico $f = f(u)$.

Esto puedo representarlo mejor con el libro de LeVeque

Si u es la densidad entonces

$$\int_{x_0}^{x_1} u(x, t) dx$$

es la masa en $[x_0, x_1]$ al tiempo t .

$$\frac{d}{dt} \int_{x_0}^{x_1} u(x, t) dx$$

es la razón de cambio de masa.

Ley: La razón de cambio de masa resulta del material que entra y sale de acuerdo al flujo f por las fronteras ($x = x_0, x = x_1$).

Matemáticamente

de nuevo, esto lo puedo encontrar en el apendice 1

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{x_0}^{x_1} u(x, t) dx &= -f(u(x_1, t)) + f(u(x_0, t)) \\ &= - \int_{x_0}^{x_1} \partial_x f(u(x, t)) dx \end{aligned}$$

con lo que

$$\int_{x_0}^{x_1} [\partial_t u + \partial_x (f(u(x, t)))] dx = 0$$

como suponemos que u y f son suaves y al recordar que $[x_0, x_1]$ fue arbitrario, se concluye la *Ley de conservación escalar*

$$\partial_t u + (f(u(x, t)))_x = 0$$

Las ecuaciones de tipo hiperbólico a menudo corresponden a funciones f que dependen explícitamente de u , osea $f = f(u)$.

Por ejemplo, $f(u) = au$, que es lineal y nos produce la ecuación de transporte.

La ecuación no lineal más sencilla y conocida es cuando $f(u) = \frac{1}{2}u^2$, que es llamada *ecuación de Burgers*

$$u_t + uu_x = 0.$$

Puedo complementar con el libro el siguiente ejemplo Podemos preguntarnos en que contexto surge ésta ecuación, para ello tenemos le siguiente ejemplo

Sea $D \subset \mathbb{R}$ un dominio y un fluido moviendose dentro. Sea $\rho = \rho(x, t)$ la densidad en $x \in D$ a tiempo t , y $y = (u, v, w)$

Volviendo a la ecuación de Burgers

Calculemos la solución usando el método de las curvas características.

$$\begin{cases} u_t + uu_x = 0 \\ u(x, 0) = u_0(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ x, & 0 < x \leq 1 \\ 2 - x, & 1 \leq x \leq 2 \\ 0, & x > 2 \end{cases} \end{cases}$$

Mostrar Imagen La ecuación de la curva característica es

$$\frac{dx}{dt} = u(x(t), t)$$

pues al calcular la derivada total de u

$$0 = \frac{d}{dt}u(x(t), t) = u_t + \frac{dx}{dt}u_x$$

Como

3. Ecuaciones Cuasilineales

Breve introducción al capítulo

¿Qué son? Habla de los sistemas

3.1. Intro

4. Método de Características

4.1.

5. Leyes de COnservación Hiperbólicas

Breve introducción al capítulo

¿Qué motiva su clasificación? Hablar de lo siguiente:

5.1.

6. Métodos Numéricos

Breve introducción al capítulo

¿Qué motiva?

6.1.

7. Anexos

7.1. Esquema General de las Leyes de Conservación

Consideramos un medio líquido, gas o sólido que ocupa una región o dominio (abierto y conexo) $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, donde n es la dimensión del espacio.

Denotamos

$$u = u(x, t), \quad x \in \Omega, \quad t \geq 0$$

a una función, llamada *función de estado*, la cual dependiendo del problema podrá representar temperatura o bien, la concentración de una sustancia, etc. Para el análisis de las leyes de conservación, se requiere un dominio de balance escogido arbitrariamente $\Omega' \subset \Omega$, y un intervalo de tiempo arbitrario $[t_1, t_2]$.

En general, u puede ser función vectorial: $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$. En particular para u es una función escalar para $n = 1$.

El caso u escalar, incluye también, en general, una función fuente escalar $f = f(x, t)$, $f : \Omega \times [0, t] \rightarrow \mathbb{R}$ y un campo vectorial flujo, $\phi(x, t)$, $\phi : \Omega \times [0, t] \rightarrow \mathbb{R}^n$.

Por ejemplo, si u representa la temperatura, f podría representar una fuente interna de calor, por ejemplo, una corriente eléctrica en el alambre y ϕ representa una ley física que determina la manera como cambia u , por ejemplo, la ley de calor de Fourier.

La ley básica de balance establece que el cambio total de la cantidad u contenida en Ω' entre los tiempos t_1 y t_2 debe igualar el flujo total a través de la frontera Ω' entre los tiempos t_1 y t_2 y el incremento o decremento de la cantidad u produciendo por la fuente f , dentro de Ω' en el mismo intervalo de tiempo. En forma matemática esto queda expresado como

$$\int_{\Omega'} u(x, t_2) dx - \int_{\Omega'} u(x, t_1) dx = - \int_{t_1}^{t_2} \int_{\partial\Omega'} \phi(x, t) \cdot \mathbf{n} dS dt + \int_{t_1}^{t_2} \int_{\Omega'} f(x, t) dx dt.$$

Si se supone que u tiene primera derivada continua respecto de t , por medio del teorema fundamental del cálculo y del teorema de Fubini se obtiene

$$\int_{\Omega'} \frac{\partial}{\partial t} u(x, t) dx = - \int_{\partial\Omega'} \phi(x, t) \cdot \mathbf{n} dS + \int_{\Omega'} f(x, t) dx.$$

Al utilizar el teorema de la divergencia, podemos escribir

$$\int_{\Omega'} \left(\frac{\partial}{\partial t} u(x, t) + \operatorname{div} \phi(x, t) - f(x, t) \right) dx = 0.$$

La cual es la *forma global o integral de la ley de conservación evolutiva*. Si se supone la continuidad del integrando, dado que la región $\Omega' \subset \Omega$ fue arbitraria, se obtiene la *forma local o diferencial de la ley de conservación evolutiva*

$$u_t(x, t) + \operatorname{div} \phi(x, t) - f(x, t) = 0.$$

7.2. Ecuación de Burgers

Una ecuación cuasilineal de primer orden muy importante es la *ecuación de Burgers*

$$u_t + u u_x = 0,$$

la cual es una EDP no lineal que se obtiene al sustituir en la ley de conservación evolutiva $f \equiv 0$ y $\phi = u^2/2$.

Más generalmente la ecuación

$$u_t + g(u) u_x = 0$$

se ha usado para modelar el tráfico de automóviles en una vía muy transitada, la dinámica de ciertos gases o en el modelado de la esquistosomiasis. En el caso del tráfico $\nabla \phi$ representa la cantidad de automóviles que pasan por un punto dado y es función de la densidad de automóviles u . Diferentes funciones g se han encontrado experimentalmente y ejemplos sencillos han sido extensivamente estudiados, por ejemplo,

$$\begin{aligned} g(u) &= cu(1-u) \\ g(u) &= cu && \text{flujo lineal} \\ g(u) &= u^2/2 && \text{flujo cuadrático.} \end{aligned}$$

La ecuación

$$u_t + g(u) u_x = 0$$

puede ser resuelta por el método de las características.

Tenemos el sistema característico

$$\begin{aligned} \frac{dt}{d\tau}(s, \tau) &= 1, \\ \frac{dx}{d\tau}(s, \tau) &= g(u(s, \tau)), \\ \frac{du}{d\tau}(s, \tau) &= 0. \end{aligned}$$

Así $u(s, \tau) = c_1$, $t(s, \tau) = \tau + c_2$ y $x(s, \tau) = g(c_1)\tau + c_3$. Si se dan las condiciones iniciales para $\tau = 0$

$$x(s, 0) = x_0(s), \quad t(s, 0) = t_0(s) \quad \text{y} \quad u(s, 0) = u_0(s),$$

se obtiene la solución

$$\begin{aligned} t(s, \tau) &= \tau + t_0(s) \\ x(s, \tau) &= g(u_0(s))\tau + x_0(s) \\ u(s, \tau) &= u_0(s). \end{aligned}$$

Ejemplo: Resuelva el problema de valor inicial

$$u_t + uu_x = 0$$

$$u(x, 0) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ 1, & x \geq 0. \end{cases}$$

Para este problema la condición inicial puede ser representada paramétricamente como

$$t(s, 0) = 0, \quad x(s, 0) = s, \quad u(s, 0) = u(x(s, 0), 0)$$

Para las características tenemos el sistema

$$\begin{aligned} \frac{dt}{d\tau}(s, \tau) &= 1, \\ \frac{dx}{d\tau}(s, \tau) &= u(s, \tau), \\ \frac{du}{d\tau}(s, \tau) &= 0. \end{aligned}$$

Al integrar se obtiene

$$\begin{aligned} t(s, \tau) &= \tau, \\ u(s, \tau) &= u(s, 0) = \begin{cases} 0, & s < 0, \\ 1, & s \geq 0. \end{cases} \\ x(s, \tau) &= s + \tau \cdot \begin{cases} 0, & s < 0, \\ 1, & s \geq 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Las características pueden construirse ahora partiendo de las condiciones iniciales; por ejemplo, la característica que pasa por el punto $(-2, 0)$ es $x = -2$ y la característica que pasa por $(2, 0)$ es $x = 2 + t$. Entonces tenemos $u(-2, t) = 0$ y $u(2 + t, t) = 1$, para $t > 0$. De esta manera se ha obtenido la solución del problema en forma paramétrica.

Índice de figuras

Índice de extractos de código

8. Bibliografía
