UNIVERSIDAD DE GUANAJUATO

TRABAJO FIN DE GRADO

Título del trabajo

Realizado por
Guillermo Alberto Jiménez Frías

Para la obtención del título de
Grado en Licenciatura en Matemáticas

Dirigido por
Nombre del profesor tutor

Realizado en el departamento de
Matemáticas de la UG

Verano 2022

Agradecimientos

Quiero agradecer a X por...

También quiero agradecer a Y por...

Resumen

Incluya aquí un resumen de los aspectos generales de su trabajo, en español.

Palabras clave: Palabra clave 1, palabra clave 2, ..., palabra clave N

Abstract

This section should contain an English version of the Spanish abstract.

Keywords: Keyword 1, keyword 2, ..., keyword N

Índice general

1. Introducción

2. Clasificación de EDPs

Breve introducción al capítulo

¿Qué motiva su clasificación? Hablar de lo siguiente:

2.1. Clasificación de Problemas Físicos

Los problemas en física e ingeniería se clasifican en general en tres categorías: **problemas de equilibrio, problemas de eigenvalores y problemas de propagación.**

Los problemas de equilibrio son problemas estado estacionarios en los cuales la configuración de equilibrio ϕ en un dominio D esta determinada al resolver la ecuación diferencial

$$L[\phi] = f \qquad \text{en} \quad D,$$

sujeta a condiciones de frontera

$$B_t[\phi] = g_t.$$

Entre los ejemplos se incluyen flujos estacionarios viscosos, distribuciones de temperatura estacionaria, equilibrio de tensión en estructuras elasticas. Aunque haya una aparente diversidad en tales problemas, las ecuaciones que gobiernan problemas de equilibrio son *elipticas*.

Problemas de valores propios pueden ser pensados como extensiones de problemas de equilibrio en los que se deben determinar los valores criticos de ciertos parámetros además de las configuraciones de estado estacionario correspondientes.

Matemáticamente, debemos encontrar constantes $\lambda \in \mathbb{R}$, y funciones correspondientes ϕ, tales que la ecuacion diferencial

$$L[\phi] = \lambda M[\phi] \qquad \text{en}\, D,$$

y las condiciones de frontera

$$B_t[\phi] = \lambda E_t[\phi] \qquad \text{en}\partial D$$

Ejemplos típicos incluyen pandeo y estabilidad de estructuras, resonancia en circuitos electricos y acusticos problemas de frecuencia natural en vibraciones.

Los operadores L y M son de tipo elípticos.

Problemas de propagación son problemas de valor inicial que tienen una naturaleza transitiva o de estado no estacionario. La intención es predecir el comportamiento de un sistema a partir de un sistema inicial. Lo cual puede ser hecho al resolver la ecuación diferencial

$$L[\phi]f \qquad \text{en} D$$

con las condiciones iniciales

$$I_t[\phi] = h_t$$

y sujeta a las condiciones

$$B_t[\phi] = g_t$$

con fronteras abiertas. D es abierto.

Show a Picture

Ejemplos típicos incluyen incluyen la propagación de ondas de presión en un fluido, propagación de calor, y el desarrollo de vibraciones auto-exitadas. Todos estos problemas son de tipo *parabolico* o *hiperbolico*.

2.2. Clasificación de Ecuaciones

Dentro de los problemas arriba descritos, se pueden presentar diferentes ecuaciones que también se pueden clasificar dependiendo del tipo de comportamiento. Para ello se requiere desarrollar el concepto de **características**.

Sean $a_1, a_2, \ldots, f_1, f_2$ funciones de $x, y, u(x, y)$ y $v(x, y)$ y consideremos el siguiente sistema simultáneo de primer orden cuasi-lineal.

$$\begin{aligned} a_1\, u_x + b_1\, u_y + c_1\, v_x + d_1\, v_y &= f_1 \\ a_2\, u_x + b_2\, u_y + c_2\, v_x + d_2\, v_y &= f_2 \end{aligned}$$

Nota: Un sistema de ecuaciones cuasi-lineal es aquel en el que las derivadas de orden más alto ocurren de manera lineal.

El sistema de ecuaciones de arriba es lo suficientemente general para representar muchos de los problemas científicos en donde los modelos matemáticos son de segundo orden.

Supongamos que la solución para u y v es conocida del estado inicial en alguna Γ. (Por ahora nos limitamos a considerar un dominio en el cual las discontinuidades en Γ no ocurren). Para algún punto P en la curva Γ nosotros conocemos las derivas de u y v y sus derivadas direccionales en las direcciones bajo la curva.

En general, si la solución existe en todos los puntos, la derivada direccional de u en la dirección w sería $\nabla u \cdot w$.

Incluir Imagen

Ahora, queremos saber si el comportamiento de la solución arriba de P esta únicamente determinado por la información debajo y sobre la curva. Esto es, nos preguntamos si los datos son suficientes para determinar la derivada direccional en P en direcciones que se encuentran por encima de la curva.

Para ello, sea θ el álgulo con la horizontal que especifica una dirección en la cual σ mide la distancia. Si u_x y u_y son conocidas en P, la derivada direccional es

$$\begin{aligned} u_{\sigma|\theta} &= \nabla u \cdot (\cos\theta, \sin\theta) \\ &= u_x \cos\theta + u_y \sin\theta \\ &= u_x \frac{dx}{d\sigma} + u_y \frac{dy}{d\sigma}, \end{aligned}$$

por lo que debemos preguntarnos bajo que condiciones las derivadas u_x, u_y, v_x, y v_y son determinadas de forma única en P por los valores de u y v en Γ.

En P se satisface

$$\begin{aligned} du &= u_\sigma\, d\sigma = u_x\, dx + u_y\, dy \\ dv &= v_\sigma\, d\sigma = v_x\, dx + v_y\, dy \end{aligned}$$

y junto con el sistema de ecuaciones para u y v, tenemos el sistema en forma matricial

$$\begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ dx & dy & 0 & 0 \\ 0 & 0 & dx & dy \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_x \\ u_y \\ v_x \\ v_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ du \\ dv \end{bmatrix}$$

Con u y v conocidos en P las funciones coeficiente $a_1, a_2, \ldots, f_1, f_2$ son conocidas. Con las direcciones de Γ conocidas, dx, dy son conocidas; y si u y v son conocidas a lo largo de Γ, du, dv son también conocidas. Por lo tanto, una solución única para u_x, u_y, v_x, v_y existe si la matriz tiene determinante distinto de cero.

El caso donde el determinante es cero, implica que una multiplicidad de soluciones es posible. Por tanto, las derivadas parciales no se determinan de manera única. En consecuencia, discontinuidades en las derivadas parciales pueden ocurrir al cruzar Γ.

De aquí surge la motivación de extender la teoría para poder considerar soluciones en donde tengamos estas situaciones, pues si hay discontinuidades la derivada no existe.

Al igualar el determinante a cero obtenermos la *ecuación característica*

$$(a_1c_1 - a_2c_1)(\,dy)^2 - (a_1d_2 - a_2d_1 + b_1c_2 - b_2c_1)\,dx\,dy + (b_1d_2 - b_2 - d_1)(\,dx)^2 = 0,$$

la cual es una ecuación cuadrática en $dy/\,dx$.

En resumen, si la curva Γ en P tiene una pendiente que satisface la ecuación característica, entonces las derivadas parciales u_xu_y, v_x, v_y no se determinan de manera única por los valores de u y v en Γ.

Las direcciones dadas por la ecuación característica son conocidas como **direcciones características**. Las direcciones caracteristicas pueden ser reales y distintas de cero, reales e identicas, o imaginarias dependiendo de si el discriminante

$$(a_1 d_2 - a_2 d_1 + b_1 c_2 - b_2 c_1)^2 - 4(a_1 c_2 - a_2 c_1)(b_1 d_2 - b_2 d_1)$$

es positivo, cero ó negativo.

Este también es un criterio para clasificar el sistema de ecuaciones como **hiperbólico, parabólico ó elíptico**, respectivamente.

El sistema es *hiperbólico* si el discriminante es positivo, es decir, si hay dos direcciones reales características. Es *parabólico* si el discriminante es cero, y *elíptico* si no tiene direcciones características reales.

Ahora, consideremos una ecuación cuasi-lineal de segundo orden

$$a\, u_{xx} + b\, u_{xy} + c\, u_{yy} = f,$$

donde a, b, c, f son funciones de x, y, y, u_x y u_y.

Podemos obtener una clasificación de esta ecuación al transformarla a un sistema de ecuaciones de primer orden. También se puede hacer de manera directa. Para ello, vamos a pedir la condición de que los valores de u, u_x y u_y en Γ sea suficientes para determinar u_{xx}, u_{xy} y u_{yy} de manera única de tal forma que la ecuación de arriba se satisfaga. Nos podemos convencer de esto último al pasar al sistema lineal.

Si tales derivadas existen, debemos tener que

$$\begin{aligned} d(u_x) &= u_{xx}\, dx + u_{xy}\, dy \\ d(u_y) &= u_{xy}\, dx + u_{yy}\, dy \end{aligned}$$

Entonces tenemos

$$\begin{bmatrix} a & b & c \\ dx & dy & 0 \\ 0 & dx & dy \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{xx} \\ u_{xy} \\ u_{yy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f \\ d(u_x) \\ d(u_y). \end{bmatrix}$$

Por lo que la solución para u_{xx}, u_{xy}, u_{yy} existe y es única a menos de que el determinante de la matriz sea cero, esto es

$$a(\, dy)^2 - d(\, dy)(\, dx) + c(\, dx)^2 = 0$$

en este caso, a ecuación $a\, u_{xx} + b\, u_{xy} + c\, u_{yy} = f$ es **hiperbólico** si $b^2 - 4ac > 0$, **parabólico** si $b^2 - 4ac = 0$ y **elíptica** si $b^2 - 4ac < 0$.

Hay que notar que a, b, c son funciones de x, y, u, u_x, u_y, por lo que una ecuaciónn puede cambiar su tipo dependiendo de la región donde se evaluen.

En el caso hiperbólico, existen dos curvas características reales. Dado que las derivadas de orden alto están indeterminadas a lo largo de esas curvas, ellas proveen caminos para la propagación de discontinuidades. Las ondas de choque y otras discontinuidades se puede propagar por las características.

Considere la ecuación de onda

$$u_{xx} - \alpha^2 u_{yy} = 0, \qquad \alpha \in \mathbb{R}$$

las curvas características son

$$(\,dy)^2 - \alpha^2(\,dx)^2 = 0$$

con lo que

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = \alpha^2$$

por lo que

$$y \pm \alpha x = \beta$$

la cuales son lineas rectas.

Como ejemplo más complejo, consideremos las ecuaciones para un flujo de gas irrotacional isentrópico en 2D

$$\begin{aligned} uu_x + vu_y + \rho^{-1}p_x &= 0 \\ uv_x + vv_y + \rho^{-1}p_y &= 0 \\ (\rho u)_x + (\rho v)_y &= 0 \\ v_x + u_y &= 0 \end{aligned}$$

$$p\rho^{-\gamma} = Cte, \qquad \frac{dp}{d\rho} = c^2$$

donde (u, v) es la velocidad, p es la presión, ρ densidad, c es la velocidad del sonido y γ razón de calores específicos ($\gamma = 1{,}4$).

Esto implica

$$(u^2 - c^2)u_x + (uv)u_y + (uv)v_x + (v^2 - c^2)v_y - u_y + v_x = 0.$$

Sea $5c^2 = 6(c*)^2 - (u^2 + v^2)$, donde $c*$ es una velocidad del sonido referencia que corresponde a la velocidad del sonido cuando la velocidad dle flujo $[(u^2 + v^2)]^{1/2}$ es igual a c.

El problema se puede poner en forma adimensional definiendo

$$u' = u/c*, \quad v' = v/c*, \quad c' = c/c*, \quad x' = x/l, \quad y' = y/l,$$

donde l es la mitad del ancho del dominio.

Sustituyendo las formas adimensionales y eliminando las primas, tenemos la ecuación de arriba con

$$c^2 = 1{,}2 - 0{,}2\,(u^2 + v^2)$$

lo que implica

$$\begin{bmatrix} u^2-c^2 & uv & uv & v^2-c^2 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ dx & dy & 0 & 0 \\ 0 & 0 & dx & dy \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_x \\ u_y \\ v_x \\ v_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ du \\ dv \end{bmatrix}.$$

Las curvas carateristícas están dadas por

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_+ = \frac{uv + c[u^2+v^2-c^2]^{1/2}}{u^2-c^2}$$
$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_- = \frac{uv - c[u^2+v^2-c^2]^{1/2}}{u^2-c^2}$$

Cuando el flujo es subsónico, $u^2+v^2 < c^2$, las características son complejas , y la ecuación es por lo tanto elíptica. El número de Frobenious es $Fr = \frac{u^2+v^2}{c^2} < 1$. s Cuando el flujo es transónico $u^2+v^2 = c^2$, por lo que la ecuación es parabólica y $Fr = 1$.

Cuando el flujo es supersónico $u^2+v^2 > c^2$, por lo que la ecuación es hiperbólica y $Fr > 1$.

Ecuaciones Hiperbólicas

Muchos problemas de valor inicial que consisten en propagaciones se pueden describir por *ecuaciones hiperbólicas*. Estas surgen en problemas de transporte como mecánica de ondas, dinámica de gases, vibraciones, entre otras áreas.

Para iniciar el análisis de éstas ecuaciones, consideremos la ecuación de onda

$$u_{tt} - u_{xx} = 0$$

donde la solución se puede calcular de manera directa a través de la *formula de D'Alembert.*

Supongamos que u es lo suficientemente suave de tal forma que u_{tt} y u_{xx} son continuas. Consideremos el siguiente cambio de coordenadas

$$\theta = x+t, \quad \psi = x-t, \quad u(x,t) = v(\theta,\psi)$$

entonces

$$x = \frac{\theta+\psi}{2}, \qquad t = \frac{\theta-\psi}{2}$$

y

$$v(\theta,\psi) = u\left(\frac{\theta+\psi}{2}, \frac{\theta-\psi}{2}\right).$$

Luego

$$\partial_\theta v = \frac{1}{2}u_x + \frac{1}{2}u_t \qquad \text{y} \qquad \partial_\psi v = \frac{1}{2}u_x - \frac{1}{2}u_t$$

Notemos que

$$\begin{aligned}
\partial_\psi \partial_\theta v &= \partial_\psi \left(\frac{1}{2}u_x + \frac{1}{2}u_t\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}u_{xx} - \frac{1}{2}u_{xt}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}u_{xt} - \frac{1}{2}u_{tt}\right) \\
&= \frac{1}{4}\left(u_{xx} - u_{tt}\right) \\
&= 0
\end{aligned}$$

Por lo que $v_{\theta\psi} = 0$, llegando a que v es de la forma $v = f(\theta) + g(\psi)$, donde f, g son funciones diferenciables arbitrarias. En consecuencia, regresando a nuestra ecuación inicial tenemos que

$$u(x,t) = f(x+t) + g(x-t).$$

Por el problema de valor inicial tenemos las condiciones

$$\begin{cases} u(x,0) &= F(x) \\ u_t(x,0) &= G(x) \end{cases}$$

Entonces

$$f(x) + g(x) = F(x) \qquad \text{y} \qquad f'(x) - g'(x) = G(x)$$

con lo que

$$f'(x) = \frac{F'(x) + G(x)}{2} \qquad \text{y} \qquad g'(x) = \frac{F'(x) - G(x)}{2}$$

Que al integrar se obtiene

$$\begin{aligned}
f(x) &= \frac{1}{2}\left(F(x) + \int_0^x G(\nu)\,d\nu\right) + K_1 \\
g(x) &= \frac{1}{2}\left(F(x) - \int_0^x G(\nu)\,d\nu\right) + K_2
\end{aligned}$$

en donde K_1 y K_2 son constantes de integración. Luego, la solución general es

$$\begin{aligned}
u(x,t) &= f(x+t) + g(x-t) \\
&= \frac{1}{2}\left[F(x+t) + \int_0^{x+t} G(\nu)\,d\nu\right] + K_1 \\
&+ \frac{1}{2}\left[F(x-t) - \int_0^{x+t} G(\nu)\,d\nu\right] + K_2 \\
&= \frac{1}{2}\left[F(x+t) + F(x-t) + \int_{x-t}^{x+t} G(\nu)\,d\nu\right] + K_3
\end{aligned}$$

que, por las condiciones iniciales, tenemos $u(x,0) = F(x) = F(x) + K_3$, por lo que $E = 0$.

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\left[F(x+t) - F(x-t) + \int_{x-t}^{x+t} G(\nu)\,d\nu\right]$$

Una importante observación es evidente de la fórmula anterior. El valor de la solución en (x_0, t_0) dependende solo de los valores iniciales del eje X ubicados entre las lineas $x - t = x_0 - t_0$ y $x + t = x_0 + t_0$. A este segmento se le conoce como el intervalo de dependencia del punto (x_0, t_0).

Muestra Imagen

Nota: La información viaja a velocidad finita en las soluciones de las ecuaciones hiperbólicas.

Por otro lado, la región de puntos (x, t) en donde la solución es influenciada por el punto inicial $(x_0, 0)$ es la región acotada por las líneas $x + t = x_0$ y $x - t = x_0$. A esto se le conoce como el *dominio de influencia* del punto $(x_0, 0)$.

así, vemos que las características ($x+t = Cte$ es la ecuación $u_{xx} - u_{tt} = 0$) juegan un rol básico en el desarrollo de soluciones para ecuaciones hiperbólicas.

Muestra Imagen

Lo siguiente lo medio inclui en el anexo 2

Sea $[x_0, x_1]$ una sección del ducto. Entonces la masa en $[x_0, x_1]$ es $\int_{x_0}^{x_1} u(x,t)\,dx$ y la razón de cambio de masa es $\frac{d}{dt}\int_{x_0}^{x_1} u(x,t)\,dx$.

Principio físico:

La razón de cambio de masa está dada por la cantidad de material que entra y sale por las fronteras dado poe el flujo f.

Mostrar Imagen

Luego **Cositas que menciones en el anexo 2**

Creo que en esta parte es oportuno mencionar ciertos flujos y lo que modela, p.e. $f = f(u_x) = -vu_x$, la cual provoca la ecuación del calor que es parabólica.

Lo anterior fue de la págin 6 de las notas

¿Qué pasa para ecuaciones más generales? Ya sean lineales o no lineales

Primero notemos que la ecuación de transporte

$$u_t + a\,u_x = 0,$$

con a constante, satisface el hecho de que cualquier solución de ésta es solución a una ecuación de onda

$$u_{tt} - a^2 u_{xx}$$

pues

$$u_{tt} = \partial_t(-a\,u_x) = -a\partial_x(u_t) = a^2\,u_{xx}.$$

También notemos que la ecuación de onda es hiperbólica, $0 - 4 * 1 * (-a^2) = 4a^2 > 0$ independientemente del signo de a.

Analicemos entonces el problema de valor inicial con la ecuación de transporte

$$\begin{cases} u_t + a u_x = 0 \\ u(x,t) = u_0(x) \end{cases}$$

La solución es

$$u(x,t) = u_0(x - a\,t)$$

Mostrar Imagen

Ahora nos preguntamos, ¿qué suscedería si tenemos el coeficiente variable $a = a(x)$? Y más aún, ¿Podemos encontrar solución?

Para ello desarrolaremos y aplicaremos un procedimiento muy usado para intentar resolver muchos problemas de éste tipo y más generales, el *método de las características*.

Busquemos una curva $(x(t), t)$ en el espacio fase en donde $u(x,t)$ es constante

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{d}{dt} u(x(t), t) \\ &= u_x \frac{dx}{dt} + u_t \end{aligned}$$

Por lo que al comparar con nuestro problema de coeficiente variable, la ecuación para la curva característica en este caso es

$$\frac{dx}{dt} = a(x(t))$$

la cual es una ecuación diferencial ordinaria.

Observemos que, si $a =$Cte., entonces $x(t) = x_0 + at$. Por lo que si $u(x,t)$ es constante sobre la curva, en particular $u(x,t) = u_0(x_0)$, donde $x_0 = x - at$; y por lo tanto

$$u(x,t) = u_0(x - at)$$

Otro caso es si $a(x) = x$. La ecuación característica es

$$\frac{dx}{dt} = x'(t) = a(x(t)) = x(t),$$

con lo que la curva característica resulta ser $x(t) = x_0\, e^t$. La solución general del problema de valor inicial resulta ser $u(x,t) = u_0(x\, e^{-t})$.

En general, $\frac{dx}{dt} = a(x(t))$ se puede serolver por separación de variables.

Notemos que por el teorema de existencia y unicidad de EDO's podemos ver que dos curvas características con condiciones iniciales distintas nunca se intersectan. Sin embargo, esto no se garantiza con ecuaciones no-lineales.

Cuando dos curvas caracterpisticas chocan, podemos tener la formación de discontinuidades.

Como podemos ver, la información se propaga a velocidad finita en ecuaciojnes hiperbólicas, pero también veremos que esta información viaja a distintas velocidades en distintas partes del dominio en ecuaciones no-lineales.

¿Qué ocurre en sistemas no-lineales?

Motivación física: Consideremos leyes de conservación escalares.

Consideremos un ducto con sección transversal suficientemente corta con respecto a la longitud del ducto, de tal forma que el material que está pasando con densidad $u(x,t)$ no varía mucho en la sección transversal.

De ésta manera, el ducto se puede considerar unidimensional, sea x la posición axial del ducto y t el tiempo.

SUpongamos que el fluido que está pasando por el ducto está sujeto a una dinámica con un flujo expresado en masa por unidad de área por unidad de tiempo dado por la función f. Así, $u = u(x,t)$ es la densidad en x a tiempo t y f es el flujo. Si $f > 0$ el flujo se mueve a la derecha; respectivamente si $f < 0$ el flujo se mueve a la izquierda.

Vamos a considerar un principio de conservación de masa

Conservación: Caso hiperbólico $f = f(u)$.

Esto puedo representarlo mejor con el libro de LeVeque

Si u es la densidad entonces

$$\int_{x_0}^{x_1} u(x,t)\,dx$$

es la masa en $[x_0, x_1]$ al tiempo t.

$$\frac{d}{dt}\int_{x_0}^{x_1} u(x,t)\,dx$$

es la razón de cambio de masa.

Ley: La razón de cambio de masa resulta del material que entra y sale de acuerdo al flujo f por las frotneras $(x = x_0, x = x_1)$.

Matemáticamente

de nuevo, esto lo puedo encontrar en el apendice 1

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\int_{x_0}^{x_1} u(x,t)\,dx &= -f(u(x_1,t)) + f(u(x_0,t)) \\ &= -\int_{x_0}^{x_1} \partial_x f(u(x,t))\,dx\end{aligned}$$

con lo que

$$\int_{x_0}^{x_1} \left[\partial_t u + \partial_x(f(u(x,t)))\right]\,dx = 0$$

como suponemos que u y f son suaves y al recordar que $[x_0, x_1]$ fue arbitrario, se concluye la *Ley de conservación escalar*

$$\partial_t u + (f(u(x,t)))_x = 0$$

Las ecuaciónes de tipo hiperbólico a menudo corresponden a funciones f que dependen explícitamente de u, osea $f = f(u)$.

Por ejemplo, $f(u) = a\,u$, que es lineal y nos produce la ecuación de transporte.

La ecuación no lineal más sencilla y conocida es cuando $f(u) = \frac{1}{2}u^2$, que es llamada *ecuación de Burgers*

$$u_t + u\,u_x = 0.$$

Puedo complementar con el libro el siguiente ejemplo Podemos preguntarnos en que contexto surge ésta ecuación, para ello tenemos le siguiente ejemplo

Sea $D \subset \mathbb{R}$ un dominio y un fluido moviendose dentro. Sea $\rho = \rho(x,t)$ la densidad en $x \in D$ a tiempo t, y $= (u, v, w)$

Volviendo a la ecuación de Burgers

Calculemos la solución usando el método de las curvas características.

$$\begin{cases} u_t + uu_x = 0 \\ u(x,0) = u_0(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ x, & 0 < x \leq 1 \\ 2 - x, & 1 \leq x \leq 2 \\ 0, x > 2 \end{cases} \end{cases}$$

Mostrar Imagen La ecuación de la curva característica es

$$\frac{dx}{dt} = u(x(t), t)$$

pues al calcular la derivada total de u

$$0 = \frac{d}{dt}u(x(t), t) = u_t + \frac{dx}{dt}u_x$$

Como u es constante a lo largo de las características, en particular $u(x(t), t) = u(x_0, 0) = u_0(x_0)$. El sistema característico resulta en

$$\frac{dx(t)}{dt} = u_0(x_0)$$

la cual es independiente de t. Luego

$$x(t) = x_0 + u_0(x_0)t$$

Para encontrar la solución basta encontrar x_0 en términos de x y t, ya que u_0 es conocida.

2.3. Soluciones Débiles

Ley de conservación escalar: $u_t + f(u)_x = 0$, donde el flujo $f = f(u)$ es función explícita de u.

Nota: Si usamos el método de las curvas carcaterísticas, podemos verificar que es posible la formación de ondas de choque (discontinuidades) en la solución a tiempo finito.

Para llegar a la forma inegral de la ley de conservación, consideraremos un rectángulo en espacio fase $[x_0, x_1] \times [t_0, t_1]$ e integramos en esa área

$$0 = \int_{x_0}^{x_1} \int_{t_0}^{t_1} [u_t + (f(u))_x] \, dtdx$$

Llegamos a la fomra inegral de la ley de conservación la cual la podemos encontrar en el anexo 1.

Definición: Sea f una funcion suave de $u(x,t)$ integrable se dice que es una solución débil a la ley de conservación

$$u_t + (f(u))_x = 0$$

si u satisface la forma integral en el dominio de u.

Nota: Ésta condición no es muy práctica, pues se debe verificar para todo $x_0, x_1 \in \Omega$ y t_0, t_1.

Nota: Si $u \in \mathcal{C}^1$ y es solución débil, entonces también es solución fuerte (clásica), esto es, satisface la Ecuacion diferencial parcial.

Vamos a obtener condiciones de salto más practicas. Supongamos que el rectángulo

3. Ecuaciones Cuasilineales

Breve introducción al capítulo

¿Qué son? Habla de los sistemas

3.1. Intro

4. Método de Características

4.1.

El concepto de características fue introducido en [?]como vehículo para clasificar ecuaciones. En las secciones previas se mostró que ecuaciones hiperbólicas cuasilineales son sustancialmente simplificadas si las caracteríasticas son usadas. [**AMES**] se refiere a ellas como el sistema de coordenadas natural.

La razón básica que sustenta el uso de características es que, por una elección apropiada de coordenadas, el sistem orginal de ecuaciones hiperbólicas puede ser replanteado por un sistema cuyas coordenadas son las características.

Además, las simplificaciones son particularmente útiles cuando las aplicamos a ecuaciones de primer y segundo orden con dos variables independientes.

Nuestro principar interés es la ecuación cuasilineal de segundo orden

$$a\,u_{xx} + b\,u_{xy} + c\,u_{yy} = f$$

donde a, b, c y f son funciones de x, y, u, u_x, u_y.

5. Leyes de Conservación Hiperbólicas

Una ley de conservación es la formulación matemática de un principio de conservación derivado fisicamente; el cual, permite describir la evolución temporal de una cantidad de interés, por ejemplo, la temperatura, la presión de un fluido o la concentración de una sustancia química.

5.1. Leyes de Conservación

Un **sistema de leyes de conservación hiperbólico** es un sistema de EDP hiperbólico (SHLC) -usualmente no lineal-, con dependencia temporal de la forma

$$w_t + \sum_{j=1}^{d} f^j(w)_{x_j} = 0$$

que sea de tipo hiperbólico y donde

$$(\mathbf{x}, t) \in \mathbb{R}^d \times [0, \infty), \qquad w \in \Omega \subset \mathbb{R}^n, \qquad f^j \in \mathcal{C}^2(\Omega, \mathbb{R}^n) \quad j = 1, \ldots, d.$$

El término t se le conoce como *variable temporal* y $\mathbf{x}$ *variable espacial*; $w \in \mathbb{R}^n$ es el vector de *variables conservadas o estados*, Ω el conjunto de estados admisibles, y f^j son las funciones de flujo de la j-ésima componente espacial; $n \geq 1$ es el número de cantidades conservadas y $d \geq 1$ es la dimensión del espacio físico, para aplicaciones $d = 1, 2, 3$.

Si expresamos a $w = [u_1, \ldots, u_d]^T$, el sistema anterior expresa la conservación de las cantidades u_k, $1 \leq k \leq d$, en dominios arbitrarios del espacio físico, $\Omega \subset \mathbb{R}^d$. El flujo a través de $\partial\Omega$ de las variables conservadas w está determinado por las funciones de flujo $f^j(w)$.

Para presentar mejor las ideas que involucran los conceptos, consideremos el (SHLC) en una dimesión espacial

$$\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{u}(x, t) + \frac{\partial}{\partial x}\mathbf{f}(\mathbf{u}((x, t))) = 0.$$

Aquí $\mathbf{u} : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m$ es un vector de dimensión m de variables conservadas -o variables de estado-, como ejemplo estan la masa, el momento, y enegía -en un problema de dinámica de fluidos. Específicamente, cada componente u_j de $\mathbf{u}$ es la función de densidad de la j-ésima variable de estado. Tenemos la interpretación de que $\int_{x_1}^{x_2} u_j(x, t)dx$ es la cantidad total de la variable de estado u_j en el intervalo $[x_0, x_1]$ al tiempo t.

El hecho de que estas variables sean conservadas significa que $\int_{-\infty}^{\infty} u_j(x, t)dx$ debe permanecer constante al tiempo t, por lo que u_j representa la distribución espacial de la variable de estado al tiempo t la cual generalmente cambia respecto al tiempo.

El flujo de la j-ésima componente esta dado por alguna función $f_j(u(x,t))$ y, la función vector valuada $\mathbf{f}(\mathbf{u})$ -con componente $f_j(u)$- es llamada la **función de flujo** para el sistema de leyes de conservación, $\mathbf{f} : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$.

A la ecuación planetada deben proporcionarsele condiciones iniciales y, posiblemente también, condiciones de frontera en un dominio espacial acotado. El problema más simple que involucra al sistema es el **problema de Cauchy**

$$\begin{cases} \mathbf{u}_t + \mathbf{f}(\mathbf{u})_x = 0, & x \in \mathbb{R}, t \geq 0 \\ \mathbf{u}(x,0) = \mathbf{u}_0(x), & x \in \mathbb{R}\,. \end{cases}$$

Se dice que el sistema es **hiperbólico** cuando la matriz jacobiana de dimensión $m \times m$ formada por las derivadas de la función de flujo, $\mathbf{f}$'$(\mathbf{u})$, cumple para cada valor de $\mathbf{u}$, los valores propios de $\mathbf{f}$'$(\mathbf{u})$ son reales y la matriz es diagonalizable, es decir, existe un conjunto completo de m vectores porpios linealmente independientes.

Más adelante se mostrará el interés y la importancia de la propiedad de hiperbolicidad. Por ahora, un sistema de leyes de conservacion en dos dimensiones espaciales toma la forma

$$u_t + f(u)_x + g(u)_y = 0$$

donde $u : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m$ y con funciones de flujo $f, g : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$.

Sin embargo, la hiperbolicidad requiere, en este caso, que cualquier combinación lineal real $\alpha f'(u) + \beta g'(u)$ de los jacobianos de los flujos deba ser diagonalizable con valores reales.

En general, no es posible derivar soluciones exactas para éste tipo de soluciones y de ahí la necesidad de idear y estudiar métodos numéricos para su solución aproximada. Las excepciones son para el problema de Riemann, donde se puede calcular soluciones exactas, por lo que son de gran utilizadad para verificar la efectividad de métodos numéricos.

Mostremos, como primer ejemplo, las **ecuaciones de Euler para dinámica de gases.** En una dimensión, las ecuaciones tienen la siguiente forma

$$\frac{\partial}{\partial t}\begin{bmatrix} \rho \\ \rho v \\ E \end{bmatrix} + \frac{\partial}{\partial x}\begin{bmatrix} \rho v \\ \rho v^2 + p \\ v(E+p) \end{bmatrix} = 0$$

donde $\rho = \rho(x,t)$ es la densidad, v es la velocidad en dirección x, ρv es la densidad de momento lineal, E es la energía y p es la presión. La presión p esta dada por una función conocida de otra variable de estado -la relación funcional específica depende del gas y es llamada *la ecuación de estado*. Las ecuaciones de Euler son versiones simplificadas de las ecuaciones de Navier-Stokes al despreciar los términos viscosos.

Se moestrará en ? la derivación de las ecuaciones de Euler.

5.2. Sistemas

En forma cuasilineal, el sistema se escribe como

$$w_t + A(w)\, w_x = 0,$$

donde $A(w) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ es la matriz Jacobiana de $f(w)$.

Me gustaría incluir la derivación fenomenológica de la ecuación, no se si aqui o en el anexo

En este caso el sistema se dice que es **hiperbólico** si $A(w)$ tiene valores propios reales y un sistema de vectores propios completo, i.e. forman una base, para cada w.

Si A es constante, es decir independiente de w, entonces el sistema es lineal

$$w_t + A\, w_x = 0$$

Dado que A es diagonalizable, A se escribe como $R\Lambda R^{-1}$ con

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_a & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{bmatrix}, \qquad R = \begin{bmatrix} | & & | \\ r_1 & \cdots & r_n \\ | & & | \end{bmatrix},$$

donde λ_i es el valor propio asociado al vector propio r_i, para $1 \leq i \leq n$.

Notemos que el sistema lineal se puede expresar como $\partial_t v + \Lambda\, v_x = 0$, con $v = R^{-1} w$ pues

$$\begin{aligned} w_t + A(w)\, w_x &= 0 \\ \implies w_t + R\Lambda R^{-1}\, w_x &= 0 \\ \implies R^{-1} w_t + \Lambda R^{-1}\, w_x &= 0 \\ \implies \partial_t (R^{-1} w) + \Lambda \partial_x\, (R^{-1} w) &= 0 \\ \implies \partial_t v + \Lambda\, v_x &= 0 \end{aligned}$$

Si $v = [v_1, \ldots, v_n]^T$, entonces

$$\begin{aligned} &\partial_t v_1 + \lambda_1 \partial_x v_1 = 0, \\ &\vdots \\ &\partial_t v_n + \lambda_n \partial_x v_n = 0, \end{aligned}$$

Notemos que si tenemos un vector de condiciones iniciales $v_0 = [v_{\mathbf{0},1}, \ldots, v_{\mathbf{0},n}]^T$, tenemos que cada ecuación del sistema anterior tiene por solución

$$v_j = v_{\mathbf{0},j}(x - \lambda_j t),$$

5.3. Resumen

Éstos sistemas tienen la particularidad de que muchos modelos en las ciencias tienen ésta forma. Además, las soluciones suaves del sistema existen sólo localmente en el tiempo debido al fenómeno de rompimiento a tiempo finito. Por otro lado, no existe teoria matemática satisfactoria debido a que las posibles soluciones discontinuas carecen de unicidad. Por lo mismo, se requieren criterios adicionales para seleccionar soluciones "fisicamente relevantes", como la condición de entropía.

6. Métodos Numéricos

Cuando intentamos calcular soluciones numericamente nos enfrentamos a nuevos problemas. Esperamos que una discretización de diferencias finitas de la EDP sea inapropiada cerca de discontinuidades, donde la EDP no se mantiene. De hecho, al calcular soluciones discontinuas a leyes de conservación usando métodos estándares desarrollados bajo la hipótesis de soluciónes suaves, tipicmente obtenemos grandes oscilaciones numéricas incorrectas.

Seguimiento del choque. Desde que

6.1.

7. Anexos

7.1. Esquema General de las Leyes de Conservación

Consideramos un medio líquido, gas o sólido que ocupa una región o dominio (abierto y conexo) $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, donde n es la dimensión del espacio.

Denotamos

$$u = u(x,t), \qquad\qquad x \in \Omega, \quad t \geq 0$$

a una función, llamada *función de estado,* la cual dependiendo del problema podrá representar temperatura o bien, la concentración de una sustancia, etc. Para el análisis de las leyes de conservación, se requiere un dominio de balance escogido arbitrariamente $\Omega' \subset \Omega$, y un intervalo de tiempo arbitrario $[t_1, t_2]$.

En general, u puede ser función vectorial: $u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^n$. En particular para u es una función escalar para $n = 1$.

El caso u escalar, incluye también, en general, una función fuente escalar $f = f(x,t), f : \Omega \times [0,t) \longrightarrow \mathbb{R}$ y un campo vectorial flujo, $\phi(x,t), \phi : \Omega \times [0,t) \longrightarrow \mathbb{R}^n$.

Por ejemplo, si u representa la temperatura, f podría representar una fuente interna de calor, por ejemplo, una corriente eléctrica en el alambre y ϕ representa una ley física que determina la manera como cambia u, por ejemplo, la ley de calor de Fourier.

La ley básica de balance establece que el cambio total de la cantidad u contenida en Ω' entre los tiempos t_1 y t_2 debe igualar el flujo total a través de la frontera Ω' entre los tiempos t_1 y t_2 y el incremento o decremento de la cantidad u produciendo por la fuente f, dentro de Ω' en el mismo intervalo de tiempo. En forma matemática esto queda expresado como

$$\int_{\Omega'} u(x,t_2)\,dx - \int_{\Omega'} u(x,t_1)\,dx = -\int_{t_1}^{t_2}\int_{\partial\Omega'} \phi(x,t)\cdot \mathbf{n}\,dS\,dt + \int_{t_1}^{t_2}\int_{\Omega'} f(x,t)\,dx\,dt.$$

Si se supone que u tiene primera derivada continua respecto de t, por medio del teorema fundamental del cálculo y del teorema de Fubini se obtiene

$$\int_{\Omega'} \frac{\partial}{\partial t}u(x,t)\,dx = -\int_{\partial\Omega'} \phi(x,t)\cdot \mathbf{n}\,dS + \int_{\Omega'} f(x,t)\,dx.$$

Al utilizar el teorema de la divergencia, podemos escribir

$$\int_{\Omega'} \left(\frac{\partial}{\partial t}u(x,t) + \operatorname{div}\phi(x,t) - f(x,t)\right)\,dx = 0.$$

La cual es *la forma global o integral de la ley de conservación evolutiva.* Si se supone la continuidad del integrando, dado que la región $\Omega' \subset \Omega$ fue arbitraria, se obtiene *la forma local o diferencial de la ley de conservación evolutiva*

$$u_t(x,t) + \operatorname{div}\phi(x,t) - f(x,t) = 0.$$

7.2. Ecuación de Burgers

Una ecuación cuasilieneal de primer orden muy importante es la *ecuación de Burgers*

$$u_t + u\,u_x = 0,$$

la cual es una EDP no lineal que se obtiene al sustituir en la ley de de conservación evolutiva $f \equiv 0$ y $\phi = u^2/2$.

Más generalmente la ecuación

$$u_t + g(u)\,u_x = 0$$

se ha usado para modelar el tráfico de automóviles en una vía muy transitada, la dinámica de ciertos gases o en el modelado de la esquistosomiasis. En le caso del tráfico $\nabla\phi$ representa la cnatidad de automóviles que pasan por un punto dado y es función de la densidad de automóviles u. Diferentes funciones g se han econtrado experimentalmente y ejemplos sencillos han sido extensivamente estudiados, por ejemplo,

$$\begin{array}{ll} g(u) = cu(1-u) & \\ g(u) = cu & \text{flujo lineal} \\ g(u) = u^2/2 & \text{flujo cuadrático.} \end{array}$$

La ecuación

$$u_t + g(u)\,u_x = 0$$

puede ser resuelta por el método de las características.

Tenemos el sistema característico

$$\begin{aligned} &\frac{dt}{d\tau}(s,\tau) = 1, \\ &\frac{dx}{d\tau}(s,\tau) = g(u(s,\tau)), \\ &\frac{du}{d\tau}(s,\tau) = 0. \end{aligned}$$

Así $u(s,\tau) = c_1, t(s,\tau) = \tau + c_2$ y $x(s,\tau) = g(c_1)\tau + c_3$. Si se dan las condiciones iniciales para $\tau = 0$

$$x(s,0) = x_0(s), \quad t(s,0) = t_0(s) \quad \text{y} \quad u(s,0) = u_0(s),$$

se obtiene la solución

$$\begin{aligned} t(s,\tau) &= \tau + t_0(s) \\ x(s,\tau) &= g(u_0(s))\tau + x_0(s) \\ u(s,\tau) &= u_0(s). \end{aligned}$$

Ejemplo: Resuelva el problema de valor inicial

$$u_t + uu_x = 0$$

$$u(x,0) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ 1, & x \geq 0. \end{cases}$$

Para este problema la condición inicial puede ser representada paramétricamente como

$$t(s,0) = 0, \quad x(s,0) = s, \quad u(s,0) = u(x(s,0),0)$$

Para las características tenemos el sistema

$$\begin{aligned} &\frac{dt}{d\tau}(s,\tau) = 1, \\ &\frac{dx}{d\tau}(s,\tau) = u(s,\tau), \\ &\frac{du}{d\tau}(s,\tau) = 0. \end{aligned}$$

Al integrar se obtiene

$$\begin{aligned} t(s,\tau) &= \tau, \\ u(s,\tau) &= u(s,0) = \begin{cases} 0, & s < 0, \\ 1, & s \geq 0. \end{cases} \\ x(s,\tau) &= s + \tau \cdot \begin{cases} 0, & s < 0, \\ 1, & s \geq 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Las características pueden construirse ahora partiendo de las condiciones iniciales; por ejemplo, la característica que pasa por el punto $(-2,0)$ es $x = -2$ y la característica que pasa por $(2,0)$ es $x = 2 + t$. Entonces tenemos $u(-2,t) = 0$ y $u(2+t,t) = 1$, para $t > 0$. De esta manera se ha obtenido la solución del problema en forma paramétrica.

Índice de figuras

Índice de extractos de código

8. Bibliografía