

Rachid Mesar
Jamal Chaoufi
El Hanafi Arjdal

Mécanique des solides rigides

50 problèmes résolus avec rappels de cours



Mécanique des solides rigides

50 problèmes résolus avec rappels de cours

Rachid Mesrar
Jamal Chaoufi
El Hanafi Arjdal



Collection Références sciences

dirigée par Paul de Laboulaye
paul.delaboulaye@editions-ellipses.fr

Retrouvez tous les livres de la collection et des extraits sur www.editions-ellipses.fr



ISBN 9782340-047853

©Ellipses Édition Marketing S.A., 2021
8/10 rue la Quintinie 75015 Paris



Le Code de la propriété intellectuelle n'autorisant, aux termes de l'article L. 122-5.2° et 3°a), d'une part, que les « copies ou reproductions strictement réservées à l'usage privé du copiste et non destinées à une utilisation collective », et d'autre part, que les analyses et les courtes citations dans un but d'exemple et d'illustration, « toute représentation ou reproduction intégrale ou partielle faite sans le consentement de l'auteur ou de ses ayants droit ou ayants cause est illicite » (art. L. 122-4).

Cette représentation ou reproduction, par quelque procédé que ce soit constituerait une contrefaçon sanctionnée par les articles L. 335-2 et suivants du Code de la propriété intellectuelle.

Avant-propos

Cet ouvrage est le fruit d'un travail collectif, d'une équipe composée de trois enseignants chercheurs, qui ont conjugué leurs efforts, leur savoir-faire ainsi que leur expérience afin d'élaborer un manuel pédagogique utile pour les étudiants mais aussi pour les enseignants qui désirent préparer des travaux dirigés ou même proposer un examen à leurs étudiants. Il s'adresse aux étudiants de licence (L2 et L3) des universités françaises mais aussi à toutes les universités francophones. Il s'adresse également aux élèves des classes préparatoires aux grandes écoles d'ingénieurs, ainsi qu'aux étudiants des I.U.T. et B.T.S.

La première partie de l'ouvrage, est consacrée à des rappels de cours, certes succincts mais suffisamment clairs et complets. Ils sont suffisants pour aborder et résoudre les problèmes proposés dans la deuxième partie de ce livre. Le premier chapitre, de cette première partie, est consacrée à la notion fondamentale de torseur, parce qu'elle permet de présenter le principe fondamental de la dynamique sous une forme particulièrement simple et concise. Les notions d'invariants (scalaire et vectoriel), de torseurs particuliers (glisseur et couple) ainsi que la notion d'axe central y sont présentées. La notion importante de torseur cinématique, essentielle à la description du champ de vitesses d'un solide indéformable, est introduite au deuxième chapitre consacré à la cinématique du solide. Les notions de paramétrage, d'angles d'Euler, d'axe instantané de rotation, de cinématique de contact et de vitesse de glissement y sont exposées. Le troisième chapitre, consacré à la géométrie des masses, introduit les notions de centre d'inertie et de matrice d'inertie, de symétrie matérielle, de base principale et de moment d'inertie par rapport à un axe quelconque. Quant à la cinétique du solide, elle est étudiée au quatrième chapitre. On y introduit les concepts de torseur cinétique, de torseur dynamique et d'énergie cinétique. Après avoir introduit la notion de torseur des efforts extérieurs, le cinquième chapitre traite du principe fondamental de la dynamique et des théorèmes généraux de la mécanique du solide dans un référentiel galiléen. Il aborde ensuite l'étude des puissances galiléennes des forces extérieures appliquées à un solide et se termine par le théorème de l'énergie cinétique et par la notion importante d'intégrale première du mouvement, en

l'occurrence l'intégrale première de l'énergie cinétique.

La deuxième partie de ce livre est consacrée aux problèmes corrigés. Un recueil de cinquante problèmes y est proposé et leurs corrigés sont volontairement détaillés. La solution proposée ne néglige aucune étape du raisonnement, afin de permettre au lecteur d'effectuer un véritable travail personnel et de s'assurer d'une parfaite compréhension des notions abordées. Pour autant, il ne faut pas négliger les effets négatifs que peut parfois présenter une solution trop détaillée. C'est pour cette raison qu'on conseille au lecteur de considérer la solution de chaque problème abordé, comme l'expression d'une démarche intellectuelle particulière qu'il doit analyser pour pouvoir l'appliquer éventuellement à d'autres situations.

Le livre se termine par une bibliographie détaillée qui permet de situer les principales sources d'inspiration des auteurs et de fournir les titres d'ouvrages ayant un objectif et une ambition plus importants.

Espérons que cet ouvrage collectif apporte une aide précieuse et un outil indispensable de travail aux étudiants et aussi aux candidats qui désirent entreprendre une préparation sérieuse aux concours d'entrée aux grandes écoles d'ingénieurs ou aux concours de CAPES et d'agrégation de mécanique. Nous souhaitons à tout le monde, élèves, étudiants, professeurs et candidats aux concours, de tirer le meilleur profit de ce livre.

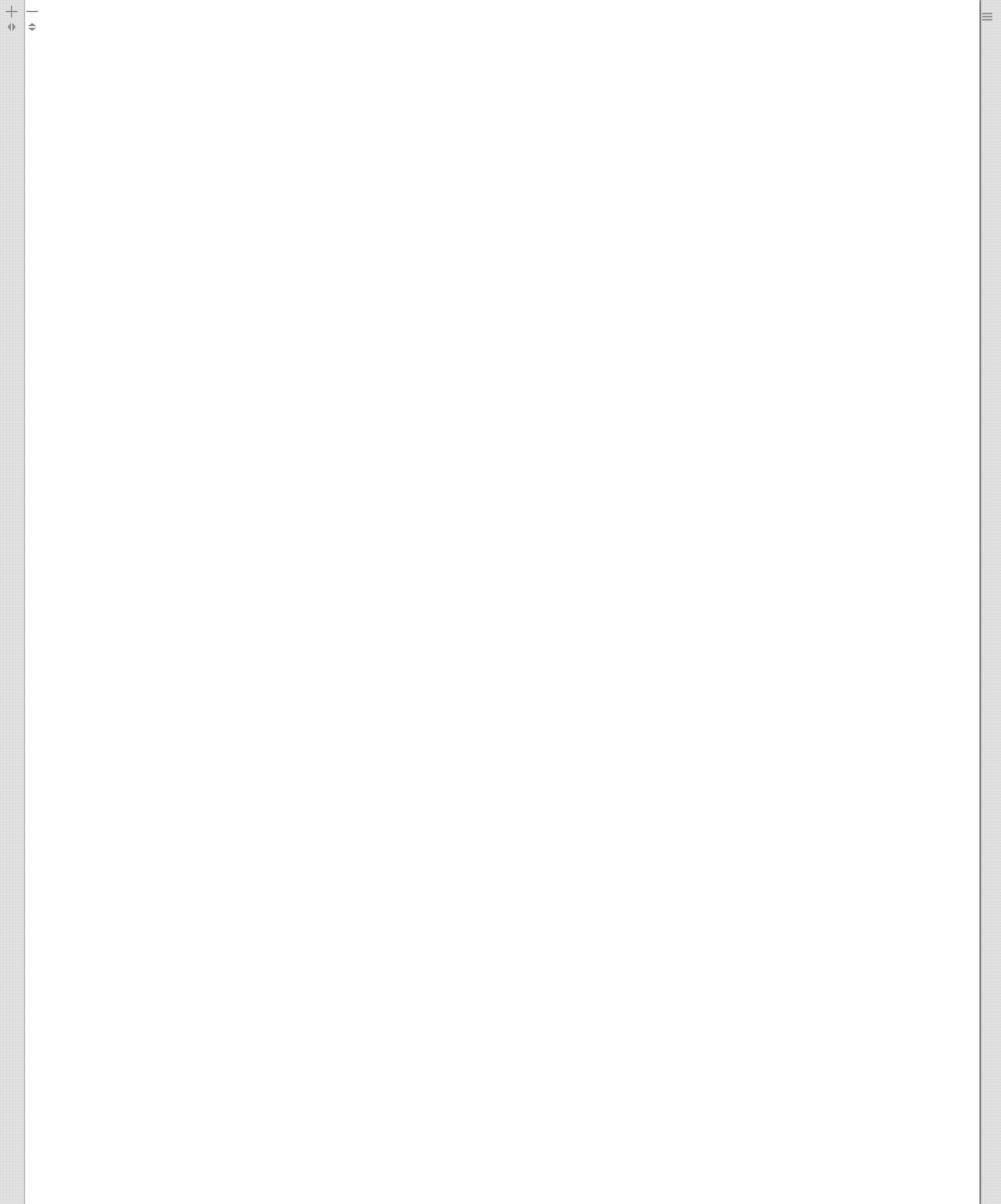


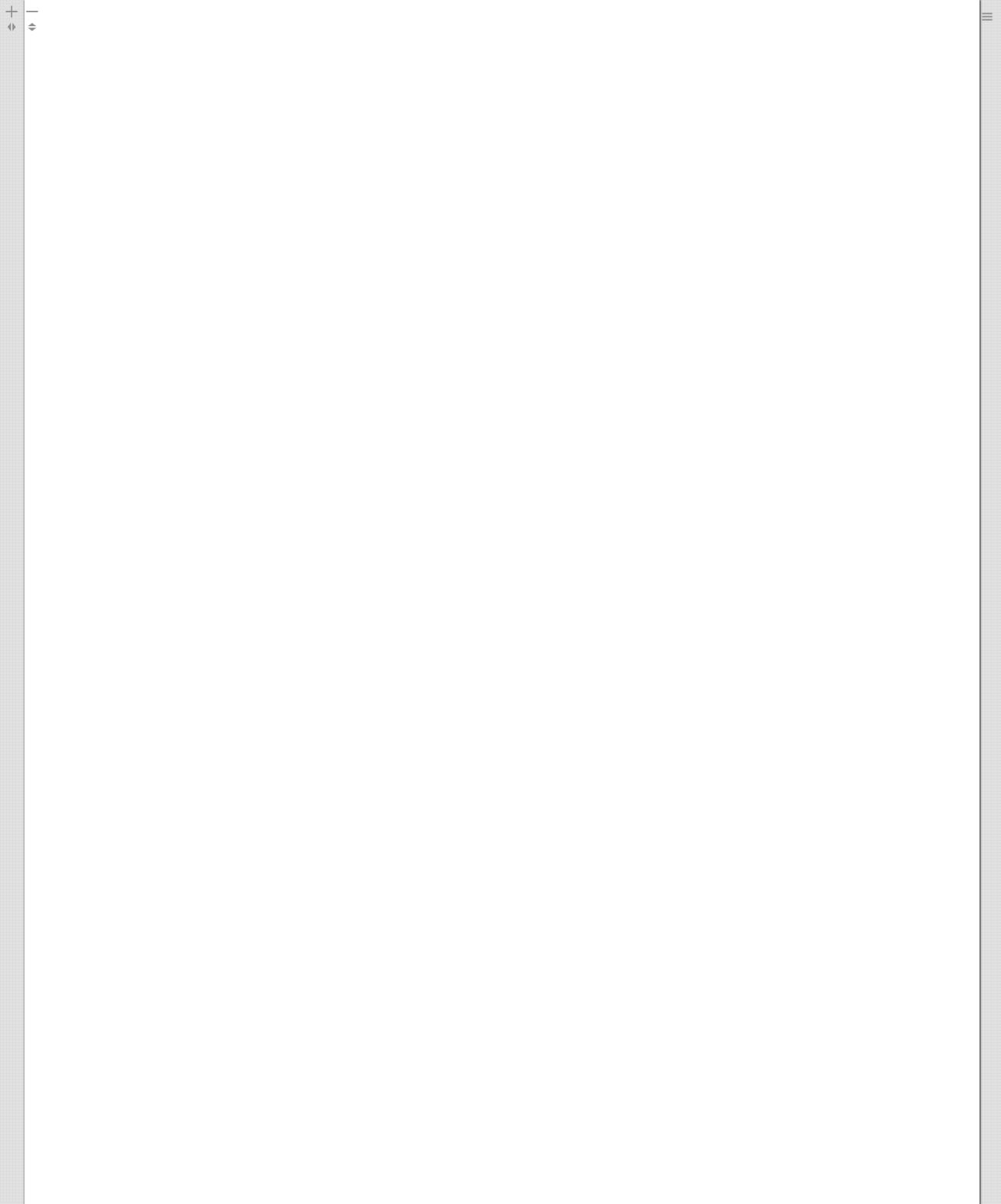
Table des matières

Avant-propos	3
I Résumés de cours	11
1 Les torseurs	13
1.1 Généralités	13
1.2 Axe central	15
1.3 Opérations sur les torseurs	16
1.4 Torseurs particuliers	17
2 Cinématique du solide	19
2.1 Paramétrage d'un solide - Angles d'Euler	19
2.2 Champ de vitesses - Torseur cinématique - Composition des mouvements	23
2.3 Cinématique de contact	26
3 Géométrie des masses	29
3.1 Centre d'inertie	29

3.2 Matrice d'inertie	30
4 Cinétique	35
4.1 Torseur cinétique	35
4.2 Torseur dynamique	37
4.3 Énergie cinétique	39
5 Dynamique	41
5.1 Principe fondamental de la dynamique	41
5.2 Puissances et énergies	43
II Sujets thématiques corrigés	45
Sujet thématique 1.....	47
Sujet thématique 2.....	53
Sujet thématique 3.....	61
Sujet thématique 4.....	67
Sujet thématique 5.....	75
Sujet thématique 6.....	82
Sujet thématique 7.....	90
Sujet thématique 8.....	96
Sujet thématique 9.....	104
Sujet thématique 10.....	114
Sujet thématique 11.....	121
Sujet thématique 12.....	128
Sujet thématique 13.....	137

Sujet thématique 14.....	143
Sujet thématique 15.....	150
Sujet thématique 16.....	158
Sujet thématique 17.....	168
Sujet thématique 18.....	177
Sujet thématique 19.....	188
Sujet thématique 20.....	194
Sujet thématique 21.....	199
Sujet thématique 22.....	204
Sujet thématique 23.....	217
Sujet thématique 24.....	223
Sujet thématique 25.....	231
Sujet thématique 26.....	240
Sujet thématique 27.....	249
Sujet thématique 28.....	258
Sujet thématique 29.....	265
Sujet thématique 30.....	274
Sujet thématique 31.....	282
Sujet thématique 32.....	289
Sujet thématique 33.....	295
Sujet thématique 34.....	305

Sujet thématique 35	314
Sujet thématique 36	322
Sujet thématique 37	332
Sujet thématique 38	348
Sujet thématique 39	363
Sujet thématique 40	371
Sujet thématique 41	378
Sujet thématique 42	386
Sujet thématique 43	392
Sujet thématique 44	405
Sujet thématique 45	411
Sujet thématique 46	420
Sujet thématique 47	427
Sujet thématique 48	433
Sujet thématique 49	438
Sujet thématique 50	446
Bibliographie	455
Index	461



+

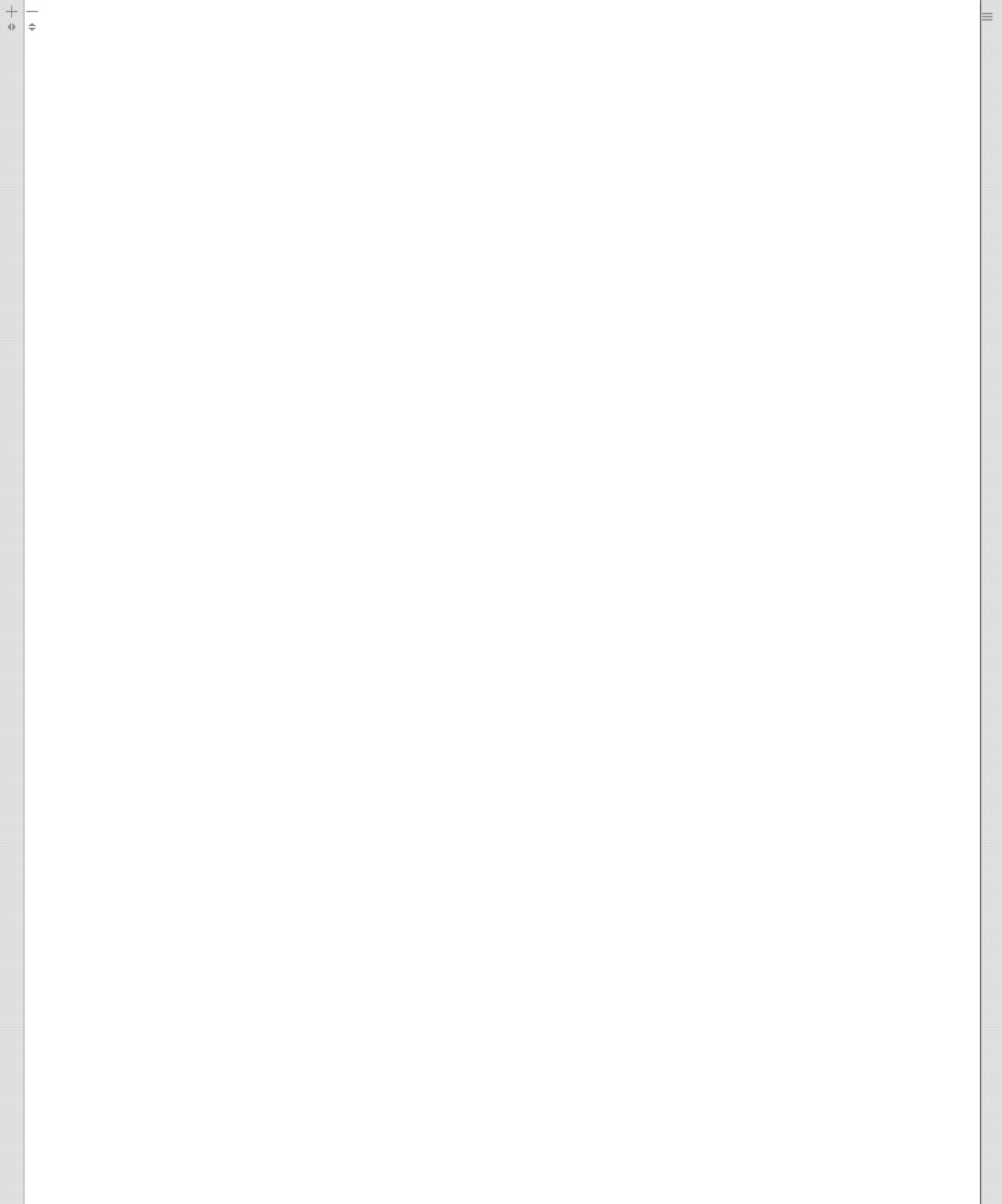
-

♦ ♦

☰

Première partie

Résumés de cours



Chapitre 1

les torseurs

1.1 Généralités

1.1.1 Définition

On appelle torseur que l'on note $[T] = [\vec{R}, \vec{H}(P)]$ tout champ de vecteurs $\vec{H}(P)$ pour lequel il existe un vecteur \vec{R} , indépendant de P , tel que $\forall (P, Q)$ on a :

$$\vec{H}(Q) = \vec{H}(P) + \vec{R} \wedge \overrightarrow{PQ}$$

Cette relation permet de déterminer le moment en un point Q du torseur connaissant son moment en un point P .

1.1.2 Éléments de réduction

Les éléments de réduction de $[T]$ sont donnés par :

$$[T] = \left\{ \begin{array}{l} \vec{R} \\ P \\ \vec{H}(P) \end{array} \right.$$

$$\vec{H}(Q) = \vec{H}(P) + \vec{R} \wedge \overrightarrow{PQ}$$

- Le vecteur \vec{R} est appelé la résultante du torseur $[T]$.
- Le vecteur $\vec{H}(P)$ est appelé le vecteur moment au point P ou moment au point P du torseur $[T]$.

Les vecteurs \vec{R} et $\vec{H}(P)$ sont appelés les éléments de réduction au point P du torseur $[T]$.

1.1.3 Champ équiprojectif

Définition

Un champ \vec{H} est équiprojectif si, et seulement si, pour tout points A et B, on a :

$$\vec{H}(A) \cdot \overrightarrow{AB} = \vec{H}(B) \cdot \overrightarrow{AB}$$

Théorème de Delassus : Tout champ équiprojectif est antisymétrique et réciproquement.

Remarques :

- Un torseur est un champ antisymétrique ou équiprojectif.

1.1.4 Invariant scalaire ou automoment

L'invariant d'un torseur $[T]$ est le réel, noté I_S défini comme le produit scalaire des éléments de réduction de $[T]$ au point P :

$$I_S = \vec{R} \cdot \vec{H}(P)$$

L'invariant scalaire est, bien entendu, indépendant du point P.

1.1.5 Invariant vectoriel

L'invariant vectoriel d'un torseur, de résultante non nulle, correspond au vecteur projection orthogonal du moment sur la résultante :

$$\vec{I}_V = \frac{I_S}{\vec{R}^2} \vec{R}$$

Remarques :

- La résultante générale \vec{R} est aussi un invariant vectoriel, en effet elle est indépendante du point P.
- Si $\vec{R} = \vec{0}$, l'invariant vectoriel est le moment du torseur en un point P , il est noté :

$$\vec{I}_V = \vec{H}(P)$$

1.2 Axe central

1.2.1 Définition

On appelle axe central (Δ) d'un torseur $[T]$ de résultante $\vec{R} \neq \vec{0}$, l'ensemble des points P où le moment $\vec{H}(P)$ est colinéaire à la résultante \vec{R} :

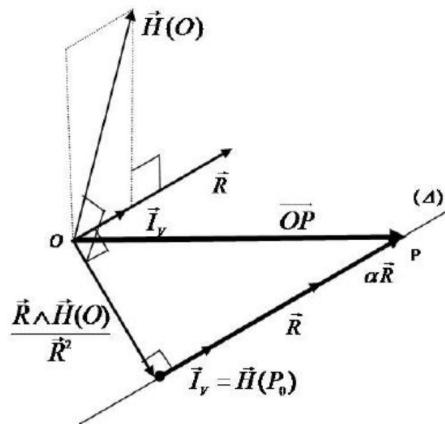
$$\Delta = \left\{ P / \vec{H}(P) = \lambda \vec{R} \right\}$$

où $\lambda = \frac{I_S}{\vec{R}^2}$ est le pas du torseur.

1.2.2 Équation vectorielle - Détermination géométrique

L'axe central (Δ) d'un torseur $[T]$ est la droite parallèle à \vec{R} dont l'équation vectorielle est donnée par :

$$\overrightarrow{OP} = \underbrace{\frac{\vec{R} \wedge \vec{H}(O)}{\vec{R}^2}}_{\perp \vec{R}} + \underbrace{\alpha \vec{R}}_{/\!\!/ \vec{R}} = \overrightarrow{OP_0} + \alpha \vec{R}$$



1.3 Opérations sur les torseurs

1.3.1 Egalité

Deux torseurs sont égaux s'ils ont mêmes éléments de réductions en un point, réciproquement s'ils ont mêmes éléments de réduction en un point, alors ils sont égaux :

$$\text{Deux torseurs } [T_1] \text{ et } [T_2] \text{ sont égaux} \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{R}_1 = \vec{R}_2 \\ \vec{H}_1(P) = \vec{H}_2(P) \end{cases}$$

1.3.2 Addition de deux torseurs

La somme de deux torseurs $[T_1]$ et $[T_2]$ au même point P est le torseur $[T]$ défini par :

$$[T] = [T_1]_P + [T_2]_P \Leftrightarrow \underset{P}{\begin{cases} \vec{R} = \vec{R}_1 + \vec{R}_2 \\ \vec{H}(P) = \vec{H}_1(P) + \vec{H}_2(P) \end{cases}}$$

1.3.3 Multiplication d'un torseur par un scalaire

La multiplication d'un torseur $[T]$ par un scalaire λ est le torseur $[T_1]$ défini par :

$$[T_1] = \lambda [T]_P \Leftrightarrow \begin{aligned} P & \left\{ \begin{array}{l} \vec{R}_1 = \lambda \vec{R} \\ \vec{H}_1(P) = \lambda \vec{H}(P) \end{array} \right. \end{aligned}$$

1.3.4 Produit ou comoment

Le produit ou comoment de deux torseurs $[T_1]$ et $[T_2]$ est le scalaire défini par :

$$[T_1] \otimes [T_2] = \begin{pmatrix} \vec{R}_1 \\ \vec{H}_1(P) \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} \vec{R}_2 \\ \vec{H}_2(P) \end{pmatrix} = \vec{R}_1 \cdot \vec{H}_2(P) + \vec{R}_2 \cdot \vec{H}_1(P)$$

Ce nombre est aussi un invariant scalaire, il est indépendant du point P.

1.4 Torseurs particuliers

Il existe deux torseurs particuliers que l'on retrouve souvent dans les exercices. Ce sont deux torseurs simples que l'on appelle les glisseurs et les couples.

1.4.1 Glisseur

On appelle glisseur et on le note $[G]$, tout torseur $[T]$, de résultante \vec{R} non nulle et dont le moment en un point P est nul.

$$[T] \text{ est un glisseur } [G] \Leftrightarrow \begin{aligned} P & \left\{ \begin{array}{l} \vec{R} \neq \vec{0} \\ \vec{H}(P) = \vec{0} \end{array} \right. \end{aligned}$$

On remarque que pour ce torseur l'invariant scalaire $I_s = 0$. On dit qu'un torseur est un glisseur si $I_s = 0$ et $\vec{R} \neq \vec{0}$

Axe central d'un glisseur La droite $(\Delta) = (P, \vec{R})$ est appelée axe du glisseur ou axe central du glisseur et le torseur y prend des valeurs nulles.

Propriété importante

S'il existe deux points tels que le moment est nul en ces deux points, alors l'axe central passe par ces deux points.

1.4.2 Couple

Un torseur $[T]$ est un couple $[C]$, si et seulement si, sa résultante \vec{R} est nulle et dont le moment en un point P est non nul.

$$[T] \text{ est un couple } [C] \Leftrightarrow \underset{P}{\left\{ \begin{array}{l} \vec{R} = \vec{0} \\ \vec{H}(P) \neq 0 \end{array} \right.}$$

- Un couple n'admet pas d'axe central .
- Le champ antisymétrique associé à un couple $[C]$ est uniforme :
 $\vec{H}(P) = \overset{\rightarrow}{Cte}$.
- L'invariant scalaire est également nul pour ce torseur. Un couple est le torseur tel que $I_s = 0$ et $\vec{H}(P) \neq 0$.

Un torseur $[T]$ est un couple $[C]$, si et seulement si, sa résultante \vec{R} est nulle et dont le moment en un point est non nul.

1.4.3 Torseur nul

C'est un torseur pour lequel la résultante $\vec{R} = \vec{0}$ et le moment en tout point P, $\vec{H}(P) = \vec{0}$.

Chapitre 2

Cinématique du solide

2.1 Paramétrage d'un solide - Angles d'Euler

2.1.1 Paramètres de position

La position et l'orientation d'un solide dans l'espace, sont définies par au maximum **six paramètres** appelés **paramètres de position**. Ce sont les composantes d'un point lié au solide et trois composantes de rotation.

2.1.2 Equations de liaison

Une équation de liaison s'exprime par des relations contenant les paramètres de position q_i , de leurs dérivées par rapport au temps \dot{q}_i et éventuellement le temps t . Il en existe deux types :

- les liaisons de type géométrique qui s'expriment par des équations contenant les paramètres q_i , et parfois le temps.

$$f_i(q_1, q_2, \dots, q_n, t) = 0 \quad i = 1, 2, \dots, p$$

- les liaisons de type cinématique qui s'expriment par des équations contenant les paramètres q_i , les vitesses \dot{q}_i et éventuellement le temps.

$$f_i(q_1, q_2, \dots, \dot{q}_n, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_n, t) = 0 \quad i = 1, 2, \dots, p'$$

2.1.3 Nombre de degré de liberté d'un solide

Le nombre de degrés de liberté d'un solide = Nombre de paramètres de position
- Nombre d'équations de liaison indépendantes.

2.1.4 Angles d'Euler

On appelle **angles d'Euler**, notées habituellement (ψ, θ, φ) , les trois angles qui permettent d'orienter une base $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ liée à un solide par rapport à une base de référence $(\vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$.

2.1.5 Figures de calcul

Les angles d'Euler $\psi(t), \theta(t), \varphi(t)$ définissent toutes les possibilités de rotation d'un solide dans l'espace.

Première rotation : précession

Comme \vec{u} , \vec{x}_0 et \vec{y}_0 sont dans le même plan perpendiculaire au vecteur \vec{z}_0 , la rotation plane $\mathcal{R}(\psi/\vec{z}_0)$ d'angle $\psi = (\widehat{\vec{x}_0, \vec{u}})$ et d'axe \vec{z}_0 transforme le repère $R_0(O; \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ en $R_1(O; \vec{u}, \vec{v}, \vec{z}_0)$ avec $\dot{\Omega}(R_1/R_0) = \dot{\psi}\vec{z}_0$.

$$R_0(O; \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0) \xrightarrow{\mathcal{R}(\psi/\vec{z}_0)} R_1(O; \vec{u}, \vec{v}, \vec{z}_0)$$

Dans cette rotation le vecteur \vec{x}_0 se transforme en \vec{u} et le vecteur \vec{y}_0 en un nouveau vecteur perpendiculaire à \vec{u} qu'on note \vec{v} . Les quatre vecteurs $\vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{u}$ et \vec{v} sont dans le plan perpendiculaire au vecteur \vec{z}_0 .

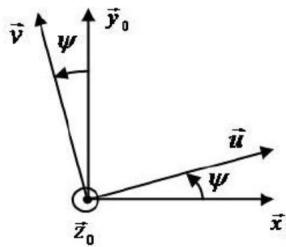


FIGURE 2.1 – Angle de précession

Le changement de base du repère R_0 au repère R_1 est donné par :

$$\begin{cases} \vec{u} = \cos \psi \vec{x}_0 + \sin \psi \vec{y}_0 \\ \vec{v} = -\sin \psi \vec{x}_0 + \cos \psi \vec{y}_0 \\ \vec{z}_0 = \vec{z}_0 \end{cases} \quad \text{soit} \quad \begin{pmatrix} \vec{u} \\ \vec{v} \\ \vec{z}_0 \end{pmatrix} = \mathcal{R}(\theta/\vec{z}_0) \begin{pmatrix} \vec{x}_0 \\ \vec{y}_0 \\ \vec{z}_0 \end{pmatrix}$$

où $\mathcal{R}(\psi/\vec{z}_0) = \begin{pmatrix} \cos\psi & \sin\psi & 0 \\ -\sin\psi & \cos\psi & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ **Deuxième rotation : nutation**

La rotation $\mathcal{R}(\theta/\vec{u})$ d'angle $\theta = \widehat{(\vec{z}_0, \vec{z})}$ et d'axe \vec{u} transforme le repère $R_1(O; \vec{u}, \vec{v}, \vec{z}_0)$ en $R_2(O; \vec{u}, \vec{w}, \vec{z})$ avec $\vec{\Omega}(R_2/R_1) = \dot{\theta}\vec{u}$:

$$R_0(O; \vec{u}, \vec{v}, \vec{z}_0) \xrightarrow{\mathcal{R}(\theta/\vec{u})} R_1(O; \vec{u}, \vec{w}, \vec{z})$$

Dans cette rotation le vecteur \vec{z}_0 se transforme en \vec{z} et le vecteur \vec{v} en un nouveau vecteur \vec{w} perpendiculaire à \vec{z} , ainsi les quatre vecteurs \vec{z}_0 , \vec{z} , \vec{v} et \vec{w} sont dans le même plan perpendiculaire au vecteur \vec{u} .

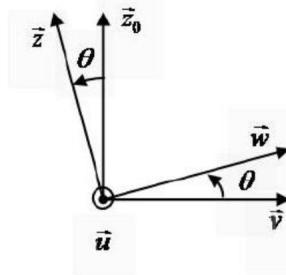


FIGURE 2.2 – Angle de nutation

Le changement de base du repère R_1 au repère R_2 est donné par :

$$\begin{cases} \vec{u} = \vec{u} \\ \vec{w} = \cos\theta\vec{v} + \sin\theta\vec{z}_0 \\ \vec{z}_0 = -\sin\theta\vec{v} + \cos\theta\vec{z}_0 \end{cases} \quad \text{soit} \quad \begin{pmatrix} \vec{u} \\ \vec{w} \\ \vec{z}_0 \end{pmatrix} = \mathcal{R}(\theta/\vec{u}) \begin{pmatrix} \vec{u} \\ \vec{v} \\ \vec{z}_0 \end{pmatrix}$$

$$\text{où } \mathcal{R}(\theta/\vec{u}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & \sin\theta \\ 0 & -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

Troisième rotation : rotation propre

La rotation $\mathcal{R}(\varphi/\vec{z})$ est d'angle $\varphi = \widehat{(\vec{u}, \vec{x})}$ et d'axe \vec{z} transforme finalement le repère $R_2(O; \vec{u}, \vec{w}, \vec{z})$ en $R(O; \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ avec $\vec{\Omega}(R/R_2) = \dot{\varphi}\vec{z}$:

$$R_0(O; \vec{u}, \vec{w}, \vec{z}) \xrightarrow{\mathcal{R}(\varphi/\vec{z})} R_1(O; \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$$

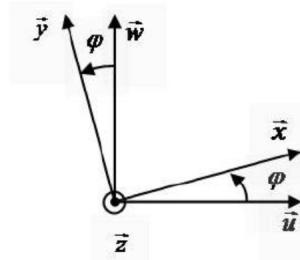


FIGURE 2.3 – Angle de rotation propre

Dans cette rotation le vecteur \vec{u} se transforme en \vec{x} et le vecteur \vec{w} en un nouveau vecteur \vec{y}

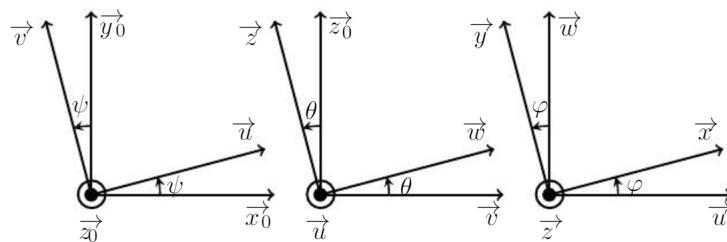
Le changement de base du repère R_2 au repère R est donné par :

$$\begin{cases} \vec{x} = \cos \varphi \vec{u} + \sin \varphi \vec{w} \\ \vec{y} = -\sin \varphi \vec{u} + \cos \varphi \vec{w} \\ \vec{z} = \vec{z} \end{cases} \quad \text{soit} \quad \begin{pmatrix} \vec{x} \\ \vec{y} \\ \vec{z} \end{pmatrix} = \mathcal{R}(\varphi / \vec{z}) \begin{pmatrix} \vec{u} \\ \vec{w} \\ \vec{z} \end{pmatrix}$$

$$\text{où } \mathcal{R}(\varphi / \vec{u}) = \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi & 0 \\ -\sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Figures de calcul

En regroupant les trois figures ci-dessus, on obtient finalement les figures de calcul :



2.1.6 Expression du vecteur rotation instantané

D'après ce qui précède, le passage du repère fixe $R_0(O; \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ au repère lié au solide $R(O; \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ a fait l'objet de trois rotations planes $\mathcal{R}(\psi, \vec{z}_0)$, $\mathcal{R}(\theta, \vec{u})$ et $\mathcal{R}(\varphi, \vec{z})$ où (ψ, θ, φ) sont les angles d'Euler, soit :

$$R_0(O; B_0) \xrightarrow{\mathcal{R}(\psi/\vec{z}_0)} R_1(O; B_1) \xrightarrow{\mathcal{R}(\theta/\vec{u})} R_2(O; B_2) \xrightarrow{\mathcal{R}(\varphi/\vec{z})} R(O; B)$$

où $B_0(\vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$, $B_1(\vec{u}, \vec{v}, \vec{z}_0)$, $B_2(\vec{u}, \vec{w}, \vec{z})$ et $B(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ sont les bases attachées respectivement aux repères (R_0) , (R_1) , (R_2) et (R) .

$$\vec{\Omega}(R_0/R) = \vec{\Omega}(R_0/R_1) + \vec{\Omega}(R_1/R_2) + \vec{\Omega}(R_2/R) = \dot{\psi}\vec{z}_0 + \dot{\theta}\vec{u} + \dot{\varphi}\vec{z}_0$$

On constate que l'expression de $\vec{\Omega}(R_0/R)$ utilise une base non orthogonale. Dans la pratique, on choisit les bases intermédiaires (B_1) ou (B_2) comme bases de projection :

$$\vec{\Omega}(R/R_0) = \dot{\psi}\vec{z}_0 + \dot{\theta}\vec{u} + \dot{\varphi}\vec{z} = \begin{pmatrix} \dot{\theta} \\ -\dot{\varphi}\sin\theta \\ \dot{\psi} + \dot{\varphi}\cos\theta \end{pmatrix}_{(\vec{u}, \vec{v}, \vec{z}_0)}$$

$$\vec{\Omega}(R/R_0) = \dot{\psi}\vec{z}_0 + \dot{\theta}\vec{u} + \dot{\varphi}\vec{z} = \begin{pmatrix} \dot{\theta} \\ \dot{\psi}\sin\theta \\ \dot{\varphi} + \dot{\psi}\cos\theta \end{pmatrix}_{(\vec{u}, \vec{w}, \vec{z})}$$

Remarque

La base $B_2(\vec{u}, \vec{w}, \vec{z}_0)$ porte le nom de base de Résal. Il est conseillé d'utiliser cette base pour les solides ayant la symétrie de révolution.

2.2 Champ de vitesses - Torseur cinématique - Composition des mouvements

2.2.1 Formule de Bour

Cette relation est valable pour tout vecteur \vec{U} .

$$\left[\frac{d\vec{U}}{dt} \right]_{R_0} = \left[\frac{d\vec{U}}{dt} \right]_R + \vec{\Omega}(R/R_0) \wedge \vec{U}$$

2.2.2 Solide indéformable

(S) est un solide indéformable $\Leftrightarrow \forall A, B \in (S) : \|\overrightarrow{AB}\| = \text{constante}$

2.2.3 Champ des vitesses d'un solide - Torseur cinématique - Relation de Varignon

Soient A et B deux points quelconques de (S) , le vecteur \overrightarrow{AB} est constant dans tout repère (R) lié au solide (S) , on peut donc écrire :

$$\left[\frac{d\overrightarrow{AB}}{dt} \right]_{R_0} = \underbrace{\left[\frac{d\overrightarrow{AB}}{dt} \right]_R}_0 + \vec{\Omega}(R/R_0) \wedge \overrightarrow{AB}$$

En utilisant la relation de Chasles $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB}$, on aboutit à la loi de distribution des vitesses du solide (S) :

$$\boxed{\text{Relation de Varignon : } \vec{V}(B/R_0) = \vec{V}(A/R_0) + \vec{\Omega}(S/R_0) \wedge \overrightarrow{AB}}$$

On constate que le champ des vitesses d'un solide est un champ antisymétrique, il est donc possible de représenter le mouvement de (S) par rapport à (R_0) par un torseur dit torseur cinématique du mouvement de (S) par rapport à (R_0) , sa valeur au point A de (S) est :

$$[\vartheta(S/R_0)] = \left\{ \begin{array}{l} \vec{\Omega}(S/R_0) \\ \vec{V}(A \in S/R_0) \end{array} \right\}_A$$

2.2.4 Axe instantané de rotation et de glissement

On appelle axe instantané de rotation et de glissement (souvent abrégé en **AIRG** ou **AIR** s'il n'y a pas glissement) l'axe central $\Delta(t)$ du torseur cinématique.

2.2.5 Champ des accélérations d'un solide – Formule de Rivals

Soient (S) un solide indéformable et (R_0) un repère de référence, alors le champ des accélérations de (S) par rapport à (R_0) est donné par : **Formule de Rivals** :

$$\vec{\gamma}(B/R_0) = \vec{\gamma}(A/R_0) + \left[\frac{d\vec{\Omega}(S/R_0)}{dt} \right]_{R_0} \wedge \overrightarrow{AB} + \vec{\Omega}(S/R_0) \wedge (\vec{\Omega}(S/R_0) \wedge \overrightarrow{AB})$$

2.2.6 Composition des mouvements

Loi de composition des vitesses :

$$\underbrace{\vec{V}(A/R_0)}_{\vec{V}_a} = \underbrace{\vec{V}(A/R)}_{\vec{V}_r} + \underbrace{\vec{V}(A \in R/R_0)}_{\vec{V}_e}$$

$\vec{V}_a = \vec{V}(A/R_0)$ est la vitesse absolue du point A par rapport au repère absolu R_0 .

$\vec{V}_r = \vec{V}(A/R)$ est la vitesse relative du point A par rapport au repère relatif R .

$\vec{V}_e = \vec{V}(A \in R/R_0)$ est la vitesse d'entrainement du point A fixe dans R par rapport au repère absolu R_0 .

Loi de composition des accélérations

$$\underbrace{\vec{\Gamma}(A/R_0)}_{\vec{\Gamma}_a} = \underbrace{\vec{\Gamma}(A/R)}_{\vec{\Gamma}_r} + \underbrace{\vec{\Gamma}(A \in R/R_0)}_{\vec{\Gamma}_e} + \underbrace{2\vec{\Omega}(R/R_0) \wedge \vec{V}(A/R)}_{\vec{\Gamma}_C}$$

$\vec{\Gamma}_a = \vec{\Gamma}(A/R_0) = \frac{d\vec{V}(A/R_0)}{dt}]_{R_0}$ est l'accélération absolue du point A par rapport au repère absolu R_0 .

$\vec{\Gamma}_r = \vec{\Gamma}(A/R) = \frac{d\vec{V}(A/R)}{dt}]_R$ est l'accélération relative du point A par rapport au repère relatif R .

$\vec{\Gamma}_e = \vec{\Gamma}(A \in R/R_0) = \vec{\Gamma}(O'/R_0) + \frac{d\vec{\Omega}(R'/R)}{dt} \wedge \overrightarrow{O'M} + \vec{\Omega}(R'/R) \wedge (\vec{\Omega}(R'/R) \wedge \overrightarrow{O'M})$ est l'accélération d'entrainement du point A fixe dans R par rapport au repère absolu R_0 .

$\vec{\Gamma}_c = 2\vec{\Omega}(R/R_0) \wedge \vec{V}(A/R)$ est l'accélération de Coriolis du point A.

Remarque : on remarque bien que le champ d'accélération ne constitue pas un torseur.

Loi de composition des rotations

$$\vec{\Omega}(S/R_0) = \vec{\Omega}(S/R) + \vec{\Omega}(R/R_0)$$

Loi de composition des torseurs cinématiques

$$[\vartheta(S/R_0)] = [\vartheta(S/R)] + [\vartheta(R/R_0)]$$

2.3 Cinématique de contact

2.3.1 Vitesse de glissement

Définition : On appelle vitesse de glissement au point I du solide (S_1) par rapport au solide (S_2), notée $\vec{V}_g(I, S_1/S_2)$, la vitesse du point I appartenant au solide (S_1) par rapport au solide (S_2) :

$$\underbrace{\vec{V}_g(I, S_1/S_2)}_{\text{Vitesse de glissement}} = \underbrace{\vec{V}(I \in S_1/S_2)}_{\text{Vitesse du point coincident}} = \underbrace{\vec{V}(I \in S_1/R) - \vec{V}(I \in S_2/R)}_{\text{composition des vitesses}}$$

Remarque

La vitesse de glissement appartient toujours au plan tangent (P).

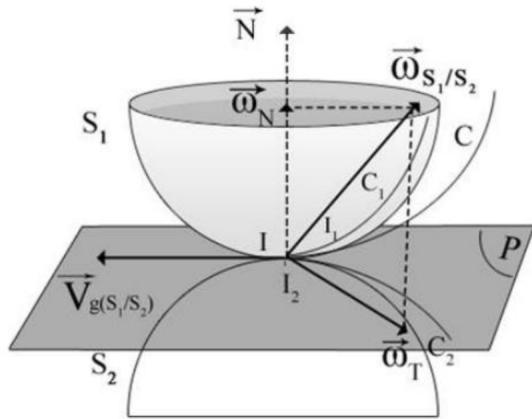
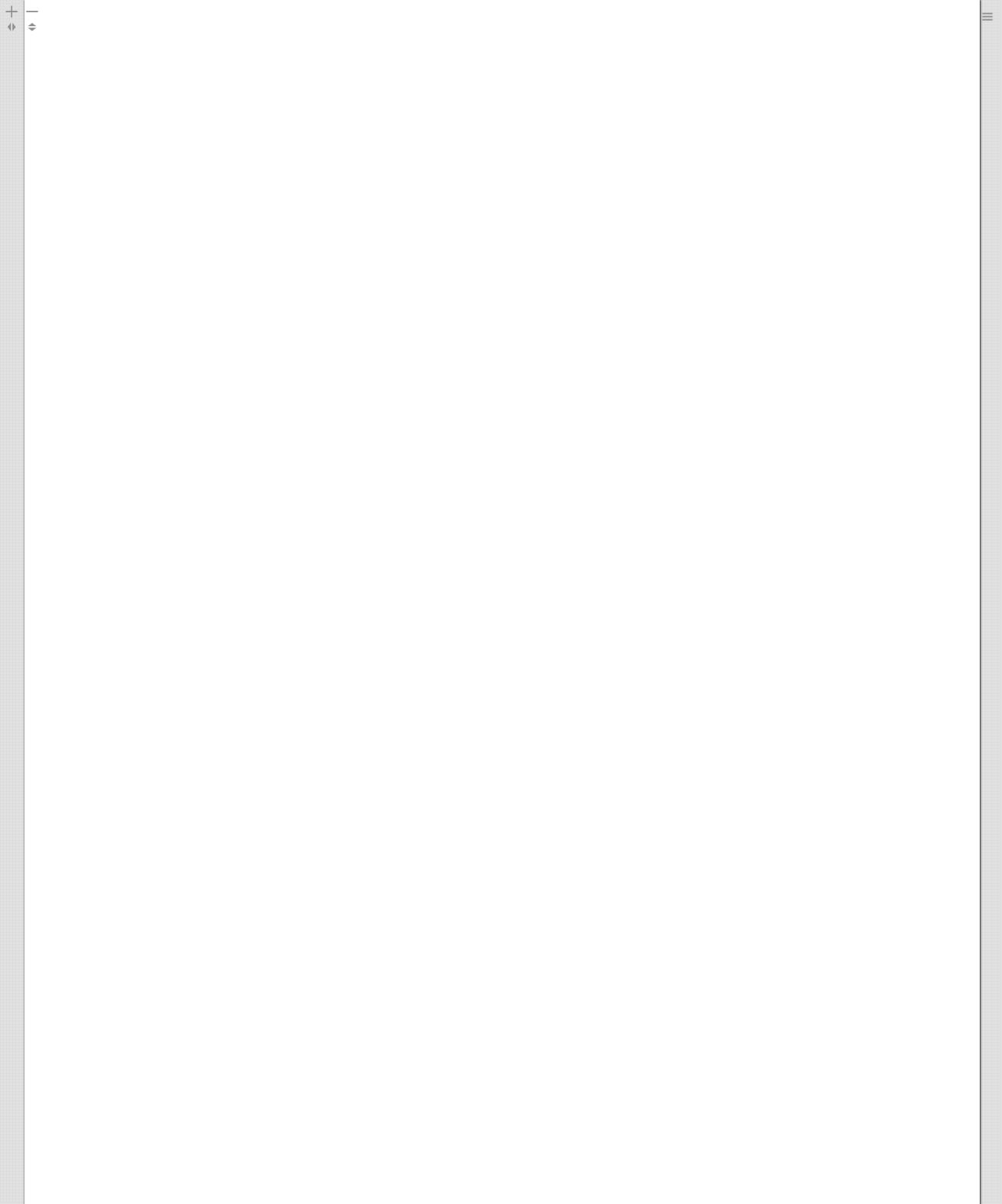


FIGURE 2.4 – Schéma représentant le plan de glissement

2.3.2 Condition de roulement sans glissement

On dit qu'il y a **roulement sans glissement** si :

$$\vec{V}_g(I, S_1/S_2) = \vec{0} \quad (\text{CRSG})$$



Chapitre 3

Géométrie des masses

3.1 Centre d'inertie

3.1.1 Définition

On appelle centre d'inertie G d'un solide (S) le barycentre des particules de masse dm qui le composent :

$$\overrightarrow{OG} = \frac{1}{m} \int_{P \in (S)} \overrightarrow{OP} dm$$

G est le point par rapport auquel la masse est uniformément répartie (définition physique).

3.1.2 Détermination - Calcul intégral

Les coordonnées (x_G, y_G, z_G) du centre d'inertie G sont déterminées par :

$$x_G = \frac{1}{m} \int_{P \in (S)} x dm$$

$$y_G = \frac{1}{m} \int_{P \in (S)} y dm$$

$$z_G = \frac{1}{m} \int_{P \in (S)} z dm$$

3.1.3 Système composé - Propriété d'associativité

Le centre d'inertie G d'un ensemble de n solides dont on connaît les masses et les centres d'inertie (m_i, G_i) avec $i = 1, \dots, n$, est déterminé par :

$$\overrightarrow{OG} = \frac{\sum_{i=1}^n m_i \overrightarrow{OG_i}}{\sum_{i=1}^n m_i}$$

3.1.4 Propriété de symétrie - Localisation

Si un solide **homogène** possède un élément (point, axe, plan) de symétrie, alors G appartient à cet élément.

3.2 Matrice d'inertie

3.2.1 Définition

On appelle matrice d'inertie d'un solide (S) en O relativement à une base $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ la matrice notée $M_O^{(S)}$ définie par :

$$M_O^{(S)} = \begin{pmatrix} A & -F & -E \\ -F & B & -D \\ -E & -D & C \end{pmatrix}_{(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})}$$

où (A, B, C) sont les moments d'inertie et (D, E, F) sont les produits d'inertie.

Moments d'inertie :

$$A = \int_{P \in (S)} (y^2 + z^2) dm \quad = \text{moment d'inertie de } (S) \text{ par rapport à l'axe } (O, \vec{x})$$

$$B = \int_{P \in (S)} (x^2 + z^2) dm \quad = \text{moment d'inertie de } (S) \text{ par rapport à l'axe } (O, \vec{y})$$

$$C = \int_{P \in (S)} (x^2 + y^2) dm \quad = \text{moment d'inertie de } (S) \text{ par rapport à l'axe } (O, \vec{z})$$

Produits d'inertie :

$$\begin{aligned} D = \int_{P \in (S)} yz dm &= \text{produit d'inertie de } (S) \text{ par rapport au plan } (O, \vec{y}, \vec{z}) \\ E = \int_{P \in (S)} xz dm &= \text{produit d'inertie de } (S) \text{ par rapport au plan } (O, \vec{x}, \vec{z}) \\ F = \int_{P \in (S)} xy dm &= \text{produit d'inertie de } (S) \text{ par rapport au plan } (O, \vec{x}, \vec{y}) \end{aligned}$$

3.2.2 Base principale d'inertie

La matrice d'inertie étant symétrique, il existe une base appelée **base principale d'inertie** dans laquelle la matrice d'inertie est diagonale. Les éléments de la diagonale (valeurs propres de $M_O^{(S)}$) sont appelés **moments principaux d'inertie**.

3.2.3 Symétrie matérielle

Symétrie matérielle	Propriété	Forme de la matrice d'inertie
2 plans de symétrie orthogonaux quelconques	Les produits d'inertie sont tous nuls : $D = E = F = 0$	$M_O^{(S)} = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix}_{(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})}$
(O, \vec{z}) est un axe de révolution (symétrie cylindrique)	Les produits d'inertie sont tous nuls, et : $A = B = \frac{C}{2} + \int_{P \in (S)} z^2 dm$	$M_O^{(S)} = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & A & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix}_{(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})}$
(S) admet la symétrie sphérique de centre O si tout trièdre $(Oxyz)$ est trièdre principal d'inertie	Les produits d'inertie sont tous nuls : $D = E = F = 0$ et $A = B = C$	$M_O^{(S)} = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & A & 0 \\ 0 & 0 & A \end{pmatrix}_{(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})}$

Si un axe est de symétrie matérielle alors il est axe principal d'inertie en chacun de ses points et si un plan est de symétrie matérielle alors tout axe perpendiculaire à ce plan est un axe principal d'inertie.

3.2.4 Théorème de Koenig ou Théorème de Huygens généralisé

Le passage d'une matrice d'inertie définie en G , centre d'inertie de (S) , à la matrice d'inertie en un point A quelconque s'écrit :

$$M_A^{(S)} = M_G^{(S)} + M_A^{[G]}$$

où $M_A^{[G]}$ est la matrice d'inertie en A du point matériel de masse m concentré en G . On calcule cette matrice à partir des coordonnées de G dans R ; tel que si $\overrightarrow{AG} = x_G \vec{x} + y_G \vec{y} + z_G \vec{z}$ cette matrice s'écrit :

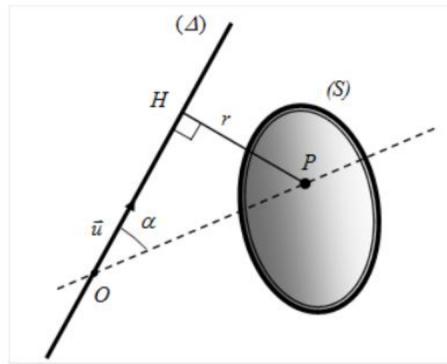
$$M_A^{[G]} = m \begin{pmatrix} y_G^2 + z_G^2 & -x_G y_G & -x_G z_G \\ -x_G y_G & x_G^2 + z_G^2 & -y_G z_G \\ -x_G z_G & -y_G z_G & x_G^2 + y_G^2 \end{pmatrix}$$

(x_G, y_G, z_G) sont les coordonnées de \overrightarrow{AG} dans (R) .

3.2.5 Moment d'inertie d'un solide par rapport à un axe quelconque

Le moment d'inertie d'un solide (S) par rapport à une droite (O, Δ) de vecteur directeur \vec{u} , s'obtient par :

$$I_{\Delta}^{(S)} = \vec{u}^t M_O^{(S)} \vec{u}$$

FIGURE 3.1 – Moment d'inertie par rapport à un axe Δ

Notion abordée	Formulation
Centre d'inertie d'un système	$\overrightarrow{OG} = \frac{1}{m} \int_{P \in (\Sigma)} \overrightarrow{OP} dm$
Coordonnées du centre d'inertie	$x_G = \frac{1}{m} \int_{P \in (\Sigma)} x dm ; y_G = \frac{1}{m} \int_{P \in (\Sigma)} y dm$ et $z_G = \frac{1}{m} \int_{P \in (\Sigma)} z dm$
Cas d'un système composé	$\overrightarrow{OG} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^n m_i \overrightarrow{OG_i}$
Propriété de symétrie	Si un solide homogène possède un élément (point, axe, plan) de symétrie, alors G appartient à cet élément.

Notion abordée	Formulation
Matrice d'inertie	$M_O^{(S)} = \begin{pmatrix} A & -F & -E \\ -F & B & -D \\ -E & -D & C \end{pmatrix}_{(\vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)}$
Moment d'inertie par rapport à un axe Δ	$I(S/\Delta) = I_{\Delta}^{(S)} = {}^T \vec{u} \cdot M_O^{(S)} \vec{u}$
Symétrie matérielle	<p>On dit qu'il y a symétrie matérielle quand il y a à la fois symétrie géométrique et symétrie de répartition de la masse pour le système matériel considéré.</p>
Théorème de Huygens	$I_{\Delta}^{(S)} = I_{\Delta_G}^{(S)} + m d_{(\Delta, \Delta_G)}^2$
Théorème de Huygens généralisé	$\begin{cases} A = A_G + m(b^2 + c^2) \\ B = B_G + m(a^2 + c^2) \\ C = C_G + m(a^2 + b^2) \end{cases} \text{ et } \begin{cases} D = D_G + m.b.c \\ E = E_G + m.a.c \\ F = F_G + m.a.b \end{cases}$ <p>(a, b, c) sont les coordonnées du centre d'inertie</p>

Chapitre 4

Cinétique

4.1 Torseur cinétique

4.1.1 Cas d'un système matériel

Soit un ensemble matériel (Σ) de masse m , de centre d'inertie G , en mouvement par rapport à un repère $R_0(O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$.

Soit P un point courant de l'ensemble matériel (Σ). A ce point est associé l'élément de masse dm .

Définition

Le torseur cinétique de l'ensemble matériel (Σ) dans son mouvement par rapport au repère R_0 s'exprime en un **point A quelconque** :

$$[C(\Sigma/R_0)] = \left\{ \begin{array}{l} \vec{R}_C = \int_{P \in (\Sigma)} \vec{V}(P/R_0) dm \\ \vec{\sigma}_A(\Sigma/R_0) = \int_{P \in (\Sigma)} \vec{AP} \wedge \vec{V}(P/R_0) dm \end{array} \right\}_A$$

Expression de la résultante cinétique

La résultante cinétique s'exprime en fonction des éléments d'inertie m et G par la relation suivante :

$$\vec{R}_C = m \vec{V}(G/R_0)$$

Expression du moment cinétique

La loi de transport entre deux points A et B quelconques dans l'espace est :

$$\vec{\sigma}_B(\Sigma/R_0) = \vec{\sigma}_A(\Sigma/R_0) + m \vec{V}(G/R_0) \wedge \vec{AB}$$

(Relation d'antisymétrie)

4.1.2 Cas d'un solide indéformable

Soit (S) un solide indéformable de masse m , de centre d'inertie G , en mouvement par rapport à (R_0) .

Définition

Le torseur cinétique d'un solide indéformable (S) dans son mouvement par rapport au repère (R_0) s'exprime en un **point A quelconque** :

$$[C(S/R_0)] = \left\{ \begin{array}{l} \vec{R}_C = m \vec{V}(G/R_0) \\ \vec{\sigma}_A(S/R_0) \end{array} \right\}_A$$

Moment cinétique d'un solide

Si le point A est un point du système (S) alors on peut calculer le moment cinétique en ce point de S par rapport à R par cette relation :

$$\vec{\sigma}_A(S/R_0) = m \vec{AG} \wedge \vec{V}(A \in S/R_0) + M_A^{(S)} \vec{\Omega}(S/R_0)$$

Remarque : La matrice $M_A^{(S)}$ et le vecteur $\vec{\Omega}(S/R_0)$ doivent être exprimés dans la même base. Généralement on choisit la base liée au solide (S) .

Cas particuliers : Relations importantes

- Cas où $A \in (S)$ reste fixe dans (R_0)

$$\vec{\sigma}_A(S/R_0) = M_A^{(S)} \vec{\Omega}(S/R_0)$$

- Cas où $A \in (S)$ est confondu avec G

$$\vec{\sigma}_G(S/R_0) = M_G^{(S)} \vec{\Omega}(S/R_0)$$

4.2 Torseur dynamique

4.2.1 Cas d'un système matériel

Soit un ensemble matériel (Σ) de masse m , de centre d'inertie G , en mouvement par rapport à un repère $R_0(O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$.

Soit P un point courant de l'ensemble matériel (Σ). A ce point est associé l'élément de masse dm .

Définition

Le torseur dynamique de l'ensemble matériel (Σ) dans son mouvement par rapport au repère (R_0) s'exprime en un **point A quelconque** :

$$[D(\Sigma/R_0)] = \left\{ \begin{array}{l} \vec{R}_D = \int_{P \in (\Sigma)} \vec{\Gamma}(P/R_0) dm \\ \vec{\delta}_A(\Sigma/R_0) = \int_{P \in (\Sigma)} \overrightarrow{AP} \wedge \vec{\Gamma}(P/R_0) dm \end{array} \right\}_A$$

Expression de la résultante dynamique (quantité d'accélération)

$$\vec{R}_D = m \vec{\Gamma}(G/R_0)$$

$\vec{\Gamma}(G/R_0)$ est l'accélération du centre d'inertie G.

Relation d'antisymétrie relative aux moments dynamiques

La relation d'antisymétrie relative au moment dynamique est :

$$\vec{\delta}_B(\Sigma/R_0) = \vec{\delta}_A(\Sigma/R_0) + m \vec{\Gamma}(G/R_0) \wedge \vec{AB}$$

4.2.2 Cas d'un solide indéformable

Soit (S) un solide indéformable de masse m , de centre d'inertie G , en mouvement par rapport à (R_0).

Définition

Le torseur dynamique d'un solide indéformable (S) dans son mouvement par rapport au repère (R_0) s'exprime en un **point** A par :

$$[D(S/R_0)] = \left\{ \begin{array}{l} \vec{R}_D = m \vec{\Gamma}(G/R_0) \\ \vec{\delta}_A(S/R_0) \end{array} \right\}_A$$

Moment dynamique d'un solide

Si le point A est un point du solide (S) le moment dynamique en ce point de (S) par rapport au repère R est :

$$\vec{\delta}_A(S/R_0) = \left[\frac{d \vec{\sigma}_A(S/R_0)}{dt} \right]_{R_0} + m \vec{V}(A/R_0) \wedge \vec{V}(G/R_0)$$

Cas particuliers

- Cas où A est un point du solide fixe dans (R_0)

$$\vec{\delta}_A(S/R_0) = \left[\frac{d \vec{\sigma}_A(S/R_0)}{dt} \right]_{R_0}$$

- Cas où le point A est confondu avec G

$$\vec{\delta}_G(S/R_0) = \left[\frac{d\vec{\sigma}_G(S/R_0)}{dt} \right]_{R_0}$$

4.3 Énergie cinétique

4.3.1 Cas d'un système matériel

L'énergie cinétique de l'ensemble matériel (Σ) dans son mouvement par rapport au repère (R_0) est la quantité scalaire positive définie par :

$$T(\Sigma/R_0) = \frac{1}{2} \int_{P \in (\Sigma)} \vec{V}^2(P/R_0) dm$$

4.3.2 Cas d'un solide indéformable

Expression torsorielle

Soit un solide (S) de centre d'inertie G et de masse m , en mouvement par rapport au repère (R_0). Soit A un point quelconque appartenant au solide (S).

Le double de l'énergie cinétique du solide (S) dans son mouvement par rapport au repère (R_0) est égal au comoment des torseurs cinématique et du torseur cinétique :

$$T(S/R_0) = \frac{1}{2} [\vartheta(S/R_0)] \otimes [C(S/R_0)]$$

soit

$$T(S/R_0) = \frac{1}{2} \left\{ \begin{array}{l} \vec{\Omega}(S/R_0) \\ \vec{V}(A/R_0) \end{array} \right\}_A \otimes \left\{ \begin{array}{l} m\vec{V}(G/R_0) \\ \vec{\sigma}_A(S/R_0) \end{array} \right\}_A$$

Remarque importante

La valeur de l'énergie cinétique est indépendante du point de calcul A car le comoment de deux torseurs est invariant. Par conséquent, **il est recommandé de choisir un point qui facilite le calcul : point fixe dans (R₀) ou point coïncidant avec G.**

Expression générale

$$T(S/R_0) = \frac{1}{2}m\vec{V}^2(A/R_0) + \frac{1}{2}\vec{\Omega}(S/R_0)M_A^{(S)}\vec{\Omega}(S/R_0)$$

$$+ m\vec{V}(A/R_0).(\vec{\Omega}(S/R_0) \wedge \vec{AG})$$

Cas particuliers

- Cas où A lié à (S) reste fixe dans (R)

$$T(S/R_0) = \frac{1}{2}\vec{\Omega}(S/R_0).M_A^{(S)}\vec{\Omega}(S/R_0)$$

- Cas où A lié à (S) est confondu avec G

$$T(S/R_0) = \frac{1}{2}m\vec{V}^2(G/R_0) + \frac{1}{2}\vec{\Omega}(S/R_0).M_A^{(S)}\vec{\Omega}(S/R_0)$$

Chapitre 5

Dynamique

5.1 Principe fondamental de la dynamique

Dans ce paragraphe nous allons nous intéresser au principe fondamental de la dynamique (PFD), en particulier aux deux théorèmes qui en découlent. Le PFD est à la base de la mécanique classique, il va permettre d'établir une relation de causalité entre le mouvement d'un système matériel et les actions mécaniques qui lui sont appliquées.

5.1.1 Référentiels galiléens

- Un référentiel est dit galiléen ou (absolu) si les lois de Newton exprimées dans celui-ci sont valables.
- Tout repère en mouvement de translation uniforme par rapport à un repère galiléen est lui aussi galiléen.

5.1.2 Torseur des actions extérieures

On appelle torseur des actions mécaniques extérieures, le torseur des actions exercées sur un système matériel (Σ) par l'univers matériel privé de (Σ) que l'on note ($\bar{\Sigma}$). Ces actions sont représentées par le torseur noté $[F_{ext}]$ ou $[F_{\bar{\Sigma} \rightarrow \Sigma}]$ appelé torseur des actions extérieures à (Σ) :

$$[F_{ext}] = \left\{ \begin{array}{l} \vec{R}_{ext} \\ \vec{M}_{ext}(P) \end{array} \right\} \quad \text{ou bien} \quad [F_{\bar{\Sigma} \rightarrow \Sigma}] = \left\{ \begin{array}{l} \vec{R}_{\bar{\Sigma} \rightarrow \Sigma} \\ \vec{M}_{\bar{\Sigma} \rightarrow \Sigma}(P) \end{array} \right\} \quad \forall P$$

5.1.3 Principe fondamental de la dynamique (P.F.D)

Enoncé du principe

« Il existe au moins un référentiel (R_g), dit repère galiléen, tel que pour tout système matériel (Σ), en mouvement par rapport à (R_g), le torseur dynamique de (Σ) est égal au torseur des actions mécaniques extérieures à (Σ) ».

$$[D(\Sigma/R_g)] = [F_{ext}]$$

5.1.4 Théorèmes généraux de la dynamique

En écrivant qu'en tout point de l'espace, les deux torseurs intervenant dans le P.F.D. ont les mêmes éléments de réduction, on obtient deux équations vectorielles appelées théorèmes généraux de la dynamique.

Cette égalité se traduit par les deux équations vectorielles suivantes qui traduisent à leur tour les théorèmes généraux de la dynamique :

$$\left\{ \begin{array}{l} m\vec{\Gamma}(G/R_g) = \vec{R}_{ext} \\ \delta_P(\Sigma/R_g) = \vec{M}_{ext}(P) \end{array} \right\}$$

5.1.5 Théorème de la résultante dynamique

Pour tout système matériel (Σ) en mouvement par rapport à (R_g), la résultante dynamique de (Σ) en mouvement par rapport à (R_g) est égale à la résultante du torseur des actions mécaniques extérieures à (Σ), soit :

$$m\vec{\Gamma}(G/R_g) = \vec{R}_{ext}$$

5.1.6 Théorème du moment dynamique

Pour tout système matériel (Σ) en mouvement par rapport à (R_g), le moment dynamique de (Σ) en mouvement par rapport à (R_g) est égale en tout point P , au moment du torseur des actions mécaniques extérieures à (Σ), soit :

$$\vec{\delta}_P(\Sigma/R_g) = \vec{M}_{ext}(P)$$

5.2 Puissances et énergies

5.2.1 Puissance des efforts pour un solide indéformable

La puissance des efforts extérieurs pour un solide indéformable est le produit du torseur cinématique et du torseur des efforts extérieurs :

$$P = [\vartheta]_P \otimes [F_{ext}]_P = \vec{V}(P) \vec{F}_{ext} + \vec{\Omega} \cdot \vec{M}_P (\vec{F}_{ext})$$

5.2.2 Théorème de l'énergie cinétique

- Cas d'un solide indéformable

Dans le cas d'un solide rigide, nous avons :

$$\frac{dT(S/R_0)}{dt} = P(ext \rightarrow S/R_0)$$

où $P(ext \rightarrow S/R_0)$ est la puissance des actions extérieures appliquées à (S).

- Cas de deux solides (S_1) et (S_2)

Dans le cas d'un système (Σ) constitué de deux solides (S_1) et (S_2), nous avons :

$$\frac{dT(\Sigma/R_g)}{dt} = P(\bar{\Sigma} \rightarrow \Sigma/R_g) + P(S_1 \leftrightarrow S_2)$$

La puissance développée par les efforts extérieurs et intérieurs au système (Σ) est égale à la variation de l'énergie cinétique du système. Ceci se généralise naturellement à un système de n solides.

- Cas d'un système (Σ) de n solides

La généralisation à un système (Σ) de n solides conduit à :

$$\frac{dT(\Sigma/R_g)}{dt} = P(ext \rightarrow \Sigma/R_g) + P(int \rightarrow \Sigma/R_g)$$

où $P(ext \rightarrow \Sigma/R_g)$ représente la puissance des actions extérieures et $P(int \rightarrow \Sigma/R_g)$ représente la puissance des actions intérieures.

Intégrale première de l'énergie cinétique

Si les puissances des efforts intérieurs et extérieurs sont nulles ou bien se calculent par dérivation d'une énergie potentielle, dont on notera la somme E_P , alors le théorème de l'énergie cinétique s'écrit :

$$\frac{dT}{dt} = -\frac{dE_P}{dt}$$

Et par conséquent, il existe une intégrale première du mouvement, appelée intégrale première de l'énergie cinétique :

$$T(\Sigma/R_0) + E_P = Cte$$

Cette intégrale première traduit directement la conservation de l'énergie du système. Il y a transformation de l'énergie potentielle en énergie cinétique et réciproquement. Le système est alors dit « conservatif ».

A retenir

- Le théorème de l'énergie cinétique s'applique à l'ensemble du système retenu. Il n'y a pas de stratégie d'isolement contrairement au principe fondamental de la dynamique.
- L'application du théorème de l'énergie cinétique donne une seule équation du mouvement contrairement au PFD. Son application va être efficace pour les systèmes à un seul degré de liberté.
- Attention aux calculs des puissances dites extérieures et intérieures.

+

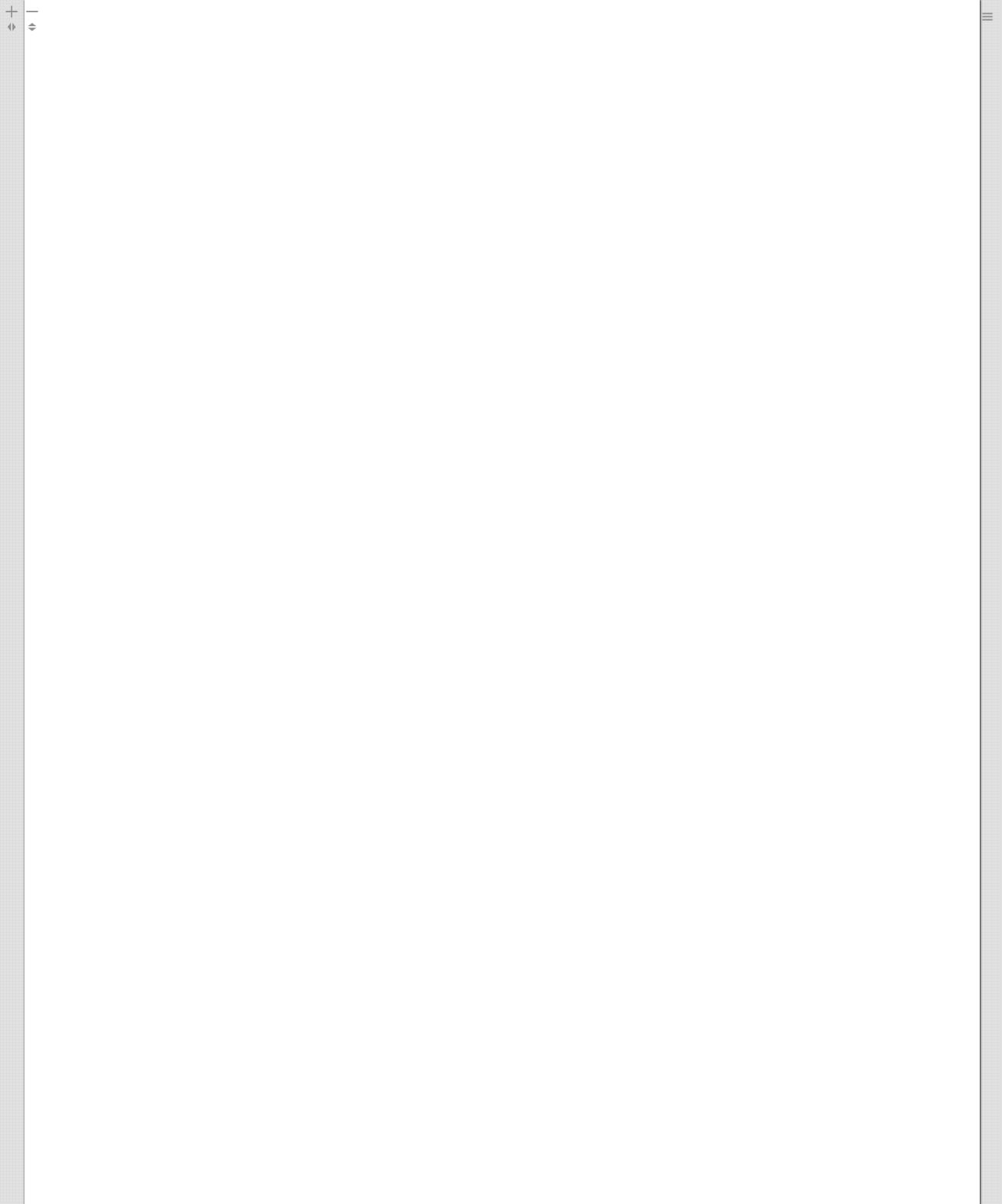
-

♦ ♦

☰

Deuxième partie

Sujets thématiques corrigés

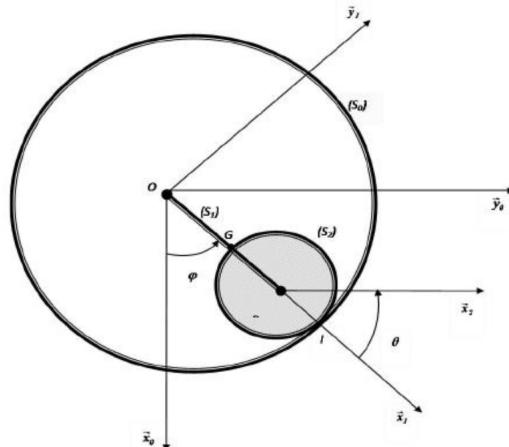


Sujet thématique 1

Système tige-disque en rotation dans un cerceau

Un système matériel est composé de deux solides (S_1) et (S_2) en mouvement par rapport à un bâti (S_0) auquel on affecte un repère orthonormé direct $R_0(O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$.

- Le solide (S_1) est une tige de masse $2m$, de longueur $2R$ et de centre d'inertie G, qui peut tourner autour de l'axe (O, \vec{z}_0) . Soit $R_1(O, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_0)$ le repère associé à (S_1). On suppose que le solide (S_1) est assimilable à une barre de dimensions transversales négligeables. La position de (S_1) par rapport à (S_0) est définie par : $\varphi(t) = (\vec{x}_0, \vec{x}_1) = (\vec{y}_0, \vec{y}_1)$. La tige (S_1) tourne à vitesse angulaire constante ω . On pose $OG = R\vec{x}_1$.
- Le solide (S_2) est un disque, de masse m , de rayon R et de centre d'inertie B. Ce disque roule sans glisser à l'intérieur d'un cercle fixe (C_0) de rayon $3R$ avec $\overrightarrow{OB} = 2R\vec{x}_1$. On affecte le repère $R_2(B, \vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_0)$ au disque et sa position par rapport à (S_1) est définie par : $\theta(t) = (\vec{x}_1, \vec{x}_2) = (\vec{y}_1, \vec{y}_2)$.



Description générale du système

Dans tout le problème la base de projection sera $(\vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_{0,1})$.

Partie A -Étude cinématique

- 1 Calculer la vitesse, $\vec{V}(B \in S_2/R_0)$, du centre B par rapport à R_0 .
- 2 Exprimer la condition de roulement sans glissement en I du disque sur (S_2) par rapport au cercle fixe (C_0) et montrer que cette dernière se ramène à : $\dot{\theta} = -3\dot{\varphi} = -3\omega$.
- 3 Donner les éléments de réduction en B du torseur cinématique du disque (S_2) dans son mouvement par rapport à (R_0) .

Partie B -Géométrie des masses

- 4 Déterminer la matrice d'inertie en O de la barre (S_1) relativement à la base $(\vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_0)$.
- 5 Déterminer la matrice d'inertie en B du disque (S_2) relativement à la base $(\vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_0)$.

Partie C -Étude cinétique

- 6 Déterminer le torseur cinétique en B du disque (S_2) dans son mouvement par rapport à (R_0) .
- 7 Déterminer le torseur cinétique en O du disque (S_2) dans son mouvement par rapport à (R_0) .
- 8 Déterminer le torseur dynamique en B du disque (S_2) dans son mouvement par rapport à (R_0) .
- 9 Déterminer le torseur dynamique en O du disque (S_2) dans son mouvement par rapport à (R_0) .
- 10 Calculer, de deux manières différentes, l'énergie cinétique du disque (S_2) dans son mouvement par rapport à (R_0) .

Solution du sujet thématique 1

Partie A -Étude cinématique

- 1 Calcul de $\vec{V}(B \in S_2/R_0)$:

$$\vec{V}(B \in S_2/R_0) = \left[\frac{d\overrightarrow{OB}}{dt} \right]_{R_0} = 2R \left[\frac{d\vec{x}_1}{dt} \right]_{R_0}$$

$$= 2R(\vec{\Omega}(R_1/R_0) \wedge \vec{x}_1) = 2R(\dot{\varphi}\vec{z}_0 \wedge \vec{x}_1) = 2R\dot{\varphi}\vec{y}_1 = 2R\omega\vec{y}_1$$

- 2 La condition de roulement sans glissement en I du disque sur (R_0) est :

$$\vec{V}_g(I, S_2/R_0) = \vec{V}(I \in S_2/R_0) = \vec{0}$$

Or

$$\vec{V}(I \in S_2/R_0) = \vec{V}(B \in S_2/R_0) + \vec{\Omega}(S_2/R_0) \wedge \vec{BI} = \vec{0}$$

$$\vec{\Omega}(S_2/R_0) = (\dot{\theta} + \dot{\varphi})\vec{z}_0 = (\dot{\theta} + \omega)\vec{z}_0$$

ce qui donne

$$\begin{aligned} \vec{V}(I \in S_2/R_0) &= 2R\omega\vec{y}_1 + (\dot{\theta} + \omega)\vec{z}_0 \wedge R\vec{x}_1 = 2R\omega\vec{y}_1 + R(\dot{\theta} + \omega)\vec{y}_1 \\ &= (2R\omega + R(\dot{\theta} + \omega))\vec{y}_1 = (2R\omega + R\dot{\theta} + R\omega)\vec{y}_1 = (3R\omega + R\dot{\theta})\vec{y}_1 = \vec{0} \end{aligned}$$

d'où :

$$\dot{\theta} = -3\dot{\varphi} = -3\omega$$

- 3 Les éléments de réduction en B du torseur cinématique du disque dans son mouvement par rapport à (R_0) sont :

$$[\vartheta(S_2/R_0)]_B = \begin{cases} \vec{\Omega}(S_2/R_0) = (\dot{\theta} + \omega)\vec{z}_0 = -2\omega\vec{z}_0 \\ \vec{V}(B \in S_2/R_0) = 2R\omega\vec{y}_1 \end{cases}$$

Partie B - Géométrie des masses

- 4 La matrice d'inertie en O de la barre (S_1) relativement à la base ($\vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_0$) est :

$$M_O^{(S_1)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{8}{3}mR^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{8}{3}mR^2 \end{pmatrix}_{R_1}$$

En effet, soit P un point de (S_1), alors on a $P(x, 0, 0)$ un point écrit dans la base de R_1 .

$$I_{Ox_1} = 0 \text{ et } I_{Oy_1} = I_{Oz_1} = \int_{P \in (S_1)} x^2 dm = \lambda \int_0^{2R} x^2 dx = \frac{2m}{2R} \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^{2R} = \frac{8}{3}mR^2$$