(解答) ○の中は配点。その後ろが難易度。

$\boxed{1}$ ㊶ (1)5133240⑨易 (2)50⑧難 (3)20.545(小数第二位四捨五入で一致すればよい)⑧普

(4)(a)57⑧普(b)171⑧超難

$\boxed{2}$ ㉖ (1)45 回⑨易 (2)$\frac{8084}{9}$ ⑨易 (3)$\frac{44462}{45}$⑧普

$\boxed{3}$ ㉔ (1)136$cm^3$⑧普 (2)JU:UN=1:3, JV:VN=1:1(各⑤難)(3)108$cm^3$⑥超難

なお難易度基準は以下の通りです。

易・・・開成入試の標準。

普・・・開成入試の難しいレベル。

難・・・開成入試では出ないレベル。部員の中でもほとんどの人は解けない。

超難・・・解けない。

(総評)

まず問題に関してですが、全体的に例年より難しくなりました。

ですが、取れるところ(1-1,2-1,2-2)をとると 27 点になります。

今回は難易度が高いのにも拘らず問題数が非常に多いためすべてを取ることは不可能に近いです。

そのため「取捨選択」が大切になっていきます。難易度が超難のような問題に固執せずに自分が取れるところを確実にとったほうが安定して良い結果になりやすいです。今回のような解ける問題と解けない問題の難易度の差が大きい回では特に簡単な問題を落とすと大きく差がついてしまうので見直しもしましょう。計算ミスや凡ミスは命どりです。何回しても足りないと思って見直ししてください。

採点は答えさえあっていれば○を、そうでなくても考え方があっていれば部分点を付けています。

目標点に関しては、算数が得意な受験生は 33 点、普通な受験生は 25 点、苦手な受験生は 17 点と設定しました。(なおこれは小学六年生向けであり小学 5 年生の方なら-9 点,小学四年生の方なら-17 点して考えてください)

受験生の方へ：これの出来が悪くても気にせずに、(良かったら誇ってください。) 受験勉強に励みましょう。一喜一憂せず精進していけば実力はつき成績も上がっていくものです。算数を楽しんでください。好きになってください。受験勉強は辛いかもしれませんが頑張ってください。もし希望通りの結果にならなくても勉強して身に着けたものや勉強したという経験は一生モノです。どうか誇りに思って

受験生の保護者様へ：万が一息子さんの出来が悪くても、どうかそれを責めるようなことはしないで下さい。それで息子さんのやる気を削いでしまうのはよろしくありません。受験まで息子さんがやる気をもって勉強に励めるようぜひサポートしてあげてください。

(解説) 注意:あくまで解説として書いているので数学的に本来はあまりよくない書き方を用いている部分もあります。

$\boxed{1}$ 小問集合

(1) $2021 \div \left(\frac{1}{679}+\frac{1}{7560}-\frac{1}{980}-\frac{1}{5238}\right) = 2021 \div \left(\left(\frac{1}{7}-\frac{1}{54}\right)\times\left(\frac{1}{97}-\frac{1}{140}\right)\right) = 2021 \div \left(\left(\frac{47}{7\times 54}\right)\times\left(\frac{43}{97*140}\right)\right) = 7*54*97*140 = 5133240$ となります。よって <u>5122240</u>。

なおこのような上手な変形をしないでも以下のように地道に計算して求めることももちろん可能です。

$$2021 \div \left(\frac{1}{679}+\frac{1}{7560}-\frac{1}{980}-\frac{1}{5238}\right)$$

$$= 2021$$

$$\div \frac{2\times2\times2\times3\times3\times3\times5\times7+7\times97-2\times3\times3\times3\times97-2\times2\times5\times7\times7}{2\times2\times2\times3\times3\times3\times5\times7\times7\times97}$$

$= 2021 \div \frac{2021}{5133240}$ =5133240

(2)まずあやと君が A→C、ゆうた君が B→C と移動するとき、あやと君は$250\times43\times0.8$＝8600円かかりゆうた君は、$250\times47\times0.5=5875$円かかります。よって合計で$8600+5875=14475$円かかります。

次にあやと君が A→B→C、ゆうた君が B→A→C と移動するとき、A 町 B 町間の距離を○㎞と置くと A 町 B 町 C 町で三角形となる条件は三角不等式より○が 4 以上 89 以下のためあやと君、ゆうた君のそれぞれで割引される金額ごとに場合分けして考えると、

○が 5 以上 43 以下の時、125×(○＋47)＋125×(○＋43)＝125×(2×○＋90)円

○が 44 以上 47 以下の時、50×(○＋47)＋125×(○＋43)＝175×○＋7725 円

○が 48 以上 88 以下の時、50×(○＋47)＋50×(○＋43)＝50×(2×○＋90)円。

○が 89 以下の時、25×(89＋47)＋50×(89+43)＝10000 円

これらが 14475 円未満になればよいです。

以上より○の値が 5 以上 12 以下、48 以上 88 以下、89 の場合が条件を満たします。

よって○として考えられる個数は <u>50 個</u>です。

(3) IG＝IL、角 JLK＝60°であることから 3 点 L、K、G は同一直線上にあり、三角形 ILG は正三角形である。四角形 FHJL は角 FHJ＝角 HJL、FH＝LJ なので長方形である。よって HJ＝FL なので、FL＝FG が成り立つ。FI と GL の交点を M とすると、FG＝FL、IG＝IL から LM＝MG、角 FMG＝90°が成り立つ。角 FGM＝30°、角 FMG＝90°より角 MFG＝60°となり角 AFE との対頂角が等しく、AFMI は同一直線上にある。MI の長さは三角形 IGL の面積＝9×0.43＝3×MI÷2 より、MI＝2.58cm。同様に、FM＝1.29cm である。ここで四角形 ABCD は長方形なので、面積は 2×三角形 AIB とかけるので、求める面積は$\underline{2\times3.5\times5.87\div2=20.545cm^2}$ である。

なお本来$\sqrt{\frac{3}{4}}$(二回かけて$\frac{3}{4}$になる数のうち 0 以上のもの)であるべき数字を近似値であらわしているので解き方によっては異なる値が出てくることがあります。そのため小数第 2 位を四捨五入して同じになる値は正解とします。

(4)常に数の差が一定であることに注意して考えると、ある数□と△を用いて A,B,さとし君,C,D は以下のようにあらわせることが分かります。

A=2×(□+△),B=□+△,さとし君=□+2×△,C=△-□,D=4×□-3×△(このとき問の条件を満たします)

ここで C,D>0 なので 4×△>4×□>3×△とわかります。また明らかに一番数が大きくなるのは A の最後の時でこのとき A は 5×□です。これが 100 以下なので□は 20 以下と分かります。

これを踏まえて考えていきます。

(a) すべて整数のため□,△も整数です。よって(a)の個数は「4×△>4×□>3×△を満たし□≦20 となる

(b) 0 より大きい、整数△,□の組の個数」と言い換えられます。ここで□の値が決まっている時△は何通りあり得るか、ということを考えます。4×□>3×△>3×□であればよいとわかるので△は□+1 から□+[$\frac{-1}{3}$の整数部分]がありえて[$\frac{-1}{3}$の整数部分]個とわかります。□は 1 から 20 になるのでありうる通り数は 0+0+0+1+1+1+・・・+5+5+5+6+6=<u>57</u> とわかります。

(c) ここで今まで考えていなかった「A+B+さとし君が整数」という条件を考えます。
まず各々のときの A+B+さとし君を□,△を用いて表すと(1)4×□+5×△,(2)1×□+8×△,(3)13×□-△となります。これらが整数であるので(2)×4-(1)=27×△も整数であるとわかります。よって△は分母が 27 で分子が整数の分数として表せることが分かります。同様に(1)+5×(3)=69×□も整数であるとわかり□は分母が 69 で分子が整数の分数として表せることがわかります。同様に 13×(2)-(3)=105×△も整数であるとわかり先ほどの議論により△は分母が 27 で分子が整数の分数として表せることを踏まえると、△は分母が 3 で分子が整数の分数として表せることが分かります。
同様に(2)+8×(3)=105×□も整数であるとわかり先ほどの議論により□は分母が 69 で分子が整数の分数として表せることを踏まえると□は分母が 3 で分子が整数の分数として表せることが分かります。
ここで□'=3×□,△'=3×△と表すことにします。このとき「A+B+さとし君」が整数という条件は「△'-□'が 3 の倍数」と言い換えられることが分かります。
また□≦20 のため□'≦60 とわかります。よって(b)の個数は「4×△'>4×□'>3×△'を満たし□'≦60 で△'-□'が 3 の倍数であるような、0 より大きい、△',□'の組の個数」と言い換えられます。
ただこの個数を直接求めるのは難しいので△'の 3 で割ったあまりで場合分けして求めます。
各々の場合は(a)のときと同様に求めることが可能です。不等号に気を付けて計算してあげると
あまりが 0 のときは(a)そのものなので 57 個,あまりが 1 のときは 57 個,あまりが 2 のときは 57 個であるとわかり答えは 57+57+57=<u>171</u> であるとわかります。またよくよく考えればあまりによって個数は変わらない、ということが分かるので 57×3=171 と楽に求めることも可能です。

2 旅人算

(1) ゆうき君が片道歩いている間にしゅんすけ君に必ずちょうど一回会います。(これは 47 回あります)
しかし最初の片道と最後の片道は会わないのでその二回分を引きます。よって 47-2 で<u>45</u>が答えです。

(2) 20 回目に会うのはゆうき君が 21 回目に片道を歩いている時です。21 回目は A 地点から B 地点への動きで A の出発は 20×43=860 分後、B への到着は 21×43=903 分後です。この間のしゅんすけ君の動きを考えましょう。片道 47 分かかることを踏まえると 19 回目の片道を歩いている時が出会うときです。18×47=846 分後のときに A 地点を出発して 19×47=893 分後のときに B 地点につきます。
地道に計算してあげると(AB の片道を 2021×□とおいてかんがえると楽だと思います)<u>$892\frac{2}{9}$分後</u>のときとわかります。

(3) しゅんすけ君が片道歩いているうちに複数回ゆうき君に出会う、というのは何回あるのかを考えます。しゅんすけ君は 43 回片道を歩く。そして一回片道を歩くと必ず 1 回はゆうき君に会う。そしてゆうき君に複数回であうとき、必ず 3 回以上出会うとわかる。これを踏まえて考えると一度しか[しゅんすけ君が片道歩いているうちに複数回ゆうき君に出会う]ということは一度しかないとわかります。
この移動をアナグラムにした時のことを考えると点対称になるとわかるので一度しか複数回であうことがない、ということはその出会いはちょうどアナグラム上の真ん中で起きた出来事とわかります。
45 回出会うのでその真ん中は 23 回目であり、複数回であったというのは 22,23,24 回目の出会いのことを指しているとわかります。今回問われているのはこのうち最初の出会い,22 回目の出会いなので地道に計算して求めると答えは<u>$\frac{44462}{45}$分後</u>であるとわかります。

3 立体図形

(1) 三角錐 FNJ-M の体積は$(4\times6\div2)\times2\div3=8cm^3$,
四角錐 BIMF-J の体積は$\{(4+2)\times6\div2\}\times2\div3=12cm^3$.
この 2 つの立体を合わせると、立方体から問題の立体を除いた部分のうち、点 B を含むものになる。点 A, C, D についても同じ部分が存在して、全てを合わせると、立方体から問題の立体を除いた部分全てになる。よって、求める体積は<u>$6\times6\times6-(12+8)\times4=136cm^3$</u> が答えです。

(2) RJ と KM が平行であるから、R, J, K, M は同じ平面上にある。よって、RK と JM は交点をもちこれが U だとわかる。RJ：MK＝2：6＝1：3 なので、<u>JU：UM＝1：3</u> とわかる。
R, S, J, N が平面 BCGF 上にあるから、JN と RS は交点をもち、これが V だとわかる。そして、JR と SN は長さが等しく平行であるから、<u>JV：VN＝1：1</u> とわかる。

(3) 立体 IRMQ-KSOT に含まれて、かつ(1)の立体 IJKL-NMOP に含まれていない部分を考える。
まず、点 R を含むものについて考えると、これは(2)から三角錐 UVM-R と三角錐 IUM-R である。
三角錐 RJN-M の体積は$\{18-(2\times2\div2)-(4\times4\div2)\}\times2\div3=\frac{16}{3}cm^3$なので、三角錐 UVM-R の体積は$\frac{16}{3}\times\frac{1}{2}\times\frac{3}{4}=2cm^3$. また、三角錐 IJM-R の体積は$\{18-(2\times4\div2)\times2\}\times2\div3=\frac{20}{3}cm^3$なので、三角錐 IUM-R の体積は$\frac{20}{3}\times\frac{3}{4}=5cm^3$.
点 S, T, Q を含むものについても考えると、これらは全て点 R の場合のものと同じ形をしていることがわかります。そしてこれまで考えたもので全てである。
立体 IRMQ-KSOT の体積は(1)と同じ$136cm^3$であるから、共通部分の体積は、<u>$136-(2+5)\times4=108cm^3$</u>。