2020 SUKEN GRAND PRIX

開成学園数学研究部

問　　題

2021 年 1 月 10, 11 日 時間無制限 12 題

(注意事項)

- 2 番以降は証明問題です. 答を出す問題であっても必ず証明をつけてください.
- 殿堂入りを目指して頑張ってください.

1. 次の虫食い算を解け.

$$
\begin{array}{ccccccc}
 & & \square & \square & \square & \square & \square \\
 & \times & & & \square & \square & \square \\
\hline
 & \square & \square & \square & \square & \square & \square \\
\square & \square & \square & \square & \square & \square & \\
\hline
1 & 4 & 9 & \square & 0 & \square & 1
\end{array}
$$

2. 三角形 ABC において、その内接円と辺 AB, BC, CA との接点を D, E, F とする。$DE = 7, EF = 5, FD = 8$ のとき三角形 ABC の面積を求めよ。

3 多項式 $g(x)$ が存在し, $x^n + x \equiv g(x)^2 + g(x) \pmod 2$ となる正整数 n を全て求めよ. ただし, $p(x) \equiv r(x) \pmod 2$ とは, ある整数係数多項式 $q(x)$ が存在し, $p(x) = 2q(x) + r(x)$ が成り立つことをさす.

4. $a_1 = 2, a_{i+1} = {a_i}^2 - a_i + 1 (i > 1)$ と数列 a_i を決める. S を a_i の相異なるいくつかの積でかける集合とする (ただし、0 個の積は 1 とみなす). $\{s+1 | s \in S\} \cap \mathbb{P} = \{a_i | i \in \mathbb{N}\} \cap \mathbb{P}$ を示せ. ただし, $\mathbb{P}$ を素数全体の集合とする.

5. $f(i)$ が以下で定義されるとき, $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{if(i)f(f(i))f(f(f(i)))\cdots}$ が発散するか収束するか求めよ.
(1)$f(i) =$ (i を 10 進表示したときの桁数)
(2)$f(i) =$ (i を 2 進表示したときの桁数)

6. 三角形 ABC の垂心を H とし, 外接円を ω とする. BH, CH と ω の交点のうちそれぞれ B, C でない方を D, E とし, DE と AB, AH, AC との交点をそれぞれ F, I, G とする. $AB \times CH \times FI = AC \times BH \times GI$ を示せ.

7. $p>2, n>1$ を自然数とし, $D=\lfloor \sqrt[n]{p} \rfloor$ と置く. 任意の整数列 $a_1, a_2 \cdots, a_n$ に対し, $0<C<p$ を満たす整数 C, および整数列 $b_1, b_2 \cdots, b_n$ が存在し, $Ca_i \equiv b_i \pmod p$ かつ $|b_i| \le \lceil \frac{n}{D} \rceil - 1 (i=1,\cdots,n)$ が成り立つことを示せ.

8. $n, m (\le n+1)$ を正整数とする. m 枚のカードからランダムに選ばれた $n+1$ 枚のカードに対し, A さんがその中から n 枚とその順序を任意に選び, その情報のみを B さんに伝えることによって, B さんが A さんが選ばなかったのこり 1 枚のカードを常にあてる方法があるような n, m の条件を求めよ.

9. 任意の n, 及び $a_1 \ge a_2 \ge \cdots \ge a_n \ge 0, a_1+a_2+\cdots+a_n=1$ を満たす数列 $a_1, \cdots, a_n$ に対し $(a_1+2a_2+\cdots na_n){a_1}^{a_1}{a_2}^{a_2}\cdots{a_n}^{a_n} \le 1$ となるか, 答えよ.

10. $AB \ne AC$ を満たす三角形 ABC の外接円を ω とする. 三角形 ABC の内心を I とし, BI, CI と ω の交点をそれぞれ X, Y とする. また, IB と IC の中点をそれぞれ M, N とし, XY と MN の交点を Z とする. この時, 三角形 ZMY の外接円と三角形 ZXN の外接円と ω は一点で交わることを示せ.

11. 任意の正整数 n, m に対し, 次の条件が同値なことを示せ.

- $n!$ は m の倍数.
- 任意の整数に対し, m の倍数を返すようなモニックな n 次整数係数多項式が存在する.

ただし, 多項式 f がモニックであるとは, f の最高次係数が 1 であることをいう.

12. 自然数の 3 組 (n, k, M) が良い組であるとは, 次の条件を全て満たすような整数列 $a_1, \cdots a_n$ が存在することを指す.

- $0 \le a_i \le M (i=1,\cdots,n)$
- $a_1, \cdots a_n$ に, 少なくとも k 種類の整数が存在する.
- 全ての $(1 \le) i_1 < i_2 < \cdots < i_j (\le n) (j>0)$ に対し, $a_{i_1}+a_{i_2}+\cdots+a_{i_j}$ は M の倍数でない.

また, (n, k, M) が悪い組であるとは, (n, k, M) が良い組でないことを指す.
(1) 任意の正整数 k に対し $(k, k, \lfloor \frac{k^2}{2} \rfloor + 2)$ が良い組であることを示せ.
(2) 任意の正整数 $M, k (\le M)$ に対し, $(M-k+1, k, M)$ が悪い組であることを示せ.

2020 SUKEN GRAND PRIX

開成学園数学研究部

略　　解

1.

$\boxed{13679 \times 109}$

2.

余弦定理より, $EF^2 = DE^2 + DF^2 - 2DE \cdot DF \cos\angle DFE, \cos\angle DFE = \frac{1}{2}, \angle DFE = 60°$. よって、△ ABC の内接円の半径は, (正弦定理より)$7 \div 2 \div \dfrac{\sqrt{3}}{2} = \dfrac{7}{\sqrt{3}}$. △ ABC の内心を I とし、DE, EF, FD の中点を P, Q, R とすると、$RI = \sqrt{DI^2 - DR^2} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$, △ $ADR \sim$ △ DIR より $AD : DI = DR : IR$ なので、$AD = \dfrac{7}{\sqrt{3}} \times 4 \div \dfrac{1}{\sqrt{3}} = 28$. 同様の計算を行うことで、$BE = \dfrac{35}{11}, CF = 7$ とわかる。以上より、△ ABC の面積は, $((28 + \dfrac{35}{11} + 7) \times 2) \times \dfrac{7}{\sqrt{3}} \div 2 = \boxed{\dfrac{980\sqrt{3}}{11}}$.//

3.

以下, $a \equiv b$ と書いたら $a \equiv b \pmod 2$ の意味とする. $(f+g)^2 \equiv f^2 + 2fg + g^2 \equiv f^2 + g^2$. よって, $x^{2i} + x^i$ の和に $x^n + x$ が (mod 2 で) なるかを求めればよい. $n = 1$ なら自明に作れる. そうでないなら, x は $i = 1$ の時しか $x^{2i} + x^i$ に現れないので, $(x^n + x) - (x^2 + x) \equiv x^n + x^2$ が表現できるか考えればよい. $n = 2$ の時は自明に作れる. そうでないなら, x^2 は ($i = 1$ を除き)$i = 2$ の時しか現れないので, $(x^n + x^2) - (x^4 + x^2) \equiv x^n + x^4$ が表現できるか考えればよい. これを繰り返し, 結局, $\boxed{n = 2^k (k \text{ は任意の非負整数})}$ が答えとなる.

4.

帰納法を用いて, $\prod_{i=1}^{i=n} a_i + 1 = a_n(\cdots(1))$ が分かる. よって, $\supset$ が従う. 逆に, $p = a_{i_1}a_{i_2}\cdots a_{i_k} + 1 (i_1 < i_2 < \cdots < i_k)$ が素数であるとし, $j \neq i_j$ として矛盾を導く. $j \neq i_j$ となる最小の j をとり, r とする. (1) より, $k > r$ なら $a_k \equiv 1 \pmod{a_r}$ が分かる. よって, $p = \prod_{l=1}^{r} a_l \prod_{l=r+1}^{k} a_{i_l} + 1 \equiv (a_r - 1) + 1 \equiv 0 \pmod{a_r}$ となり, p が素数であることに矛盾する.

5.

$f^n(i) = f(f(\cdots f(i)\cdots))$($f$ は n 回現れる), $g_n(i) = if(i)f^2(i)\cdots f^n(i), g(i) = if(i)f^2(i)\cdots$ と定義する.
(1) $exp(i) = 10^i, h(i) = exp^i(1)$ とし, $r = 1.05$ と置く.

(補題) 任意の n に対し, $\sum_{i=n}^{i=10n-1} 1/i > r$
(証明)$\sum_{i=n}^{i=10n-1} 1/i \geq \sum_{i=n}^{i=2n-1} 1/2n + \sum_{i=2n}^{i=3n-1} 1/3n + \sum_{i=3n}^{i=4n-1} 1/4n = 1/2 + 1/3 + 1/4 > r$.

ここから, $k < l$ の時次の式が成り立つ.
$\sum_{j=10^k}^{10^l-1} \frac{1}{g_{i+1}(j)} = \sum_{m=k}^{l-1} \sum_{j=10^m}^{10^{m+1}-1} \frac{1}{ig_i(f(j))} = \sum_{m=k}^{l-1} \frac{1}{g_i(m)} \sum_{j=10^m}^{10^{m+1}-1} \frac{1}{i} > r\sum_{m=k}^{l-1} \frac{1}{g_i(m)}$. よって, $\sum_{j=exp^i(1)}^{exp^{i+1}(1)-1} \frac{1}{g_i(j)} > r\sum_{j=exp^{i-1}(1)}^{exp^i(1)-1} \frac{1}{g_i(j)}$ となり, これを繰り返し $\sum_{j=exp^i(1)}^{exp^{i+1}(1)-1} \frac{1}{g_i(j)} \geq r^i$ となる. ゆえに,

$\sum_{j=1}^{exp^i(1)-1} \frac{1}{g(j)} = \sum_{k=1}^{i} \sum_{j=exp^{k-1}(1)}^{exp^k(1)-1} \frac{1}{g(j)} > \sum_{k=1}^{i} r^k$ となり, これは $i \to \infty$ で無限大に発散する. よって, 元の式も $\boxed{\text{発散する}}$

(2). $exp(i) = 2^i, h(i) = exp^i(1)$ とし, $r = 0.95$ と置く.

(補題) 任意の $n > 1$ に対し, $\sum_{i=n}^{i=2n-1} \frac{1}{i} < r$

(証明)$n > 3$ なら $\sum_{i=n}^{i=2n-1} \frac{1}{i} \leq \sum_{i=n}^{i=\lceil 1.5n \rceil -1} \frac{1}{n} + \sum_{i=\lceil 1.5n \rceil}^{i=2n-1} \frac{1}{1.5n} \leq \frac{\lceil 1.5n \rceil - n}{n} + \frac{1}{3} < r$. $n = 2, 3$ は別途に確かめればよい.

ここから, $1 \leq k < l$ の時次の式が成り立つ.
$\sum_{j=2^k}^{2^l-1} \frac{1}{g_{i+1}(j)} = \sum_{m=k}^{l-1} \sum_{j=2^m}^{2^{m+1}-1} \frac{1}{ig_i(f(j))} = \sum_{m=k}^{l-1} \frac{1}{g_i(m)} \sum_{j=2^m}^{2^{m+1}-1} \frac{1}{i} < r \sum_{m=k}^{l-1} \frac{1}{g_i(m)}$. よって, $\sum_{j=exp^i(1)}^{exp^{i+1}(1)-1} \frac{1}{g_i(j)} < r \sum_{j=exp^{i-1}(1)}^{exp^i(1)-1} \frac{1}{g_i(j)}$ となり, これを繰り返し, $\sum_{j=exp^i(1)}^{exp^{i+1}(1)-1} \frac{1}{g_i(j)} \leq r^i$ となる. ゆえに, $\sum_{j=1}^{exp^i(1)-1} \frac{1}{g(j)} = \sum_{k=1}^{i} \sum_{j=exp^{k-1}(1)}^{exp^k(1)-1} \frac{1}{g(j)} \leq \sum_{k=1}^{i} r^k$ となり, これは $i \to \infty$ で収束する. よって, 元の式も $\boxed{\text{収束する}}$

6.

$\angle ABH = \angle ACH$(H 垂心より) $= \angle ABQ$(円周角の定理), $\angle BAH = \angle BCH$(H 垂心より) $= \angle BAQ$(円周角の定理) より、$\triangle ABH \equiv \triangle ABQ$(二角夾辺相等) なので、直線 AB に対して、Q と H は線対称だから、$\angle AQX = \angle AHX \cdots (1)$ が成り立つ。 同様に、$\angle APY = \angle AHY \cdots (2)$ も成り立つ。
以上より、$\angle AHY = \angle APY((2)) = \angle ACQ$(円周角の定理)$= \angle ABP$($H$ 垂心より)$= \angle AQP$(円周角の定理)$= \angle AHX((1)) \cdots (3)$ が成り立つから、角の二等分線定理より、$XH : YH = XZ : YZ \cdots (4)$ が成り立つ。
また、(3) の議論から $\triangle AXH \sim \triangle AHB$(二角相等) がわかるので、$AH : AB = XH : HB, XH = \dfrac{AH \times HB}{AB} \cdots (5)$ が成り立つ。同様に、$YH = \dfrac{AH \times HC}{AC} \cdots (6)$ も成り立つ。
(4)〜(6) より、$XZ : YZ = \dfrac{AH \times HB}{AB} : \dfrac{AH \times HC}{AC} = (HB \times AC) : (HC \times AB)$ なので、$AB \times XZ \times CH = AC \times YZ \times BH.//$

7.

$n\%m$ で n を m で割った余りを表す. X=$\{(ka_1\%p, ka_2\%p, \cdots, ka_n\%p) | 0 \leq k < p, k$ は自然数 $\}$ とする. $|X| < p$ なら自明に成り立つので, $X = |p|$ としてよい. このとき, 鳩ノ巣原理より, 任意の成分を $\lfloor N/d \rfloor$ で割った商が等しいような X の異なる元, $(ka_1\%p, ka_2\%p, \cdots, ka_n\%p)$ と $(ja_1\%p, ja_2\%p, \cdots ja_n\%p)$ が存在する. ここで, $C = |i - j|$ とすれば条件を満たす.

8.

条件は, $[n] = \{0, 1, \cdots n-1\}, C_{n,m} = \{X \subset [n] | \#X = m\}, P_{n,m} = \{(i, X) | 0 \leq i < m!, i$ は自然数 $, X \in C_{n,m}\}$ としたとき, $X \subset f(n, X)$ となる $P_{n,m}$ から $C_{n,m+1}$ への全射 f が存在することと同値である. 明らかに ${}_nC_{m+1} = \#C_{n,m+1} \geq \#P_{n,m} = \{(i, X) | \#X = m\} = {}_nP_{m+1}$, つまり $m \leq (n+1)! + n$ が必要となる. 逆に, $m = (n+1)! + n$ なら, $f : (i, X) \mapsto X \cup \{([m] - X$ の中で $(ni + (\sum X \pmod n)))$ 番目の自然数 $\}$ が条件を満たす. よって, $\boxed{m \leq (n+1)! + n}$ が答えとなる.

9.

$\epsilon = \frac{1}{1000}, m = 100, n = m+1, a_1 = 1 - m\epsilon, a_2 = a_3 = \cdots = a_m = \epsilon$ とすると, $(a_1 + 2a_2 + \cdots na_n){a_1}^{a_1}{a_2}^{a_2}\cdots{a_n}^{a_n} = (1+\frac{n^2+3n-2}{2}\epsilon)(1-\epsilon)^{1-\epsilon}\epsilon^{m\epsilon} \geq (1+\frac{m^2}{2}\epsilon)(1-\epsilon)\epsilon^{m\epsilon} = 6\times 0.999\times(\frac{1}{1000})^{0.1} \geq 5\times 0.5 > 1$. ゆえに $\boxed{\text{成り立たない}}$

10.

AI と ω の交点のうち A でない方を P とする. この時, 明らかに 3 点 P, M, Y と P, N, X は同一直線上にある. 中点連結定理より, $MN//BC$ なので $\angle IBC = \angle IMN$. 円周角の定理より, $\angle XBC = \angle XYC$. 円周角の定理の逆より, 4 点 $XNMY$ は同一円周上にある. $\angle PMI = \angle PNI = 90^\circ$ なので 4 点 $PMIN$ も同一円周上にある. よって $PMIN$ の外接円と ω の交点のうち P 出ない方を Q とすると, XY, NM, PQ は根心 Z で一点で交わる. また, $\angle QYP = \angle QXP, \angle QMP = \angle QNP$ より, 三角形 $QYM \sim$ 三角形 QXN. よって, $\angle YQM = \angle XQN$ であり, これは $\angle XZN$ とも等しい. よって円周角の定理の逆から, $XQNZ, YMQZ$ は同一円周上にあるので, 題意は示された.

11.

$\Rightarrow) f = \prod_{i=0}^{n}(x-i)$ とすればよい.
$\Leftarrow) p$ を任意の素数とし, 非負整数 l に対し $a_l = \mathrm{ord}_p(pl!), g_l(x) = \prod_{i=0}^{pl-1}(x-i)$ とおく. 多項式 f が任意の整数 x に対し, $f(x) \equiv 0 \pmod{p^{a_n+1}}$ となるなら, 多項式 $g_0, g_1, \cdots g_{n+1}$ が存在し, $f = (\sum_{i=0}^{n} p^{a_n - a_i + 1} f_i g_i) + f_{n+1}g_{n+1}$ と書けることを示す. n に関する帰納法を用いる. $n = 0$ は $modp$ で考えても剰余の定理が成り立つことから従う. n で成り立つと仮定し, f を任意の整数 x に対し, $f(x) \equiv 0 \pmod{p^{a_{n+1}+1}}$ となる多項式とする. このとき, 仮定より $f = (\sum_{i=0}^{n} p^{a_n - a_i + 1} f_i g_i) + f_{n+1}g_{n+1}$ と書ける. 両辺に $0 \leq j < p$ を満たす自然数 j を代入し, $0 \equiv f_0(j) \pmod{p^{a_{n+1}-a_n}}$ となる. ゆえに $n = 0$ の証明と同様に, $f_0 = g_1' f_1 + p g_0'$ とかける. よって, g_i を適当に取り換えれば $f = p^{a_n+2} + f_0 g_0 (\sum_{i=1}^{n} p^{a_n - a_i + 1} f_i g_i) + f_{n+1}g_{n+1}$ と書ける. $a_n + 2 < a_{n+1} + 1$ なら, また j を代入することにより, $f = p^{a_n+3} f_0 g_0 + (\sum_{i=1}^{n} p^{a_n - a_i + 1} f_i g_i) + f_{n+1}g_{n+1}$ と書け, これを繰り返し, $f = p^{a_{n+1}+1} f_0 g_0 (\sum_{i=1}^{n} p^{a_n - a_i + 1} f_i g_i) + f_{n+1}g_{n+1}$ となる. 今度は, $(n > 0$ なら$) p \leq j < 2p$ を満たす j を代入することを繰り返し, $f = p^{a_{n+1}+1} f_0 g_0 + p^{a_{n+1}-a_1+1} f_1 g_1 + (\sum_{i=2}^{n} p^{a_n - a_i + 1} f_i g_i) + f_{n+1}g_{n+1}$ と書ける. これを繰り返し, $f = (\sum_{i=0}^{n+1} p^{a_{n+1} - a_i + 1} f_i g_i) + f_{n+2}g_{n+2}$ となり, 帰納法が回る. とくに f がモニックなら, 次数が $p(n+1)$ 以上となる.

12.

(1)$2l = \lfloor \frac{k^2}{2} \rfloor + 2$ と置くと, $1, 2, \cdots, \lfloor \frac{k}{2} \rfloor, l, l+1, \cdots, l + \lfloor \frac{k-1}{2} \rfloor$ が条件を満たす.
(2)$n\%m$ で n を m で割った余りを表す.

(補題)0 以上 M 以下の相異なる整数 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ に対し, $X = \{(\sum_{i\in S} a_i)\%M | S \subset 1, \cdots, n, S \neq\}$ と置くと, $0 \in X$, もしくは $\#X \geq 2n-1$ となる.
(証明) 帰納法を用いる. $n = 1$ は自明. n の時正しいとする. $0 \notin X$ かつ $\#X < 2n+1$ として矛盾を導く. $Y = \{(\sum_{i\in S} a_i)\%M | S \subset \{2, \cdots, n+1\}\}$ とすると, $X = (Y \cup \{y + a_1 | y \in Y\}) - \{0\}$ となる. 帰納法の仮定より, $\#Y \geq 2n$ となるので, $Y = \{0, a_1, 2a_1\%M, \cdots, (2n-1)a_1\%M\}, X = (Y - 0) \cup \{2na_n\%M\}$ となる. $a_2, a_3, \cdots a_{n+1} \in Y$ より, $a_i + a_j = (2n+1)a_n\%M$ となる $i \neq j$ が存在し, ゆえに $(2n+1)a_n\%M \in X$ となり矛盾.

$n = M - k + 1$ とし, $a_1, \cdots, a_n$ が条件を満たす数列と仮定して矛盾を導く. $a_1, \cdots a_k$ が相異なるとしてよい. 上の補題ように X をとると, この数列の条件より $0 \notin X$. よって, $\#X \geq 2k - 1$. ここで, $Z = \{a_{k+1}, a_{k+1} + a_{k+2}, \cdots, a_{k+1} + \cdots + a_n\} \cup \{(a_{k+1} + \cdots + a_n + x)\%M | x \in X\}$ とすると, $\#Z = n - k + \#X \geq n + k - 1 = M$ かつ, $Z \subset \{1, \cdots, M - 1\}$ で矛盾.