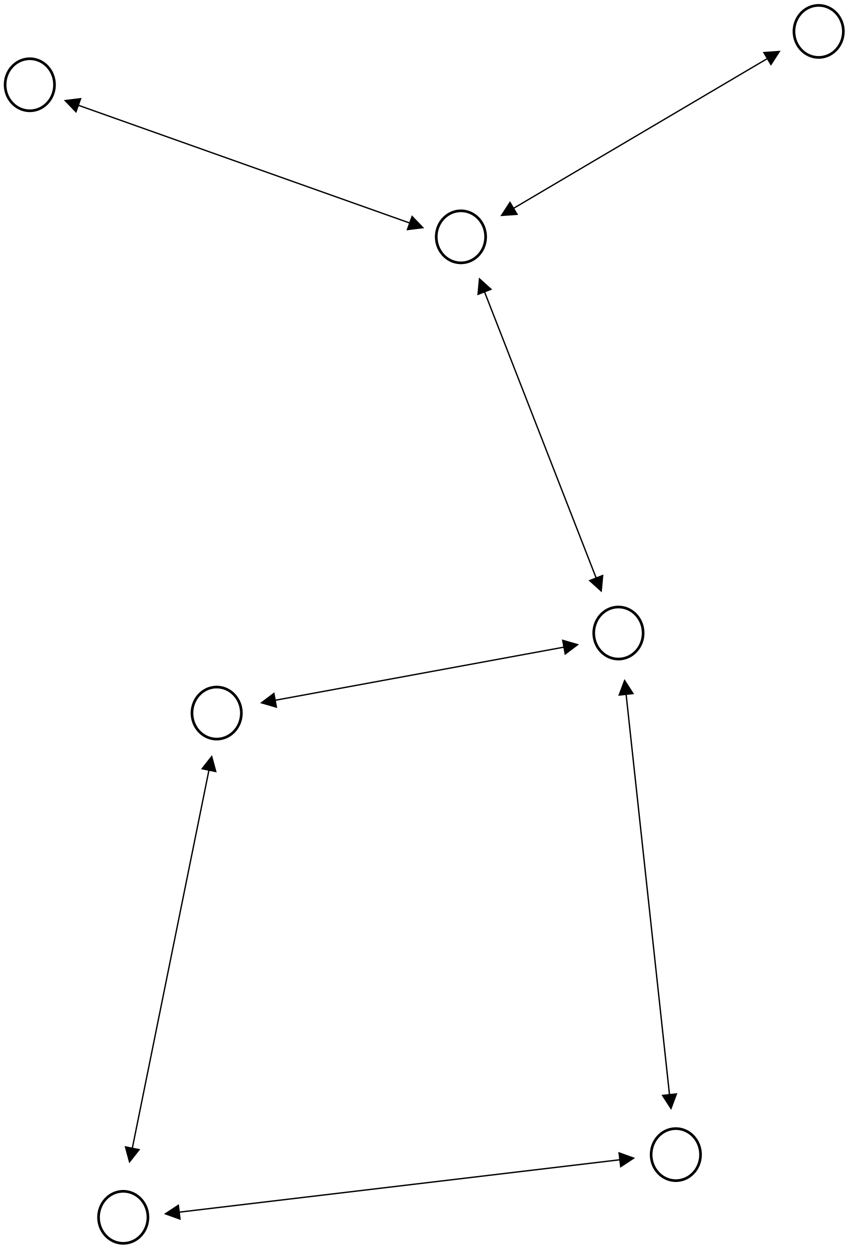
$$\sqrt[s]{hi} \times b^{u} + n\mathrm{Ca} - S_{e} = \cdots$$



開成学園数学研究部部誌・2020 年度文化祭号

部誌によせて

顧問　中﨑鉄平

最近, 金曜日に宝くじ（ロト７と呼ばれているもの）を, キャリーオーバー（前回に１等が出なく, 持越しになっている状態）があるときに限り 1 口 300 円だけ買うのが楽しみの一つになっている。

もちろん, これをギャンブルと見たときには控除率が 50% を超えること, つまり 300 円の投資に対する期待値が 150 円未満しかないことは理解して購入しているつもりだ。話がそれるが, 高校数学の内容から期待値を外したのは残念。

残りの１５０円弱の取り合いと分かっていても, そして, 限りなく０に近い確率ではあるものの $(=\frac{1}{{}_{37}\mathrm{C}_7}$, 約 1000 万分の 1), 最高 10 億円を税金がかからないお金として得られる可能性があるというのは魅力的である。当たったら…と考えると楽しくて仕方がない。まあ, 外れるのだが。

くだらない話はこれくらいにして, コロナ禍の中, 部活動も軒並み大きな制約を受けることになった。その中において, 数学研究部はいち早く ZOOM を用いた部活動が生徒から提案があり, 離れた場所からではあるが, 活動を再開することができた。おかげで, 対面授業が再開した後も, スムーズに新入生の受け入れができているように思う。

部長をはじめとする高 1 執行部の部活および数学への限りない熱意を感じた。今回, リアルでの文化祭は断念したが, 部員たちが, それでも「これだけのことができました」と胸を張っていえる内容のひとつがこの部誌である。

楽しんでいただけたならば, とても嬉しい。

はじめに

部長　根岸慧

　本日はお忙しい中 149th 開成祭公式 HP に, そして数学研究部にご来場いただきありがとうございます。今年度は新型コロナウイルスの影響で HP での部誌, 中学・高校入試予想, GP の掲載, zoom での数研部員と勝負！のみとなりました。さて, 今年度の部活動は緊急事態宣言により学校が完全オンライン化していたので, 部活動も zoom を使って行っていました。その中で講義などを行っていまして, 普段の活動の雰囲気であったり, 参加している感覚であったりをあまり変えないように努めていましたが, もちろん初めての試みでありなかなかうまくいきませんでした。しかし, 運動部であればそもそも活動は行えていませんでしたし, はやくからオンラインで活動できた部活も少なかったでしょう。こういうところに数研という部活の伝統や良さが隠れているんだなと思いました。では少し短いですが, 部員それぞれがこのコロナ禍で考えてきたこと, ぶつけたかった事などが詰まっていますので, ぜひ記事をご覧ください。次に読む際の注意点と謝罪です。

今年度の部誌については、編集が思うように進まなかったため、一部が表示されていなかったり、はみ出して見えなくなってしまっている部分があったりなど、最終的な調整がうまく行えませんでした。これにより被害を被ってしまった部員の方々と、ギリギリの提出となりご迷惑をおかけした文準の方々、そして読者の皆様に、深くお詫び申し上げます。

フィボナッチ数列

1 年 高橋, 大西

1 | フィボナッチ数列とは

$$a_1 = a_2 = 1, a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$$

上の式が定義です．わかりやすく言えば, 前の二つの項の和がその項になる数列です.

2 | 自分が考えたこと

フィボナッチ数列を p が法として考えたときの周期に着目してみました.
($p = 6m \pm 1$ の形でない 2,3 は例外として対称にしていませんでした．)
例えば, $p = 5$ のときは,

$$1, 1, 2, 3, 0, 3, 3, 1, 4, 0, 4, 4,$$
$$3, 2, 0, 2, 2, 4, 1, \underline{0}, 1, 1, \ldots$$

となり, 下線を引いてある 0 までの 20 を一周期ということです.

法とした素数	周期	備考
5	20	
7	16	$(7+1) \times 2$
11	10	$(11-1)$
13	28	$(13+1) \times 2$
17	36	$(17+1) \times 2$
19	18	$(19-1)$
23	48	$(23+1) \times 2$
29	14	$(29-1) \div 2$
31	30	$(31-1)$
37	76	$(37+1) \times 2$
41	40	$(41-1)$
43	88	$(43+1) \times 2$

法とした素数	周期	備考
47	32	$(47+1) \times \frac{2}{3}$
53	108	$(53+1) \times 2$
59	58	$(59-1)$
61	60	$(61-1)$
67	136	$(67+1) \times 2$
71	70	$(70-1)$
73	148	$(73+1) \times 2$
79	78	$(79-1)$
83	168	$(83+1) \times 2$
89	44	$(89-1) \div 2$
97	196	$(97+1) \times 2$

周期が ($\boxed{\text{法とした素数}}$+1)×2 となるものを a 型, ($\boxed{\text{法とした素数}}$-1) となるものを b 型, ($\boxed{\text{法とした素数}}$+1)×$\frac{2}{3}$ となるものを c 型, ($\boxed{\text{法とした素数}}$-1)÷2 となるものを d 型とします.

このとき, 1 の位が $\left\{\begin{array}{lll} 3,7\text{ のとき} & a & \text{型}\ (7,13,17,23,37,43,53\cdots) \\ 1,9\text{ のとき} & b & \text{型}\ (11,19,31,41\cdots) \end{array}\right.$

$$\begin{array}{lll} 60\text{ で割った余りが }47\text{ のとき} & c & \text{型}\ (47,107\cdots) \\ 60\text{ で割った余りが }29\text{ のとき} & d & \text{型}\ (29,89\cdots) \end{array}$$

c 型, d 型解について調べるために, mod60 で余り 29 と 47 である素数を法として考えました.

法とした素数	周期	備考
107	72	$(107+1)\times\frac{2}{3}$
149	148	$(149-1)$
167	336	$(167+1)\times 2$

となり, 149 は b 型, 167 は a 型になりました.

3 ｜ 今後の展望

c 型, d 型の素数の性質についてもっと詳しく調べようと思います.

具体的には, 149 や 167 が c, d 型解にならなかった理由を追究していこうと思っています.

美しい等式を見つけたい!

1 年 須田, 坂山, 佐藤, 中島, 本田, 角谷

1 | 美しい等式

世界には数々の美しい等式がある．その中で最も美しく, 有名なのはやはりオイラーの等式である．それは

$$e^{i\pi}+1=0$$

ここで e: ネイピア数 (自然対数の底, i: 虚数単位（自乗すると -1 となる数）, π: 円数率（円の直径に対する周の比率）である．これは解析学, 代数学, 幾何学の三つの要素が混ざっているという点でとてもきれいである. 誰もこれには頭が上がらない．しかし筆者 (坂山) は $e^{i\pi}$ が負の数であるということに少し不快感を抱いている．

僕らは難しい高校数学の範囲ではなく小学生でも理解できる自然数の世界で考えた.

2 | 階乗を使った美しい等式

$f(x)$ をある自然数 x に対して, x の各桁の階乗の和として考えた.

例）$f(2345)$ をこの関数に当てはめると, $2!+3!+4!+5!=2+6+24+120=152$ となる.

みんなでやって, 一般化しようと苦戦しているときに角谷が

$$x=145 \text{ の時, } 1!+4!+5!=1+24+120=145$$

だということに気づいた.

その後, $f(40585)=40585$ であることに気づいた．ここはつい震えてしまうほどであった.

一般化しようとみんなで努力したが, 手口が見つからず断念した.

3 | 累乗を使った美しい等式

$F(x)$ をある自然数 x に対して, 各桁の数を各桁の数分累乗したものの和として考えた.

$$例)F(1234)=1^1+2^2+3^3+4^4=288$$

$3435=3^3+4^4+3^3+5^5$ だということに気づいた. (インターネットにあったという悲劇がこの後起きたのは別の話だ)

ほかにも似ているものがインターネットにたくさんあって, 衝撃を受けた.

4 | あとがき

今回は時間がなくあまりできなかった. TEX もダウンロードがうまくいかなかった上, 筆者 (坂山) は何も思い浮かばなかった. 来年は自分で書きたいし,TEX を使えるようになりたい.

「ベル数とカタラン数」

1619　佐藤知直

1 ｜ ベル数

まずベル数というものについて説明する。あまり聞きなれないものだが, どういうものかまず説明する。

まず, a, b, c という 3 つの要素を考える。これらを順番や個数を考えずにグループ分けする方法としては $\{a\}\dot{}\{b\}\dot{}\{c\} \cdot \{a, b\}\dot{}\{c\} \cdot \{a, c\}\dot{}\{b\} \cdot \{b, c\}\dot{}\{a\} \cdot \{a, b, c\}$ の 5 つが考えられる。このようにある個数の要素を考えて, それらをグループ分けした時に何通りあるかと考えられる。また, これを'B_3'とあらわす。それでは本題に入ろう。

1.1 その 1

ベル数はこの後急速に数が巨大化していく。B_0 では 1。B_1 でも同じく 1。B_2 では 2。B_3 では 5。ところが次は 15。その次は 52。そして $203, 877\ldots$ と続いていくのである。これ以上は描きたくもない。さて, この軌跡を完全にコピーする数列（三角形）があるのだ。

$$
\begin{array}{l}
\quad\vdots \\
1 : \mathbf{1} \\
2 : 1\ \mathbf{2} \\
3 : 2\ 3\ \mathbf{5} \\
4 : 5\ 7\ 10\ \mathbf{15} \\
5 : 15\ 20\ 27\ 37\ \mathbf{52}
\end{array}
$$

上の図はベルの三角形 と呼ばれ, 行番号 n の右端の数が, すなわち B_n と同じ数になるのだ。(証明は書こうと努力したものの今の僕では不可能なのでなし。)

1.2 その 2

次にベル数において成り立つ次式を紹介する。

$$B_{p+n} \equiv B_n + B_{n+1} \qquad (modp)$$

つまり $p+n$ 番目のベル数を p で割った余りは n 番目のベル数と $n+1$ 番目のベル数の和を p で割った余りと同じであるということだ。例えば, $p = 3, n = 2$ とおくと, $B_3 + 2 \equiv B_2 + B_3$。つまり, $52 \equiv 7(modp)$ となり, $52 \div 3 = 17$ 余り 1。$7 \div 3 = 2$ 余り 1 となる。
なお, 証明は時間がないうえに漸化式の理解, 説明が必要になるため, なしとする。

2 ｜ カタラン数

次にカタラン数について説明する。カタラン数とは、

$$C_n = \frac{(2n)!}{(n+1)!(n)!}$$

の形で、様々に意味付けがなされており、それらを紹介する。
①：() の組を並べるのが何通りあるかを表す。例えば 3 桁なら ((())) や, (()()) などがある。また,)(())(や, ())(() などは正しい並びになっていないので, 数には含まれない. (考えればわかることだが, この経路は, ②を求めれば自動で出る。)
②: 格子状の経路の数え上げ
C_n を, 縦横 n マスずつの格子において, 対角線を跨がず, 角の点と, その反対の点を最短経路で通る道順の総数であるという解釈である。
証明: まず, 対角線を跨ぐ, 跨がずにかかわらず, 経路の数を求め, その確率を X と置く。
ここで C_n と比較してみると,

n	0	1	2	3	4
X	1	2	6	20	70
C_n	1	1	2	5	14
$\frac{C_n}{X}$	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{5}$

となる。比が, きれいに $\dfrac{1}{n+1}$ となっており, X が求まれば C_n も簡単に求まることになる. さて, X は, $2n$ 回進む。そのうち n 回は上に, n 回は右に行く。よって、経路の総数は $2n*(2n-1)*(2n-2)*\cdots*n/n*(n-1)*(n-2)*\cdots*1$ である。もう少しわかりやすくすれば, $\dfrac{2n \times (2n-1) \times \cdots \times n}{n!}$ つまり, $\dfrac{2n!}{n!n!}$ である。後は, これを $n+1$ で割れば, 答えが出る。これは, $\dfrac{2n!}{n!n!(n+1)} = \dfrac{2n!}{n!(n+1)!}$ である。この式はカタラン数の定義式と同じ

であり, 格子状経路の総数はカタラン数となることが証明された。
③：三角形による多角形分割 $n+2$ 個の辺を持つ多角形を n 個の三角形に分割すると, その総数はカタラン数 C_n となる。(ひっくり返したり, 転がしたりして同じになるものもそれぞれ数える。)

以上で終わりです。書き始めたのが締め切り 3 日前で, 数時間で書き上げたため, ほとんど証明も付けられず, 日本語も崩れまくりでグダグダのものすごく雑なものとなってしまいましたが, その辺を気にせず, 軽く読んでくれればうれしいです。

実数の拡張

2102　五十嵐朔

1 | はじめに

去年の部誌を読んでいたら四元数や八元数という数の世界が存在することを知りました。この記事では, 複素数・四元数・八元数の繋がりを追い, 出来る限り分かりやすくまとめる事を目標とします。私自身まだまだ知識不足なので多少の誤植はお許しください。

2 | 実数〜複素数

2.1 実数 $\mathbb{R}$

複雑な話に進む前に, いわば 1 次元の数とも呼べるような実数についての話から始めましょう。実数の定義は難しいですが, 今回は数直線上の点として表す事のできる数としておきます。そして, 実数全てを集めた集合を $\mathbb{R}$ という記号で表すことにします。この集合は体[*1]であり, まだ私たちの常識が通じるような場所です。

2.1.1 演算規則

集合 $\mathbb{R}$ には, 4 つの演算があります。加法 $+$, 減法 $-$, 乗法 $\times$, 除法 $\div$ です。この中でも加法と乗法は似たようなルールを持っています。交換法則と結合法則です。

交換法則とは, ある演算 $*$ について

$$a * b = b * a$$

である。という規則の事を言います。ここでは演算を乗算として, $a \in \mathbb{R}$ であり, $b \in \mathbb{R}$ である物とします。[*2] この時, もちろん交換法則は成り立ちます。[*3]

結合法則とは, ある演算 $*$ について

$$(a * b) * c = a * (b * c)$$

[*1] 体とは集合の種類の一つです。

[*2] この記号は集合に属する事を表します。

[*3] 減算, 徐算では成り立ちません。

である。という規則の事を言います。実数の乗算では, 結合法則も成り立ちます。[*4]

2.1.2 乗積表

次に乗積表という物を考えてみましょう。実数の世界においてはあまり面白いものでは無いです。$\mathbb{R}$ のすべての要素は $\mathbb{R}\ \times 1$ で表すことができます。たとえば $6 = 6 \times 1$ であり, $\sqrt{2} = \sqrt{2} \times 1$ です。当たり前ですね。ここで, $\{1\}$ をこの集合の成分と呼ぶことにします。[*5] そして, この成分同士の乗算を表にまとめると以下のようになります。

$\times$	1
1	1

これを, 乗積表と呼ぶことにします。

2.2 複素数 $\mathbb{C}$

複素数とは, 実数を自然に拡張させた数の体系です。実数は直線上の点に対応していたのに対し, 複素数は平面上の点に対応します。そして, 複素数を全て集めた集合を $\mathbb{C}$ という記号で表すことにします。

2.2.1 虚数単位 i

複素数の世界では, 新しく i という成分を導入します。要するに $\mathbb{C}$ 内の全ての要素は

$$a \times 1 + b \times i (a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R})$$

という形で書き表すことが出来るということです。
ここで, i とは $i^2 = -1$ となる数の事です。[*6]

2.2.2 演算規則

複素数の掛け算について考えてみましょう。基本的には, i は単なる文字として扱うことができます。なぜなら, この世界では乗法において結合法則も交換法則も成り立つからです! しかし, $i \times i$ には注意が必要です。これは定義より -1 となります。例えば $(1+i)^2$ を解いてみましょう。

[*4] 四則全てで成り立ちます。
[*5] 正式な数学用語ではありません。
[*6] もちろん実数ではありません。

$$
\begin{aligned}
(1+i)^2 &= i^2 + 2i + 1 \\
&= -1 + 2i + 1 \\
&= 2i
\end{aligned}
$$

2.2.3 乗積表

複素数の乗積表は以下のようになります。

$\times$	1	i
1	1	i
i	i	-1

左上の 4 マスは実数の乗積表と一緒です。これも, 複素数が実数を拡張したものであるという証拠になります。

2.2.4 複素数の応用

ここまで複素数について数としての説明をしてきましたが, 果たして何に使えるのでしょうか。最も代表的な例として, 平面上での点の回転というものがあげられます。まず, 回転させたい点 $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ を用意します。そして, その点に対応する複素数として, $w = a+bi \in \mathbb{C}$ を用意します。これを半時計周りに θ 度回転させたいのであれば, $w \times (cos\theta + i\sin\theta)$ を求める事で, 回転させた先の点を導くことができます。回転を考える時に行列という道具を使うこともありますが, 行列では決めるべきパラメータは 4 つなのに対し, 複素数では 2 つを定めれば良いのでより効率的ということが出来るでしょう。[*7]

3 ｜ 複素数〜四元数

さて, 我々は数字を 2 次元の世界にまで拡張しました。しかし, まだ広げられるのではないかと考えた人物がいます。アイルランドの数学者, ハミルトンです。彼は, 複素数を自然に拡張して 3 次元の数を作ることに挑戦しました。しかし, それは出来ませんでした。ですが, 4 次元の数を作ることは出来たのです! その数の事を四元数と呼び, 四元数全体の集合を $\mathbb{H}$ という記号で表す事にします。

3.1 虚数単位 j, k

四元数の世界では, 1 と i に加えて新しく j と k という成分を導入します。要するに $\mathbb{H}$ 内の全ての要素は

[*7] ただ, 行列の方が便利なこともあるので一長一短です。

$$a \times 1 + b \times i + c \times j + d \times k (a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}, c \in \mathbb{R}, d \in \mathbb{R})$$

という形で書き表すことが出来るということです。ここで, $j^2 = -1, k^2 = -1$ であり, $ij = k, jk = i, ki = j, ji = -k, kj = -i, ik = -j$ です。

3.2 演算規則

上にも書いた通り, $ij = k$ であり, $ji = -k$ であるので, $ij \neq ji$ となります。これはつまり, 四元数の世界では一般的に乗法の交換法則が成り立たないということです。しかし, 結合法則は成り立ちます。なので, 辛うじて普通に計算することができます。たとえば, $(1+i+j+k)^2$ を解いてみましょう。

$$\begin{aligned}(1+i+j+k)^2 &= 1+i+j+k+i+i^2+ji+ki+j+ij+j^2+kj+k+ik+jk+k^2 \\ &= 1+i+j+k+i-1-k+j+j+k-1-i+k-j+i-1 \\ &= -2+2i+2j+2k\end{aligned}$$

3.3 乗積表

四元数の乗積表は次のようになります。

$\times$	1	i	j	k
1	1	i	j	k
i	i	-1	k	$-j$
j	j	$-k$	-1	i
k	k	j	$-i$	-1

左上の 9 マスは複素数の乗積表と同じですね。

3.4 四元数の応用

複素数よりもさらに複雑になった四元数ですが, こんなものを考えて何になるのでしょうか。まず一つは群論という数学の一分野につながることです。そこでは四元数群 Q_8 として登場します。[*8] それよりも大事なことは 3 次元での回転を扱えるということです。四元数を使えば回転操作も簡単な式に置き換えることが出来ます。3 次正方行列を使うことでも回転は考えられますが, より少ないパラメータで済むので四元数は重宝されます。また, 計算も簡単に行うことができるので, 3D シミュレーションソフトでは大抵使われています。

4 ｜ 四元数〜八元数〜

4.1 八元数

さて, まだ拡張することは出来ないでしょうか。四元数の発見に刺激を受けたジョン・グレイヴスという人が八元数というものを発見しました。これは, 八次元の数ということになります。八元数全体の事を $\mathbb{O}$ という記号で表すことにします。

4.2 虚数単位

八元数の世界では, $1, i, j, k, ...$ というように成分をアルファベットで定めるとごちゃごちゃしてしまうので, $e_0, e_1, e_2, e_3, ..., e_7$ というように定めることとします。また, e_0 は要するに 1 の事です。$\mathbb{O}$ 内の全ての要素は

$$x_0 \times e_0 + x_1 \times e_1 + x_2 \times e_2 + x_3 \times e_3 + x_4 \times e_4 + x_5 \times e_5 + x_6 \times e_6 + x_7 \times e_7$$

[*8] これについては来年詳しく書くかも知れません。

$$(x_0 \in \mathbb{R}, x_1 \in \mathbb{R}, x_2 \in \mathbb{R}, x_3 \in \mathbb{R}, x_4 \in \mathbb{R}, x_5 \in \mathbb{R}, x_6 \in \mathbb{R}, x_7 \in \mathbb{R})$$

と表せるということです。この時, 計算法則は以下に示す乗積表によって与えられます。

4.3 乗積表

八元数の乗積表は次のようになります。(一例)

$\times$	e_0	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	e_7
e_0	e_0	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	e_7
e_1	e_1	$-e_0$	e_4	e_7	$-e_2$	e_6	$-e_5$	$-e_3$
e_2	e_2	$-e_4$	$-e_0$	e_5	e_1	$-e_3$	e_7	$-e_6$
e_3	e_3	$-e_7$	$-e_5$	$-e_0$	e_6	e_2	$-e_4$	e_1
e_4	e_4	e_2	$-e_1$	$-e_6$	$-e_0$	e_7	e_3	$-e_5$
e_5	e_5	$-e_6$	e_3	$-e_2$	$-e_7$	$-e_0$	e_1	e_4
e_6	e_6	e_5	$-e_7$	e_4	$-e_3$	$-e_1$	$-e_0$	e_2
e_7	e_7	e_3	e_6	$-e_1$	e_5	$-e_4$	$-e_2$	$-e_0$

4.4 演算規則

八元数の世界ではいよいよ結合法則も成り立たなくなってしまいます。[*9]

ここで $(e_0 + e_1 + e_2 + e_3 + e_4 + e_5 + e_6 + e_7)^2$ を考えてもいいですが... それはやめておきましょう。

4.5 何に使うのか

ぶっちゃけ, 実際に使われることは滅多にありません。ただ, 四元数の時と同じように多次元での回転を扱うことが出来るので, 超ひも理論という物理学の理論を研究する過程では使われることもあるそうです。それでも, 行列を使った方がきっと楽です。

4.6 十六元数からその先へ

さらに数を拡大することは出来ないでしょうか。結論からいうと出来ます。ただし, 条件付きです。大きくすれば大きくするほど数の根幹が崩れていきます。なので, 大抵の人は八元数で止めます。しかし, 一部の人は十六元数なるものを作り始め, それを使って様々な論を展開しています。

[*9] これは演算表で確かめられます。

5 ｜ おわりに

さて, 私たちは実数から複素数, 複素数から四元数, 四元数から八元数へと数の拡張の歴史と数学的な側面をソフトに見てきました。このような数学もあるということを少しでも分かってくれたら幸いです。では。

6 ｜ 参考文献

参考文献

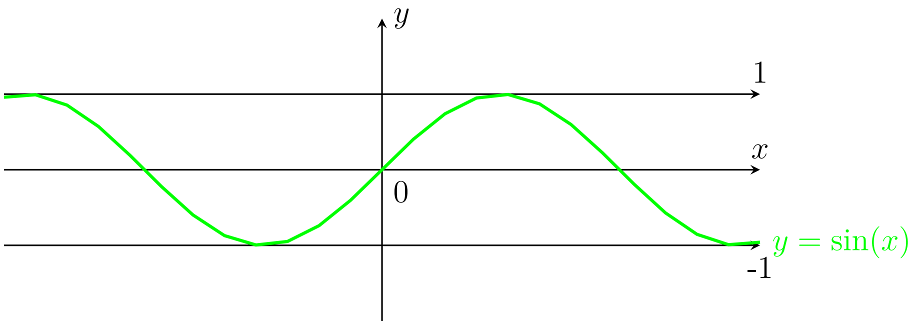
[1]『八元数』https://ja.wikipedia.org/wiki/
[2]『四元数』https://ja.wikipedia.org/wiki/
[3]『四元数 - 物理のかぎしっぽ』http://hooktail.sub.jp/mathInPhys/quaternion/
[4] クォータニオンを総整理!』https://qiita.com/drken/items/0639cf34cce14e8d58a5

三角関数の性質

2405　池本直樹

1 | $\sin x$ の微分

$\sin x$ とは半径が 1, 中心角が x 度の弧の端点から向かいの半径まで下した垂線の長さである.
($\cos x$ とは中心からその垂線の足までの長さである.)
x が 2π 以上に拡張されても定義でき, $\sin x$ は -1 から 1 までを波状に動く (下記)



グラフのかたちを理解したいので導関数を導出する. $\lim_{a\to 0}\frac{\sin(a)}{a} = 1$ を用いる.

$$\sin'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{\sin(x+h)-\sin(x)}{h} \quad \sin(a)-\sin(b) = 2*\sin\frac{a-b}{2}*\cos\frac{a+b}{2}$$

より,

$$\sin(x-h)-\sin(x) = 2*\cos\left(x+\frac{n}{2}\right)*|\sin\left(\frac{h}{2}\right)$$

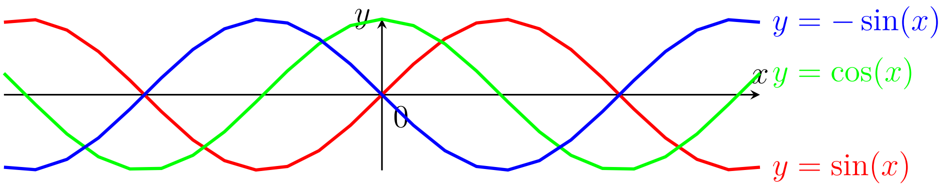
ここで $t = \frac{h}{2}$ とすると,

$$\sin'(x) = \lim_{t\to 0}\frac{2\cos(x+t)}{2}*\frac{\sin(t)}{t} = \lim_{t\to 0}\cos(x+t)*1 = \cos(x)$$

これにより, sin(x) の傾きは cos(0) に等しいことがわかる. また,

$\sin'(x) = \cos(x) \quad \cos'(x) = \sin(x - 90)' = \cos(x{-}90) = -\sin(x){-}\sin'(x) = -cos(x) \quad -\cos'(x) =$

と $\sin x, \cos x, -\sin x, -\cos x$ は微分してもこの順で循環することがわかる.



2 | マクローリン展開を用いた変形

マクローリン展開をもちいて関数を多項式で近似することができる.
マクローリン展開：その関数が無限に微分できるならば

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^n(0)}{n!} x^n$$

となる.
よって,

$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin^n(0)}{n!} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} (-1)^{n-1} \sin^n(0) * a = 0 (n$ が 2 の倍数の時, また a は定数)

$\cos x = \sum_{n-0}^{\infty} \frac{\cos^n(0)}{n!} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} (-1)^n$　同様に, n が奇数のとき, $\cos^n(0) * a = 0$ (a は定数)

このとき, ネイピア数 $e = \lim_{n \to \infty} (1 + \frac{1}{n})^n$ を用いて,

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \qquad e^{ix} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(i^n)(x^n)}{n!} (\text{i は虚数単位})$$

$$e^{ix} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(i^{2n})(x^{2n})}{(2n)!} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(i^{2n+1})(x^{2n+1})}{(2n+1)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} (-1)^n + i \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} (-1)^n$$
$$= \cos(x) + i \sin(x)$$

これをオイラーの公式という.

3 | 補足

三角関数についてしらべ, オイラーの公式を導いてみました. 厳密な示し方ではありませんがあくまで気持ちとしてください.

フランク・モーリーの定理

2625　田中悠雅

1 │ はじめに

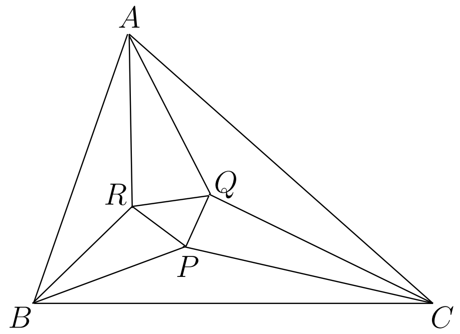
今回はフランク・モーリーの定理という, 角の三等分線に関するとても美しい定理について紹介します.

前提知識は中学校で習う程度の幾何です.

2 │ フランク・モーリーの定理

定理 2.1: フランク・モーリーの定理

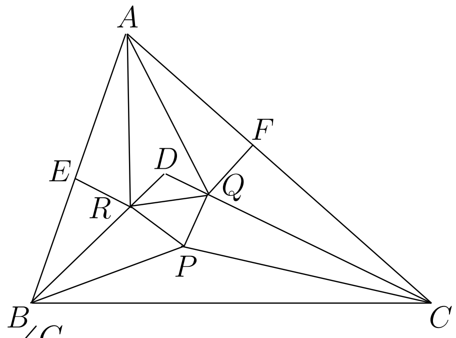
$\triangle ABC$ に対して, 3 つの角の三等分線同士が最初に交わる点を P, Q, R と置くとき, $\triangle PQR$ は正三角形である.



証明. BR と CQ の交点を D, BR, CQ に関して, P と対称な点をそれぞれ E, F とする. E, F はそれぞれ BA, CA 上の点である.
P は $\triangle BDC$ の内心であるため, DP は $\angle BDC$ の二等分線である.
今, $\angle Q'PD = \angle R'PD = 30^\circ$ となる点 Q', R' をとる. BR, CQ はそれぞれ $\angle ABP, \angle ACP$ の二等分線であるので,

$$ER' = PR' = R'Q' = PQ' = FQ'$$

となる. よって, $\triangle ER'Q', \triangle FQ'R'$ は二等辺三角形である.



また, $\alpha = \dfrac{\angle A}{3}, \beta = \dfrac{\angle B}{3}, \gamma = \dfrac{\angle C}{3}$ とすると, $\alpha + \beta + \gamma = 60^\circ$ より,
$\angle BDP = \angle CDP = 90^\circ - \beta - \gamma = \alpha + 30^\circ$, $\angle ER'D = \angle PR'D = 180^\circ - 30^\circ - \angle BDP = 120^\circ - \alpha$
より, $\angle ER'Q' = 2\angle ER'D - \angle Q'R'P = 2(120^\circ - \alpha) - 60^\circ = 180^\circ - 2\alpha$.
同様に $\angle Q'R'E = 180^\circ - 2\alpha$
$\therefore \angle Q'ER' = \angle R'FQ' = \alpha$
よって, 円周角の定理の逆より, 4 点 E, R', Q', F は同一円周上にある.
また, $\overset{\frown}{ER'Q'F}$ に対する円周角は $3\alpha = A$ より, A も同一円周上にある.
よって, 円周角の定理から

$$\angle R'AE = \angle RAE = \alpha$$

となることにより, $R' = R$. 同様に $Q' = Q$ であるため $\triangle PQR$ は三角形である. □

3 | あとがき

今回はフランク・モーリーの定理の初等的な証明を書きましたが, ほかに三角関数を用いて, 計算する方法などもあったので, 興味があれば調べてみてください.

参考文献

[1] フランク・モーリーの定理の証明 (`https://mathtrain.jp/morley`)
[2] 三角形と円の幾何学

IMO の不等式

3528 長谷川彰一

1 | はじめに〜2020 年 IMO ロシア大会の悲劇 (仮)〜

こんにちは. 今回は数学研究部にお越しくださって (?) ありがとうございます. 新型コロナウイルスの影響で,HP 上の掲載となりましたが, 部員たちの記事を読んでいただけると幸いです.
突然ですが, 今年の IMO(international mathematics olympic) では,2 番の不等式が「クソ問」だと話題になっていました.
実際にこの試験を受けた代表の方々もこの問題の「クソさ」について色々語っていましたし, また AoPS という海外の教育系のサイトにも, 今年の IMO の問題選考について論じるスレッドが立たれていて, なかなかに炎上している問題だとわかります.
何はともあれ, まずはその問題と僕なりの解答を見てみましょう.

2 | 2020IMO 問 2

問題 2.1: 2020IMO 問 2

実数 a, b, c, d は $a \geqq b \geqq c \geqq d > 0$ および $a+b+c+d=1$ を満たしている. このとき,

$$(a+2b+3c+4d)a^a b^b c^c d^d < 1$$

であることを示せ.

証明. 重み付き相加相乗平均の不等式より,$a \cdot a + b \cdot b + c \cdot c + d \cdot d \geqq a^a b^b c^c d^d$, すなわち $a^2+b^2+c^2+d^2 \geqq a^a b^b c^c d^d$ が成立する.
したがって,$a+b+c+d=1$ より,

$$(a+2b+3c+4d)(a^2+b^2+c^2+d^2) < (a+b+c+d)^3$$

を示せばよい.

すなわち, 展開して,

$$\begin{array}{cccc} a^3 & +b^2a & +c^2a & +d^2a \\ +2a^2b & +2b^3 & +2b^2c & +2d^2b \\ +3a^2c & +3b^2c & +3c^3 & +3d^2c \\ +4a^2d & +4b^2d & +4c^2d & +4d^3 \end{array} < \begin{array}{cccc} a^3 & +3b^2a & +3c^2a & +3d^2a \\ +3a^2b & +b^3 & +3b^2c & +3d^2b \\ +3a^2c & +3b^2c & +c^3 & +3d^2c \\ +3a^2d & +3b^2d & +3c^2d & +d^3 \\ +6abc & +6bcd & +6cda & +6dab \end{array}$$

を示せばよい.
両辺から重複する項を引いて,

$$\begin{array}{cccc} & & & \\ & +b^3 & & \\ & & +2c^3 & \\ +a^2d & +b^2d & +c^2d & +3d^3 \end{array} < \begin{array}{cccc} & +2b^2a & +2c^2a & +2d^2a \\ +a^2b & & +b^2c & +d^2b \\ & & & \\ & & & \\ +6abc & +6bcd & +6cda & +6dab \end{array}$$

であるので,$a \geqq b \geqq c \geqq d > 0$ より,

$$\begin{aligned} 2b^2a &\geqq b^3 + c^2d \\ 2c^2a &\geqq 2c^3 \\ 2d^2a &\geqq 2d^3 \\ a^2b &\geqq a^2d \\ b^2c &\geqq b^2d \\ d^2b &\geqq d^3 \\ 6abc + 6bcd + 6cda + 6dab &> 0 \end{aligned}$$

であるから,

$$(a + 2b + 3c + 4d)(a^2 + b^2 + c^2 + d^2) < (a^3 + b^3 + c^3 + d^3)$$

が示された. したがって,

$$(a + 2b + 3c + 4d)a^a b^b c^c d^d < 1$$

が示された.

$\square$

まず.$a^a b^b c^c d^d$ が大分目立っている. 重み付き相加相乗平均の不等式という, 数学オリンピックではよく用いる手法を使うと, きれいな形にまとまる.

定理 2.2: 重み付き相加相乗平均の不等式

非負実数 $a_1, a_2 \cdots a_n, w_1, w_2 \cdots w_n$ において,

$$\sum_{i=1}^{n} w_i a_i \geq \prod_{i=1}^{n} a_i^{w_i}$$

が成立する.(この問題では $a_1 = w_1 = a, a_2 = w_2 = b \cdots$ となっている)
ただし等号は $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$ のときに成立する.

そして, あとは次数を揃えるために 1 を $(a+b+c+d)^3$ に変換して, それぞれ展開すれば終わりである.
一番目立っていた $a^a b^b c^c d^d$ の部分は見た目をややこしくするためにあると言っても過言ではないと思う. しかも, 愚直に展開するのが (おそらく) 一番の近道であるという, 問題としてあまり美しくないものでもある.
最後の変形も,$a+2b+3c+4d$ である特別な理由はなく,$a \geqq b \geqq c \geqq d > 0$ もこのためだけにある.(しかも今回は $c \geqq d$ でなくても不等式が成立してしまう) 見た目は多少いいのかもしれないが, その見た目が不等式において意味の成さないものであるのがいただけない.
つまり不等式を証明するときの議論がガバガバで, あまり解いていてうれしくない問題であった.

3 | IMO の不等式って…

2020 年の問 2 がクソ問と言われる所以を確かめたところで,AoPS に気になる記述があった.
”inequalities on the imo... everyone’s nightmare”
「IMO の不等式... みんなの悪夢」(訳者: 僕)
... ということは... もしかして IMO で出る不等式は全部クソ問なのか？
どうしても気になってしまったので, 僕が見たいくつかの IMO で出題された不等式について, 解答とそれの僕なりの講評を加える. 無論これはあくまでも個人の意見である.

4 | IMO 不等式

問題 4.1: 2012IMO 問 2

n を 3 以上の整数とする.$a_2, a_3 \cdots a_n$ を $a_2 a_3 \cdots a_n = 1$ を満たす正の実数としたとき,

$$(1+a_2)^2(1+a_3)^3 \cdots (1+a_n)^n > n^n$$

が成立することを示せ.

証明. 実数 $a_2, a_3 \cdots a_n$ において,$a_2a_3\cdots a_n = 1$ であるから, 正実数 $x_2, x_3 \cdots x_n$ を用いて $a_2 = \dfrac{x_2}{x_3}, a_3 = \frac{x_3}{x_4}, \cdots, a_n = \dfrac{x_n}{x_2}$ と表すことができる.
したがって,

$$(x_2+x_3)^2(x_3+x_4)^3\cdots(x_n+x_2)^n > n^n x_3^2 x_4^3 \cdots x_n^{n-1} x_2^n$$

を示せばよい.
相加相乗平均の不等式より,$(x_k+x_m)^k = \left(x_k + (k-1)\dfrac{x_m}{k-1}\right)^k \geqq k^k x_k \dfrac{x_m^{k-1}}{(k-1)^{k-1}}$ であるから,

$$\begin{aligned}(x_2+x_3)^2(x_3+x_4)^3\cdots(x_n+x_2)^n &\geqq 2^2 x_2 x_3 \cdot 3^3 x_3 \frac{x_4^2}{2^2} \cdot 4^4 x_4 \frac{x_5^3}{3^3} \cdots n^n x_n \frac{x_2^{n-1}}{(n-1)^{n-1}} \\ &= n^n x_3^2 x_4^3 \cdots x_n^{n-1} x_2^n\end{aligned}$$

である. ここで, 上の式において等号が成立する条件は,$x_2 = x_3, x_3 = \dfrac{x_4}{2}, \cdots, x_n = \dfrac{x_2}{n-1}$ である.
すなわち,$x_2 = x_3 = \dfrac{x_4}{2} = \dfrac{x_5}{2\cdot 3} \cdots = \dfrac{x_n}{(n-2)!} = \dfrac{x_2}{(n-1)!}$ である.
$x_2 > 0, n \geqq 3$ より, これを満たす実数 x_2 は存在しない. すなわち, 上の式において等号は成立しない.
以上により,n を 3 以上の整数とし,$a_2, a_3 \cdots a_n$ を $a_2a_3\cdots a_n = 1$ を満たす正の実数としたとき,

$$(1+a_2)^2(1+a_3)^3\cdots(1+a_n)^n > n^n$$

が成立することが示された.

□

この問題は「クソ問」ではないだろう.$a_2 = \dfrac{x_2}{x_3} \cdots a_n = \dfrac{x_n}{x_2}$ の置換が巧妙な手法であると感じる. 思いつきにくい置換であるが,AoPS を見ると他の解法もあったようだ.

問題 4.2: 2005IMO 問 3

x, y, z を $xyz \geqq 1$ を満たす正の実数とする. このとき,

$$\frac{x^5-x^2}{x^5+y^2+z^2} + \frac{y^5-y^2}{y^5+z^2+x^2} + \frac{z^5-z^2}{z^5+x^2+y^2} \geqq 0$$

が成立することを示せ.

証明. $\dfrac{x^5-x^2}{x^5+y^2+z^2}=1-\dfrac{x^2+y^2+z^2}{x^5+y^2+z^2}$ であるので,

$$\frac{x^2+y^2+z^2}{x^5+y^2+z^2}+\frac{x^2+y^2+z^2}{y^5+z^2+x^2}+\frac{x^2+y^2+z^2}{z^5+x^2+y^2}\leqq 3$$

を示せばよい.
ここで,Cauchy-Schwarz の不等式と $xyz\geqq 1$ より,

$$\begin{aligned}(x^5+y^2+z^2)(yz+y^2+z^2)&\geqq (x^{\frac{5}{2}}(yz)^{\frac{1}{2}}+y^2+z^2)^2\\&\geqq (x^2+y^2+z^2)^2\end{aligned}$$

が成立する. したがって,

$$\frac{x^2+y^2+z^2}{x^5+y^2+z^2}\leqq\frac{yz+y^2+z^2}{x^2+y^2+z^2}$$

が成立する.
同様に,

$$\frac{x^2+y^2+z^2}{y^5+z^2+x^2}\leqq\frac{zx+z^2+x^2}{x^2+y^2+z^2}$$

$$\frac{x^2+y^2+z^2}{z^5+x^2+y^2}\leqq\frac{xy+x^2+y^2}{x^2+y^2+z^2}$$

が成立するので,

$$\frac{x^2+y^2+z^2}{x^5+y^2+z^2}+\frac{x^2+y^2+z^2}{y^5+z^2+x^2}+\frac{x^2+y^2+z^2}{z^5+x^2+y^2}\leqq 2+\frac{xy+yz+zx}{x^2+y^2+z^2}$$

である.
ここで,$x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx=\dfrac{(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2}{2}$ より,
$x^2+y^2+z^2\geqq xy+yz+zx$ であるから,$\dfrac{xy+yz+zx}{x^2+y^2+z^2}\leqq 1$ である.
よって,$\dfrac{x^2+y^2+z^2}{x^5+y^2+z^2}+\dfrac{x^2+y^2+z^2}{y^5+z^2+x^2}+\dfrac{x^2+y^2+z^2}{z^5+x^2+y^2}\leqq 3$ が成立する.
以上により,x,y,z を $xyz\geqq 1$ を満たす正の実数としたとき,

$$\frac{x^5-x^2}{x^5+y^2+z^2}+\frac{y^5-y^2}{y^5+z^2+x^2}+\frac{z^5-z^2}{z^5+x^2+y^2}\geqq 0$$

が成立することが示された.

□

Cauchy-Schwarz の不等式

実数 $a_1, a_2 \cdots a_n, b_1, b_2 \cdots b_n$ において,

$$(\sum_{i=1}^{n} a_i^2)(\sum_{i=1}^{n} b_i^2) \geqq (\sum_{i=1}^{n} a_i b_i)^2$$

が成立する.
ただし, 等号は $a_1 : b_1 = a_2 : b_2 \cdots = a_n : b_n$ のときに成立する.

この問題も「クソ問」ではないと思う.Cauchy-Schwarz の不等式を使うと割と綺麗に解ける問題である. また, この問題はこれ以上に綺麗に解く方法があり, それを使って求めた参加者が特別賞を贈られている.(詳しくは [2])

問題 4.3: 2000IMO 問 2

a, b, c を $abc = 1$ を満たす正の実数とする. このとき,

$$\left(a - 1 + \frac{1}{b}\right)\left(b - 1 + \frac{1}{c}\right)\left(c - 1 + \frac{1}{a}\right) \leqq 1$$

が成立することを示せ.

証明. $abc = 1$ より,0 でない実数 x, y, z を用いて $a = \dfrac{x}{y}, b = \dfrac{y}{z}, c = \dfrac{z}{x}$ と表せる.
したがって,

$$\left(\frac{x}{y} - 1 + \frac{z}{y}\right)\left(\frac{y}{z} - 1 + \frac{x}{z}\right)\left(\frac{z}{x} - 1 + \frac{y}{x}\right) \leqq 1$$

を示せばよい.
両辺に xyz をかけて, 展開して整理すると,

$$x(x-y)(x-z) + y(y-x)(y-z) + z(z-x)(z-y) \geqq 0$$

となる.
ここで, 対称性より,$x \geqq y \geqq z$ としても問題ない.
このとき,$z(z-x)(z-y)$ は非負であり,$x(x-y)(x-z) + y(y-x)(y-z) = (x-y)\left(x(x-z) - y(y-z)\right) \geqq 0$ であるから,$x(x-y)(x-z)+y(y-x)(y-z)+z(z-x)(z-y) \geqq 0$ が示された.
よって,a, b, c を $abc = 1$ を満たす正の実数としたとき,

$$\left(a - 1 + \frac{1}{b}\right)\left(b - 1 + \frac{1}{c}\right)\left(c - 1 + \frac{1}{a}\right) \leqq 1$$

が成立することが示された. □

この問題は割と簡単な部類の不等式だと思う.$x(x-y)(x-z)+y(y-x)(y-z)+z(z-x)(z-y) \geqq 0$ の部分は,Schur の不等式の一種である.

Schur の不等式

実数 r, x, y, z において,$r > 0, x, y, z \geqq 0$ とすると,

$$x^r(x-y)(x-z)+y^r(y-z)(y-x)+z^r(z-x)(z-y) \geqq 0$$

が成立する.
ただし, 等号は $x=y=z$ または“x, y, z のうち 1 つが 0 で残り 2 つが等しい”ときに成立する.

解答だと展開した後に整理する段階が分からないが, 展開された状態の式を見て Schur の不等式を考えるのは自然だそうだ.([4] より)

5 ｜ おわりに

不等式の問題として, 僕の確認する限り (というよりは僕の解ける限り)IMO の不等式は別に「クソ問」しかないわけではありませんでした.(もちろん個人の感想です, 全部いい問題という人も多いでしょう)IMO の問題選考には普段 6 月に会議が行われていて, 今年はそれがなくてこのような問題が出されてしまった, というところでしょう.(ちなみに開催国, かつ問題選考を行った国のロシアは世界順位 2 位だそうです)
僕自身は不等式の問題はそれほど得意なわけではなく, 不等式の問題を解くためのいい練習にもなったと思いました. こういうことが本番でできるといいなと思いました.
来年の部誌は, 僕が「数研部員と勝負!」の問題作成を行っていることもあって, ゲーム理論について書こうと思っています.(さすがに高校生になるので, そろそろ読んでいて面白いものを作りたいたいです) それから, よろしければ「数研部員と勝負!」もお楽しみください.

参考文献

[1] AoPS IMO(https://artofproblemsolving.com/community/c3222_imo)
[2] Boreico の解答: 国際数学オリンピック特別賞 (http://integers.hatenablog.com/entry/2016/03/24/002125)
[3] 重み付き相加相乗平均の不等式の証明 (https://mathtrain.jp/wighted_amgm)
[4] Schur の不等式の証明と例題 (https://mathtrain.jp/schur_inequality)

集合論入門と整数論

3636　古橋史崇

1 ｜ はじめに

こんにちは. 我々数学研究部に (オンライン上ですが) 来てくださり, さらにこの記事を読んでくださりありがとうございます.
今回の記事ではまず集合論の基本的なところに関して説明し, その後群論を通して整数論を考えます.
数学の分野の関わりを感じてくれたら幸いです.
なお二章は集合論, 特に群論について触れており内容はラグランジュの定理, 群の準同型定理などです. 三章は環・体です.$\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ が体になるような p の必要十分条件を求める, を目標に説明しており, 四章は整数論と群論の関わりに触れています.
前提知識は特に必要はないです. ただ自分で具体例を作る際などに複素数や行列に対して基礎的なことは知っておくとよいことが多いと思います.
また今回は, 自分が初学者であること, 説明を分かり易くしたい, 等々の原因から全体的にやや説明が長くなってしまっていますがご了承ください.
(なお途中にある演習課題は問の直後またはこの部誌のさいごに略解がのせてあります.)

2 ｜ 集合の世界

2.1 集合とは

集合とは何かの集まりです　といってもピンとこないでしょう.　具体的には自然数全体や $\{0,1\}$ や $\{\}$(このように何も入ってない集合のことを空集合といいます) のようなもののことです ($\{\}$ の中に何が入っているかを書きます). $\{$開成, 運動会, 文化祭$\}$ とか $\{\{0\}\{\}\}$ のような集合を含むものも集合です.(ただ実際には厳密に公理で定義されています, 例えばすべての集合を含む集合, というものは考えると矛盾が起きてしまうので一般的には集合として考えません)
集合論とは集合に対して性質とかをしらべていく数学の分野です. なお同じものが入ってい

ても一つしか書かないと今回はします. つまり $\{1,1\}$ は, $\{1\}$ と書くことにします

2.2 用語

今後説明するうえで必要となる用語について説明します.
元 $\cdots$ 集合 A の元とは A に含まれるもののことを言います. 例えば1, 2 の元とは 1 と 2 のことを指します.
$\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C} \cdots$ 順に自然数全体の集合 (今回の説明では 0 を含むとします), 整数全体の集合, 有理数全体の集合, 実数全体の集合, 複素数全体の集合です. 他にもいろいろありますがこれらはとくに有名です
$well-defined \cdots$ ある数学的対象 A から数学的対象 B を定めるときその B が一意に決まること. 実際にこれを示す際はこの定義でうまくいくこと, もしくは定義が一意に決まること. を指します. 雑に言ってしまうと矛盾を含む, のようなおかしいところがない定義のことです.

2.3 群 (group) の定義

定義 2.1: 群

集合 G と演算 $*$ が群であるというのは)
1,G に単位元 e がある.
2, 任意の G の元 a に対して a の逆元となるような元が G にある.
3, 任意の $i, j, k \in G$ に対して $(i * j) * k = i * (j * k)$ を満たす.(結合法則を満たす)
4, 任意の G の任意の元 i, j に対して $i * j \in G$ を満たす.
これらすべての条件を満たすとき G と $*$ は群といいます.(演算が明らかな場合集合 G のことだけでも群ということはあります.

群の例には整数全体の集合 $\mathbb{Z}$ とたし算があります. また今回は演算といって二幸演算のことを指すものとします. 二項演算というのは例えば $+$ や $\times$ のように何かと何かを与えられたとき何かを返すものです.(この何か, というのは数字に限りません)
今後断りなく e を用いた場合単位元とします. 同じく $*$ を用いた場合演算とします.

■ **演習課題 1**　整数全体の集合 $\mathbb{Z}$ とたし算が群であることを示せ. またほかの群の例を一つ上げよ.

■ **演習課題 2**　空集合は群にならない. それは何故か.

■ **演習課題 3**　群 G にある単位元は一つだけであることを示せ.(難)

2.4　あみだくじについての前提

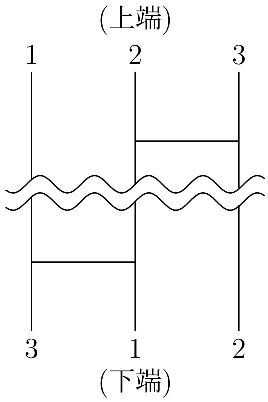
今回主に扱う群はあみだくじです　といってもあみだくじのままだと定義があいまいなので定義を明確にします (ちなみに群の対象としてあみだくじを使うのはよくあります　またあみだくじのように　物を並び替える操作を元とする群を対称群といいます)

定義 2.2: あみだくじの定義と記号

(1) 基本的なあみだくじである. この言い方はあまりよくないですがまあいわゆる普通のあみだくじです.

(2) 今回はあみだくじをたどることに関しては考えずにどこからどこへあみだくじを通して移動したかだけを考える. また今回のあみだくじは下の図のように上端が 3 つのものとする (右記参考)

(3) またあみだくじの上に順に 1,2,3 と数字を振ってあみだくじをたどった結果数字がどういう順番になったかを考える　例えば上記のあみだくじはたどった結果 [3,1,2] ととなるので上記のあみだくじのことを [3,1,2] と表す.



2.5　あみだくじと群

上で定義したようなあみだくじ全てが入っている集合を A とする. つまり $A = \{[1,2,3],[1,3,2]...[3,2,1]\}$ である.
あみだくじ a, b, に対して定義される演算 $*$ を以下のように定義する (かなりあいまいな書き方をしてしまっています. 申し訳ございません)
a と b をあみだくじとして a の下端と b の上端がつながるように連結してできたあみだくじを c としたとき $a * b = c$ とあらわす.$[3,1,2]*[1,3,2]=[3,2,1]$ となる. これを図にすると
1 2 3(上端)
| | − |
| − | |
3 1 2(下端)(ここまでが $[3,1,2]$)
| | |(これと
| | − | これが $[1,3,2]$)
3 2 1
となる

■ **演習課題 4**　あみだくじ全体の集合 A と $*$ が群であることを示せ (Hint:$[1,2,3]$ は単位元)

2.6　群の種類

演習課題４は出来ましたか？実は A の部分集合の中には A 以外にも群があります　たとえば $\{[1,2,3]\}$ です.
このようにある群の部分集合であるもののうち群である集合のことを部分群といいます.
では A の部分群 $\{[1,2,3],[1,3,2]\}$ を考えます. この群は元の数 (位数といいます) が 2 です.
そして巡回群です. 巡回群とはいったい何のことでしょうか　おいしいのでしょうか　楽しいのでしょうか
とりあえず巡回群の定義を書きます. といっても特に難しい話ではありません.

巡回群の定義

群 G が巡回群であるというのは以下の条件を満たしていることを言う.
適切な G の元 a をうまく選ぶと任意の G の元 b が $b = a*a*a*a...a$ と書ける.

あみだくじの例だと直感的には分かりにくいと思うので例を挙げます (ここに関しては複素数を用いています. わからない方は調べてください)
群 $\mathbb{B}$ を $\{1,i,-1,-i\}$ と掛け算とします.
このとき $e=1$ とわかります. 巡回群の定義の a として適切なものを選びます. 今回は i とします.(巡回群の定義を満たしています　わからない人は確認しましょう) すると複素数平面を思い浮かべて $\times i$ を 1 にしていくイメージで考えると「巡回群に関して親近感を抱けるのではないかなと思います.
巡回群について少し慣れましたか？
(なおここでは証明はしませんが有名な事実として任意の巡回群は位数を k とすると $\mathbb{Z}/k\mathbb{Z}$ と同型 (後の章で定義されます) であることが知られています)

問題 2.3: 演

問題５　位数が 2 の群が巡回群であることを示せ. 同じく位数 3 の時についても示せ.
他にも群の種類として代表的な [アーベル群] というものがあります. 可換群ということもあります.

定義 2.4: アーベル群

群 G が群であるというのは以下の条件を満たすことをいう
任意の G の元 a,b に対して $a*b=b*a$ を満たすことをいう (G の演算を $*$ とします)

ちなみにアーベル群は演算を $+$ として考えられることが多いです.

問題 2.5: 演

課題 6　任意の巡回群はアーベル群であることを示せ.($Hint$: 群は結合法則を満たす)
演習課題 7　あみだくじの集合でアーベル群のものを一つ示せ.
演習課題 8　G が群で任意の G の元 a に関して $a^2 = e$ となるとき, 任意の G の元 x, y にたいして $xy = yx$ が成り立つことを示せ.

3 ｜ ラグランジュの定理

注意：この章では演算を $*$ とします. また ab とかいて $a * b$ を意味するものとします.

定義 3.1: 正規部分群

H が群 G の部分群であり演算を * とするとき, どんな G の元 g,H の元 h に対しても $g^{-1}hg$ が H の元になるとき H を G の正規部分群と呼ぶ.

なぜこういうものを考えるのかは次の演習課題 9 で分かると思います.

問題 3.2: 演

課題 9　あみだくじの群の A の部分群を探してみよう. また正規部分群も探してみよう.

部分群は見つかりましたか？ではそれの位数を見てみましょう.$1, 2, 3, 6$ でした. これを見て何か気付いた人もいるかもしれません. そう全て元の群の位数の約数になっています! 果たしてこれは真なんでしょうか？
今回のひとまずの目標はこれを示すことです.(ちなみにこの定理のことをラグランジュの定理といいます.)
ではこれからはラグランジュの定理を示すために必要な準備をしていきましょう
ここで元と群の演算を考えます.G の元 g と G の部分群 H の演算を考えます.

定義 3.3: 元と群の演算

$$g * H = \{\, g * h \mid h \in H \,\}$$

問題 3.4: 演

課題 10　上の時 $a, b \in G$ に対して $aH = bH$ と $a^{-1}b \in H$ は同値であることを示せ.

分からなくなったら一旦あみだくじで考えてみましょう　例を考えることにより理解しやすくなると思います.
具体例:G をあみだくじ全体の集合として $H = [1, 2, 3], [1, 3, 2]$ とする. このとき $a = [2, 3, 1], b = [3, 2, 1]$

解答. まず $aH = bH$ $a^{-1}b \in H$ を示す.$b \in bH(e \in H$ より $) = aH$ よりある $h \in H$ が存在し $b = ah$. 両辺の左側に a^{-1} をかけて (a^{-1} は群の定義より必ず存在する) あげると $a^{-1}b = h \in H$. よって示せた.
次に $a^{-1}b \in H$ $aH = bH$ を示す. 任意の H の元 h 対して $bh = aa^{-1}bh(aa^{-1} = e$ より$) \in aH(a^{-1}b \in H$ かつ $h \in H$ より $a^{-1}bh \in H)$, よって $bH \in aH$.
$ah = bb^{-1}ah = b(a^{-1}b)^{-1}h(b^{-1}a * (a^{-1}b) = e$ より$) \in bH(a^{-1}b \in H$ かつ $h \in H$ より$)$
よって $aH \in bH$　以上より $aH = bH$ よって示せた.　以上より題意は示された.

おそらくかなり難しいと思います. ただかなり自然な考え方なので自力で導けるようになると嬉しいですね
次に正規部分群について考えます. N が G の正規部分群とする, 集合 $G/N = \{aN|a \in G\}$ とするとこの集合に関して以下のようなものを考えられる.(この集合は集合を元にもつ)
1,$aN * bN = ab * N$
2,G/N の単位元は N
3,$(aN)^{-1} = a^{-1}N$

問題 3.5: 演

課題 11 上に書かれたことが条件にあっていることを示す (well-defined であることを示せ)

よって G/N は群である.
またここで [よい関係] という言葉を定義する.

定義 3.6: よい関係

G $\star$ がよい関係であるというのは以下を満たす時のことをいう.(以下 a, b は G の元とする)
1, a と b について $a \star b$ が成り立つか成り立たないかのどちらかに必ずなる.(未定義にならない)
2, $a \star b \Rightarrow b \star a$
3, $a \star$　b かつ $a \star c \Rightarrow a \star c$
4, $a \star$　a が成り立つ
は成り立つ

このとき G においての部分群 H に対して
[$a, b \in G$ のとき $a \star b$ とは $a^{-1}b \in H$ ということとする] という良い関係を定義する (これが条件を満たすのは明らか).
また正規部分群でない部分群 N に関しても同様に G/N を考える.

定義 3.7: G/N の定義

G とその部分群 H に対してのよい関係を $\star$ とする.
このときどの二つもこの良い関係となるように G を分割する.(これは未定義な言葉を使っているのですがまあ直感的な分割, です　あとで具体例を出します)
このときどの分割された集合同士も元を共有してない (これは良い関係の定義より明らか)
この分割した集合の集合にたいして一つずつどれでもよいので元をとる (空集合のときは分割された集合として無視してよいので元が必ずとれる). それらを代表系とよび $a_1 ... a_m$ になるとします. ここで $N/H = \{ a_k H \,|\, k \in \mathbb{Z}$ かつ $1 \leq k \leq m\}$

これを読んでなぜこのような関係を入れたくなるのか疑問に思うと思いますが先ほど示した
$[a, b \in G$ に対して $aH = bH$ と $a^{-1}b \in H$ は同値であること$]$ を用いてうまくいい感じになりそうだな, と自然に思いつくためです.
(実際にこれがうまくいくかはわからないただなりそうという $feeling$ をもとにやってみよう! という感じです) ここで H が正規部分群のとき $G/N = \ aN|a \in G\ $ といったじゃないか　違うじゃんと思うかもしれませんが
これは実は同じことを言っていてただし $G/N = \ aN|a \in G\ $ の表し方だと元がかぶるので位数が分かりにくく扱いにくいのでこうしています.
ここでラグランジュの定理の主張は以下のものです.

定理 3.8: ラグランジュの定理

G を有限群,(位数が有限である群本当は無限群でも濃度とかでできるんですが今回は省略します) N を G の部分群とすると
G の位数 $=G/N$ の位数 $\times N$ の位数
が成立する.

では $let`s$ 証明

証明. G/N のどの元の (集合としての) 位数は H と同じ ($\because$先ほど示した)
そのため G/N の集合としての位数が N と同じになることを示せばよい.
このとき G/N のあいことなる元の (その元を集合としてみた時の) 元が異なることを示せば $G/N \times H = N$ であることが示されたこととなる.
仮にその元が同じとなるあいことなる G/N の元があったとする.　それは定義より aH, bH かつ $a, b \in G$, である. つまり $ag = bs(s, g \in H)$ となる s, g があることとなる. このとき右か g^{-1} を $*$ して $a = bsg^{-1} \Leftrightarrow b^{-1}a = sg^{-1}$ となり $s, g \in H$ より $sg^{-1} \in H$
よって $b^{-1}a \in H$, ただしこのとき定義より a と b には $\star$ の関係がないため矛盾, よって示された

以上よりラグランジュの定理,G の位数 $= G/N$ の位数 $\times N$ の位数が示された. □

あみだくじで具体例を挙げる.
まずあみだくじ全体の集合を A,$B = \{[1,2,3],[2,3,1][3,1,2]\}$ (として
代表系を $[1,2,3],[1,3,2]$ とすると A/B= $\{\{[1,2,3][2,3,1][3,1,2]\}\ \{[1,3,2][2,1,3][3,2,1]\}\}$
となりラグランジュの定理道理位数が 3 になっている.
ここでラグランジュの定理からの系として有名なものを上げる

系 3.9: ラグランジュの定理の系 1

G を有限群として H を G の部分群とする. このとき H の位数は G の約数となる.

これはラグランジュの定理から明らかであるがある群の部分群を探すときとても役に立つ. 例えば位数が素数 p の群の部分群としてありうるのは自明な部分群のみであるとわかる.
またここで位数という言葉に関して新たな定義をする

定義 3.10: 位数

集合 G に対しての位数というのはすでに書いた通り元の個数を指す.
一方 $a \in G$ という元に関しての位数というのは a^n =e となる 1 以上の整数 n のことと定義する (注意: このような n がない a もある時がある).

なぜこれを考えたくなるかというと元々整数論の分野でこの言葉が (意味は若干異なるが) それを群論の世界でも考えたくなったからだと思われる

系 3.11: ラグランジュの定理の系 2

有限群 G の位数が存在する任意の元 g の位数 (ここでの位数というのは元に関しての位数)$< g >$ とすると $< g >$ は G の位数 (この位数は群に対しての位数) の約数になる.

証明. 上記の時 g が生成元となる巡回群 H を考える ($g^{<g>} = e$ となるためそのような巡回群は存在する)
このとき H は明らかに G の部分群となる.(群の定義より明らか)
よってラグランジュの定理より H の (集合に対しての) 位数は G の (集合に対しての) 位数の約数となる.
H の (集合に対しての) 位数は $< g >$ と一致する.

是の証明. $< g >$ の定義より明らかに位数が $< g >$ 以下. そして $g^a = g^b(1 \leq a, b \leq < g >)$ の時対称性より $a \leq b$ とする. このとき g^{-a} を $*$ して $e = g^{b-a}$ となり $< g >$ の定義より $b - a = 0$ と分かるので $b = a$ よって i と j が 1 以上 $< g >$ 以下の自然数で異なる時 $g^i \neq$
g^j と分かり g を生成元とする巡回群 $= g^i | i \in \mathbb{N}$(自然数全体の集合)$\} = \{g^i | 1 \leq i \leq < g >\}$ のため明らかにこの巡回群の (集合に対しての) 位数は $< g >$. よって示せた.

よって示された　□

またこれより明らかにこの時 $g^{G\text{の (集合に対しての) 位数}} = e$ となる.

4 | 群の準同型定理

群 G, G' においてこのとき $f : G \to G'$ という写像を考える. この時 f が群の準同型というのは以下の条件を満たすことである.
なお以下で $_G$ と書いていたら G 上でのものを指すとする. 例えば e_G というのは G の単位元を指すこととする. 任意の $a, b \in G$ に対して $f(ab) = f(a)f(b)$. が成立する.
このとき以下が成り立つ
1 $f(e_G) = e_{G'}$, 2 $f(a_G^{-1}) = f(a)_G^{-1}(a \in G)$

問題 4.1: 演

課題 12 これを示せ

解答. 1 : $f(e_G) = f(e_G e_G) = f(e_G)f(e_G)$ より $f(e_G)_{G'}^{-1}$ をかけて,$e_{G'} = f(e_G)$ が得られた.

2 : $f(a)f(a^{-1}(G) = f(e_G) = e'_G = f(a)f(a)^{-1}$ より明らか

問題 4.2: 演

課題 13 f が準同型かつ全単射のとき f^{-1} も準同型となる

解答. : $a', b' \in G'$ となる a', b' において $a'b' = f(f^{-1}(a'))f(f^{-1}(b')) = f(f^{-1}(a')f^{-1}(b'))$ なので $f^{-1}(a'b') = f^{-1}(a'b')$ 　よって示された.

なお準同型写像のうち逆写像を持ちそれも準同型のものを特に同型写像といいます.(上で証明したことより逆写像も準同型であるため自然と名前を付けたくなるため名前を付けただけです)

また $f : G {\to} G'$ が準同型のとき以下のように定義する.

$\mathrm{Im}f = \{f(a) \mid a \in G\}$.

$\mathrm{Ker}f = \{a \mid a \in G$ かつ $f(a) = 1'_G\}$

このとき自明に Imf,Ker$f$ は G', G の部分群である.

問題 4.3: 演

課題 14 Ker$f$ が G の正規部分群であることを証明せよ.

解答. 部分群であることは自明なので Ker$f$ の任意の元 h と G の任意の元 g に関して $ghg^{-1}(G) \in$Ker$f$ を示せばよい.$ghg^{-1}(G) \in$Ker$f$ であることは $f(ghg^{-1}(G)) = 1$ になることと同値であり $f(ghg^{-1}(G)) = f(g)f(h)f(g^{-1}(G)) = e$ より示された.

準同型写像の具体例を挙げてみます. 自分でもぜひ構成してみましょう (巡回群, 行列などなどを考えると思い浮かぶと思います)

$f : \mathbb{Z} {\to} \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}, f(n) = x^n$($x$ は 1 以上 p 未満のある整数), これで上で示したことを確認しましょう!(難しい場合は $p = 3, 5$ 等の場合で考えてみましょう)

以下先ほどラグランジュの定理のところでも用いた記法を使うので注意してください (分からないところは定義に振り返りましょう)

以下 f は準同型な写像とする.

写像 $g : G/\mathrm{Ker}f {\to} \mathrm{Im}f$ をつぎのようにさだめる.

$a \in G$ として $g(a\mathrm{Ker}f) = f(a)$

問題 4.4: 演

課題 15 このときこの定義が矛盾しないことを示せ.($well - defined$ 性の証明)

さてここで今回の目標である群の準同型定理を今から証明します！主張もかなりエレガ

ントで便利な定理です.(その分群論の最初の壁でもあると思います)

定理 4.5: 群の準同型定理

写像 $g : G/\mathrm{Ker}f \to \mathrm{Im}f$ は同型写像となる.

とりあえずこれの具体例を考えて本当かどうか考えてみましょう.
例えば $G = \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}, f(k) = 2k$ として考えると $\mathrm{Ker}f = \{2\}$ となり $G/\mathrm{Ker}f = \{\{0\}$,$\{1\}$,$\{2\}\}$ となり $\mathrm{Im}f = \{\{0\}$,$\{1\}$,$\{2\}\}$ となる. よって同型である.
本当に同型になりましたね. 少し自分で証明してみようとするのもよいでしょう. これが自力で証明出来たら今までの内容が理解できていて凄いです!

解答. 任意の $i, j \in G$ に対して $g(i\mathrm{Ker}f * j\mathrm{Ker}f) = f(ij) = g(i\mathrm{Ker}f)g(j\mathrm{Ker}f)$, よって準同型である. このとき g が全単射であることと同型であることは同値なので全単射を示す.
全射は自明. であるから単射を示せばよい. 単射を示す.
$g(a\mathrm{Ker}f) = g(b\mathrm{Ker}f)$ と仮定して $a\mathrm{Ker}f = b\mathrm{Ker}f$ を示せばよい. 仮定より $f(a) = f(b), f(a^{-1}b) = e, a^{-1}b \in \mathrm{Ker}f$ であり上記で示した通り群 H に対して $aH = bH$ と $a^{-1}b \in H$ は同値なので $a\mathrm{Ker}f = b\mathrm{Ker}f$, よって単射が示された.

以上より群の準同型定理が示されました.
なおこの定理は以下で説明する環・体にたいしても便利な定理として知られており群論を勉強するにあたって非常に重要な定理です.

5 | 体・環

次に群のように代数学で考えられる集合を紹介します.
まずは定義を言います. 自分で色々具体例を作ってみたりするとよいでしょう.

定義 5.1: 環 (ring)

集合 K がアーベル群でありかつその群での演算 $+$(一般に加法という) 以外にある演算 $*$(一般に乗法という) にたいしても閉じていて $*$ の単位元がありその演算に対し結合法則を満たしている. さらに K の任意の元 a, b, c において $(a * (b + c) = a * b + a * c)$(分配法則) を満たす時 K と $*$ のことを環という.

例として $\mathbb{R}$ や $\mathbb{Z}$ があげられます. ちなみに本によっては環は可換 (任意の元 a, b について $a * b = b * a$ が成り立つ) として考えることが多いので環といって可換環のことを表すこともあります.(なおこの記事では違います)

定義 5.2: 体

集合 K と $*$ が可換環でさらに乗法に関して加法の単位元以外には逆元が存在する時体という.

ここで $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ というものを考える.(なお m は 2 以上の自然数とする)
この集合は $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z} = \{0, 1, ...m-1\}$ となります.(こう定義したと思ってください 厳密にはこの記法の理由があるんですが今回は略します) この集合での $+, *$ は modm 上のもの (m で割ったあまりのみを考える つまり 1 と $m+1$ とかを同じとみなすような状態) とします.
演習課題 16 一般に $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ は剰余環と呼ばれる. これが環であることを確かめなさい
演習課題 17 $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ が体となるような m の必要十分条件を求めなさい

6 | 整数論

6.1 用語

以下で使う言葉の説明をします.
$gcd(a, b)$ ・・・ a と b の最大公約数
素因数・・・ n の素因数というのは n の約数のうち素数のもののこと
$\mod n$ ・・・ $\mod n$ というのは集合論のところでも軽く触れましたが n で割ったあまりで考える世界です. また整数 a, b, n に関して $a \equiv b(\mod n)$ というのは $a-b$ が n の倍数であることです.
$b|a$ ・・・ 整数 a, b に対して a が b の倍数である. より正確にはある整数 n が存在して $b \times n = a$
$b \nmid a$ ・・・ 整数 a, b に対して a が b の倍数でないこと
$\mod n$ 上での k の位数・・・ $k^i \equiv 1(\mod n)$ となる 2 以上の整数のうち最小のもの, 存在しない場合もある.

6.2 群論とのかかわり

以下の整数論の定理は群論で記述することが可能です!

Fermat's little theorem

任意の素数 p と任意の,p と互いに素な自然数 a に対して $a^{p-1} \equiv 1(\mod p)$ が成り立つ

なおこれとほぼ同値な命題として以下が挙げられる (ここで [ほぼ] と言っているのは a が p と互いに素でない場合について考える必要があるからである).

以後 $Fermat's\ little\ theorem$ といって以下のことを指すときもある.

$Fermat's\ little\ theorem$

任意の素数 p と任意の自然数 a に対して $a^p \equiv a(\mod p)$ が成り立つ.

さてここで群論の際に証明したラグランジュの定理の系 2 を思い出してみましょう.

ラグランジュの定理の系 2(再掲)

有限群 G の位数が存在する任意の元 g の位数 (ここでの位数というのは元に関しての位数)$< g >$ とすると $< g >$ は G の位数 (この位数は群に対しての位数) の約数になる

これは $Fermat's\ little\ theorem$ より主張が強い定理と捉えられます.
なぜなら, ここでこの有限群 G が $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ (0 を含まない) のときが $Fermat's\ little\ theorem$ と同じことを言っています!
これは各々確認してみるとよいでしょう.

中国剰余定理

k 個の整数 $a_1,,,,a_k$ がどの 2 つも互いに素であるなら k 個の整数 $b_1,,,,b_k$ に対して

$$x \equiv b_1(\mod a_1)$$
$$\cdots$$
$$x \equiv b_k(\mod a_k)$$

を満たす整数 x が $\mod\ a_1a_2....a_k$ で一意に定まる.

中国剰余定理の主張は以下のように言い換えられます.

中国剰余定理の言いかえ

互いに素な k 個の整数 $a_1,...a_k$ があるとき
$\mathbb{Z}/a_1\mathbb{Z} \times ...\mathbb{Z}/a_k\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}/a_1...a_k\mathbb{Z}$ が成り立つ.

演習課題 18 これが正しいことを示せ.
そう, 群論の世界で整数の世界を見れています!

7 | さいごに

今回は僕が好きな分野である群論と整数論について書きました.TEX の勉強や数研内での講義のプリント作成 (全学年向け), 学校での数学の自由研究も兼ねてやってみました.

今年は群論入門編とそれの整数論のかかわりを書いたのであまり研究した, 感がないので来年は自分で何か発見出来たらなぁと思っています。また整数論の方は少々はっきりしない終わり方だったので自分でもあまり納得がいってません. そのため記憶がなくなってなければ来年は整数論の研究をしたいです, できるかは分かりませんが.
これを読んだ人がこの記事 (部誌) を面白い, そしてより数学を好きになってくださったら幸いです.
また自分がメインで中学入試予想も作ったので受験生の方のみならずみなさんぜひ解いてみてください。かなり歯ごたえがあると思います。
今後の数学界のますますの発展を祈って

3636 古橋史崇

8 | 演習課題の略解

ここでは演習課題の一部の略解を載せます.
演習課題 3: 背理法を用いる, 具体的には i, j 二つの異なる単位元があったとして矛盾を導く
演習課題 8:$xy = xxx^{-1}y = x^{-1}y = x^{-1}yyy^{-1} = x^{-1}y^{-1} = yx$. よって示された.
演習課題 11:$aNbN = abN$ のみ示す. つまり $aN = a'N, bN = b'N$ のとき $abN = a'b'N$ を示せばよい.N が正規部分群であることより $b^{-1}a^{-1}a'b' \in N$, よって $abN = a'b'N$.
演習課題 15:$a\mathrm{Ker}f = b\mathrm{Ker}f$ ならば $f(a) = f(b)$ を示せばよい.$a\mathrm{Ker}f = b\mathrm{Ker}f$ と仮定すると $a^{-1}b \in \mathrm{Ker}f$ より $f(a) = f(b)$.
演習課題 17:m が素数であることが必要十分条件であることを示せばよい. そのため m が素数ならば体である,m が素数でないならば体でない, を示せばよい (体であることを示すためには全ての元に逆元をもってこれればよい, 体でないことを示すには逆元がない元があることを示せばよい)
演習課題 18: 写像 $f(x + a_1...a_k\mathbb{Z}) = (x + a_1\mathbb{Z}, ..., x + a_k\mathbb{Z})$ を考えて, これが全単射であることを示せばよい.

9 | 参考文献・参考動画

(以下敬称略)
群の準同型定理 (著: 黒木玄)
数学ガール　がロア理論 (著: 結城浩)
具体例で学ぶ代数学 < 群論 >(Masaki Koga [数学解説] という YouTube チャンネルにある動画です. 作成者: 古賀正樹 (開成の OB の方です))
雪江代数 1 群論 (著: 雪江明彦)

雪江整数　初等整数論から p 進数論へ (著: 雪江明彦)
獲得! 数学オリンピック金メダル

日本の定理

4235　藤浪清大

1 | はじめに

皆さんこんにちは. 見てくださってありがとうございます. 高校 1 年 2 組の藤浪清大です. 今回は「日本の定理」と呼ばれる, 共円多角形に関する定理の紹介, 証明をしていきたいと思います. 証明を追う際には, 紙などに図を書きながらやっていただけるとわかりやすいと思います.

2 | 日本の定理の紹介

まず日本の定理の主張を紹介します.

定理 2.1: 日本の定理

円に内接する任意の多角形について, それを対角線で三角形に分割した時, その三角形の内接円の半径の総和は, 分割の結果によらず一定である.

主張が美しいですね. この定理の証明の方針ですが, まず四角形の場合について証明をし, あとは頂点の数に関しての数学的帰納法を回して一般の多角形についての証明をします. 四角形の場合を次の章で導出します.

3 | 日本の定理の四角形 ver. と丸山良寛の定理

定理 3.1: 日本の定理 (四角形の場合)

円に内接する四角形 $ABCD$ について, (三角形 DAB の内接円の半径)+(三角形 BCD の内接円の半径)=(三角形 ABC の内接円の半径)+(三角形 CDA の内接円の半径) が成り立つ.

これが日本の定理の四角形の場合です. ところで, これとよく似た定理があります. 今回はそれもついでに紹介し, 証明しておきたいと思います.

定理 3.2: 丸山良寛の定理

円に内接する四角形 $ABCD$ について, 三角形 DAB, 三角形 ABC, 三角形 BCD, 三角形 CDA の内心は長方形をなす.

この定理も主張が美しいです. では, この 2 つの定理を導出していきます.

証明. (A) 新たな定義
弧 AB(C, D を含まない方) の中点を E とする. この弧に対する円周角を $2a°$ とする.
弧 BC(D, A を含まない方) の中点を F とする. この弧に対する円周角を $2b°$ とする.
弧 CD(A, B を含まない方) の中点を G とする. この弧に対する円周角を $2c°$ とする.
弧 DA(B, C を含まない方) の中点を H とする. この弧に対する円周角を $2d°$ とする.
三角形 DAB の内心を I_A とする. 三角形 ABC の内心を I_B とする.
三角形 BCD の内心を I_C とする. 三角形 CDA の内心を I_D とする.
点 I_A, I_C を通り, 対角線 BD に平行な直線を l_A, l_C とする.
点 I_B, I_D を通り, 対角線 AC に平行な直線を l_B, l_D とする.
l_A と l_B, l_B と l_C, l_C と l_D, l_D と l_A の交点を, それぞれ P, Q, R, S とする.

□

証明. (B) 本証明
円周角の定理より,

$$\angle CDA+\angle DAB+\angle ABC+\angle BCD=(2a+2b+2b+2c+2c+2d+2d+2a)^\circ=4(a+b+c+d)^\circ$$

で, これは 360° だから, $a+b+c+d=90$ である.

$$\angle EHF+\angle HEG=\angle EHB+\angle BHF+\angle HED+\angle DEG=(a+b+d+c)^\circ(\because\quad)=90^\circ$$

なので, $EG\perp FH$ である.

$$\angle ABH=\angle DBH, \angle ADE=\angle BDE$$

であるため, I_A は BH と DF の交点であり, 同様に, I_B は AF と CE の交点である.

$$\angle I_ABI_B=\angle ABI_B-\angle ABH=(2c^\circ+2d^\circ)\div 2-d^\circ=c^\circ$$
$$\angle I_AAI_B=\angle BAI_A-\angle BAF=(2b^\circ+2c^\circ)\div 2-b^\circ=c^\circ$$

であり, (I_AI_B に対して A, B は同じ側にあるため,) 円周角の定理の逆より 4 点 A, B, I_A, I_B は同一円周上にある. よって, 円周角の定理より,

$$\angle BI_AI_B=\angle BAI_B=\angle BHF$$

なので, 錯覚が等しいから, $I_AI_B//FH$ である.
同様にすることで, $I_BI_C//EG, I_CI_D//FH, I_DI_A//EG$ が示せるので, 四角形 $I_AI_BI_CI_D$ は平行四辺形であり, $EG \perp FH$ であるから, これは長方形である. (丸山良寛の定理の証明終了)

また,

$$\angle PI_AB = \angle I_ABD = d^\circ (\because PI_A//BD)$$
$$\angle BI_AI_B = \angle BAI_B = b^\circ$$

より, $\angle PI_AI_B = b^\circ + d^\circ$ である. 同様にして $\angle PI_BI_A = b^\circ + d^\circ$ も言えるので, $PI_A = PI_B$, すなわち P が線分 I_AI_B の垂直二等分線上にあることがいえる.
同様にして, Q が線分 I_BI_C の垂直二等分線上にあり, R が線分 I_CI_D の垂直二等分線上にあり, S が線分 I_DI_A の垂直二等分線上にあることがわかる. 四角形 $I_AI_BI_CI_D$ が長方形であるので, $PR \perp I_AI_B, QS \perp I_AI_D$ から, $PR \perp QS$ がわかる.
四角形 $PQRS$ は平行四辺形でもあるので, 四角形 $PQRS$ はひし形であるとわかる.
仮定より, (三角形 DAB の内接円の半径)+(三角形 BCD の内接円の半径) は, SP を底辺とみたときのひし形 $PQRS$ の高さで, (三角形 ABC の内接円の半径)+(三角形 CDA の内接円の半径) は, QP を底辺とみたときのひし形 $PQRS$ の高さである.
ひし形は 4 辺の長さが等しいのでこれらも当然等しくなる. (日本の定理 (四角形の場合) の証明終了)

□

4 ｜ 日本の定理の証明

いよいよこの定理を示していきます. 前前章で示した方針に基づき, 帰納法を回します.

証明. 命題 P_n(n は 4 以上の整数) を, ”円に内接する任意の n 角形について, それを対角線で三角形に分割した時, その三角形の内接円の半径の総和は分割の結果によらず一定である. ”と定める.
P_4 が正しいことは前章にて既に証明した. P_k(k は 4 以上の整数) が正しいならば, P_{k+1} も正しいことを示す.

円に内接する $k+1$ 角形の頂点に対して, 反時計回りに $A_1, A_2, \dots, A_{k+1}$ と名前を付ける. (議論での些末な場合分けを避けるため, $A_0 := A_{k+1}, A_{k+2} := A_1$ とする.) 対角線で三角形に分割すると, 三角形は $k-1$ 個できる. 各三角形について, それと元の多角形が共有している辺の本数を考えると, これはどの三角形についても 0, 1, 2 のいずれかである. (多角形の辺の数)>(三角形の個数) であるため, この値が 2 となるような三角形, つまり多角形と角を共有するような三角形は必ず存在する.

三角形に分割された結果 (すなわち, $k-1$ 個の三角形を要素に持つ集合) を全て集めた集合を S とする. S の部分集合 S_l(l は 1 以上 $k+1$ 以下の整数) を以下のように定義する.

ある分割結果 K について $S_l \ni K \Leftrightarrow K$ が三角形 $A_{l-1}A_lA_{l+1}$ をもつ

このとき, 前述より, $S_1 \cup S_2 \cup \cdots \cup S_{k+1} = S$ である.
また, 以下のことが成り立つ.

分割結果 K_1, K_2 がともに集合 S_l の要素ならば, K_1, K_2 における三角形の内接円の半径の総和は等しい.

(このことの証明) K_1, K_2 はともに三角形 $A_{l-1}A_lA_{l+1}$ をもち, あとはもとの $k+1$ 角形から頂点 A_l を除いた k 角形の三角形分割の結果になる. P_k は成り立つと仮定したので, k 角形の三角形分割における内接円の半径の総和は分割の結果によらず等しい. 三角形 $A_{l-1}A_lA_{l+1}$ の内接円の半径は共通なので, 主張は示される.

なので, 集合 S_l の要素全てについて, 内接円の半径の総和は等しいことがわかる. なので, この値を $< S_l >$ で表現することにする.
次に, $< S_l > = < S_{l+1} >$(l は 1 以上 k 以下の整数) を示す.

(証明)S_l の要素の中で, 三角形 $A_{l-1}A_{l+1}A_{l+2}$ をもつものを一つ取ってきてこれを L とすると, L の内接円の半径の総和は $< S_l >$ である. また, 四角形 $A_{l-1}A_lA_{l+1}A_{l+2}$ について P_4 を適用し, (三角形 $A_{l-1}A_lA_{l+1}$ の内接円の半径)+(三角形 $A_{l-1}A_{l+1}A_{l+2}$ の内接円の半径)=(三角形 $A_{l-1}A_lA_{l+2}$ の内接円の半径)+(三角形 $A_lA_{l+1}A_{l+2}$ の内接円の半径) であるので, L を使って, 内接円の半径の総和が $< S_l >$ となり, かつ三角形 $A_lA_{l+1}A_{l+2}$ をもつような三角形分割 L' を構成できる. 定義より $L' \in S_{l+1}$ なので, L' の内接円の半径の総和は $< S_{l+1} >$ である. よって, $< S_l > = < S_{l+1} >$ である.

これにより, $< S_1 > = < S_2 > = \cdots = < S_{k+1} >$ がわかり, $S_1 \cup S_2 \cup \cdots \cup S_{k+1} = S$ より, 全ての三角形分割について, 内接円の半径の総和が等しいことが示せた. つまり P_{k+1} は正しい.

よって, 数学的帰納法により, 円に内接する任意の多角形について, 題意が成り立つことが示された. □

5 ｜ おわりに

実は, JMO(と JJMO) のロゴには, この定理が関わっているようです. (このことは, 参考 3 の基礎編 P197 に載っています.) この定理を部誌のテーマとして選んだ理由もそれです.
筆者の説明力の不足により証明を読むのがしんどい, ということが起きると思いますが, ご容赦ください.
中 2 の時にふざけた部誌を投稿して若干の黒歴史を作ったりもしましたが, 今年度はまじめ

なものを長めに書きました．これで名誉挽回ができたかなと思います．
今年はついに締め切りを破ってしまいました... 年をとるにつれてこういうのに弱くなります．高 2 の自分が心配です．

参考文献

[1] Wikipedia『日本の定理』(https://ja.wikipedia.org/wiki/)
[2] Wikipedia『丸山良寛の定理』(https://ja.wikipedia.org/wiki/)
[3] 野口廣『数学オリンピック事典-問題と解法』

N 項間漸化式

4336　根岸慧

1 ｜ はじめに

皆さんは数学 II・B で三項間漸化式を習ったときに一般の場合はどうなるのか気になったことはないでしょうか？今年はこの定数係数 N 項間漸化式 (一般には線形漸化式と呼ぶそうです) について書いていこうと思う．数学 II・B までの知識があれば十分理解できる内容にする予定 () なのでぜひ読んでみてください．

2 ｜ 三項間漸化式

まずは三項間漸化式の復習から

$a_{n+2} = pa_{n+1} + qa_n, (a_2 = t_2, a_1 = t_1)$ を解く．特性方程式 $x^2 - px - q = 0$ の解を α, β と置くと, 与式は次のように変形できる．

$a_{n+2} - \alpha a_{n+1} = \beta(a_{n+1} - \alpha a_n), a_{n+2} - \beta a_{n+1} = \alpha(a_{n+1} - \beta a_n).$

この二つから,

$a_{n+1} - \alpha a_n = \beta^{n-1}(t_2 - \alpha t_1), a_{n+1} - \beta a_n = \alpha^{n-1}(t_2 - \beta t_1).$

$$a_n = \frac{\alpha^{n-1}(t_2 - \beta t_1) - \beta^{n-1}(t_2 - \alpha t_1)}{\alpha - \beta}$$

と解くことができる．

ただし $\alpha = \beta$ の場合は,$a_{n+1} - \alpha a_n = \alpha^{n-1}(t_2 - \alpha t_1)$ の両辺を α^{n+1} 割ることで, 簡単に解くことができる．

(楽をする方法)

特性方程式 $x^2 - px - q = 0$ の解を α, β と置く．

$a_n = A\alpha^{n-1} + B\beta^{n-1} (A, B \in \mathbb{R})$ と置くことができる．$(\star)$

$n = 1$ を代入して $a_1 = A + B$, $n = 2$ を代入して, $a_2 = A\alpha + B\beta$.

この二つを連立して, A, B を求めて, a_n を求めることができる．

($\star$ の確認)
$a_n = A\alpha^{n-1} + B\beta^{n-1}$ を代入すると, $A\alpha^{n+1} + B\beta^{n+1} = p(A\alpha^n + B\beta^n) + q(A\alpha^{n-1} + B\beta^{n-1})$.
二次方程式の解と係数の関係より, $p = \alpha + \beta, q = -\alpha\beta$ なので,
$A\alpha^{n+1} + B\beta^{n+1} = (A\alpha^{n+1} + A\alpha^n\beta + B\alpha\beta^n + B\beta^{n+1}) - (A\alpha^n\beta + B\alpha\beta^n)$
より正しいことが確認された.

(例題)
白と黒の碁石を 2021 個横 1 列に並べる. 黒石が隣り合って並んではいけないとき, 何通りの並べ方があるか.

(解説)
まさにテンプレの問題ですね. n 個並べる方法のうち, 一番右にある石が白のものを w_n 個, 黒のものを b_n 個とする. $w_{n+1} = w_n + b_n, b_{n+1} = w_n, w_1 = b_1 = 1$ とわかるので, 代入して $w_{n+2} = w_{n+1} + w_n, w_1 = 1, w_2 = 2$. これを解く. 特性方程式 $x^2 - x - 1 = 0$ の解は $x = \frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$. $w_n = A(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^{n-1} + B(\frac{1-\sqrt{5}}{2})^{n-1}$ と置けるので, $n = 1$ を代入して, $w_1 = A + B = 1$, $n = 2$ を代入して, $w_2 = A(\frac{1+\sqrt{5}}{2}) + B(\frac{1-\sqrt{5}}{2}) = 1$. この二つより, $w_n = \frac{1+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}((\frac{1+\sqrt{5}}{2})^{n-1} - (\frac{1-\sqrt{5}}{2})^{n-1}) = \frac{1}{\sqrt{5}}((\frac{1+\sqrt{5}}{2})^n - (\frac{1-\sqrt{5}}{2})^n)$ である. よって $n = 2021$ を代入して, $\frac{1}{\sqrt{5}}((\frac{1+\sqrt{5}}{2})^{2021} - (\frac{1-\sqrt{5}}{2})^{2021})$(この w_n はフィボナッチ数列の一般項として有名である)

3 | N 項間漸化式

さてここからが本題です.
三項間漸化式の一般項では二次方程式の解を使って表されていることから, N 項間漸化式では N-1 次方程式の解が関係しているのではないかと考えられます. なのでまずは, そのことを確認していく方針で示して行きます. てことでまずはこれから.

N 次方程式の解と係数の関係

$$\sum_{k=0} \qquad a_k x^k = 0\ b_1, b_2, b_3, \cdots, b_N.$$

$$\sum_{i=0} \qquad b_{i_1} = (-1)^1 \frac{a_{n-1}}{a_n}$$

$$\sum_{i_1<i_2} \qquad b_{i_1} b_{i_2} = (-1)^2 \frac{a_{n-2}}{a_n}$$

$$\sum_{i_1<i_2<\cdots<i_k} \qquad b_{i_1} b_{i_2} \cdots b_{i_k} = (-1)^k \frac{a_{n-k}}{a_n}$$

$$\sum_{i_1<i_2<\cdots<i_k<\cdots<i_n} b_{i_1} b_{i_2} \cdots b_{i_k} \cdots b_{i_n} = (-1)^n \frac{a_0}{a_n}$$

となる.

(証明)
因数定理より,

$$\sum_{k=0}^{N} a_k x^k = a_1(x-b_1)(x-b_2)\cdots(x-b_N)$$

右辺を展開して係数を比較して示される.
(本題)

$$a_{n+N-1} = \sum_{k=0}^{N-2} b_k a_{n+k} (b_k \in \mathbb{R})$$

としてこれをもとに一般項を求めればよい.

特性方程式は $x^{N-1} - \sum_{k=0}^{N-2} b_k x^k = 0$

この解を $c_1, c_2, \cdots, c_{N-1}$ とするとき,

$$a_n = \sum_{k=1}^{N-1} d_k c_k^{n-1} (d_k \in \mathbb{R})$$

とあらわせることを示す. これを最初の漸化式に代入すると,

$$\sum_{k=1}^{N-1} d_k c_k^{n+N-1} = \sum_{k=1}^{N-1} d_k b_k c_k^{n+k-1}$$

N 次方程式の解と係数の関係より,

$$\sum_{k=1}^{N-1} d_k c_k^{n+N-1} = \sum_{k=1}^{N-1} d_k (-1)^{k+1} (\sum_{i_1<i_2<\cdots<i_k}^{N} c_{i_1} c_{i_2} \cdots c_{i_k}) c_k^{n+k-1}$$

この式は展開して恒等式であることが確認できる.
よって,

$$a_n = \sum_{k=1}^{N-1} d_k c_k^{n-1}$$

である. よって $k1, 2, 3, \cdots, N-1$ を代入して, d_k を求められるので a_n を求めることができる.
(例題)
実際に一問一般項を求めてみて確認しましょう.
$a_{n+3} = 2a_{n+2} + 5a_{n+1} - 6a_n, a_1 = 2, a_2 = 14, a_3 = 20.$ の一般項を求める (4 項間で楽をしたなんて言わない ()).
特性方程式 $x^3 - 2x^2 - 5x + 6 = 0$ を解いて,$x = 1, -2, 3.$
$a_n = A1^n + B(-2)^n + C3^n$ と置けるので, $n = 1, 2, 3$ を代入して, $A - 2B + 3C = 2, A + 4B + 9C = 14, A - 8B + 27C = 20$ より, $A = 1, B = 1, C = 1.$ $a_n = 1 + (-2)^n + 3^n.$

参考文献

[1]『線形漸化式とその周辺』(https://www.junten.ed.jp/contents/wp-content/uploads/2015/08/f751e5528e09b90d65614bf71246f296.pdf)
[2]『n 項間の漸化式』(http://sigmagic.net/math/recurrence-n/)

4 | 終わりに

ここまで読んでいただいた皆様ありがとうございます. そして自分もお疲れ様でした (初めて部誌を tex で打ちました.). これは実用性はなさそう? ですが...5 項間の漸化式までは (5 次以上の方程式には解の公式がないことが示されているので) 機械的に解けると考えるとすごいですよね!!

5次方程式が初等的に可解である場合の条件とその解について

4534　波戸陽太郎

編集者注: 以下では同値記号が省略されているところがありますが特に断りがない限り式が連なっていたらそれらは同値であるものとします

1 ｜ 1次方程式の場合

$ax + b = 0 (a \neq 0)$
$ax + b = 0$
$ax = -b$
$x = -\frac{b}{a}$

2 ｜ 2次方程式の場合

$ax^2 + bx + c = 0 (b \neq 0)$
$ax^2 + bx + c = 0 (b \neq 0)$
$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$
$(x + \frac{b}{2a})^2 - (\frac{b}{2a})^2 + \frac{c}{a}$
$(x + \frac{b}{2a})^2 = (\frac{b}{2a})^2 - \frac{c}{a}$
$x + \frac{b}{2a} = \pm\sqrt{(\frac{b}{2a})^2 - \frac{c}{a}}$
$x = -\frac{b}{2a} \pm \sqrt{(\frac{b}{2a})^2 - \frac{c}{a}} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

3 | 3 次方程式の場合

$$
\begin{aligned}
ax^3 + bx^2 + cx + d = 0(a \neq 0) \\
x^3 + \frac{b}{a}x^2 + \frac{c}{a}x + \frac{d}{a} = 0 \\
\left(x + \frac{b}{3a}\right)^3 - 3\left(\frac{b}{3a}\right)^2 x - \left(\frac{b}{3a}\right)^3 + \frac{c}{a}x + \frac{d}{a} = 0 \\
\left(x + \frac{b}{3a}\right)^3 + \left(\frac{c}{a} - \frac{b^2}{3a^2}\right)x + \left(\frac{d}{a} - \frac{b^3}{27a^3}\right) = 0
\end{aligned}
$$

$$
y = x + \frac{b}{3a}
$$

$$
\begin{aligned}
y^3 + \left(\frac{c}{a} - \frac{b^2}{3a^2}\right)\left(y - \frac{b}{3a}\right) + \left(\frac{d}{a} - \frac{b^3}{27a^3}\right) = 0 \\
y^3 + \left(\frac{c}{a} - \frac{b^2}{3a^2}\right)y + \left(\frac{d}{a} - \frac{bc}{3a^2} + \frac{2b^3}{27a^3}\right) = 0
\end{aligned}
$$

$\frac{c}{a} - \frac{b^2}{3a^2} = p, \frac{d}{a} - \frac{bc}{3a^2} + \frac{2b^3}{27a^3} = q$ と置く

$$
y^3 + py + q = 0
$$

ここで $\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 - 3\alpha\beta\gamma = (\alpha + \beta + \gamma)(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - \alpha\beta - \beta\gamma - \gamma\alpha)$ において
$y = \alpha, p = -3\beta\gamma, q = \beta^3 - \gamma^3$ とすると

$$
\begin{aligned}
0 = y^3 + py + q &= (y + \beta + \gamma)(y^2 + \beta^2 + \gamma^2 - y\beta - \beta\gamma - y\gamma) \\
&= (y + \beta + \gamma)(y^2 - (\beta + \gamma)y + \beta^2 + \gamma^2 - \beta\gamma)
\end{aligned}
$$

したがって $y = -(\beta+\gamma), \frac{(\beta + \gamma) \pm \sqrt{(\beta + \gamma)^2 - 4(\beta^2 + \gamma^2 - \beta\gamma)}}{2} = \frac{(\beta + \gamma) \pm \sqrt{-3(\beta - \gamma)^2}}{2} = \frac{(\beta + \gamma) \pm \sqrt{3}i(\beta - \gamma)}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{3}i}{2}\beta + \frac{1 \mp \sqrt{3}i}{2}\gamma$
よって $y = -(\beta + \gamma), \frac{1 + \sqrt{3}i}{2}\beta + \frac{1 - \sqrt{3}i}{2}\gamma, \frac{1 - \sqrt{3}i}{2}\beta + \frac{1 + \sqrt{3}i}{2}\gamma$
また $y = e^{i\pi}\beta + e^{i\pi}\gamma, e^{\frac{1}{2}i\pi}\beta + e^{\frac{1}{2}i\pi}\gamma, e^{-\frac{1}{2}i\pi}\beta + e^{-\frac{1}{2}i\pi}\gamma$ とも書ける.

$$\begin{cases} -3\beta\gamma = p \Leftrightarrow \beta\gamma = -\dfrac{p}{3} \Rightarrow \beta^3\gamma^3 = -\left(\dfrac{p}{3}\right)^3 \\ \beta^3 + \gamma^3 = q \end{cases}$$

解と係数の関係より

$t^2 - qt - (\dfrac{p}{3})^3 = 0$ の解は $t = \beta^3, \gamma^3$ となる.

$t = \dfrac{q}{2} \pm \sqrt{\left(\dfrac{q}{2}\right)^2 + \left(\dfrac{p}{3}\right)^3}$ ここで $t_+ = \dfrac{q}{2} + \sqrt{\left(\dfrac{q}{2}\right)^2 + \left(\dfrac{p}{3}\right)^3}, t_- = \dfrac{q}{2} - \sqrt{\left(\dfrac{q}{2}\right)^2 + \left(\dfrac{p}{3}\right)^3}$

と略記する.

$(\beta^3, \gamma^3) = (t_+, t_-), (t_-, t_+)$ の 2 通り

$(\beta, \gamma) = (e^{0i\pi}\sqrt[3]{t_+}, e^{0i\pi}\sqrt[3]{t_-}) \cdots ①, (e^{\frac{1}{3}i\pi}\sqrt[3]{t_+}, e^{-\frac{1}{3}i\pi}\sqrt[3]{t_-}) \cdots ②, (e^{-\frac{1}{3}i\pi}\sqrt[3]{t_+}, e^{\frac{1}{3}i\pi}\sqrt[3]{t_-}) \cdots ③, t_+ \leftrightarrow t_-$ 入れ替えの 3 つの 6 通り.

しかし $t_+ \leftrightarrow t_-$ を入れ替えても①と①, ②と③はそれぞれ同値であるので, 入れ替えは無視してかまわない.

$y = e^{0i\pi}\sqrt[3]{t_+} + e^{0i\pi}\sqrt[3]{t_-}, e^{\frac{1}{3}i\pi}\sqrt[3]{t_+} + e^{-\frac{1}{3}i\pi}\sqrt[3]{t_-}, e^{-\frac{1}{3}i\pi}\sqrt[3]{t_+} + e^{\frac{1}{3}i\pi}\sqrt[3]{t_-}$

$y = e^{i\pi}\sqrt[3]{-t_+} + e^{i\pi}\sqrt[3]{-t_-}, e^{\frac{2}{3}i\pi}\sqrt[3]{-t_+} + e^{-\frac{2}{3}i\pi}\sqrt[3]{-t_-}, e^{-\frac{2}{3}i\pi}\sqrt[3]{-t_+} + e^{\frac{2}{3}i\pi}\sqrt[3]{-t_-}$

$x = y - \dfrac{b}{3a}$ より

$$x = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} - \frac{b}{3a}$$

$$, \frac{-1+\sqrt{3}i}{2}\sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} + \frac{-1-\sqrt{3}i}{2}\sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} - \frac{b}{3a}$$

$$, \frac{-1-\sqrt{3}i}{2}\sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} + \frac{-1+\sqrt{3}i}{2}\sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} - \frac{b}{3a}$$

$$\left(p = \frac{c}{a} - \frac{b^2}{3a^2}, q = \frac{d}{a} - \frac{bc}{3a^2} + \frac{2b^3}{27a^3}\right)$$

4 | 4 次方程式の場合

$ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0 (a \neq 0)$

$x^4 + \dfrac{b}{a}x^3 + \dfrac{c}{a}x^2 + \dfrac{d}{a}x + \dfrac{e}{a}$

$(x+\frac{b}{4a})^4-6\frac{b}{4a}^2x^2-4\frac{b}{4a}^2x-\frac{b}{4a}^4+\frac{c}{a}x^2+\frac{d}{a}x+\frac{e}{a}=0$
$(x+\frac{b}{4a})^4+(\frac{c}{a}-\frac{3b^2}{8a^3}+(\frac{d}{a}-\frac{b^3}{16a^3})x+(\frac{e}{a}-\frac{b^4}{256a^4})=0$
ここで $y=x+\frac{b}{4a}$ とする.
$y^4+(\frac{c}{a}-\frac{3b^2}{8a^2})(y-\frac{b}{4a})^2+(\frac{d}{a}-\frac{b^3}{16a^3})x+(\frac{e}{a}-\frac{b^4}{256a^4})=0$
$y^4+(\frac{c}{a}-\frac{3b^2}{8a^2})y^2+(\frac{d}{a}-\frac{bc}{2a^2}+\frac{b^2}{8a^3})y+(\frac{e}{a}-\frac{bd}{4a^2}+\frac{b^2c}{16a^3}-\frac{b^4}{256a^4})=0$
$\frac{c}{a}-\frac{3b^2}{8a^2}=p, \frac{d}{a}-\frac{bc}{2a^2}+\frac{b^3}{8a^3}=q, \frac{c}{a}-\frac{bd}{4a^2}+\frac{b^2c}{16a^2}-\frac{b^4}{256a^4}=r$ と置く.
$y^4+py^2+qy+r=0$
$y^4+py^2+ty^2=ty^2-qy-r$
$y^4+(p+t)y^2=t(y^2-\frac{q}{t}y)-r$
$(y^2+\frac{p+t}{2})^2=t(y-\frac{q}{2t})^2+(\frac{p+t}{2})^2-t(\frac{q}{2t})^2-r$
ここで $(\frac{p+t}{2})^2-t(\frac{q}{2t})^2-r=0$ として t を定めると
$(\frac{p+t}{2})^2-t(\frac{q}{2t})^2-r=0$
$t^3+2pt^2+(p^2-4r)t-q^2=0$
$(t+\frac{2}{3}p)^3-3(\frac{2}{3}p)^2t-(\frac{2}{3}p)^2+(p^2-4r)t-q^2=0$
$(t+\frac{2}{3}p)^3+(-\frac{1}{3}p^2-4r)t+(-\frac{8}{27}p^3-q^2)=0$
$z:=t+\frac{2}{3}p$
$z^3+(-\frac{1}{3}p^3-4r)(z-\frac{2}{3}t)+(-\frac{8}{27}p^3+q^2)=0$
$z^3+(-\frac{1}{3}p^3-4r)z+(-\frac{8}{27}p^3+\frac{8}{3}pr-\frac{8}{3}pr-q^2))=0$
$P:=-\frac{1}{3}p^2-4r, Q:=-\frac{8}{27}p^3+\frac{8}{3}pr-\frac{8}{3}pr-q^2)$
$z^3+Pz+Q=0$
ここで $\alpha^3+\beta^3+\gamma^3-3\alpha\beta\gamma=(\alpha+\beta+\gamma)(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-\alpha\beta-\beta\gamma-\gamma\alpha)$ において,
$z=\alpha, P=-3\beta\gamma, Q=\beta^3+\gamma^3$ とすると
$0=z^3+Pz+Q=(z+\beta+\gamma)(z^2+\beta^2+\gamma^2-z\beta-\beta\gamma-\gamma z)$
したがって β,γ を P,Q で記述すればよい.

$$\begin{cases} P=-3\beta\gamma \\ Q=\beta^3+\gamma^3 \end{cases} \Leftrightarrow -\frac{P}{3}=\beta\gamma$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \beta^3+\gamma^3=Q \\ \beta^3\gamma^3=-(\frac{P}{3})^3 \end{cases} \quad (s-\beta^3)(s-\gamma^3)=s^2-(\beta^3+\gamma^{)}s+\beta^3\gamma^3=0$$ の解は $s=\beta^3,\gamma^3$ で

あることより
$s^2-Qs-(\frac{P}{3})^2$ の解は $s=\beta^3,\gamma^3$ となる.
$(s-\frac{Q}{2})^2-(\frac{Q}{2})^2-(\frac{P}{3})^2=0$ $(s-\frac{Q}{2})^2=(\frac{Q}{2})^2+(\frac{P}{3})^2$
$s-\frac{Q}{2}=\pm\sqrt{(\frac{Q}{2})^2+(\frac{P}{2})^2}$ $s=\frac{Q}{2}\pm\sqrt{(\frac{Q}{2})^2+(\frac{P}{3})^3}$
したがって
$(\beta^3,\gamma^3)=(\frac{Q}{2}\pm\sqrt{(\frac{Q}{2})^2+(\frac{P}{3})^3},\frac{Q}{2}\mp\sqrt{(\frac{Q}{2})^2+(\frac{P}{3})^3})$
ω を 1 の三乗根のうち 1 でないもののうちのどちらかとする.
$(\beta,\gamma)=(\omega\sqrt[3]{\beta^3},\omega^2\sqrt[3]{\gamma^3}),(\omega^2\sqrt[3]{\beta^3},\omega\sqrt[3]{\gamma^3})$
これより $z=-\sqrt[3]{-\beta^3}-\sqrt[3]{-\gamma^3},-\omega\sqrt[3]{-\beta^3}-\omega^2\sqrt[3]{-\gamma^3},-\omega^2\sqrt[3]{-\beta^3}-\omega\sqrt[3]{-\gamma^3}$
$t=z-\frac{2}{3}P$ より t を a,b,c,d,e により記述された.
また $(y+\frac{p+t}{2})^2=t(y-\frac{q}{2t})^2$
$y^2+\frac{p+t}{2}=\pm\sqrt{t}(y-\frac{q}{2t})$
$y^2\mp\sqrt{t}y+\frac{p+t}{2\sqrt{t}}=0$
$(y\mp\frac{\sqrt{t}}{2})^2-(\frac{\sqrt{t}}{2})^2+(\frac{p+t}{2}+\pm\frac{q}{2\sqrt{t}})=0$
$(y\mp\frac{\sqrt{t}}{2})^2=(\frac{\sqrt{t}}{2})^2-(\frac{p+t}{2}+\pm\frac{q}{2\sqrt{t}})$
$y\mp\mp\frac{\sqrt{t}}{2}=++--\sqrt{(\frac{\sqrt{t}}{2})^2-(\frac{p+t}{2})\pm\pm\frac{q}{2\sqrt{t}}}$
$y=\pm\pm\frac{\sqrt{t}}{2}=++--\sqrt{(\frac{\sqrt{t}}{2})^2-(\frac{p+t}{2})\pm\pm\frac{q}{2\sqrt{t}}}$
$y=\frac{1}{2}(\pm\pm\sqrt{t}++--\sqrt{-t-2p\mp\mp\frac{q}{\sqrt{t}}})$
$x=y-\frac{b}{4a}$ より
$x=\frac{1}{2}(\sqrt{t}+\sqrt{-t-2p-\frac{q}{\sqrt{t}}})-\frac{b}{4a}$
$\frac{1}{2}(-\sqrt{t}+\sqrt{-t-2p+\frac{q}{\sqrt{t}}})-\frac{b}{4a}$ $\frac{1}{2}(\sqrt{t}-\sqrt{-t-2p-\frac{q}{\sqrt{t}}})-\frac{b}{4a}$
$\frac{1}{2}(-\sqrt{t}+\sqrt{-t-2p+\frac{q}{\sqrt{t}}})-\frac{b}{4a}$
なお $p=\frac{c}{a}-\frac{3b^2}{8a^2}$
$q=\frac{d}{a}-\frac{bc}{2a^2}+\frac{b^3}{8a^3}$

$r = \frac{c}{a} - \frac{bd}{4a^2} + \frac{b^2c}{16a^2} - \frac{b^4}{256a^4}$
$P = -\frac{1}{3}p^2 - 4r$
$Q = -\frac{8}{27}p^3 + \frac{8}{3}pr - \frac{8}{3}pr - q^2)$
$t = \sqrt[3]{\frac{Q}{2} \pm \sqrt{(\frac{Q}{2})^2 + (\frac{P}{3})^3}} + \sqrt[3]{\frac{Q}{2} \mp \sqrt{(\frac{Q}{2})^2 + (\frac{P}{3})^3}} - \frac{2}{3}P$
である.

5　5 次方程式の場合

$ax^5 + bx^4 + cx^3 + dx^2 + ex + f = 0$(ただし $a \neq 0$)
$x^5 + \frac{b}{a}x^4 + \frac{c}{a}x^3 + \frac{d}{a}x^2 + \frac{e}{a}x + \frac{f}{a} = 0$
$\left(x + \frac{b}{5a}\right)^5 - 10\cdot\left(\frac{b}{5a}\right)^2 x^3 - 10\cdot\left(\frac{b}{5a}\right)^3 x^2 - 5\cdot\left(\frac{b}{5a}\right)^4 x - \left(\frac{b}{5a}\right)^5 + \frac{c}{a}x^3 + \frac{d}{a}x^2 + \frac{e}{a}x + \frac{f}{a} = 0$
$\left(x + \frac{b}{5a}\right)^5 + \left(\frac{c}{a} - \frac{2b^2}{5a^2}\right)x^3 + \left(\frac{d}{a} - \frac{2b^3}{25a^3}\right)x^2 + \left(\frac{e}{a} - \frac{b^4}{125a^4}\right)x + \left(\frac{f}{a} - \frac{b^5}{3125a^5}\right) = 0$
ここで,$y = x + \frac{b}{5a}$ とする.
$y^5 + \left(\frac{c}{a} - \frac{2b^2}{5a^2}\right)\left(y - \frac{b}{5a}\right)^3 + \left(\frac{d}{a} - \frac{2b^3}{25a^3}\right)\left(y - \frac{b}{5a}\right)^2 + \left(\frac{e}{a} - \frac{b^4}{125a^4}\right)\left(y - \frac{b}{5a}\right) + \left(\frac{f}{a} - \frac{b^5}{3125a^5}\right) = 0$
$y^5 + \left(\frac{c}{a} - \frac{2b^2}{5a^2}\right)y^3 + \left(\frac{d}{a} - \frac{3bc}{5a^2} + \frac{4b^3}{25a^3}\right)y^2 + \left(\frac{c}{a} - \frac{2bd}{5a^2} + \frac{3b^2c}{25a^3} - \frac{3b^4}{125a^4}\right)y + \left(\frac{f}{a} - \frac{bc}{5a^2} + \frac{b^2d}{25a^3} - \frac{b^3c}{125a^4} + \frac{4b^5}{3125a^5}\right) = 0$
このとき
$\frac{c}{a} - \frac{2b^2}{5a^2} = p, \frac{d}{a} - \frac{3bc}{5a^2} + \frac{4b^3}{25a^3} = q, \frac{c}{a} - \frac{2bd}{5a^2} + \frac{3b^2c}{25a^3} - \frac{3b^4}{125a^4} = r, \frac{f}{a} - \frac{bc}{5a^2} + \frac{b^2d}{25a^3} - \frac{b^3c}{125a^4} + \frac{4b^5}{3125a^5} = s$
と置換すると,
$y^5 + py^3 + qy^2 + ry + s = 0$
となる. 以下のために

> $\langle t^m \rangle \overset{\text{def}}{=} t_1^m + t_2^m + t_3^m + t_4^m + t_5^m$
> $S_1 \overset{\text{def}}{=} t_1 + t_2 + t_3 + t_4 + t_5$
> $S_2 \overset{\text{def}}{=} t_1t_2 + t_1t_3 + t_1t_4 + t_1t_5 + t_2t_3 + t_2t_4 + t_2t_5 + t_3t_4 + t_3t_5 + t_4t_5$
> $S_3 \overset{\text{def}}{=} t_1t_2t_3 + t_1t_2t_4 + t_1t_2t_5 + t_1t_3t_4 + t_1t_3t_5 + t_1t_4t_5 + t_2t_3t_4 + t_2t_3t_5 + t_2t_4t_5 + t_3t_4t_5$
> $S_4 \overset{\text{def}}{=} t_1t_2t_3t_4 + t_1t_2t_3t_5 + t_1t_2t_4t_5 + t_1t_3t_4t_5 + t_2t_3t_4t_5$

$S_5 \stackrel{\mathrm{def}}{=} t_1t_2t_3t_4t_5$
とし,
$S_n(n \geqq 6)$ は下の②ように定める.
ニュートンの恒等式より,

$$\langle t^m\rangle = (-1)^{m-1}\cdot m\cdot S_m + \sum_{k=1}^{m-1}\{(-1)^{m+k-1}\cdot S_{m-k}\cdot\langle t^k\rangle\}$$

である.
ここで 5 次方程式 $t^5 + a_4t^4 + a_3t^3 + a_2t^2 + a_1t + a_0 = 0\cdots$ ①の解を $t = t_1, t_2, t_3, t_4, t_5$ の 5 つとする.
解と係数の関係より $S_1 = -a_4, S_2 = a_3, S_3 = -a_2, S_4 = a_1, S_5 = -a_0$ である.
さらに,$t^l\,(l \leqq -1)$ の係数は 0 であるから,$a_n = S_{5-n} = 0\,(n \leqq -1)$ である.$\cdots$ ②
ここで, 前述より,$\langle t^m\rangle = -m\cdot a_{5-m} - \displaystyle\sum_{k=1}^{m-1} a_{5-m+k}\langle t^k\rangle$ となるので,

$\langle t\rangle = -1\cdot a_4 = -a_4$
$\langle t^2\rangle = -2\cdot a_3 - a_4\langle t\rangle = -2a_3 + a_4^2$
$\langle t^3\rangle = -3\cdot a_2 - a_3\langle t\rangle - a_4\langle t^2\rangle = -3a_2 + a_3a_4 - a_4\langle t^2\rangle$
$\langle t^4\rangle = -4\cdot a_1 - a_2\langle t\rangle - a_3\langle t^2\rangle - a_4\langle t^3\rangle = -4a_1 + a_2a_4 - a_3\langle t^2\rangle - a^4\langle t^3\rangle$
$\langle t^5\rangle = -5\cdot a_0 - a_1\langle t\rangle - a_2\langle t^2\rangle - a_3\langle t^3\rangle - a_4\langle t^4\rangle = -5a_0 - a_1a_4 - a_2\langle t^2\rangle - a_3\langle t^3\rangle - a_4\langle t^4\rangle$
$\langle t^n\rangle = -n\cdot a_{5-n} - \sum_{k=1}^{n-1} a_{5-n+k}\langle t^k\rangle = -a_0\langle t^{n-5}\rangle - a_1\langle t^{n-4}\rangle - a_2\langle t^{n-3}\rangle - a_3\langle t^{n-2}\rangle - a_4\langle t^{n-1}\rangle \quad (n \geqq 6)$

と定義する.
$y^5 + py^3 + qy^2 + ry + s = 0$ の解を $y = y_{1\ 5}$ とする.(①の 5 次方程式における $a_4 = 0, a_3 = p, a_2 = q, a_1 = r, a_0 = s$ の場合)
$z^5 + Az^2 + Bz + C = 0$ の解を $z = z_{1\ 5}$ とする.(①の 5 次方程式における $a_4 = 0, a_3 = 0, a_2 = A, a_1 = B, a_0 = C$ の場合)
このとき,$z_k = y_k^2 + \alpha y_k + \beta$ の関係を持つと定め,(α, β, A, B, C) を (p, q, r, s) で記述する.
ここで, 先ほどの議論により

$\langle y\rangle = -a_4 = 0$
$\langle y^2\rangle = -2a_3 + a_4^2 = -2p$
$\langle y^3\rangle = -3a_2 + a_3a_4 - a_4\langle y^2\rangle = -3q$
$\langle y^4\rangle = -4a_1 + a_2a_4 - a_3\langle y^2\rangle - a_4\langle y^3\rangle = 2p^2 - 4r$
$\langle y^5\rangle = -5a_0 + a_1a_4 - a_2\langle y^2\rangle - a_3\langle y^3\rangle - a_4\langle y^4\rangle = 5pq - 5s$
$\langle y^6\rangle = -a_0\langle y\rangle - a_1\langle y^2\rangle - a_2\langle y^3\rangle - a_3\langle y^4\rangle - a_4\langle y^5\rangle = -2p^3 + 6pr + 3q^2$
$\langle y^7\rangle = -a_0\langle y^2\rangle - a_1\langle y^3\rangle - a_2\langle y^4\rangle - a_3\langle y^5\rangle - a_4\langle y^6\rangle = -7p^2q + 7ps + 7qr$
$\langle y^8\rangle = -a_0\langle y^3\rangle - a_1\langle y^4\rangle - a_2\langle y^5\rangle - a_3\langle y^6\rangle - a_4\langle y^7\rangle = 2p^4 - 8p^2r - 8pq^2 + 8qs + 4r^2$

$\langle y^9\rangle = -a_0\langle y^4\rangle - a_1\langle y^5\rangle - a_2\langle y^6\rangle - a_3\langle y^7\rangle - a_4\langle y^8\rangle = 9p^2q - 9p^2s - 18pqr - 3q^2 + 4rs$

$\langle y^{10}\rangle = -a_0\langle y^5\rangle - a_1\langle y^6\rangle - a_2\langle y^7\rangle - a_3\langle y^8\rangle - a_4\langle y^9\rangle = -2p^5 + 10p^3r + 15p^2q^2 - 20pqs - 10pr^2 - 10q^2r + 5s^2$

である. また同様に

$\langle z\rangle = -a_4 = 0$

$\langle z^2\rangle = -2a_3 + a_4^2 = 0$

$\langle z^3\rangle = -3a_2 + a_3a_4 - a_4\langle z^2\rangle = -3A$

$\langle z^4\rangle = -4a_1 + a_2a_4 - a_3\langle z^2\rangle - a_4\langle z^3\rangle = -4B$

$\langle z^5\rangle = -5a_0 + a_1a_4 - a_2\langle z^2\rangle - a_3\langle z^3\rangle - a_4\langle z^4\rangle = -5C$

ここで,$\langle z_1\rangle = 0$ より,

$\langle z_1\rangle = \langle y^2\rangle + \alpha\langle y\rangle + 5\beta = -2p + 5\beta = 0$

すなわち $\beta = \dfrac{2}{5}p$

$\langle z^2\rangle = 0$ より

$$\langle z^2\rangle = \langle y^4\rangle + 2\alpha\langle y^3\rangle + \left(\alpha^2 + 2\beta\right)\langle y^2\rangle + 2\alpha\beta\langle y\rangle + 5\beta^2 = -2p\alpha^2 - 6q\alpha + \left(\frac{6}{5}p^2 - 4r\right) = 0$$

よって,$\alpha = -\dfrac{3q}{2p} \pm \sqrt{\dfrac{3}{5}p - \dfrac{2r}{p} + \dfrac{9q^2}{4p^2}}$

したがって,

$$z_k = y_k^2 + \left(-\frac{3q}{2p} + \sqrt{\frac{3}{5}p - \frac{2r}{p} + \frac{9q^2}{4p^2}}\right) y_k + \frac{2}{5}p$$

となる.

$\langle z^3\rangle = -3A$ より,

$$\begin{aligned}\langle z^3\rangle &= \langle y^6\rangle + 3\alpha\langle y^5\rangle + 3\left(\alpha^2 + \beta\right)\langle y^4\rangle + \alpha\left(\alpha^2 + 6\beta\right)\langle y^3\rangle + 3\beta\left(\alpha^2 + \beta\right)\langle y^2\rangle + 3\alpha\beta^2\langle y\rangle + 5\beta^3 \\ &\quad -3q\alpha^3 + \left(\frac{18}{5}p^2 - 12r\right)\alpha^2 + \left(-\frac{36}{5}p^2 + 15pq - 15s\right)\alpha + \left(-\frac{126}{25}p^2 + \frac{6}{5}pr + 3q^2\right)\end{aligned}$$

よって,

$$A = q\alpha^3 + \left(-\frac{6}{5}p^2 + 4r\right)\alpha^2 + \left(\frac{12}{5}p^2 - 5pq + 5\right)\alpha + \left(\frac{42}{25}p^2 - \frac{2}{5}pr - q^2\right)$$

$\langle z^4\rangle = -4B$

$$\begin{aligned}\langle z^4\rangle &= \langle y^8\rangle + 4\alpha\langle y^7\rangle + \left(6\alpha^2 + 4\beta\right)\langle y^6\rangle + \left(4\alpha^3 + 12\alpha\beta\right)\langle y^5\rangle + \left(\alpha^4 + 12\alpha^2\beta + 6\beta^2\right)\langle y^4\rangle + \left(4\alpha^3\beta + 12\alpha\beta^2\right)\langle y^3\rangle \\ &\quad + \left(6\alpha^2\beta^2 + 4\beta^3\right)\langle y^2\rangle + 4\alpha\beta^3\langle y\rangle + 5\beta^4 \\ &= \left(2p^2 - 4r\right)\alpha^4 + \left(\frac{76}{5}pq - 20s\right)\alpha^3 + \left(-\frac{108}{25}p^3 + \frac{84}{5}pr + 18q^2\right)\alpha^2 + \left(-\frac{244}{25}p^2q + 4ps + 28qr\right)\alpha \\ &\quad + \left(\frac{106}{125}p^4 - \frac{64}{125}p^2q - \frac{56}{25}p^2r - \frac{16}{5}pq^2 + 8qs + 4r^2\right)\end{aligned}$$

よって,

$$\begin{aligned}B &= \left(-\frac{1}{2}p^2 + r\right)\alpha^4 + \left(-\frac{19}{5}pq + 5s\right)\alpha^3 + \left(\frac{27}{25}p^3 - \frac{21}{5}pr - \frac{9}{2}q^2\right)\alpha^2 + \left(\frac{61}{25}p^2q - ps - 7qr\right)\alpha \\ &\quad + \left(-\frac{53}{250}p^4 + \frac{16}{125}p^2q + \frac{14}{25}p^2r + \frac{4}{5}pq^2 - 2qs - r^2\right)\end{aligned}$$

$\langle z^5\rangle = -5C$

$$\langle z^5\rangle = \langle y^{10}\rangle + 5\alpha\langle y^9\rangle + (10\alpha^2+5\beta)\langle y^8\rangle + (10\alpha^3+20\alpha\beta)\langle y^7\rangle + (5\alpha^4+30\alpha^2\beta+10\beta^2)\langle y^6\rangle$$
$$+(\alpha^5+20\alpha^2\beta+30\alpha\beta^2)\langle y^5\rangle + (5\alpha^4\beta+30\alpha^2\beta^2+10\beta^3)\langle y^4\rangle + (10\alpha^3\beta^2+20\alpha\beta^2)\langle y^3\rangle$$
$$+(10\alpha^2\beta^3+5\beta^4)\langle y^2\rangle + 5\alpha\beta^4\langle y\rangle + 5\beta^5$$
$$= (5pq-5s)\alpha^5 + (-6p^3+22pr+15q^2)\alpha^4 + \left(-\frac{174}{5}p^2q+30ps+70qr\right)\alpha^3$$
$$+\left(\frac{108}{25}p^4-\frac{126}{5}p^2r-44pq^2+80qs+40r^2\right)\alpha^2 + \left(\frac{229}{25}p^2q-69p^2s+56pqs-34pqr\right.$$
$$\left.-15q^2+45rs\right)\alpha + \left(\frac{1722}{625}p^5+\frac{26}{25}p^2r+\frac{19}{5}p^2q^2-4pqs-2pr^2-10q^2r+5s^2\right)$$

よって,

$$C = (-pq+s)\alpha^5 + \left(\frac{6}{5}p^3-\frac{22}{5}pr-3q^2\right)\alpha^4 + \left(\frac{174}{25}p^2q-6ps-14qr\right)\alpha^3$$
$$+\left(-\frac{108}{125}p^4+\frac{126}{25}p^2r+\frac{44}{5}pq^2-16qs-8r^2\right)\alpha^2 + \left(-\frac{229}{125}p^2q+\frac{69}{5}p^2s-\frac{56}{5}pqs\right.$$
$$\left.+\frac{34}{5}pqr+3q^2-9rs\right)\alpha + \left(-\frac{1722}{3125}p^5-\frac{26}{125}p^2r-\frac{19}{25}p^2q^2+\frac{4}{5}pqs+\frac{2}{5}pr^2+2q^2r-s^2\right)$$

ここで,$w^5+Pw+Q=0$ の解を $w=w_{1\sim5}$ $(a_4=0, a_3=0, a_2=0, a_1=P, a_0=Q)$ とする.
$w_k = z_k^4+\eta z_k^3+\theta z_k^2+\kappa z_k+\mu$ の関係を持つと定め,$(\eta,\theta,\kappa,\mu,P,Q)$ を A,B,C で記述する.
ここで,$z_k^5+Az_k^2+Bz_k+C=0$ と前述の定義群より,

$\langle z^n\rangle = -C\langle z^{n-5}\rangle - B\langle z^{n-4}\rangle - A\langle z^{n-3}\rangle$

であることに留意する.

$\langle z\rangle = 0, \langle z^2\rangle = 0, \langle z^3\rangle = -3A, \langle z^4\rangle = -4B, \langle z^5\rangle = -5C$

$\langle z^6\rangle = -C\langle z\rangle - B\langle z^2\rangle - A\langle z^3\rangle = 3A^2$

$\langle z^7\rangle = -C\langle z^2\rangle - B\langle z^3\rangle - A\langle z^4\rangle = 7AB$

$\langle z^8\rangle = -C\langle z^3\rangle - B\langle z^4\rangle - A\langle z^5\rangle = 8AC+4B^2$

$\langle z^9\rangle = -C\langle z^4\rangle - B\langle z^5\rangle - A\langle z^6\rangle = -3A^3+9BC$

$\langle z^{10}\rangle = -C\langle z^5\rangle - B\langle z^6\rangle - A\langle z^7\rangle = -10A^2B+5C^2$

$\langle z^{11}\rangle = -C\langle z^6\rangle - B\langle z^7\rangle - A\langle z^8\rangle = -11A^2C-11AB^2$

$\langle z^{12}\rangle = -C\langle z^7\rangle - B\langle z^8\rangle - A\langle z^9\rangle = 3A^4-24ABC-4B^3$

$\langle z^{13}\rangle = -C\langle z^8\rangle - B\langle z^9\rangle - A\langle z^{10}\rangle = 13A^3B-13AC^2-13B^2C$

$\langle z^{14}\rangle = -C\langle z^9\rangle - B\langle z^{10}\rangle - A\langle z^{11}\rangle = 14A^3C+21A^2B^2-14BC^2$

$\langle z^{15}\rangle = -C\langle z^{10}\rangle - B\langle z^{11}\rangle - A\langle z^{12}\rangle = -3A^5+45A^2BC+15AB^3-5C^2$

$\langle z^{16}\rangle = -C\langle z^{11}\rangle - B\langle z^{12}\rangle - A\langle z^{13}\rangle = -16A^4B+24A^2C^2+48AB^2C+4B^4$

$\langle z^{17}\rangle = -C\langle z^{12}\rangle - B\langle z^{13}\rangle - A\langle z^{14}\rangle = -17A^4C-34A^3B^2+51ABC^2+17B^3C$

$\langle z^{18}\rangle = -C\langle z^{13}\rangle - B\langle z^{14}\rangle - A\langle z^{15}\rangle = 3A^6-72A^3BC-36A^2B^3+18AC^3+27B^2C^2$

$\langle z^{19}\rangle = -C\langle z^{14}\rangle - B\langle z^{15}\rangle - A\langle z^{16}\rangle = 19A^5B-38A^3C^2-114A^2B^2C^2-19AB^4+19BC^3$

$\langle z^{20}\rangle = -C\langle z^{15}\rangle - B\langle z^{16}\rangle - A\langle z^{17}\rangle = 20A^5C+50A^4B^2-120A^2BC^2-80AB^3C-4B^5+5C^4$

したがって,

$\langle w\rangle = -a_4 = 0$

$\langle w^2\rangle = -2a_3 + a_4^2 = 0$

$\langle w^3\rangle = -3a_2 + a_3a_4 - a_4\langle w^2\rangle = -3\cdot 0 + a_2\cdot 0 - 0\langle w^2\rangle = 0$

$\langle w^4\rangle = -4a_1 + a_2a_4 - a_3\langle w^2\rangle - a_4\langle w^3\rangle = -4P + a_2\cdot 0 - 0\langle w^2\rangle - 0\langle w^3\rangle = -4P$

$\langle w^5\rangle = -5a_0 + a_1a_4 - a_2\langle w^2\rangle - a_3\langle w^3\rangle - a_4\langle w^4\rangle = -5Q + a_1\cdot 0 - 0\langle w^2\rangle - 0\langle w^3\rangle - 0\langle w^4\rangle = -5Q$

ここで,

$\langle w\rangle = 0$

$\langle w\rangle = \langle z^4\rangle + \eta\langle z^3\rangle + \theta\langle z^2\rangle + \kappa\langle z\rangle + 5\mu = 5\mu - 3A\eta - 4B$

よって, $0 = 5\mu - 3A\eta - 4B \cdots$ ③

$\langle w^2\rangle = 0$

$$\begin{aligned}\langle w^2\rangle &= \langle z^8\rangle + 2\eta\langle z^7\rangle + \left(\eta^2 + 2\theta\right)\langle z^6\rangle + (2\eta\theta + 2\kappa)\langle z^5\rangle + \left(2\eta\kappa + \theta^2 + 2\mu\right)\langle z^4\rangle + (2\eta\mu + 2\theta\kappa)\langle z^3\rangle \\ &\quad + \left(2\theta\mu + \kappa^2\right)\langle z^2\rangle + 2\kappa\mu\langle z\rangle + 5\mu^2 \\ &= (-6A\theta - 8\eta B - 10C)\kappa + \left(\frac{6}{5}A^2\eta^2 + \left(-10\theta C + \frac{46}{5}AB\right)\eta + \left(-4\theta^2 B + 6\theta A^2 + 8AC + \frac{4}{5}B^2\right)\right)\cdots ④\end{aligned}$$

ここで, ③と④において,$(\eta, \theta, \kappa, \mu)$ の 4 つの未知数があるので,1 つ条件を追加できる.

④の κ の係数を 0 とすると,$\langle w^3\rangle$ を計算した際の方程式を 3 次に留めることができる.

よって, $0 = -6A\theta - 8\eta B - 10C$ とする.

すなわち,$0 = \dfrac{6}{5}A^2\eta^2 + \left(-10\theta C + \dfrac{46}{5}AB\right)\eta + \left(-4\theta^2 B + 6\theta A^2 + 8AC + \dfrac{4}{5}b^2\right)\cdots$ ⑤

③,④,⑤を連立する.

$$\begin{cases} 0 = 5\mu - 3\eta - 4B \iff \mu = \dfrac{3}{5}A\eta + \dfrac{4}{5}B \\ 0 = -6A\theta - 8\eta B - 10C \iff \theta = -\dfrac{4B}{3A}\eta - \dfrac{5C}{3A} \\ 0 = \dfrac{6}{5}A^2\eta^2 + \left(-10\theta C + \dfrac{46}{5}AB\right)\eta + \left(-4\theta^2 B + 6\theta A^2 + 8AC + \dfrac{4}{5}B^2\right) \end{cases}$$

したがって,$\mu = \dfrac{3}{5}A\eta + \dfrac{4}{5}B, \theta = -\dfrac{4B}{3A}\eta - \dfrac{5C}{3A}$ を

$0 = \dfrac{6}{5}A^2\eta^2 + \left(-10\theta C + \dfrac{46}{5}AB\right)\eta + \left(-4\theta^2 B + 6\theta A^2 + 8AC + \dfrac{4}{5}B^2\right)$ に代入して, 両辺に $\dfrac{45}{2}A^2$ をかける.

したがって,

$0 = \left(27A^4 + 300ABC - 160B^3\right)\eta^2 + \left(27A^3B + 375AC^2 - 400B^2C\right)\eta + \left(-45A^3C + 18A^2B^2 - 250BC^2\right)$

すなわち

$$\eta = \frac{-27A^3B - 375AC^2 + 400B^2C}{54A^4 + 600ABC - 320B^3} \pm \sqrt{\left(\frac{27A^3B + 375AC^2 - 400B^2C}{54A^4 + 600ABC - 320b^3}\right)^2 + \frac{45A^3C - 18A^2B^2 + 250BC^2}{27A^3B + 375AC^2 - 400B^2C}}$$

η に含まれる $\pm$ はどちらを選択しても成立する.

$\langle w^3\rangle = 0$

$\langle w^3\rangle = \langle z^{12}\rangle + 3\eta\langle z^{11}\rangle + \left(3\eta^2 + 3\theta\right)\langle z^{10}\rangle + \left(\eta^3 + 6\eta\theta + 3\kappa\right)\langle z^9\rangle + \left(3\eta^2\theta + 6\eta\kappa + 3theta^2 + 3\mu\right)\langle z^8\rangle$

$$+\left(3\eta^2\kappa+3\eta\theta^2+6\eta\mu+6\kappa\theta\right)\langle z^7\rangle+\left(3\eta^2\mu+6\eta\theta\kappa+\theta^3+6\theta\mu+3\kappa^2\right)\langle z^6\rangle+\left(3\eta\kappa^2+6\eta\theta\mu+\right.$$
$$\left.3\theta^2\kappa+6\kappa\mu\right)\langle z^5\rangle+\left(6\eta\kappa\mu+3\theta^2\mu+3\theta\kappa^2+3\mu^2\right)\langle z^4\rangle+\left(3\eta\mu^2+\kappa^3+6\kappa\theta\mu\right)\langle z^3\rangle+\left(3\theta\mu^2+3\kappa^2\mu\right)$$
$$\langle z^2\rangle+\left(3\kappa\mu^2\right)\langle z\rangle+5\mu^3$$
$$=\frac{1}{225A^2}\left(-675A^3\kappa^3+\left(-3375\eta A^3C+3600\eta AB^2+2025A^4+4500ABC\right)\kappa^2+\left(-675\eta^2A^2B\right.\right.$$
$$\left.-6000\eta^2B^3C+4050\eta A^3C-7200\eta A^2B^2-15000\eta BC^3-2025A^5-9675A^3BC-9375C^3\right)\kappa$$
$$+\left(54\eta^3A^5+225\eta^3A^2BC+320\eta^3AB^3+756\eta^2A^4B+1125\eta^2A^2C^2+3900\eta^2AB^2C+960\eta^2B^4\right.$$
$$-1485\eta A^4C+3843\eta A^3B^2+4375\eta ABC^2+2400\eta B^2C+1125\mu^3+675A^6+4770A^3BC$$
$$\left.\left.+108A^2B^3+6250AC^3+1500B^2C^2\right)\right)$$

よって,$0=D\kappa^3+E\kappa^2+F\kappa+G$ であるので,

$$\left[\begin{array}{l}
D=-675A^3\\
E=-3375\eta A^3C+3600\eta AB^2+2025A^4+4500ABC\\
F=-675\eta^2A^2B-6000\eta^2B^3C+4050\eta A^3C-7200\eta A^2B^2-15000\eta BC^3-2025A^5-9675A\\
\qquad -9375C^3\\
G=54\eta^3A^5+225\eta^3A^2BC+320\eta^3AB^3+756\eta^2A^4B+1125\eta^2A^2C^2+3900\eta^2AB^2C+960\eta^2\\
\qquad -1485\eta A^4C+3843\eta A^3B^2+4375\eta ABC^2+2400\eta B^2C+1125\mu^3+675A^6+4770A^3BC\\
\qquad +108A^2B^3+6250AC^3+1500B^2C^2
\end{array}\right.$$

したがって $\kappa=\sqrt[3]{-\frac{H}{2}+\sqrt{\left(\frac{H}{2}\right)^2+\left(\frac{I}{3}\right)^3}}+\sqrt[3]{-\frac{H}{2}-\sqrt{\left(\frac{H}{2}\right)^2+\left(\frac{I}{3}\right)^3}}$ $\left[\begin{array}{l} H=\frac{F}{D}-\frac{E^2}{3D^2}\\ I=\frac{G}{D}-\frac{EF}{3D^2}+\frac{2E^3}{27D^3}\end{array}\right.$

である.

したがって, 関係式 $w_k=z_k^4+\eta z_k^3+\theta z_k^2+\kappa z_k+\mu$ は次のように定まる.

$$\left[\begin{array}{l}
\eta=\frac{-27A^3B-375AC^2+400B^2C}{54A^4+600ABC-320B^3}+\sqrt{\left(\frac{27A^3B+375AC^2-400B^2C}{54A^4+600ABC-320b^3}\right)^2+\frac{45A^3C-18A^2B^2+250BC^2}{27A^3B+375AC^2-400B^2C}}\\
\theta=-\frac{4B}{3A}\eta-\frac{5C}{3A}\\
\kappa=\sqrt[3]{-\frac{H}{2}+\sqrt{\left(\frac{H}{2}\right)^2+\left(\frac{I}{3}\right)^3}}+\sqrt[3]{-\frac{H}{2}-\sqrt{\left(\frac{H}{2}\right)^2+\left(\frac{I}{3}\right)^3}}\\
\mu=\frac{3}{5}A\eta+\frac{4}{5}B
\end{array}\right.$$

$\langle w^4\rangle=-4P$

$\langle w^4\rangle=\langle z^{16}\rangle+4\eta\langle z^{15}\rangle+(6\eta^2+4\theta)\langle z^{14}\rangle+(4\eta^3+12\eta\theta+4\kappa)\langle z^{13}\rangle+(\eta^4+12\eta^2\theta+12\eta\kappa+6\theta^2+4\mu$

$+(4\eta^3\theta+12\eta^2\kappa+12\eta\theta^2+12\eta\mu+12\kappa\theta)\langle z^{11}\rangle+(4\eta^3\kappa+6\eta^2\theta^2+12\eta^2\mu+24\eta\theta\kappa+4\theta^3+1$

$+6\kappa^2)\langle z^{10}\rangle$ + $(4\eta^3\theta+12\eta^2\theta\kappa+4\eta\theta^3+24\eta\theta\kappa+12\eta\kappa^2+12\theta^2\kappa+12\kappa\mu)\langle z^9\rangle$ +

$(12\eta^2\theta\mu+6\eta^2\kappa^2$

$+12\eta\theta^2\kappa+24\eta\kappa\mu+\theta^4+12\theta^2\mu+12\theta\kappa^2+6\mu^2)\langle z^8\rangle+(12\eta^2\kappa\mu+12\eta\theta^2\mu+12\eta\theta\kappa^2+12\eta\mu$

$+24\theta\kappa\mu+4\kappa^3)\langle z^7\rangle+(6\eta^2\mu^2+24\eta\theta\kappa\mu+4\eta\kappa^3+4\theta^3\mu+6\theta^2\kappa^2+12\theta\mu^2+12\kappa^2\mu)\langle z^6\rangle+$

$(12\eta\theta\mu^2$

$+12\eta\kappa^2\mu+12\theta^2\kappa\mu+4\theta\kappa^3+12\kappa\mu^2)\langle z^5\rangle+(12\eta\kappa\mu^2+6\theta^2\mu^2+12\theta\kappa^2\mu+\kappa^4+4\mu^3)\langle z^4\rangle+$

$(4\eta\mu^3$

$$+12\theta\kappa\mu^2+4\kappa^3\mu)\langle z^3\rangle+(4\theta\mu^3+6\kappa^2\mu^2)\langle z^2\rangle+(4\kappa\mu^3)\langle z\rangle+5\mu^4$$
$$=(3A^4-24ABC-4B^3)\,\eta^4+(-44\theta A^2C-44\theta AB^2-40\kappa A^2B+20\kappa C^2-12\mu A^3+36\mu BC$$
$$+52A^2B-52AC^2-52B^2C)\,\eta^3+(-60\theta^2A^2B+30\theta^2C^2-36\theta\kappa A^3+108\theta\kappa BC+96\theta\mu AC$$
$$+48\theta\mu B^2+36\theta A^4-288\theta ABC-48\theta B^3+48\kappa AC+24\kappa^2B^2+84\kappa\mu AB^2-132\kappa A^2C$$
$$-132\kappa AB^2+18\mu^2A^2-120\mu AB^2+60\mu C^2+84A^2C+126A^2B^2-84BC^2)\,\eta^2$$
$$+(-12\theta^3A^3+36\theta^3BC+96\theta^2\kappa AC+48\theta^2\kappa B^2++84\theta^2\mu AB132\theta^2A^2C-132\theta^2AB^2+84$$
$$+72\theta\kappa\mu A^2-240\theta\kappa A^2B+120\theta\kappa C^2-60\theta\mu^2C-72\theta\mu A^3+216\theta\mu BC+156\theta A^3B-$$
$$156\theta AC^2$$
$$-156\theta B^2C+12\kappa^3A^2-60\kappa^2\mu C-36\kappa^2A^3+108\kappa^2BC-48\kappa\mu^2B+192\kappa\mu AC+96\kappa\mu B^2$$
$$+36\kappa A^4-288\kappa ABC-48\kappa B^3-12\mu^2A+84\mu^2AB-132\mu A^2C-132\mu AB^2-12A^5+$$
$$180A^2BC$$
$$+60AB^3-20C^3)\,\eta$$
$$+(8\theta^4AC+4\theta^4B^2+28\theta^3\kappa AB+12\theta^3\mu A^2-40\theta^3A^2B+20\theta^3C^2+18\theta^2\kappa^2A^2-60\theta^2\kappa\mu C$$
$$-36\theta^2\kappa A^3+108\theta^2\kappa BC-24\theta^2\mu^2B+96\theta^2\mu AC+48\theta^2\mu B^2+18\theta^2A^4-144\theta^2ABC-24\theta^2B^3$$
$$-20\theta\kappa^2C-48\theta\kappa^2\mu B+96\theta\kappa^2AC+48\theta\kappa^2B^2-36\theta\kappa\mu A+168\theta\kappa\mu\ AB-132\theta\kappa A^2C-$$
$$132\theta\kappa AB^2$$
$$+36\theta\mu^2A^2-120\theta\mu A^2B+60\theta\mu C^2+36\theta A^3C+84\theta A^2B^2-56\theta BC^2-4\kappa^4B-12\kappa^2\mu A+$$
$$28\kappa^2AB$$
$$+36\kappa^2\mu A^2-60\kappa^2A^2B+30\kappa^2C^2-60\kappa\mu^2C-36\kappa\mu A^2+108\kappa\mu BC+52\kappa A^2B-52\kappa AC^2-$$
$$52\kappa B^2C$$
$$+5\mu^4-16\mu^2B+48\mu^2AC+24\mu^2B^2+12\mu\ A^4-96\mu ABC-16\mu B^3-16A^4B+24A^2C^2+48AB^2$$

よって,

$$-4P=\langle z^{16}\rangle+4\eta\langle z^{15}\rangle+(6\eta^2+4\theta)\langle z^{14}\rangle+(4\eta^3+12\eta\theta+4\kappa)\langle z^{13}\rangle+(\eta^4+12\eta^2\theta+12\eta\kappa+6\theta^2+4\mu$$
$$+(4\eta^3\theta+12\eta^2\kappa+12\eta\theta^2+12\eta\mu+12\kappa\theta)\langle z^{11}\rangle+(4\eta^3\kappa+6\eta^2\theta^2+12\eta^2\mu+24\eta\theta\kappa+4\theta^3+1$$
$$+6\kappa^2)\langle z^{10}\rangle\ +\ (4\eta^3\theta+12\eta^2\theta\kappa+4\eta\theta^3+24\eta\theta\kappa+12\eta\kappa^2+12\theta^2\kappa+12\kappa\mu)\langle z^9\rangle\ +$$
$$(12\eta^2\theta\mu+6\eta^2\kappa^2$$
$$+12\eta\theta^2\kappa+24\eta\kappa\mu+\theta^4+12\theta^2\mu+12\theta\kappa^2+6\mu^2)\langle z^8\rangle+(12\eta^2\kappa\mu+12\eta\theta^2\mu+12\eta\theta\kappa^2+12\eta\mu$$
$$+24\theta\kappa\mu+4\kappa^3)\langle z^7\rangle+(6\eta^2\mu^2+24\eta\theta\kappa\mu+4\eta\kappa^3+4\theta^3\mu+6\theta^2\kappa^2+12\theta\mu^2+12\kappa^2\mu)\langle z^6\rangle+$$
$$(12\eta\theta\mu^2$$
$$+12\eta\kappa^2\mu+12\theta^2\kappa\mu+4\theta\kappa^3+12\kappa\mu^2)\langle z^5\rangle+(12\eta\kappa\mu^2+6\theta^2\mu^2+12\theta\kappa^2\mu+\kappa^4+4\mu^3)\langle z^4\rangle+$$
$$(4\eta\mu^3$$
$$+12\theta\kappa\mu^2+4\kappa^3\mu)\langle z^3\rangle+(4\theta\mu^3+6\kappa^2\mu^2)\langle z^2\rangle+(4\kappa\mu^3)\langle z\rangle+5\mu^4$$
$$=(3A^4-24ABC-4B^3)\,\eta^4+(-44\theta A^2C-44\theta AB^2-40\kappa A^2B+20\kappa C^2-12\mu A^3+36\mu BC$$
$$+52A^2B-52AC^2-52B^2C)\,\eta^3+(-60\theta^2A^2B+30\theta^2C^2-36\theta\kappa A^3+108\theta\kappa BC+96\theta\mu AC$$
$$+48\theta\mu B^2+36\theta A^4-288\theta ABC-48\theta B^3+48\kappa AC+24\kappa^2B^2+84\kappa\mu AB^2-132\kappa A^2C$$

$$-132\kappa AB^2 + 18\mu^2 A^2 - 120\mu AB^2 + 60\mu C^2 + 84A^2C + 126A^2B^2 - 84BC^2)\,\eta^2$$

$$+\,(-12\theta^3A^3 + 36\theta^3BC + 96\theta^2\kappa AC + 48\theta^2\kappa B^2 + +84\theta^2\mu AB132\theta^2A^2C - 132\theta^2AB^2 + 84$$

$$+72\theta\kappa\mu A^2 - 240\theta\kappa A^2B + 120\theta\kappa C^2 - 60\theta\mu^2C - 72\theta\mu A^3 + 216\theta\mu BC + 156\theta A^3B - 156\theta AC^2$$

$$-156\theta B^2C + 12\kappa^3A^2 - 60\kappa^2\mu C - 36\kappa^2A^3 + 108\kappa^2BC - 48\kappa\mu^2B + 192\kappa\mu AC + 96\kappa\mu B^2$$

$$+36\kappa A^4 - 288\kappa ABC - 48\kappa B^3 - 12\mu^2A + 84\mu^2AB - 132\mu A^2C - 132\mu AB^2 - 12A^5 + 180A^2BC$$

$$+60AB^3 - 20C^3)\,\eta$$

$$+\,(8\theta^4AC + 4\theta^4B^2 + 28\theta^3\kappa AB + 12\theta^3\mu A^2 - 40\theta^3A^2B + 20\theta^3C^2 + 18\theta^2\kappa^2A^2 - 60\theta^2\kappa\mu C$$

$$-36\theta^2\kappa A^3 + 108\theta^2\kappa BC - 24\theta^2\mu^2B + 96\theta^2\mu AC + 48\theta^2\mu B^2 + 18\theta^2A^4 - 144\theta^2ABC - 24\theta^2B^3$$

$$-20\theta\kappa^2C - 48\theta\kappa^2\mu B + 96\theta\kappa^2AC + 48\theta\kappa^2B^2 - 36\theta\kappa\mu A + 168\theta\kappa\mu\ AB - 132\theta\kappa A^2C - 132\theta\kappa AB^2$$

$$+36\theta\mu^2A^2 - 120\theta\mu A^2B + 60\theta\mu C^2 + 36\theta A^3C + 84\theta A^2B^2 - 56\theta BC^2 - 4\kappa^4B - 12\kappa^2\mu A + 28\kappa^2AB$$

$$+36\kappa^2\mu A^2 - 60\kappa^2A^2B + 30\kappa^2C^2 - 60\kappa\mu^2C - 36\kappa\mu A^2 + 108\kappa\mu BC + 52\kappa A^2B - 52\kappa AC^2 - 52\kappa B^2C$$

$$+5\mu^4 - 16\mu^2B + 48\mu^2AC + 24\mu^2B^2 + 12\mu\ A^4 - 96\mu ABC - 16\mu B^3 - 16A^4B + 24A^2C^2 + 48AB^2$$

$$P = \left(-\frac{3}{4}A^4 + 6ABC + 4B^3\right)\eta^4$$

$$+(11\theta A^2C + 11\theta AB^2 + 10\kappa A^2B - 5\kappa C^2 + 3\mu A^2 - 9\mu BC - 13A^3B + 13AC^2 + 13B^2$$
$$+\Bigl(15\theta^2A^2B - \frac{15}{2}\theta^2C^2 + 9\theta\kappa A^3 - 27\theta\kappa BC - 24\theta\mu AC - 12\theta\mu B^2 - 9\theta A^4 + 72\theta ABC$$
$$-12\kappa^2AC - 6\kappa^2B^2 - 21\kappa\mu AB^2 + 23\kappa A^2C + 33\kappa AB^2 - \frac{9}{2}\mu^2A^2 + 30\mu AB^2 - 15\mu C^2 -$$
$$-\frac{63}{2}A^2B^2 + 21BC^2\,)\,\eta^2$$
$$+\Bigl((3A^3 - 9BC)\,\theta^2 + (-24\kappa AC - 12\kappa B^2 - 21\mu AB + 33A^2C + 33AB^2)\,\theta^2 + (-21\kappa^2A$$
$$-12\kappa\mu A^2 + 10\kappa A^2B - 30\kappa C^2 + 15\mu^2C + 12\mu A^2 - 54\mu BC - 39A^2B + 39AC^2 + 39B^2$$
$$+(3\kappa^2A^2 + 15\kappa^2\mu C + 9\kappa^2A^2 - 27\kappa^2BC + 12\kappa\mu^2B - 48\kappa\mu AC - 24\kappa\mu B^2 - 9\kappa A^4 + 72$$
$$+12\kappa B^3 + 3\mu^2A - 21\mu^2AB + 33\mu A^2C + 33\mu AB^2 + 3A^5 - 45A^2BC - 15AB^2 + 5C^2\,)$$
$$+\Bigl((-2AC - B^2)\,\theta^4 + (-7\kappa AB - 3\mu A^2 + 10A^2B - 5C^2)\,\theta^3$$
$$+\Bigl(-\frac{9}{2}\kappa^2A^2 + 15\kappa\mu C + 9\kappa A^3 - 27\kappa BC + 6\mu^3B - 24\mu AC - 12\mu B^2 - \frac{9}{2}A^4 + 36ABC$$
$$+(5\kappa^3C + 12\kappa^2\mu B - 24\kappa^2AC - 12\kappa^2B^2 + 9\kappa\mu A - 42\kappa\mu AB + 33\kappa A^2C + 33\kappa AB^2 - 9$$
$$+30\mu A^2B - 15\mu C^2 - 14A^3C - 21A^2B^2 + 14BC^2)\theta$$
$$+(\kappa^4B + 3\kappa^3\mu A - 7\kappa^3AB - 9\kappa^2\mu A^2 + 15\kappa^2A^2B - \frac{15}{2}\kappa^2C^2 + 15\kappa\mu^2C + 9\kappa\mu A^3 - 27\kappa$$
$$-13\kappa A^3B + 13\kappa AC^2 + 13\kappa B^2C - \frac{5}{4}\mu^4 + 4\mu^3B - 12\mu^2AC - 6\mu^2B^2 - 3\mu A^4 + 24\mu AB$$
$$+4\mu B^3 + 4A^4B - 6A^2C^2 - 12AB^2C - B^4))$$

$$\langle w^5\rangle = -5Q$$

$$\langle w^5\rangle = \langle z^{20}\rangle + 5\eta\langle z^{19}\rangle + (10\eta^2 + 5\theta)\,\langle z^{18}\rangle + (10\eta^3 + 20\eta\theta + 5\kappa)\,\langle z^{17}\rangle + (5\eta^4 + 30\eta^3\theta + 20\eta\kappa + 10\theta^2$$
$$\langle z^{16}\rangle + (\eta^5 + 20\eta^3\theta + 30\eta^2\kappa + 30\eta\theta^2 + 20\eta\mu + 20\theta\kappa)\,\langle z^{15}\rangle + (\,5\theta^4\theta + 20\eta^3\kappa + 30\eta^2\theta^2 + 3$$
$$+60\eta\theta\kappa + 10\theta^3 + 20\theta\mu + 10\kappa^2\,)\,\langle z^{14}\rangle + (\,5\eta^4\kappa + 10\eta^3\theta^2 + 20\eta^3\mu + 60\eta^2\theta\kappa + 20\eta\theta^3 + 60\eta$$
$$+30\eta\kappa^2 + 30\theta^2\kappa + 20\kappa\mu\,)\,\langle z^{13}\rangle + (\,5\eta^4\mu + 20\eta^3\theta\kappa + 10\eta^2\theta^3 + 60\eta^2\theta\mu + 30\eta^2\kappa^2 + 60\eta\theta^2\kappa$$
$$+5\theta^4 + 30\theta^2\mu + 30\theta\kappa^2 + 10\mu^2\,)\,\langle z^{12}\rangle + (\,20\eta^3\theta\mu + 10\eta^3\kappa^2 + 30\eta^2\theta^2\kappa + 60\eta^2\kappa\mu + 5\eta\theta^4 +$$
$$+60\eta\theta\kappa^2 + 30\eta\mu^2 + 20\theta^3\kappa + 60\theta\kappa\mu + 10\kappa^3\,)\,\langle z^{11}\rangle + (\,20\eta^3\kappa\mu + 30\eta^2\theta^2\mu + 30\eta^2\theta\kappa^2 + 30\eta$$
$$+20\eta\theta^3\kappa + 120\eta\theta\kappa\mu + 20\eta\kappa^3 + \theta^5 + 20\theta^3\mu + 30\theta^2\kappa^2 + 30\theta\mu^2 + 30\kappa^2\mu\,)\,\langle z^{10}\rangle + (\,10\eta^3\mu^2$$
$$+10\eta^2\kappa^3 + 20\eta\theta^3\mu + 30\eta\theta^2\kappa^2 + 60\eta\theta\mu^2 + 60\eta\kappa^2\mu + 5\theta^4\kappa + 60\theta^2\kappa\mu + 20\theta\kappa^3 + 30\kappa\mu^2\,)\,\langle z^9$$
$$+(\,30\eta^2\theta\mu^2 + 30\eta^2\kappa^2\mu + 60\eta\theta^2\kappa\mu + 20\eta\theta\kappa^3 + 60\eta\kappa\mu^2 + 5\theta^4\mu + 10\theta^3\kappa^2 + 30\theta^2\mu^2 + 60\theta\kappa$$
$$+10\mu^3\,)\,\langle z^8\rangle + (\,30\eta^2\kappa\mu^2 + 30\eta\theta^2\mu^2 + 60\eta\theta\kappa^2\mu + 5\eta\kappa^4 + 20\eta\mu^3 + 20\theta^3\kappa\mu + 10\theta^2\kappa^3 + 60\theta$$
$$20\kappa^3\mu\,)\,\langle z^7\rangle + (10\eta^2\mu^3 + 60\eta\theta\kappa\mu^2 + 20\eta\kappa^3\mu + 10\theta^3\mu^2 + 30\theta^2\kappa^2\mu + 5\theta\kappa^4 + 20\theta\mu^3 + 30\kappa^2\mu$$
$$+(20\eta\theta\mu^3 + 30\eta\kappa^2\mu^2 + 30\theta^2\kappa\mu^2 + 20\theta\kappa^3\mu + \kappa^5 + 20\kappa\mu^2)\,\langle z^5\rangle + (\,20\eta\kappa\mu^3 + 10\theta^2\mu^3 + 30\theta$$
$$+5\kappa^4\mu + 5\mu^4\,)\,\langle z^4\rangle + (5\eta\mu^4 + 20\theta\kappa\mu^3 + 10\kappa^3\mu^2)\,\langle z^3\rangle + (5\theta\mu^4 + 10\kappa^2\mu^3)\,\langle z^2\rangle + 5\kappa\mu^4\langle z\rangle +$$

$$
\begin{aligned}
&= \left(-3A^5+45A^2BC+15AB^3-5C^3\right)\eta^5 \\
&\quad +(\ 70\theta A^3C+105\theta A^2B^2-70\theta BC^2+65\kappa A^3B-65\kappa AC^2-65\kappa B^2C+15\mu A^4-120\mu ABC \\
&\quad +20\mu B^3-80A^4B+120A^2C^2+240AB^2C+20B^4\ )\eta^4 \\
&\quad +(\ 130\theta^2A^2B-130\theta^2AC^2-130\theta^2B^2C+60\theta\kappa A^4-480\theta\kappa ABC+80\theta\kappa B^3-220\theta\mu A^2C-220\theta\mu AB^2 \\
&\quad -60\theta A^5+900\theta A^2BC+300\theta AB^3-100\theta C^3-110\kappa^2A^2C-110\kappa^2AB^2-200\kappa\mu A^2B+100\kappa\mu C^2 \\
&\quad +280\kappa A^3C+420\kappa A^2B^2-280\kappa BC^2-30\mu^2A^3+90\mu^2BC+260\mu A^3B-260\mu AC^2-260\mu B^2C \\
&\quad -170A^4C-340A^3B^2+510ABC^2+170B^3C\ )\eta^3 \\
&\quad +(\ 30\theta^3A^4-240\theta^3ABC+40\theta^3B^3-330\theta^2\kappa A^2C-330\theta^2\kappa AB^2-300\theta^2\mu A^2B+150\theta^2\mu C^2 \\
&\quad +420\theta^2A^3C+630\theta^2A^2B^2-420\theta^2BC^2-300\theta\kappa^2A^2B+150\theta\kappa^2C^2-180\theta\kappa\mu A^3+540\theta\kappa\mu BC \\
&\quad +780\theta\kappa A^3B-780\theta\kappa AC^2-780\theta\kappa B^2C+240\theta\mu^2AC+120\theta\mu^2B^2+180\theta\mu A^4-1440\theta\mu ABC \\
&\quad +240\theta\mu B^3-480\theta A^4B+720\theta A^2C^2+1440\theta AB^2C+120\theta B^4-30\kappa^3A^3+90\kappa^3BC+240\kappa^2\mu AC \\
&\quad +120\kappa^2\mu B^2+90\kappa^2A^4-720\kappa^2ABC+120\kappa^2B^3+210\kappa\mu^2AB-660\kappa\mu A^2C-660\kappa\mu AB^2-90\kappa A^5 \\
&\quad +1350\kappa A^2BC+450\kappa AB^3-150\kappa C^3+30\mu^2A^2-300\mu^2A^2B+150\mu^2C^2+420\mu A^3C+630\mu A^2B^2 \\
&\quad -420\mu BC^2+30A^6-720A^3BC-360A^2B^3+180AC^3+270B^2C^2\ )\eta^2 \\
&\quad +(\ -55\theta^4A^2C-55\theta^4AB^2-200\theta^3\kappa A^2B+100\theta^3\kappa C^2-60\theta^3\mu A^2+180\theta^3\mu BC+260\theta^3A^3B \\
&\quad -260\theta^3AC^2-260\theta^3B^2C-90\theta^2\kappa^2A^3+270\theta^2\kappa^2BC+480\theta^2\kappa\mu AC+240\theta^2\kappa\mu B^2+180\theta^2\kappa A^4 \\
&\quad -1440\theta^2\kappa ABC+240\theta^2\kappa B^3+210\theta^2\mu^2AB-660\theta^2\mu A^2C-660\theta^2\mu AB^2-90\theta^2A^5+1350\theta^2A^2BC \\
&\quad +450\theta^2AB^3-150\theta^2C^3+160\theta\kappa^3AC+80\theta\kappa^3B^2+420\theta\kappa^2\mu AB-660\theta\kappa^2A^2C-660\theta\kappa^2AB^2 \\
&\quad +180\theta\kappa\mu^2A^2-1200\theta\kappa\mu A^2B+600\theta\kappa\mu C^2+840\theta\kappa A^3C+1260\theta\kappa A^2B^2-840\theta\kappa BC^2-100\theta\mu^3C \\
&\quad -180\theta\mu^2A^3+540\theta\mu^2BC+780\theta\mu A^3B-780\theta\mu AC^2-780\theta\mu B^2C-340\theta A^4C-680\theta A^3B^2 \\
&\quad +1020\theta ABC^2+340\theta B^3C+35\kappa^4AB+60\kappa\mu A^2-200\kappa^3A^2B+100\kappa^3C^2-150\kappa^2\mu^2C-180\kappa^2\mu A^3 \\
&\quad +540\kappa^2\mu BC+390\kappa^2A^3B-390\kappa^2AC^2-390\kappa^2B^2C-80\kappa\mu^3B+480\kappa\mu^2AC+240\kappa\mu^2B^2 \\
&\quad +180\kappa\mu A^4-1440\kappa\mu ABC+240\kappa\mu B^3-320\kappa A^4B+480\kappa A^2C^2+960\kappa AB^2C+80\kappa B^4-15\mu^4A \\
&\quad +140\mu^3AB-330\mu^2A^2C-330\mu^2AB^2-60\mu A^5+900\mu A^2BC+300\mu AB^3-100\mu C^3+95A^5B \\
&\quad -190A^3C^2-570A^2B^2C-95AB^4+95BC^3\ )\eta \\
&\quad +(\ -10\theta^5A^2B+5\theta^5C^2-15\theta^4\kappa A^3+45\theta^4\kappa BC+40\theta^4\mu AC+20\theta^4\mu B^2+15\theta^4A^4-120\theta^4ABC \\
&\quad +20\theta^4B^3+80\theta^3\kappa^2AC+40\theta^3\kappa^2B^2+140\theta^3\kappa\mu AB-220\theta^3\kappa A^2C-220\theta^3\kappa AB^2+30\theta^3\mu^2A^2 \\
&\quad -200\theta^3\mu A^2B+100\theta^3\mu C^2+140\theta^3A^2C+210\theta^2A^2B^2-140\theta^3BC^2+70\theta^2\kappa^3AB+90\theta^2\kappa^2\mu A^2 \\
&\quad -300\theta^2\kappa^2A^2B+150\theta^2\kappa^2C^2-150\theta^2\kappa\mu^2C-180\theta^2\kappa\mu A^3+540\theta^2\kappa\mu BC+390\theta^2\kappa A^3B-390\theta^2AC^2 \\
&\quad -390\theta^2B^2C-40\theta^2\mu^3B+240\theta^2\mu^2AC+120\theta^2\mu^2B^2+90\theta^2\mu A^4-720\theta^2\mu ABC+120\theta^2\mu B^3 \\
&\quad -160\theta^2A^4B+240\theta^2A^2C^2+480\theta^2AB^2C+40\theta^2B^4+15\theta\kappa^4A^2-100\theta\kappa^3\mu C-60\theta\kappa^3A^3+180\theta\kappa^3BC \\
&\quad -120\theta\kappa^2\mu^2B+480\theta\kappa^2\mu AC+240\theta\kappa^2\mu B^2+90\theta\kappa^2A^4-720\theta\kappa^2ABC+120\theta\kappa^2B^3-60\theta\mu^3A^2 \\
&\quad +420\theta\kappa\mu^2AB-660\theta\kappa\mu A^2C-660\theta\kappa\mu AB^2-60\theta\kappa A^5+900\theta\kappa AB^2C+300\theta\kappa AB^3-100\theta\kappa C^3+60\theta\mu^3A^2 \\
&\quad -300\theta\mu^2A^2B+150\theta\mu^2C^2+280\theta\mu A^3C+420\theta\mu A^2B^2-280\theta\mu BC^2+15\theta A^6-360\theta A^3BC-180\theta A^2B^3 \\
&\quad +90\theta AC^2+135\theta B^2C^2-5\kappa^5C-20\kappa^4\mu B+40\kappa^4AC+20\kappa^4B^2-30\kappa^3\mu^2A+140\kappa\mu AB-110\kappa^3A^2C \\
&\quad -110\kappa^3AB^2+90\kappa^2\mu^2A^2-300\kappa^2\mu A^2B+150\kappa^2\mu C^2+140\kappa^2A^3C+210\kappa^2A^2B^2-140\kappa^2BC^2-100\kappa\mu^3C \\
&\quad -90\kappa\mu^2A^3+270\kappa\mu^2BC+260\kappa\mu AC^2-260\kappa\mu B^2C-85\kappa A^4C-170\kappa A^3B^2+255\kappa ABC^2+85\kappa B^3C+5\mu^5 \\
&\quad -20\mu^4B+80\mu^3AC+40\mu^3B^2+30\mu^2A^4-240\mu^2ABC+40\mu^2B^3-80\mu A^4B+120\mu A^2C^2+240\mu AB^2C \\
&\quad +20\mu B^4+20A^5C+50A^4B^2-120A^2BC^2-80AB^3C-4B^5+5C^4\ )
\end{aligned}
$$

よって,

$$Q = \left(\frac{3}{5}A^5 - 9A^2BC - 3AB^3 + C^3\right)\eta^5 + (\ -14\theta A^3C - 21\theta A^2B^2 + 14\theta BC^2 - 13\kappa A^3B + 13\kappa AC^2 + 13\kappa B^2C$$
$$-3\mu A^4 + 24\mu ABC - 4\mu B^3 + 16A^4B - 24A^2C^2 - 48AB^2C - 4B^4\ )\eta^4$$
$$+(\ -26\theta^2A^2B + 26\theta^2AC^2 + 26\theta^2B^2C - 12\theta\kappa A^4 + 96\theta\kappa ABC - 16\theta\kappa B^3 + 44\theta\mu A^2C + 44\theta\mu AB^2$$
$$+12\theta A^5 - 180\theta A^2BC - 60\theta AB^3 + 20\theta C^3 + 22\kappa^2A^2C + 22\kappa^2AB^2 + 40\kappa\mu A^2B - 20\kappa\mu C^2$$
$$-56\kappa A^3C - 84\kappa A^2B^2 + 56\kappa BC^2 + 6\mu^2A^3 - 18\mu^2BC - 52\mu A^3B + 52\mu AC^2 + 52\mu B^2C$$
$$+34A^4C + 78A^3B^2 - 102ABC^2 - 34B^3C\ )\eta^3$$
$$+(\ -6\theta^3A^4 + 48\theta^3ABC - 8\theta^3B^3 + 66\theta^2\kappa A^2C + 66\theta^2\kappa AB^3 + 60\theta^2\mu A^2B - 30\theta^2\mu C^2$$
$$-84\theta^2A^3C - 126\theta^2A^2B^2 + 84\theta^2BC^2 + 60\theta\kappa^2A^2B - 30\theta\kappa^2C^2 + 36\theta\kappa\mu A^3 - 108\theta\kappa\mu BC$$
$$-156\theta\kappa A^3B + 156\theta\kappa AC^2 + 156\theta\kappa B^2C - 48\theta\mu^2AC - 24\theta\mu^2B^2 - 36\theta\mu A^4 + 288\theta\mu ABC$$
$$-48\theta\mu B^3 + 96\theta A^4B - 144\theta A^2C^2 - 288\theta AB^2C - 24\theta B^4 + 6\kappa^3A^3 - 18\kappa^3BC - 48\kappa^2\mu AC$$
$$-24\kappa^2\mu B^2 - 18\kappa^2A^4 + 144\kappa^2ABC - 24\kappa^2B^3 - 42\kappa\mu^2AB + 132\kappa\mu A^2C + 132\kappa\mu AB^2 + 18\kappa A^5$$
$$-270\kappa A^2BC - 90\kappa AB^3 + 30\kappa C^3 - 6\mu^2A^2 + 60\mu^2A^2B - 30\mu^2C^2 - 84\mu A^3C - 126\mu A^2B^2$$
$$+84\mu BC^2 - 6A^6 + 144A^3BC + 72A^2B^3 - 36AC^3 - 54B^2C^2\ )\eta^2$$
$$+(\ 11\theta^4A^2C + 11\theta^4AB^2 + 40\theta^3\kappa A^2B - 20\theta^3\kappa C^2 + 12\theta^3\mu A^2 - 36\theta^3\mu BC - 52\theta^3A^3B$$
$$+52\theta^3AC^2 + 52\theta^3B^2C + 18\theta^2\kappa^2A^3 - 54\theta^2\kappa^2BC - 96\theta^2\kappa\mu AC - 48\theta^2\kappa\mu B^2 - 36\theta^2\kappa A^4$$
$$+288\theta^2\kappa ABC - 48\theta^2\kappa B^3 - 42\theta^2\mu^2AB + 132\theta^2\mu A^2C + 132\theta^2\mu AB^2 + 18\theta^2A^5 - 270\theta^2A^2BC$$
$$-90\theta^2AB^3 + 30\theta^2C^3 - 32\theta\kappa^3AC - 16\theta\kappa^3B^2 - 84\theta\kappa^2\mu AB + 132\theta\kappa^2A^2C + 132\theta\kappa^2AB^2$$
$$-36\theta\kappa\mu^2A^2 + 240\theta\kappa\mu A^2B - 120\theta\kappa\mu C^2 - 168\theta\kappa A^3C - 252\theta\kappa A^2B^2 + 168\theta\kappa BC^2 + 20\theta\mu^3C$$
$$+36\theta\mu^2A^3 - 108\theta\mu^2BC - 156\theta\mu A^3B + 156\theta\mu AC^2 + 156\theta\mu B^2C + 68\theta A^4C + 136\theta A^3B^2$$
$$-204\theta ABC^2 - 68\theta B^3C - 7\kappa^4AB - 12\kappa^3\mu A^2 + 40\kappa^3A^2B - 20\kappa^3C^2 + 30\kappa^2\mu^2C + 36\kappa^2\mu A^3$$
$$-108\kappa^2\mu BC - 78\kappa^2A^3B + 78\kappa^2AC^2 + 78\kappa^2B^2C + 16\kappa\mu^3B - 96\kappa\mu^2AC - 48\kappa\mu^2B^2$$
$$-36\kappa\mu A^4 + 288\kappa\mu ABC - 48\kappa\mu B^3 + 64\kappa A^4B - 96\kappa A^2C^2 - 192\kappa AB^2C - 16\kappa B^4 + 3\mu^4A$$
$$-28\mu^3AB + 66\mu^2A^2C + 66\mu^2AB^2 + 12\mu A^5 - 180\mu A^2BC - 60\mu AB^3 + 20\mu C^3 - 19A^5B$$
$$+38A^3C^2 + 114A^2B^2C + 19AB^4 - 19BC^3\ )\eta$$
$$+(\ 2\theta^5A^2B - \theta^5C^2 + 3\theta^4\kappa A^3 - 9\theta^4\kappa BC - 8\theta^4\mu AC - 4\theta^4\mu B^2 - 3\theta^4A^4 + 24\theta^4ABC$$
$$-4\theta^4B^3 - 16\theta^3\kappa^2AC - 8\theta^3\kappa^2B^2 - 28\theta^3\kappa\mu AB + 44\theta^3\kappa A^2C + 44\theta^3\kappa AB^2 - 6\theta^3\mu^2A^2$$
$$+40\theta^3\mu A^2B - 20\theta^3\mu C^2 - 28\theta^3A^2C - 42\theta^2A^2B^2 + 28\theta^3BC^2 - 14\theta^2\kappa^3AB - 18\theta^2\kappa^2\mu A^2$$
$$+60\theta^2\kappa^2A^2B - 30\theta^2\kappa^2C^2 + 30\theta^2\kappa\mu^2C + 36\theta^2\kappa\mu A^3 - 108\theta^2\kappa\mu BC - 78\theta^2\kappa A^3B + 78\theta^2AC^2$$
$$+78\theta^2B^2C + 8\theta^2\mu^3B - 48\theta^2\mu^2AC - 24\theta^2\mu^2B^2 - 18\theta^2\mu A^4 + 144\theta^2\mu ABC - 24\theta^2\mu B^3$$
$$+32\theta^2A^4B - 48\theta^2A^2C^2 - 96\theta^2AB^2C - 8\theta^2B^4 - 3\theta\kappa^4A^2 + 20\theta\kappa^3\mu C + 12\theta\kappa^3A^3 - 36\theta\kappa^3BC$$
$$+24\theta\kappa^2\mu^2B - 96\theta\kappa^2\mu AC - 48\theta\kappa^2\mu B^2 - 18\theta\kappa^2A^4 + 144\theta\kappa^2ABC - 24\theta\kappa^2B^3 + 12\theta\mu^3A^2$$
$$-84\theta\kappa\mu^2AB + 132\theta\kappa\mu A^2C + 132\theta\kappa\mu AB^2 + 12\theta\kappa A^5 - 180\theta\kappa AB^2C - 60\theta\kappa AB^3 + 20\theta\kappa C^3 - 12\theta\mu^3A^2$$
$$-300\theta\mu^2A^2B + 150\theta\mu^2C^2 + 280\theta\mu A^3C + 420\theta\mu A^2B^2 - 280\theta\mu BC^2 + 15\theta A^6 - 360\theta A^3BC - 180\theta A^2B^3$$
$$-18\theta AC^2 - 27\theta B^2C^2 + \kappa^5C + 4\kappa^4\mu B - 8\kappa^4AC - 4\kappa^4B^2 + 6\kappa^3\mu^2A - 28\kappa^3\mu AB + 22\kappa^3A^2C$$
$$+22\kappa^3AB^2 - 18\kappa^2\mu^2A^2 + 60\kappa^2\mu A^2B - 30\kappa^2\mu C^2 - 28\kappa^2A^3C - 42\kappa^2A^2B^2 + 28\kappa^2BC^2 + 20\kappa\mu^3C$$
$$+18\kappa\mu^2A^3 - 54\kappa\mu^2BC - 52\kappa\mu AC^2 + 52\kappa\mu B^2C + 17\kappa A^4C + 34\kappa A^3B^2 - 51\kappa ABC^2 - 17\kappa B^3C - \mu^5$$
$$+4\mu^4B - 16\mu^3AC - 8\mu^3B^2 - 6\mu^2A^4 + 48\mu^2ABC - 8\mu^2B^3 + 16\mu A^4B - 24\mu A^2C^2 - 48\mu AB^2C$$
$$-4\mu B^4 - 4A^5C - 10A^4B^2 + 24A^2BC^2 + 16AB^3C + \frac{4}{5}B^5 - C^4\ )$$

$w^5 + Pw + Q = 0$

[1] $\prod_{k=0}^{4}(w - (\zeta^k u_1 + \zeta^{2k}u_2 + \zeta^{3k}u_3 + \zeta^{4k}u_4)) = w^5 - 5Uw^3 - 5Vw^2 + 5Ww + 5(X-Y) - Z$

と展開できる。

ただし $U = u_1u_4 + u_2u_3$

$$
\begin{aligned}
V &= u_1u_2^2 + u_2u_4^2 + u_3u_1^2 + u_4u_3^2 \\
W &= u_1^2u_4^2 + u_2^2u_3^2 - u_1^3u_2 - u_2^3u_4 - u_3^3u_1 - u_4^3u_3 - u_1u_2u_3u_4 \\
X &= u_1^3u_3u_4 + u_2^3u_1u_3 + u_3^3u_2u_4 + u_4^3u_1u_2 \\
Y &= u_1u_3^2u_4^2 + u_2u_1^2u_3^2 + u_3u_2^2u_4^2 + u_4u_1^2u_2^2 \\
Z &= u_1^5 + u_2^5 + u_3^5 + u_4^5
\end{aligned}
$$

とし, また $\zeta = e^{\frac{2}{5}i\pi} = \cos\frac{2}{5}\pi + i\sin\frac{2}{5}\pi = \frac{-1+\sqrt{5}}{4} + i\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{8}}$

したがって, $\begin{cases} 0 = -5U \\ 0 = -5V \\ P = 5W \\ Q = 5(X-Y)-Z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} U = 0 \\ V = 0 \\ 5W = P \\ 5(X-Y)-Z = Q \end{cases}$

$w^5 + \frac{5h^4(3\mp 4g)}{g^2+1}w - \frac{4h^5(\pm 11+2g)}{g^2+1} = 0$

$t := \frac{1}{h}W$ とすると

$h^5t^5 + h^5\frac{5(3\mp 4g)}{g^2+1}t - h^5\frac{4(\pm 11+2g)}{g^2+1} = 0$

$t^5 + \frac{5(3\mp 4g)}{g^2+1}t - \frac{4(\pm 11+2g)}{g^2+1} = 0 (h \neq 0)$

となるような g, h が存在し, かつ, $t^5 + \frac{5(3\mp 4g)}{g^2+1}t - \frac{4(\pm 11+2g)}{g^2+1} = 0 (h \neq 0)$ の解が

$$\begin{cases} 0 = -5U \\ 0 = -5V \\ P = 5W \\ Q = 5(X-Y)-Z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} U = 0 \\ V = 0 \\ 5W = P \\ 5(X-Y)-Z = Q \end{cases}$$

を満たせば良い。

$g^2 + 1 = L$ と置き $v_{1\,4}$ を以下の様に定義する。

$v_1 = \sqrt{L} + \sqrt{L \mp \sqrt{L}}$

$v_2 = -\sqrt{L} - \sqrt{L \pm \sqrt{L}}$

$v_3 = -\sqrt{L} + \sqrt{L \mp \sqrt{L}}$

$v_4 = \sqrt{L} - \sqrt{L \pm \sqrt{L}}$

したがって $\begin{cases} v_1 + v_4 = 2\sqrt{L} \\ v_1v_4 = \pm\sqrt{L} \end{cases}$ 及び $\begin{cases} v_2 + v_3 = -2\sqrt{L} \\ v_2v_3 = \mp\sqrt{L} \end{cases}$ が成立する。

さらに v_1 v_4 を
$u_1^5=\frac{v_2^2v_3}{L^2},u_2^5=\frac{v_3^2v_4}{L^2},u_3^5=\frac{v_4^2v_1}{L^2},u_4^5=\frac{v_1^2v_2}{L^2}$ とする.
$u_1u_4\in\mathbb{R}$ で $u_1^5u_4^5=\frac{v_1^2v_4^2v_2v_3}{L^4}=-\frac{\mp L\sqrt{L}}{L^4}=-\frac{\mp 1}{\sqrt{L^5}}$ を満たすので $u_1u_4=\frac{\mp 1}{\sqrt{L}}$.
同様に
$u_2u_3\in\mathbb{R}$ で $u_2^5u_3^5=\frac{v_2^2v_3^2v_1v_4}{L^4}=-\frac{\mp L\sqrt{L}}{L^4}=-\frac{\mp 1}{\sqrt{L^5}}$ を満たすので $u_2u_3=\frac{\mp 1}{\sqrt{L}}$.
$u_1u_4=\frac{\mp 1}{\sqrt{L}}$,$u_2u_3=\frac{\mp 1}{\sqrt{L}}$ より, $U=u_1u_4+u_2u_3=0$ であるから, $U=0$ を満たす。
$u_1^5u_2^10=\frac{v_1^2v_2^5v_4}{L^6}=\frac{Lv_3^5}{L^6}=(\frac{v_3}{L}^)5$ かつ $u_1u_2^2\in\mathbb{R}$ より,
$u_1u_2^2=\frac{v_3}{L}$
同様に
$u_2u_4^2=\frac{v_4}{L}$
$u_3u_1^2=\frac{v_1}{L}$
$u_4u_3^2=\frac{v_2}{L}$ が得られる。

$$u_1u_2^2=\frac{v_3}{L}$$
$u_2u_4^2=\frac{v_4}{L}$
$u_3u_1^2=\frac{v_1}{L}$
$u_4u_3^2=\frac{v_2}{L}$
より, $V=u_1u_2^2+u_2u_4^2+u_3u_1^2+u_4u_3^2=\frac{v_1+v_2+v_3+v_4}{L}=\frac{2\sqrt{L}-2\sqrt{L}}{L}=0$ であるから,
$V=0$ を満たす。
$u_1^5u_2^15=\frac{v_1^6v_2^5v_4}{L^8}=\frac{\pm\sqrt{L}v_1^5v_3^5}{L^8}=(\frac{\pm v_1v_2}{L\sqrt{L}}$ かつ $u_1^3u_2\in\mathbb{R}$ より,
$u_1^3u_2=\frac{\pm v_1v_3}{L\sqrt{L}}$
同様に
$u_2^3u_4=\frac{\pm v_3v_4}{L\sqrt{L}}$
$u_3^3u_1=\frac{\pm v_1v_2}{L\sqrt{L}}$
$u_4^3u_3=\frac{\pm v_2v_4}{L\sqrt{L}}$ が得られる。
$(v_1-v_4)^2=4\sqrt{L}(\sqrt{L}\mp 1),(v_2-v_3)^2=4\sqrt{L}(\sqrt{L}\pm 1)$ であるから
$u_1^3u_2=\frac{\pm v_1v_3}{L\sqrt{L}}$

$u_2^3u_4 = \dfrac{\pm v_3v_4}{L\sqrt{L}}$
$u_3^3u_1 = \dfrac{\pm v_1v_2}{L\sqrt{L}}$
$u_4^3u_3 = \dfrac{\pm v_2v_4}{L\sqrt{L}}$
より $5W = 5(u_1^2u_4^2 + u_2^2u_3^2 - u_1^3u_2 - u_2^3u_4 - u_3^3u_1 - u_4^3u_3 - u_1u_2u_3u_4)$
$= 5(\dfrac{3}{L} \pm \dfrac{1}{L\sqrt{L}}(v_1v_2 + v_3v_4 - v_1v_2 - v_2v_4))$
$= \dfrac{5}{L\sqrt{L}}(3\sqrt{L} \pm (v_1 - v_4)(v_2 - v_3))$
$= \dfrac{5}{L\sqrt{L}}(3\sqrt{L} \mp 4\sqrt{L}\sqrt{L-1})$
$= \dfrac{5(3 \mp 4\sqrt{L-1}}{L}$
$= \dfrac{5(3 \mp 4c)}{g^2+1} = P$ であるから $5W = P$ を満たす。これらのことをうまく利用して
$5(X-Y) - Z = \pm\dfrac{10}{L\sqrt{L}}(-v_1 + v_3 + v_2 - v_4) - \dfrac{1}{L^2}(v_1^2v_3 + v_3^2v_4 + v_2^2v_1 + v_4^2v_2)$
$= \pm\dfrac{10}{L\sqrt{L}}(-2\sqrt{L} - 2\sqrt{L}) - \dfrac{1}{L^2}(\pm 4L + 8L\sqrt{L-1})$
$= \dfrac{-8\sqrt{L-1} \mp 44}{L}$
$= -\dfrac{4(\pm 11 + 2g)}{g^2+1} = Q$ であるから $5(X-Y) - Z = Q$ を満たす。$\begin{cases} U = 0 \\ V = 0 \\ 5W = P \\ 5(X-Y) - Z = Q \end{cases}$
をすべて満たすので
$W^5 + PW + Q = 0$ と $w^5 + \dfrac{5h^4(3 \mp 4g)}{g^2+1}w - \dfrac{4h^5(\pm 11 + 2g)}{g^2+1} = 0$ を比較し
$P = \dfrac{5h^4(3 \mp 4g)}{g^2+1}, Q = -\dfrac{4h^5(\pm 11 + 2g)}{g^2+1}$ となる g, h が存在すると $w^5 + Pw + Q = 0$ は可解となる。(ただし, $g \geq 0, h \neq 0, g, h \in \mathbb{Q}$).
次に, これの逆を示す。
$w^5 + Pw + Q = 0$ の 6 次分解式は
$0 = T^6 + 8PT^5 + 40PT^4 + 160P^3T^3 + 400P^4T^2 + (512P^5 - 3125Q^4)T + 256P^6 - 9375PQ^4$
$= (T+2P)^4(T^2 + 16P^2) - 5^5Q^4(T+3P)$ であるから
$T = -2P, -3P$ を代入すると $PQ = 0, P = 0$ となりただちに $w^5 + Q = 0$(謎の記号)$w(w^4 + p) = 0$ となり解が求まるので $T \neq -2P, -3P$
$\left|\dfrac{3T - 16P}{4(T+3P)}\right| = g, \dfrac{\mp 5Q}{2(T+2P)} = h, \dfrac{3T - 16P}{4(T+3P)} = ge$ を満たすように g, h, e を定める.

明らかに $g \geq 0h \neq 1$ である。$e = \pm 1$

このとき, $L = g^2 + 1 = \dfrac{(3T-16P)^2}{16(T+3P)^2} + 1 = \dfrac{25(T^2+16P^2)}{16(T+2P)^2}$

$3 \mp 4g = 3 - \dfrac{4(3T-16P)}{4(T+3P)} = \dfrac{25P}{T+2P}$

$\pm 11 + 2g = \pm 11 + \dfrac{2(3T-16)}{\pm 4(T+3P)} = \dfrac{25(T+2P)}{12(T+3P)}$ であり,

l.321 より $\dfrac{5^5Q^4(T+3P)}{T^2+16P^2} = (T+3P)^{(?)}$ なので

$\dfrac{5h^4(3 \mp 4g)}{g^2+1} = 5 \cdot \dfrac{5^4Q^4}{2^4(T+2P)^4} \cdot \dfrac{25P}{T+3P} \cdot \dfrac{16(T+3P)^2}{25(T^3+16P^2)} = P$

$\dfrac{-4h^5(\pm 11 + 2g)}{g^2+1} = 4 \cdot \dfrac{\pm 5^5 b^5}{2^5(T+2P)^5} \cdot \dfrac{25(T+2P)}{22(T+3P)} \cdot \dfrac{16(T+3p)^2}{25(T^2+16P^2)} = Q$ となる。よって, この逆も示せたのでこれは必要十分条件に書き直す。

$w^5 + Pw + Q = 0$ が代数的に可解であることと, $P = \dfrac{5h^4(3+4g)}{g^2+1}, Q = -\dfrac{4h^5(\pm 11 + 2g)}{g^2+1}$ を満たす $g, h (g \geq 0, h \neq 0, g, h \in \mathbb{Q})$ が存在することは同値である。

$0 = T^6 + 8PT^5 + 40PT^4 + 160P^3T^3 + 400P^4T^2 + (512P^5 - 3125Q^4)T + 256P^6 - 9375PQ^4$ の T が有理数解を 1 つ持つときそれを T_1 とする

$\left|\dfrac{3T-16P}{4(T+3P)}\right| = g, \dfrac{\mp 5Q}{2(T+2P)} = h, \dfrac{3T-16P}{4(T+3P)} = ge$ より $g = \left|\dfrac{3T-16P}{4(T+3P)}\right|$

以上よりまとめると

$L = g^2 + 1$

$v_1 = \sqrt{L} + \sqrt{L - \sqrt{L}}$

$v_2 = -\sqrt{L} - \sqrt{L + \sqrt{L}}$

$v_3 = -\sqrt{L} + \sqrt{L + \sqrt{L}}$

$v_4 = \sqrt{L} - \sqrt{L - \sqrt{L}}$

$u_1 = \sqrt[5]{\dfrac{V_1^2V_3}{L^2}}$

〃 $u_2 = \sqrt[5]{\dfrac{V_3^2V_4}{L^2}}$

〃 $u_3 = \sqrt[5]{\dfrac{V_2^2V_1}{L^2}}$

〃 $u_4 = \sqrt[5]{\dfrac{V_4^2V_2}{L^2}}$

[1] $\prod_{k=0}^{4}(w - (\zeta^k u_1 + \zeta^{2k} u_2 + \zeta^{3k} u_3 + \zeta^{4k} u_4)) = w^5 - 5Uw^3 - 5Vw^2 + 5Ww + 5(X - Y) - Z$

より $w_1 = u_1 + u_2 + u_3 + u_4$

〃 $w_2 = \zeta u_1 + \zeta^2 u_2 + \zeta^3 u_3 + \zeta^4 u_4$

〃 $w_3 = \zeta^2 u_1 + \zeta^4 u_2 + \zeta^1 u_3 + \zeta^3 u_4$

〃 $w_4 = \zeta^3 u_1 + \zeta u_2 + \zeta^4 u_3 + \zeta^2 u_4$

〃 $w_5 = \zeta^4 u_1 + \zeta^3 u_2 + \zeta^2 u_3 + \zeta u_4$
$z_k^4 + \eta z_k^3 + \theta z_k^2 + \kappa z_k + (\mu - W_k) = 0$ (k=1〜5 それぞれの方程式の解から任意の解を選ぶ)
$y_k^2 + \alpha y_k + (\beta - z_k) = 0$ ($k = 1, 2$　〃　)
$x_k = y_k - \dfrac{b}{5a}$
$x = y_1 - \dfrac{b}{5a}, y_2 - \dfrac{b}{5a}, y_3 - \dfrac{b}{5a}, y_4 - \dfrac{b}{5a}, y_5 - \dfrac{b}{5a}$
これにより代数的に可解なもののみではあるが五次方程式を解くことができた。

$$p = \frac{c}{a} - \frac{2b^2}{5a^2}$$
$$q = \frac{d}{a} - \frac{3bc}{5a^2} + \frac{4b^3}{25a^3}$$
$$r = \frac{b}{a} - \frac{2bd}{5a^2} + \frac{3b^2c}{25a^3} + \frac{3b^4}{125a^4}$$
$$s = \frac{f}{a} - \frac{be}{5a^2} + \frac{b^2d}{25a^3} - \frac{b^3c}{125a^4} + \frac{4b^5}{3125a^5}$$

$$\alpha = -\frac{3q}{2p} + \sqrt{\frac{3}{5}q - \frac{2r}{p} + \frac{9q^2}{4p^2}}$$
$$\beta = \frac{2}{5}p$$

$y_k = -\dfrac{\alpha}{2} + \sqrt{\dfrac{\alpha^2}{4} - \beta + 3p}$

$A = q\alpha^3 + (-\frac{6}{5}p^2 + 4r)\alpha^2 + (\frac{13}{5}p^2 - 5pq + 5S)\alpha + (\frac{42}{25}P^3 - \frac{2}{5}pr - q^2)$
$B = (-\frac{1}{2}p^2 + r)\alpha^4 + (-\frac{19}{5}pq + 5s)\alpha^3 + (\frac{27}{25}p^3 - \frac{21}{5}pr - \frac{9}{2}q^2)\alpha^2$
$\quad + (\frac{61}{25}p^2q - ps - 7qr)\alpha + (-\frac{53}{250}p^4 + \frac{16}{125}p^3q + \frac{14}{25}p^2r + \frac{4}{5}pq^2 - 2qs - r^2)$
$C = (-pq + s)\alpha^5 + (\frac{6}{5}p^3 - \frac{22}{5}pr - 3q^2)\alpha^4 + (-\frac{174}{5}p^2q - 6ps - 14qr)\alpha^3 + (\frac{108}{125}p^4 + \frac{136}{25}p^2r + \frac{4}{5}$
$\quad + (-\frac{229}{125}p^3q + \frac{69}{5}p^2s - \frac{56}{5}pqs + \frac{34}{5}pqr + 3q^2 - 9rs)\alpha + (-\frac{1722}{3125}p^5 - \frac{26}{125}p^3r - \frac{19}{25}p^2q^2 + \frac{4}{5}pq$

$$\eta = \frac{-27A^3B - 375AC^2 + 400B^2C}{54A^4 + 600ABC - 320B^2} + \sqrt{(\frac{-27A^3B - 375AC^2 + 400B^2C}{54A^4 + 600ABC - 320B^2})^2 + \frac{45A^3C - 18A^2B^2}{27A^4 + 300ABC}}$$

$$\theta = -\frac{1}{3A}(4B\eta + 5C)$$

$$\kappa = \sqrt[3]{-\frac{H}{2} + \sqrt{(\frac{H}{2})^2 + (\frac{I}{3})^3}} + \sqrt[3]{-\frac{H}{2} - \sqrt{(\frac{H}{2})^2 + (\frac{I}{3})^3}}$$

$$\mu = \frac{3}{5}A\eta + \frac{4}{5}B$$

$$D = -675A^3$$

$$E = -3375\eta A^3C + 3600\eta AB^2 + 2025A^4 + 4500ABC$$

$$F = -675\eta^2A^3B - 6000\eta^2B^2C + 4050\eta A^3C - 7200\eta A^2B^2 - 15000\eta BC^2 - 2025A^5 - 9675A^2B$$

$$G = 54\eta^3A^5 + 225\eta^3A^3BC + 320\eta^3AB^3 + 756\eta^2A^4B + 1125\eta^2A^2C^2 + 3900\eta^2AB^3C + 960\eta^2B^4$$
$$+ 3843\eta A^3B^2 + 9375\eta ABC^2 + 2400\eta B^2C + 1125\mu^3 + 675A^6 + 4770A^3BC + 108A^2B^3 + 625$$

$$H = \frac{F}{D} - \frac{E^2}{3D^2}$$

$$I = \frac{G}{D} - \frac{EF}{3D^2} + \frac{2E^2}{27D^2}$$

$$Z_k = \frac{1}{2}(\sqrt{\tau} + \sqrt{-\tau - 2J - \frac{K}{2\sqrt{\tau}}}) - \frac{\eta}{4}$$

$$t = \sqrt[3]{-\frac{K}{2} + \sqrt{(\frac{K}{2})^2 + (\frac{J}{3})^3}} + \sqrt[3]{-\frac{K}{2} - \sqrt{(\frac{K}{2})^2 + (\frac{J}{3})^3}} - \frac{2}{3}j$$

$$\begin{cases} J = -\frac{1}{3}j^2 - 4l \\ K = -\frac{8}{27}j^3 + \frac{8}{3}jl - k^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} j = \theta - \frac{3}{8}\eta^2 \\ k = \kappa - \frac{1}{2}\eta\theta + \frac{1}{8}\eta^3 \\ l = \mu - \frac{1}{4}\eta\kappa + \frac{1}{16}\eta^2\theta - \frac{3}{256}\eta^4 - W_k \end{cases}$$

$$W_k = \zeta^j u_1 + \zeta^{2j} u_2 + \zeta^{3j} u_3 + \zeta^{4j} u_4 (j = k - 1)$$

$$\begin{cases} u_1 = (\dfrac{V_1^2 V_3}{L^2})^{\frac{1}{5}} \\ u_2 = (\dfrac{V_3^2 V_4}{L^2})^{\frac{1}{5}} \\ u_3 = (\dfrac{V_2^2 V_1}{L^2})^{\frac{1}{5}} \\ u_4 = (\dfrac{V_4^2 V_2}{L^2})^{\frac{1}{5}} \end{cases}$$

$$g = \left| \frac{3T - 10P}{4(T + 3P)} \right|$$

$$L = g^2 + 1$$

$$\begin{cases} v_1 = \sqrt{L} + \sqrt{L - \sqrt{L}} \\ v_2 = -\sqrt{L} - \sqrt{L + \sqrt{L}} \\ v_3 = -\sqrt{L} + \sqrt{L + \sqrt{L}} \\ v_4 = \sqrt{L} - \sqrt{L - \sqrt{L}} \end{cases}$$

1.401 の T は $T^6 + 8PT^5 + 40PT^4 + 160P^3T^3 + 400P^4T^2 + 512(P^5 - 3125Q^4)T + (256P^6 - 9375PQ^4) = 0$ の解である.

$$P = (-\frac{3}{4}A^4 + 6ABC + 4B^3)\eta^4$$
$$+ (11\theta A^2C + 11\theta AB^2 + 10\kappa A^2B - 5\kappa C^2 + 3\mu A^3 - 9\mu BC - 13A^3B + 13AC^2 + 13B^2C)\eta^3$$
$$+ (15\theta^2A^2B - \frac{15}{2}\theta^2C^2 + 9\theta\kappa A^3 - 27\theta\kappa BC - 24\theta\mu AC - 12\theta\mu B^2 - 9\theta A^4 + 72\theta ABC + 12\theta B$$
$$- 12\kappa^2AC - 6\kappa^2B^2 - 21\kappa\mu AB^2 + 33\kappa A^2C + 33\kappa AB^2 - \frac{9}{2}\mu^2A^2 + 30\mu AB^2 - 15\mu C^2 - 21A^2C$$
$$+ ((3A^3 - 9BC)\theta^3 + (-24\kappa AC - 12\kappa B^2 - 21\mu AB + 33A^2C + 33AB^2)\theta^2$$
$$+ (-21\kappa^2AB - 18\kappa\mu A^2 + 60\kappa A^2B - 30\kappa C^2 + 15\mu C^2 + 18\mu A^3 - 54\mu BC - 39A^3B + 39AC^2$$
$$+ (-3\kappa^3A^2 + 15\kappa^2\mu C + 9\kappa^2A^3 - 27\kappa^2BC + 12\kappa\mu^2B - 48\kappa\mu AC - 24\kappa\mu B^2 - 9\kappa A^4 + 72\kappa AB$$
$$+ 3\mu^2A - 21\mu^2AB + 33\mu A^2C + 33\mu AB^2 + 3A^5 - 45A^2BC - 15AB^2 + 5C^3))\eta$$
$$+ ((-2AC - B^2)\theta^4 + (-7\kappa AB - 3\mu A^2 + 10A^2B - 5C^2)\theta^3 + (-\frac{9}{2}\kappa^2A^2 + 15\kappa\mu C + 9\kappa A^3 - 2$$
$$+ (\kappa^4B + 3\kappa^3\mu A - 7\kappa^3AB - 9\kappa^2\mu A^2 + 15\kappa^2A^2B - \frac{15}{2}\kappa^2C^2 + 15\kappa\mu^2C + 9\kappa\mu A^3 - 27\kappa\mu ABC$$

$$
\begin{aligned}
Q = &(\frac{3}{5}A^5 - 9A^2BC - 3AB^3 + C^3)\eta^5 \\
&+ (-14\theta A^3C - 21\theta A^2B^2 + 14\theta BC^2 - 13\kappa A^3B + 13\kappa AC^2 + 13\kappa B^2C - 3\mu A^4 + 24\mu ABC + 4 \\
&+ ((-26A^3B + 26AC^2 + 26)\theta^2 + (-12\kappa A^4 + 96\kappa ABC - 16\kappa B^3 + 44\mu A^2C + 44\mu AB^2 + 12A \\
&+ (22\kappa^2A^2C + 22\kappa^2AB^2 + 40\kappa A^2B - 20\kappa\mu C^3 - 56\kappa A^2C - 84\kappa A^3B^2 + 56\kappa BC^2 \\
&+ 6\mu^2A^2 - 18\mu^2BC - 52\mu A^2B + 52\mu AC^2 + 52\mu B^2C + 34A^2C + 68A^3B^2 - 102ABC^2 - 34B \\
&+ ((-6A^4 + 48ABC - 8B^3)\theta^3 + (66\kappa A^2C + 66\kappa AB^2 + 60\mu A^2B - 30\mu C^2 - 84A^3C - 126A^2 \\
&+ (60\kappa^2A^2B - 30\kappa^2C^2 + 36\kappa\mu A^3 - 108\kappa\mu BC - 156\kappa A^2B + 156\kappa AC^2 + 156\kappa B^2C \\
&- 48\mu^2AC - 24\mu^2B^2 - 36\mu A^4 + 288\mu ABC - 48\mu B^2 + 96A^4B - 104A^2C^2 - 288AB^2C - 24 \\
&+ (6\kappa^3A^3 - 18\kappa^3BC - 48\kappa^2\mu AC - 24\kappa^2\mu A^4 + 144\kappa^2ABC - 24\kappa^2B^2 \\
&- 42\kappa\mu^2BC + 132\kappa\mu A^2C + 132\kappa\mu AB^2 + 18\kappa A^5 - 270\kappa A^2BC - 90\kappa AB^3 + 30\kappa C^3 \\
&- 6\mu^2A^2 + 60\mu^2A^2B - 30\mu^2C^2 - 84\mu A^2C - 126\mu A^2B^2 + 84\mu BC^2 - 6A^6 + 144A^3BC + 72A \\
&+ ((11A^2C + 11AB^2)\theta^4 + (40\kappa A^2B - 20\kappa C^2 + 12\mu A^3 - 36\mu BC - 52A^3B + 52AC^2 + 52B^2C \\
&+ (18\kappa^2A^3 - 54\kappa^2BC - 96\kappa\mu AC - 48\kappa\mu B^2 - 36\kappa A4 + 288\kappa ABC - 48\kappa B^3 - 42\mu^2AB \\
&+ 132\mu A^2C + 132\mu AB^2 + 18A^5 - 270A^2BC - 90AB^3 + 30C^3)\theta^2 \\
&+ (-32\kappa^3AC - 16\kappa^3B^2 - 84\kappa^2\mu AB + 132\kappa^2A^2C + 132\kappa^2AB^2 \\
&- 36\kappa\mu^2A^2 + 240\kappa\mu A^2B - 120\kappa\mu C^2 - 168\kappa A^3C - 252\kappa A^2B^2 + 168\kappa BC^2 \\
&+ 20\mu^3C + 36\mu^2 - 108\mu^2BC - 156\mu A^2B + 156\mu B^2C + 68A^4C + 136A^3B^2 - 204ABC^2 - 68 \\
&+ (-7\kappa^4AB - 12\kappa^3\mu A^2 + 40\kappa^3A^2B - 20\kappa^3C^2 + 30\kappa^2\mu^2C + 36\kappa^2\mu A^3 - 108\kappa^2\mu BC - 78\kappa^2A^3 \\
&+ 16\kappa\mu^2B - 96\kappa\mu^2AC - 48\kappa\mu^2B^2 - 36\kappa\mu A^4 + 288\kappa\mu ABC - 48\kappa\mu B^3 + 64\kappa A^4B - 96\kappa A^2C^2 \\
&+ 3\mu^4A - 28\mu^3AB + 66\mu^2A^2C + 66\mu^2AB^2 + 12\mu A^5 - 180\mu A^2BC - 60\mu AB^3 + 20\mu C^3 - 19A \\
&+ ((2A^2B - C^2)\theta^5 + (3\kappa A^3 - 9\kappa BC - 8\mu AC - 4\mu B^2 - 3A^4 + 24ABC - 4B^3)\theta^4 \\
&+ (-16\kappa^2AC - 8\kappa^2B^2 - 28\kappa\mu AB + 44\kappa A^2C + 44AB^2 - 6\mu^2A^2 + 40\mu A^2B - 20\mu C^2 - 28A^3C \\
&+ (-14\kappa^3AB - 18\kappa^2\mu A^2 + 60\kappa^2A^2B - 30\kappa^2C^2 + 30\kappa\mu^2C + 36\kappa\mu A^3 - 108\kappa\mu BC - 78\kappa A^3B \\
&+ 78AC^2 + 78B^2C + 8\mu^3B - 48\mu^2AC - 24\mu^2B^2 - 18\mu A^4 + 144\mu ABC - 24\mu B^3 + 32A^4B - \\
&+ (-3\kappa^4B^2 + 20\kappa^3\mu C + 12\kappa^3A^3 - 36\kappa^3BC + 24\kappa^2\mu^2B - 96\kappa^2\mu AC - 48\kappa^2\mu B^2 - 18\kappa^2A^4 + 1 \\
&+ 12\kappa\mu^3A - 84\kappa\mu^2AB + 132\kappa\mu A^2C + 132\kappa\mu AB^2 + 12\kappa A^5 - 180\kappa AB^2C - 60\kappa AB^3 + 20\kappa C^3 \\
&- 12\mu^3A^2 + 60\mu^2A^2B - 30\mu^2C^2 - 56\mu A^3C - 84\mu A^2B^2 + 56\mu BC^2 - 3A^6 + 72A^3BC + 36A^2 \\
&+ (\kappa^5C + 4\kappa^4\mu B - 8\kappa^4AC - 4\kappa^4B^2 + 6\kappa^3\mu^2A - 28\kappa^3\mu AB + 22\kappa^3A^2C + 22\kappa^3AB^2 \\
&- 18\kappa^2\mu^2A^2 + 60\kappa^2\mu A^2B - 30\kappa^2\mu C^2 - 28\kappa^2A^3C - 42\kappa^2A^3B^2 + 28\kappa^2BC^3 \\
&+ 20\kappa\mu^3C + 18\kappa\mu^2A^3 - 54\kappa\mu^3BC - 52\kappa\mu A^3B + 52\kappa\mu AC^3 + 52\kappa\mu B^3C + 17\kappa A^4C + 34\kappa A^3B \\
&- 51\kappa ABC^2 - 17\kappa B^2C - \mu^5 + 4\mu^4B - 16\mu^3AC - 8\mu^3B^2 - 6\mu^2A^4 + 48\mu^2ABC - 8\mu^2B^3 \\
&+ 16\mu A^4B - 24\mu A^2C^2 - 48\mu AB^2C - 4\mu B^4 - 4A^5C - 10A^4B^2 + 24A^2BC^2 + 16AB^3C + \frac{4}{5}B
\end{aligned}
$$

参考文献

[1]『可換な 5 次方程式について』(http://repository.hyogo-u.ac.jp/dspace/bitstream/10132/1612/1/ZD30301003.pdf)

OB 講義案: Doppler 効果

6814　熊谷勇輝

概要

本記事は, すでに中止となった令和二年度の数研合宿のために用意していた OB 講義案をまとめたものです. 対象部員は中学三年生あたりを想定しております. Doppler 効果は基礎的で簡単な現象ではありますが, むしろそれゆえに多くの物理的示唆に富んでいる代表的な話題であると言えます. 例年の OB 講義は受験や競技などを超越した話題を展開することに主眼がありますが, 今回はあえて受験を中心に据えつつ, 同時に物理学への入門としても有益な内容になることを目指しました.

1 | 舞台設定

物理学は非常に西洋的な思想に端を発していますが, その適用範囲はあまりに多岐に渡っており, 現代の自然科学や科学技術を理解する上で極めて重要な学問になっております.

21 世紀の現在まで物理学は異常なスピードで発展し続けて来ましたが, その中でも 17 世期に始まり 19 世期半ばに一段落ついた**古典物理学**を中学高校では主に学習することになります. その世界像は「**3 次元の一様・等方な空間の中で, 一様な時の流れでの極めて多数の "素粒子" の運動が自然現象である**」というものです.

空間と時間については古典物理学のなかでも色々議論する必要がありますが, 今回の振動・波動論ではひとまず空間を 3 次元 Euclid 空間, 時間を 1 次元 Euclid 空間として議論を始めることにしましょう.

また, 時代が降るにつれて "素粒子" の指すものが現代物理学的により精確になるので, 古典物理学では「粒子」と呼び分けて次のように定義されていると考えていただいて構いません.

定義 1.1: 粒子

粒子とは組 $(m_{\mathrm{I}}, m_{\mathrm{G}}, q, \boldsymbol{r}(t)) \in \mathbb{R}_{>0} \times \mathbb{R}_{>0} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$ のことである.

注. m_{I} は**慣性質量**, m_{G} は**重力質量**とよばれ, すべての正の実数値を取りえます. 実験的に両者は 10^{-13} オーダーまで等しいことが確認されており, 両者を等しいものとして（**弱い等価原理**）$m = m_{\mathrm{I}} = m_{\mathrm{G}}$ とし m を単に**質量**とよびます.

注. q は**電荷**とよばれ, **古典物理学では**, 国際単位系での**電気素量** $e = 1.602\,176\,634 \times 10^{-19}\,\mathrm{C}$ の整数倍しか取りえませんが, 普通は連続的な実数値だと考えて良いです.

注. $\boldsymbol{r}(t)$ は**位置**とよばれる**時間** t の関数で, 3 次元の基底 $\boldsymbol{e}_1(t), \boldsymbol{e}_2(t), \boldsymbol{e}_3(t)$ を用いて $\boldsymbol{r}(t) = r_1(t)\boldsymbol{e}_1(t) + r_2(t)\boldsymbol{e}_2(t) + r_3(t)\boldsymbol{e}_3(t)$ と表せるとき組 $(r_1(t), r_2(t), r_3(t))$ を**座標**とよびます. 特に断りがなければ時間的に変化しない正規直交基底 $\boldsymbol{e}_x, \boldsymbol{e}_y, \boldsymbol{e}_z$ を用い, その座標 $(x(t), y(t), z(t))$ の各成分をそれぞれ x 座標, y 座標, z 座標とよびます.

物理学では粒子の運動がある種の体系に従っているはずだと考え, それは粒子間の**基本相互作用**（いわゆる**力**）に基づいていると考えることで現代にいたるまで様々な成果をあげることに成功しました. 現代の物理学では基本相互作用を次の四種類に分類しています.

- 重力
- 電磁気力
- 強い相互作用
- 弱い相互作用

強い相互作用と弱い相互作用は非常に微小な有限区間にしか届かないので古典物理学で考察する必要が一切なく, 対照的に重力や電磁気力は無限に遠くまで届くので古典物理学でもこの二つの力を考える必要が出てきます.

注. 弱い相互作用と電磁相互作用を統一的に記述する電弱統一理論 **Glashow-Weinberg-Salam 理論**はほぼ確実で, さらに強い相互作用も加えた**大統一理論**（**GUT**）も未完成ではあるもののモデルはいくつか作られています. しかしながら重力も加えた**超大統一理論**（**SUT**）やその候補の**超弦理論**が完成するのは遠い先のことでしょう.

地球の表面付近に現れる力の古典物理学的な扱いは次のようにすればほぼ問題ありません.

- 物体と地球の重力のみを考えれば十分で, 他の物体との重力は弱すぎるので無視します.
- 電気的に中性のマクロな物体同士には基本的に電磁気力は働かず, 物体が接触しているときにのみ接触面の構成分子間の電磁気力のみを考えます.

一般にミクロな電荷分布を知ることは不可能ですから電磁気力が存在すること自体はわかっていても古典物理学的にどう現れるかはわかりません. 今回はあえて扱いませんが, 古典力学ではそういった力は運動方程式や束縛条件で決めるものなのです. ところが, 例外的にその応力がマクロな変位の関数で表される場合があり, その物体を**弾性体**, その力を**弾性力**とよびます[*1].

[*1] 高校範囲ではバネや伸びているときのゴムを線形弾性とみなします（**Hooke の法則**）.

弾性体は分子の結合という離散的な構造をもっているわけですが, それを捨象して, 空間的な広がりをもつ変形可能な**連続体**と考えてみると, 連続体の一点に励起された振動は応力を介して連続体の広域的な振動を連鎖的に誘起します. これを**波動**（**波**）とよび, その連続体を（波の）**媒質**, その一点を**波源**とよびます.

波動は次の二種類に分類されます.

力学的波動　力学的媒質の振動が媒質間の応力により伝わる現象
電磁波（光）　電磁場の振動が Maxwell 方程式に従い伝わる現象

ここで古典電磁気学に立ち入ることはしませんから, 電磁波についてはひとまず天下りに考えてください. とにもかくにも, 次の事実が最も本質的で重要なことなのです.

事実 1.2

波動の伝播速度は有限であり, その最大値は真空中の光速 299 792 458 m/s である.

Doppler 効果の本質はこの事実にあります.

2 | 波動の表現

本来であれば力学的波動は連続体力学, 電磁波は古典電磁気学を理解しそのメカニズムを解明した上で考えるべきでしょうが, Doppler 効果を理解する上では不要です. 何が必要かといえば, それは**波源から空間的に離れた観測者が観測する振動を一般に表現すること**です. すなわち波源を原点とした観測者の位置ベクトル $\boldsymbol{r}$ と時間 t の関数 $\psi(\boldsymbol{r}, t)$ として振動の変位を表現することです.

しかし無闇矢鱈に複雑な考察をしても Doppler 効果という現象の理解には役に立ちませんから, まずは 1 次元波動を考えます. また, 波の伝播速度は媒質の状態に依存しますが, 媒質の状態が一様一定の場合のみを考えることで, 波の伝播速度が一様一定で c であると考えます.

また, 現実世界の一般の波はすべて**正弦波**の重ね合わせで表現できる（Fourier 変換）ことが知られているので, 正弦波を考察することが非常に重要になります. 正弦波とは, 波源の振動の変位が, 正の定数 a を用いて $\psi(0, t) = a \sin\theta(0, t)$ と表されるような波のことです. 最大変位 a を**振幅**といい, $\theta(0, t)$ を**位相** (phase) といいます. ただし, $\theta(x, t)$ は x と t の 1 次関数だとします.

ここで, $\sin\theta \equiv \sin(\theta + 2\pi)$ なので, 位相が 2π ずれることを 1 回の振動と数え, 単位時間あたりの振動回数を**振動数** (**周波数**) といい, f で表します. したがって, **初期位相** $\theta(0, 0)$ を α とおくと, $\theta(0, t) = 2\pi ft + \alpha$ となります.

時刻 t' の波源の振動が時刻 t に観測者に届いたとすると, 観測者が時刻 t に観測する振

動の変位は, 途中に反射などにより生じる位相のずれ β を考慮して

$$\begin{cases} \psi(x,t) = A\sin(2\pi f t' + \alpha + \beta) \\ t = t' + \dfrac{x-0}{c} \end{cases}$$

となるので

$$\psi(x,t) = A\sin\left(2\pi f\left(t - \frac{x}{c}\right) + \alpha + \beta\right)$$

となります. ここで A は観測者の観測する振動の振幅で, エネルギーの散逸などが生じるため一般には $A \leq a$ となりますが, ひとまず振幅の減衰を無視して $A = a$ と考えます.

x を固定すると $\psi(t) = a\sin(2\pi f t + \cdots)$ となり, ビヨンビヨンと周期的に行ったり来たりする現象が見られます. これを**単振動**といいます. 振動数は f ですが, 1 回振動するのにかかる時間, すなわち t としての周期を**周期**といい, $T = \dfrac{1}{f}$ の関係が成り立っています.

t を固定すると $\psi(x) = a\sin\left(2\pi f \cdot \dfrac{x}{c} + \cdots\right)$ となり, $\psi = a$ となる**山**と $\psi = -a$ となる**谷**が交互に周期的に並ぶことがわかります.

谷と谷の間隔, すなわち 1 回振動する時間 T の間に波の伝わる距離, すなわち x としての周期 λ を**波長**といいます. $\psi(x+\lambda, t) = \psi(x,t)$ をみたす最小の λ (> 0) なので $2\pi f \cdot \dfrac{\lambda}{c} = 2\pi$ すなわち $\lambda = \dfrac{c}{f} = cT$ です. また, 1 秒間に c だけ進むということは T 秒間で cT 進むということなのでたしかに $\lambda = cT$ です.

1 回の振動でできる波を 1 個と数えるので, 長さ 2π あたりの波の個数を**波数** $k = \dfrac{2\pi}{\lambda}$ といいます. 時間 t の間にある波の個数は ft となります.

3 | Doppler 効果

波源から観測者へ波が伝わる時間は有限であり,

- 波源と観測者の相対的距離
- 波の伝わる速度

に依存するので

- 波源と観測者の相対的距離が時間的に変化すること
- 媒質の状態が時間的に変化することなどにより, 波の伝わる速度が時間的に変化すること

で**波源から観測者へ波の伝わる時間が, その出た時刻により変化するとき, 波源の周期や振動数と異なる周期や振動数の波が観測される現象**が起こり, これを Doppler 効果といいます.

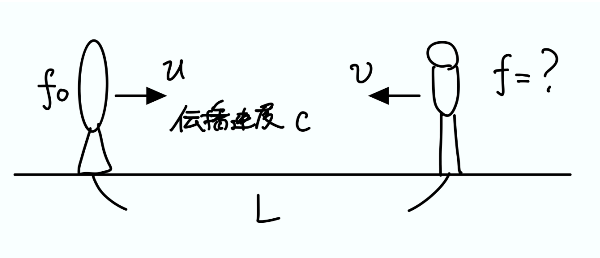
波源が近づいてくるときは, ある瞬間に出た波が観測者に届くまでの時間より, その少し後に出た波が観測者に届くまでの時間の方が（波源と観測者の距離が短くなっている分だけ）短くなってしまいます. このとき観測される周期は波源の周期より短くなり, 振動数は高くなります. 遠ざかる場合は逆です. ただし, **観測者にとって波の伝播速度が無限大とみなせるときは全部同じです**. (cf. 事実 1.2)

事実 3.1

人間の聴覚器官は振動数の高い音・低い音を「高い音・低い音」と感知する.

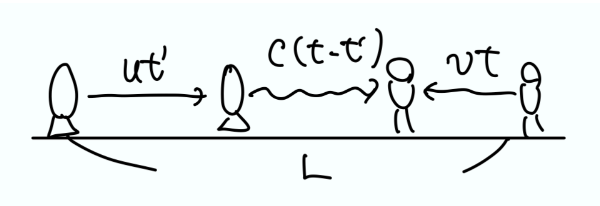
救急車が近づくときは高い音, 遠ざかるときは低い音になるということが定性的にわかります.

簡単な例として次のような場合を考えてみましょう. ただし $\dfrac{|u|}{c}, \dfrac{|v|}{c} \ll 1$ とします.



3.1　導出 1

波の表現を用いてみましょう. 時刻 t' に出た波が時刻 t に届くとすると



$$\begin{cases} L = ut' + c(t - t') + vt \\ \theta_{\mathrm{O}}(t) = 2\pi f_0 t' \end{cases}$$

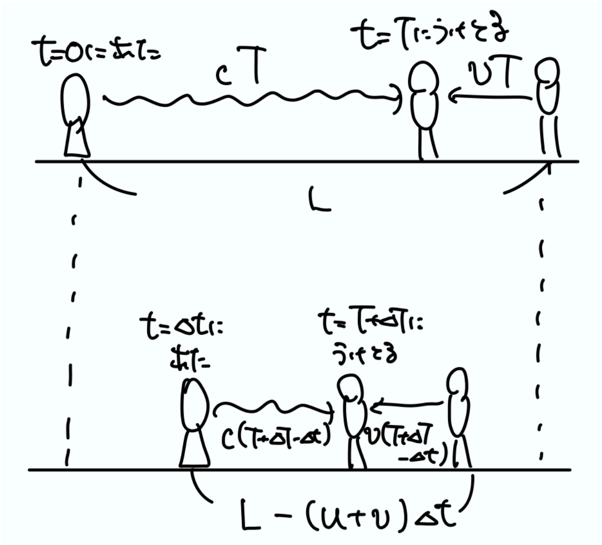
これを解いて $\theta_{\mathrm{O}}(t) = 2\pi f_0 \dfrac{c+v}{c-u} t + \cdots$ となるので $f = \dfrac{c+v}{c-u} f_0$ です.

3.2　導出 2

出たタイミングによる所要時間のズレを求める最も直接的な導出です.

波源が $t = 0$ から $t = \Delta t$ までに出した波の数と, 観測者が $t = T$ から $t = T + \Delta T$ まで

に受け取った波の数は同じなので, $f_0\Delta t = f\Delta T$ が成り立ちます.



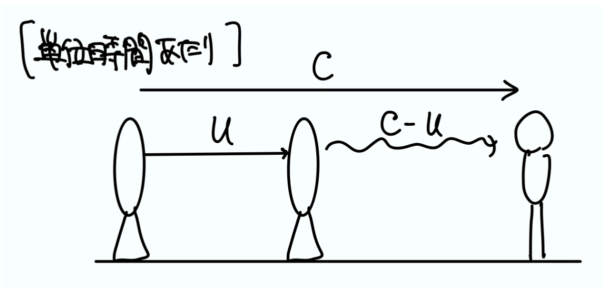
$$\begin{cases} L = (c+v)T \\ L-(u+v)\Delta t = (c+v)(T+\Delta T - \Delta t) \end{cases}$$

より $\Delta T = \dfrac{c-u}{c+v}\Delta t$ なので $f = \dfrac{c+v}{c-u}f_0$ となります.

3.3 導出 3

観測者からみた波の速度は $c' = c+v$ です. あるいは観測者は単位時間あたり c' の距離の中の波と出会います.

観測者からみた波長は「単位時間に出た f_0 個の波が距離 $c-u$ の中に含まれる」ので, $\lambda' = \dfrac{c-u}{f_0}$ です.



したがって, 観測者は単位時間あたりに距離 c' の中に含まれる波と出会い, 波 1 個あたりの間隔が λ' であるから, $f = \dfrac{c'}{\lambda'} = \dfrac{c+v}{c-u}f_0$ です.

注. 図が書きやすいのと面倒な注釈を入れる必要がないことから両者が向かっている場合を考えましたが, 実は**波の伝わる方向を正とする**ことで $f = \dfrac{c-v}{c-u} f_0$ となり見やすくなります.

注. $\dfrac{|u|}{c}, \dfrac{|v|}{c} \to 0$ とすると確かに $f = \dfrac{1-v/c}{1-u/c} f_0 \to f_0$ となっています.

問題 3.2: 斜め Doppler 効果 (1983 年東京大学第 1 問 (1) 改題)

音源の速度方向からはずれた位置で聞く音に対するドップラー効果を考える.
振動数 f_0 で振動することにより音を発生する装置をもつ音源が, 周囲に音を出しながら, 音速 c より遅い速度 v で, 等速直線運動をしている. 定位置 A で音の振動数を測定する. 音源の運動する直線上に点 B をとる. A, B 間の距離は L であり, B から見て A は音源の速度方向と角度 θ の方向にある（図 1）.
音源が B に到達する瞬間に出す音波と, それから音源の振動の一周期後に出す音波とは, 測定点 A に時間差 $T =$ $\boxed{\text{イ}}$ で到着する. 音源の振動数 f_0 が v/L に比べ充分大きいときは, 音源が B を通過しながら出す音が, A では振動数 f の音として聞こえる. この場合, 時間差 T を与える式から, 振動数 f は f_0, c, v, θ を用いて $f =$ $\boxed{\text{ロ}}$ とあらわすことができる.
必要ならば次の近似式を用いよ. $|x|$ が 1 に比べ充分小さいときは $(1+x+bx^2)^\alpha \fallingdotseq 1+\alpha x$.

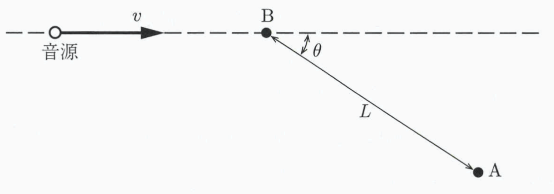


図 1

これは導出 2 です. 音源の振動の一周期 $\dfrac{1}{f_0}$ の間に音源が B から進んだ位置を C とおき, $L' = \mathrm{AC}$ とおくと,

$$L'^2 = L^2 + \left(\frac{v}{f_0}\right)^2 - 2L\frac{v}{f_0}\cos\theta$$

です. B および C からの音波が A に到達する時間差 T は

$$T = \frac{1}{f_0} - \frac{1}{c}(L - L') = \frac{1}{f_0} - \frac{L}{c}\left[1 - \left\{1 - 2\frac{v}{Lf_0}\cos\theta + \left(\frac{v}{Lf_0}\right)^2\right\}^{1/2}\right] \fallingdotseq \left(1 - \frac{v}{c}\cos\theta\right)\frac{1}{f_0}$$

なので $f = \dfrac{c}{c - v\cos\theta} f_0$ となり, **視線速度** $v\cos\theta$ で近づいてくるときの公式と一致しています.

問題 3.3: Lorentz 因子 (1995 年東北大学第 3 問 (5) 改題)

宇宙人の住む天体 X が地球に向かってまっすぐ速度 v で接近している．この天体から地球に向けて発射された光が地球上で観測された．天体 X では振動数 f の光を発射したとしよう．光は, 光速 c で伝わるので, 地球で測定される振動数 f_1 は $\boxed{\quad A \quad}$ となる．
さて, 天体 X からこの過程をみるとどうなるだろうか．宇宙人にとっては, 逆に地球が速度 v で天体 X に近づいてくるように見える．天体 X でこの光の速度が c' であったとすると, 地球での振動数 f_2 は $\boxed{\quad B \quad}$ となる．
この 2 つは同じ現象を違う立場からみたものなので, 結果は等しいはずであり, そのためには c' と c は異なる値でなければならない．ところが, 天体 X でも光速は地球と同じ値 c であることが判明した．この矛盾を説明できる可能性として次のような仮説をたてる．

> 地球人からみると, 地球上で単位時間だけ経過する間に, 地球に対して速度 v で運動している天体 X 上では時間 k が経過する．

すると, 地球の単位時間に天体 X から発射される光の波形がもつ山の数は f ではなくその k 倍になるので, f_1 も k 倍しなければならない．
もし, 物理法則が地球と天体 X とで異ならないならば, 同様に次の仮説が成立するはずである．

> 宇宙人からみると, 天体 X で単位時間だけ経過する間に, 天体 X に対して速度 v で運動している地球上では k 秒が経過する．

この仮説を用いると, f_2 は $\boxed{\quad C \quad}$ 倍されなければならない．このとき, f_1 と f_2 が等しいためには, $k = \boxed{\quad D \quad}$ であればよい．これは, アインシュタインの特殊相対性理論から導かれる結論そのものである．

公式より $\boxed{\mathrm{A}}$ $f_1 = \dfrac{c}{c-v}f$, $\boxed{\mathrm{B}}$ $f_2 = \dfrac{c'+v}{c'}f$ となり, $f_1 = f_2 \iff c' = c - v$ で $v \neq 0$ より $c' \neq c$ です．ところが実験によると常に $c' = c$ が成り立っています．しかしながら同じ現象を違う立場から見ても結果は等しいはずなので, 今までに立てたモデルが不適切であった可能性があります．

そこで所要時間をイジってみることにします．「地球人から観測すると, 地球での 1 秒は天体 X での k 秒」, それと対称的に「宇宙人から観測すると, 天体 X での 1 秒は地球での k 秒」という仮説を置いてみましょう．波の数は立場によらないので, それぞれ k 倍, $\boxed{\mathrm{C}}$ $\dfrac{1}{k}$ 倍されることに注意すると $kf_1 = \dfrac{f_2}{k}$ より $\boxed{\mathrm{D}}$ $k = \sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}$ となり, これは Lorentz 因子の逆数です．

簡単な帰結として, $k \in \mathbb{R} \iff |v| \leqq c$ です．科学啓蒙書でもお馴染みの「すべての物体は真空中の光速を超えた速さで動くことはできない」という結論が出てきましたね．

4 | さいごに

Doppler 効果は事実 1.2「波動の伝播速度は有限である」に起因する現象であるということを実感していただけたでしょうか．最後に応用例とその展望について説明して締めることにいたします．

まず, 時間の都合で扱いませんでしたが, 複数の波が重ね合うときに**干渉**という現象が起こることがあり, その代表現象の一つとして**うなり**があります．Doppler 効果とうなりを組み合わせることで, 自動車の速度違反取締りや野球の球速測定に用いられるスピードガンや, 血流測定に用いるような医療用超音波検査装置の原理が説明されます．

また, 光の Doppler 効果は惑星の観測にも使われます．惑星からの光はあまりに弱くて直接観測するのは不可能なのですが, Doppler 効果を利用すれば間接的に観測することが可能になります．2006 年東京大学第 1 問 II がこのことを出題しています．

そして古典物理学を超えた現代物理学の世界でも Doppler 効果はまだまだ利用価値のある現象です．その代表例がレーザー冷却です．気体分子の温度を絶対零度近くまで冷却するのは当然大変ですが, そこで Doppler 冷却という手法が存在しており, これは入試問題でもネタとして使われることがあります．原子分野について説明するのは絶対に時間が足りませんから皆さんの自習課題として割愛させていただきます．また, 原子炉の安定性にも Doppler 効果は関わっています．これは入試問題としては見たこともなく出されもしないだろうとは思いますが, 我々の社会の基盤となっている科学技術を理解するという点では非常に重要なことでしょう．

なお, 今回の振動・波動論ではひとまず空間を 3 次元 Euclid 空間, 時間を 1 次元 Euclid 空間として議論を始めることにしましたが, 問題 3.3 からも示唆されるように相対論ではこの仮定にメスをいれることになります．そして非相対論的な現象はあくまでも物体の速度が光速に比べ十分小さいときの近似にすぎなかったと解釈するわけです．実は Doppler 効果, とくに光の Doppler 効果は, 相対論的にもう一度議論し直す必要があります[*2]．こうして物理学はモデルを作っては検証し破棄し作っては検証し破棄し……という絶え間なきプロセスのもとに成り立っているのです．それが数学と自然科学の相違点の大きな一つなのです．

[*2] では入試問題では出題できないのかというとそうではありません．詳しくは冨田博之「光のドップラ効果」(http://www7b.biglobe.ne.jp/~fortran/education/short.html#Doppler) をご覧ください．

編集後記　『住めば都』

編集長　松下幸右

去年, 元編集長である熊谷先輩のもとで, 僕は部誌作りを手伝っていました (と言っても僕は図と表を作っただけですが)。そのときに思ったことが, やはり大変そうだなぁということ。僕も当時課題で出されたレポートを TEX で書いたりすることはありましたが, 部誌はその比ではありません。打つ文字数は 10 万字を超えるほどです。僕は編集長となりましたが, なった当時は, 僕がこれほどの部誌をかけるのかと一抹の不安もありました。

さて月日が経ち, いざ編集にとりかかってみると, あることに気づきました。それは, 意外と編集の作業が楽しいこと。僕は編集などの作業があまり得意ではなかったのですが, 『編集長』という肩書を与えられ, とりかかってみると楽しくなるものですね。『住めば都』というように, 役職に入るにはその役職になりきることが大事なのかもしれません (少し違う)。とはいえ, 簡単に出来る作業ではありません。今回は Excel やメモ帳のファイル形式で提出してくる人はいなかったものの, 十ページにわたる手書きの数式が送られてきました。それをを何十時間もかけて写したことは一生忘れることはないでしょう。また, その際に実は何人か手伝ってくれた人がいます。本当はその人たちも編集後記を書くべきなのかもしれませんが, 尺の都合上それは叶わないので, この場を借りてお礼をします。根岸先輩, 藤浪先輩, 長谷川君, 古橋君, ありがとうございました。

今回は様々な人たちに助けられてこの部誌を作り上げました。そう考えると感慨深いものもありますが, それとは別に, 僕が至らなかったところも多いです。来年に向けて僕は TEX の技術をあげる他, 様々なものを直していこうと思います。特に期限。何人かに助けてもらったのは, 結局僕が期限に間に合いそうになかったからです。来年はきちんとそこを正そうと思います。

最後に。今年は様々な事がありました。その一連の流れを作ったのはやはりコロナウイルス。社会に様々な悪影響を与えた一方, 技術を数年分進化させたとかメリットもあるそうです。しかし, 結局感染するのは危険なので, 皆さん 3 つの『密』を避け, 健康にはお気を付けください。(うん, いい事いった。)