解答 **1.** (1)

$$\frac{2n+1}{n^2(n+1)^2} = \frac{1}{n^2} - \frac{1}{(n+1)^2}$$

だから

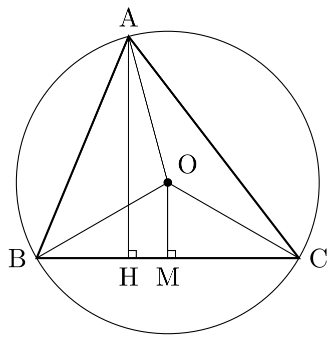
$$\begin{aligned}\frac{3}{(1\times 2)^2} + \frac{5}{(2\times 3)^2} + \frac{7}{(3\times 4)^2} + \cdots + \frac{199}{(99\times 100)^2} &= \frac{1}{1^2} - \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{99^2} - \frac{1}{100^2} \\ &= 1 - \frac{1}{100^2} \\ &= \frac{9999}{10000}.\end{aligned}$$

(2)

$$x^2y + xy^2 + xz^2 + y^2z - z^3 = (x+y-z)(xy+yz+z^2)$$

(3) $x = 3.318$, $a = 4.682$, $b = 9.807$ とする．

$$\begin{aligned}14.489\times 3.318 + 4.682\times 9.807 + 3.318\times 3.318 &= abx + ab + x^2 \\ &= (x+a)(x+b) \\ &= 13.125\times 8 = 105\end{aligned}$$



解答 **2.** (1) このとき O は $\triangle$ABC の内部にあるから，$\triangle$BCO の面積を S_3 とすると，

$$S_1 + S_2 + S_3 = \triangle\mathrm{ABC} = \frac{1}{2}\cdot a\cdot \mathrm{AH}.$$

$$S_3 = \frac{1}{2}\cdot a\cdot \mathrm{OM}.$$

したがって

$$S_1 + S_2 = \frac{1}{2}a(\mathrm{AH} - \mathrm{OM}).$$

ここで，

$$\begin{aligned}\mathrm{AH} &\leq \sqrt{\mathrm{AH}^2 + \mathrm{MH}^2} \\ &= \mathrm{AM} \\ &\leq \mathrm{AO} + \mathrm{OM} \\ &= R + \mathrm{OM}.\end{aligned}$$

したがって

$$\mathrm{AH} - \mathrm{OM} \leq R \tag{★}$$

であるから，

$$S_1 + S_2 \leq \frac{1}{2}aR.$$

(2) $\mathrm{CA} = b, \mathrm{AB} = c$ とすると (★) と同様に

$$S_3 + S_1 \leq \frac{1}{2}bR \tag{☆}$$

$$S_2 + S_3 \leq \frac{1}{2}cR \tag{◆}$$

であるから, (★)+(☆)+(◆) より

$$2(S_1+S_2+S_3) \leq \frac{1}{2}(a+b+c)R.$$

ここで,

$$S_1+S_2+S_3 = \triangle\mathrm{ABC} = \frac{1}{2}(a+b+c)r$$

であるから

$$(a+b+c)r \leq \frac{1}{2}(a+b+c)R.$$

よって

$$R \geq 2r.$$

解答 **3.** (1) $2^* = 2$, $6^* = 2+3 = 5$, $12^* = 2\times 2+3 = 7$.

(2) $n = p^k$, $n^* = kp$ であるから $n = n^*$ は $p^{k-1} = k$ であることと同値である. $k \geq 3$ なら

$$p^{k-1} \geq 2^{k-1} > k$$

なので等号は成り立たない. よって $k = 1, 2$ である. $k = 2$ のとき,

$$p = 2$$

となる. また $k = 1$ なら任意の p で成り立つ. 以上より, $n = n^*$ となるのは $n = 2^2, p$ の場合である.

(3) (2) の計算より $p^k \geq kp$ であることがわかることに注意する.
$n = p_1^{k_1}\cdots p_r^{k_r}$ とする. まず $r \geq 2$ とする. $a, b \geq 2$ のとき

$$ab - a - b = (a-1)(b-1) - 1 \geq 0.$$

この等号が成り立つのは $a = b = 2$ のときのみ.

$$p_1^{k_1}p_2^{k_2} \geq p_1^{k_1} + p_2^{k_2}.$$

さらに

$$p_1^{k_1}p_2^{k_2}p_3^{k_3} \geq (p_1^{k_1}+p_2^{k_2})p_3^{k_3} \geq p_1^{k_1}+p_2^{k_2}+p_3^{k_3}.$$

繰り返して

$$p_1^{k_1}\cdots p_r^{k_r} \geq p_1^{k_1}+\cdots+p_r^{k_r} \geq k_1p_1+\cdots+k_rp_r.$$

ここで等号が成り立つのは $p_1^{k_1} = \cdots = p_r^{k_r} = 2$ のときのみ. $p_1 < \cdots < p_r$ だから $r \geq 2$ では等号が成り立たないことがわかる.
よって $r = 1$ であり, これは (2) の場合に帰着される. よって $n = n^*$ となるのは $n = 2^2, p$ の場合である.

解答 **4.** (1) AC は一辺が長さ 1 の正 5 角形の対角線である. よって $\mathrm{AC} = \dfrac{\sqrt{5}+1}{2}$.

(2) AD と BC は対称性より中心を通る. したがって 四角形 ABDC は正 20 面体の中心を通るので, この四角形の対角線の長さの半分が外接球の半径 R となる. よって

$$4R^2 = 1^2 + \left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^2,$$

$$R^2 = \frac{1+\dfrac{5+1+2\sqrt{5}}{4}}{4} = \frac{10+2\sqrt{5}}{16}.$$

(3) 中心を O とすると, 三角錐 OAGE を考える. 正三角形 AGE の中心を X とする. 内接球の半径を r とすると

$$r^2 + \mathrm{X}^2 = R^2$$

である

$$\mathrm{X} = \frac{\sqrt{3}}{2}\frac{2}{3} = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

以上より,

$$r^2 = R^2 - \frac{1}{3} = \frac{10 + 2\sqrt{5}}{16} - \frac{1}{3} = \frac{7 + 3\sqrt{5}}{24}.$$