Prüfung zur Systemtheorie und Regelungstechnik I, Universität Freiburg, SoSe 2019 (Prof. Dr. M. Diehl)

Mikroklausur 2 am 7.6.2019

Übungsgruppe: 1 ☐ Adil Younas | 2 ☐ Vanessa Graf | 3 ☐ Max Schlichting

Name: Matrikelnummer: Punkte: /9

Füllen Sie bitte Ihre Daten ein und machen Sie jeweils genau ein Kreuz bei der richtigen Antwort. Sie dürfen Extrapapier für Zwischenrechnungen nutzen, aber bitte geben Sie am Ende nur dieses Blatt ab. Richtige Antworten zählen 1 Punkt, falsche, keine oder mehrere Kreuze 0 Punkte.

1. Welches der folgenden vier Systeme ist nicht BIBO stabil? Jedes System ist durch seine Sprungantwort $h(t)$ beschrieben. T ist eine positive Konstante.

(a) ☐ $e^{-t}(\cos t + \sin t)$	(b) ☐ $e^{-t} - 5$	(c) ☒ $1 - \cos \frac{t}{T}$	(d) ☐ $\cos t e^{-t}$

Es handelt sich um die Sprungantwort eines ungedämpftem PT2-Gliedes. Ungedämpfte Oszillation $\Rightarrow$ nicht BIBO stabil

2. Welches der folgenden vier Systeme beschreibt NICHT das gleiche Eingangs- Ausgangsverhalten wie $\ddot{y} + 7\dot{y} - 2y = 2u$?

(a) ☐ $\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -7 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u, \quad y = \begin{bmatrix} 2 & 0 \end{bmatrix} x$	(b) ☒ $\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 7 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u, \quad y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x$
(c) ☐ $\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & -7 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} u, \quad y = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} x$	(d) ☐ $4\ddot{y} = 8y - 28\dot{y} + 8u$

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = 2x_1 + 7x_2 + u, \quad y = x_1$$
$$\ddot{x}_1 = \dot{x}_2 = 2x_1 + 7x_2 + u = 2x_1 + 7\dot{x}_1 + u$$
$$\Rightarrow \ddot{y} - 7\dot{y} - 2y = u$$

3. Welches der folgenden Systeme mit $\dot{x} = Ax + Bu$, $y = Cx + Du$ ist in der Ruhelage $x_{\text{ss}} = u_{\text{ss}} = 0$ asymptotisch stabil nach Lyapunov?

(a) ☐ $A = \begin{bmatrix} 7 & 4 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, C = [1\ 0], D = [0]$	(b) ☐ $A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, C = [0\ 1], D = [1]$
(c) ☐ $A = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}, C = [1\ 1], D = [0]$	(d) ☒ $A = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, C = [0\ 1], D = [1]$

$$\begin{aligned}
\det(\lambda I - A) &= \det(\begin{bmatrix} \lambda+3 & -1 \\ -1 & \lambda+3 \end{bmatrix}) \\
&= (\lambda+3)(\lambda+3) - (-1 \cdot -1) \\
&= \lambda^2 + 3\lambda + 3\lambda + 9 - 1 \overset{!}{=} 0 \\
\lambda_{1,2} &= -\frac{6}{2} \pm \sqrt{(\frac{6}{2})^2 - 8} \\
\lambda_{1,2} &= -3 \pm 1 \\
\lambda_1 &= -2 \\
\lambda_2 &= -4 \\
\Re(\lambda_{1,2}) < 0 &\Rightarrow \text{asymptotisch stabil}
\end{aligned}$$

4. Welche Impulsantwort hat das System $\dot{y} + 2ky = 3\dot{u}$? k ist eine Konstante.

(a) ☐ $3\delta(t)$	(b) ☒ $-6ke^{-2kt} + 3\delta(t)$	(c) ☐ $-3ke^{-2kt} + 3\delta(t)$	(d) ☐ $3ke^{-2kt}$

$$\Rightarrow A = [-2\ k], B = [1], C = [-6\ k], D = [3]$$
$$g(t) = Ce^{At}B + D\delta(t) = -6ke^{-2kt} + 3\delta(t)$$

5. Welche Sprungantwort $h(t)$ (für $t \geq 0$) hat das System $\dot{y} = \sin(\pi u)$, wenn die Anfangsbedingung $y_0 = 2$?

(a) ☒ $\sin(\pi t) + 2$	(b) ☐ 2	(c) ☐ $-t + 2$	(d) ☐ $2 - e^{-\pi t}$

$$u = 1 \Rightarrow \dot{y} = \sin(\pi) \Rightarrow y = \sin(\pi)t + 2$$

6. Ein LTI-System wird durch die E/A-Differentialgleichung $4\ddot{y}+2\dot{y} = u-y$ beschrieben. Wie lautet das charakteristische Polynom $p_A(\lambda)$?

(a) [x] $\lambda^2 + \frac{1}{2}\lambda + \frac{1}{4}$	(b) [ ] $\lambda^2 - \frac{1}{4}\lambda$	(c) [ ] $4\lambda^2 + 2\lambda$	(d) [ ] $\lambda - 4$

$$4\ddot{y} + 2\dot{y} = u - y \Leftrightarrow \ddot{y} + \frac{1}{2}\dot{y} + \frac{1}{4}y = \frac{1}{4}u$$
$$\Rightarrow p_A(\lambda) = \lambda^2 + \frac{1}{2}\lambda + \frac{1}{4}$$

7. Welches charakteristische Polynom $p_A(\lambda)$ hat das LTI-System $\dot{x} = Ax + Bu, y = Cx + Du$ mit den Matrizen $A = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 2 & 4 \end{bmatrix}$ und $D = \begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix}$?

(a) [ ] $\lambda^2 + 6\lambda + 7$	(b) [x] $\lambda^2 - 6\lambda + 7$	(c) [ ] $\lambda^2 + 6\lambda - 7$	(d) [ ] $\lambda^2 - 6\lambda - 7$

$$p_A(\lambda) = \det(\lambda I - A) = (\lambda - 4)(\lambda - 2) - (-1 \cdot -1) = \lambda^2 - 4\lambda - 2\lambda + 8 - 1 = \lambda^2 - 6\lambda + 7$$

8. Bestimmen Sie die Polstellen des Systems, das durch folgende E/A-Differentialgleichung beschrieben wird: $3\ddot{y} - 4\dot{y} + y = 3\ddot{u} + 10\dot{u} - 2u$.

(a) [ ] $\{1, \frac{2}{3}\}$	(b) [ ] $\{1, -\frac{1}{3}\}$	(c) [ ] $\{-1, -\frac{1}{3}\}$	(d) [x] $\{1, \frac{1}{3}\}$

$$3\ddot{y} - 4\dot{y} + y = 3\ddot{u} + 10\dot{u} - 2u \Leftrightarrow \ddot{y} - \frac{4}{3}\dot{y} + \frac{1}{3}y = \ddot{u} + \frac{10}{3}\dot{u} - \frac{2}{3}u$$
$$\Rightarrow p_A(\lambda) = \lambda^2 - \frac{4}{3}\lambda + \frac{1}{3}$$
$$p_A(\lambda) \stackrel{!}{=} 0 \Leftrightarrow \lambda^2 - \frac{4}{3}\lambda + \frac{1}{3} = 0 \Leftrightarrow \lambda_{1,2} = \{1, \frac{1}{3}\}$$

9. Ein System hat die Sprungantwort $h(t) = 1 + e^{-t}$ (für $t \geq 0$ und $h(t) = 0$ sonst). Was ist seine Impulsantwort $g(t)$ (für $t \geq 0$)?

(a) [x] $2\delta(t) - e^{-t}$	(b) [ ] $-e^{-t}$	(c) [ ] $\delta(t) - e^{-t}$	(d) [ ] $-te^{-t}$

$$\begin{aligned} g(t) &= \frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\sigma(t) + e^{-t}\sigma(t)) \\ &= \delta(t) + e^{-t}\delta(t) - e^{-t}\sigma(t) \\ &= 2\delta(t) - e^{-t} \end{aligned}$$