Systemtheorie und Regelungstechnik 1 – Abschlussklausur

Prof. Dr. Moritz Diehl
IMTEK, Technische Fakultät, Universität Freiburg,
und OPTEC/ESAT-STADIUS, KU Leuven

September 23, 2013, 9:00-11:00, Freiburg

page	1	2	3	4	5	6	7	8	9	sum
points on page (max)	9	11	6	5	8	4	7	0	0	50
points obtained										
intermediate sum										
intermediate sum (max)	9	20	26	31	39	43	50			

Note: Klausur eingesehen am: Unterschrift des Prüfers:

Nachname: Vorname: Matrikelnummer:

Fach: Studiengang: Bachelor ☐ Master ☐ Lehramt ☐ Sonstiges ☐

Raum: HS 036 ☐ HS 026 ☐ SR 010/14 ☐ Unterschrift:

Füllen Sie bitte Ihren Namen und die anderen Angaben oben ein. Auf den folgenden 7 Seiten finden Sie 37 Fragen mit zusammen 50 Punkten. Geben Sie die Antworten direkt unter den Fragen an und nutzen Sie nach Möglichkeit die Rückseiten für Zwischenrechnungen. Sie dürfen auch Extrapapier nutzen, notieren Sie dann immer deutlich Ihren Namen und Matrikelnummer und die Aufgabennummer, und verweisen Sie im Hauptteil auf das Extrablatt. Als Hilfsmittel sind neben Schreibmaterial und einem Taschenrechner auch zwei doppelseitige Blätter mit Formelsammlung und Notizen erlaubt; einige juristische Hinweise finden sich in einer Fußnote.[1] Machen Sie bei den Multiple-Choice Fragen jeweils genau ein Kreuz bei der richtigen Antwort. Beantworten Sie zunächst die Ihnen einfach fallenden Fragen. Wenn Sie pro Punkt zwei Minuten Zeit rechnen, sind Sie nach einer Stunde und 40 Minuten fertig. Viel Erfolg!

[1] PRÜFUNGSUNFÄHIGKEIT: Durch den Antritt dieser Prüfung erklaren Sie sich für prüfungsfähig. Sollten Sie sich während der Prüfung nicht prüfungsfahig fühlen, können Sie aus gesundheitlichen Gründen auch während der Prufung von dieser zurücktreten. Gemäß den Prüfungsordnungen sind Sie verpflichtet, die für den Rücktritt oder das Versäumnis geltend gemachten Gründe unverzüglich (innerhalb von 3 Tagen) dem Prüfungsamt durch ein Attest mit der Angabe der Symptome schriftlich anzuzeigen und glaubhaft zu machen. Weitere Informationen: https://www.tf.uni-freiburg.de/studium/pruefungen/pruefungsunfaehigkeit.html.
TÄUSCHUNG/STÖRUNG: Sofern Sie versuchen, während der Prüfung das Ergebnis ihrer Prüfungsleistung durch Täuschung (Abschreiben von Kommilitonen ...) oder Benutzung nicht zugelassener Hilfsmittel (Skript, Buch, Mobiltelefon, ...) zu beeinflussen, wird die betreffende Prüfungsleistung mit “nicht ausreichend” (5,0) und dem Vermerk Täuschung bewertet. Als Versuch gilt bei schriftlichen Prüfungen und Studienleistungen bereits der Besitz nicht zugelassener Hilfsmittel während und nach der Ausgabe der Prüfungsaufgaben. Sollten Sie den ordnungsgemB̈en Ablauf der Prüfung stören, werden Sie vom Prüfer/Aufsichtsführenden von der Fortsetzung der Prüfung ausgeschlossen. Die Prüfung wird mit “nicht ausreichend” (5,0) mit dem Vermerk Störung bewertet.

1. Ein LTI-System wird durch die Zustandsgleichung $\dot{x} = Ax + Bu, y = Cx + Du$ beschrieben, mit $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 3 & 0 \end{bmatrix}$, $D = \begin{bmatrix} 4 \end{bmatrix}$. Was ist das charakteristische Polynom $p_A(\lambda)$?

(a) [x] $(\lambda - 1)(\lambda - 2)$	(b) [ ] $\lambda^2 + 3\lambda + 4$
(c) [ ] $(\lambda + 1)(\lambda + 2)$	(d) [ ] $\lambda^2 - 4\lambda + 3$

2. Ein LTI-System hat die Sprungantwort $h(t) = 1 - \cos(t)$. Was ist seine Impulsantwort $g(t)$?

(a) [x] $\sin(t)$	(b) [ ] $-\sin(t)$	(c) [ ] $\cos(t)$	(d) [ ] $-\cos(t)$

3. Ein LTI-System hat die Impulsantwort $g(t) = \sin(t)$ für $t \geq 0$. Ist das System BIBO-stabil?

(a) [ ] Ja	(b) [x] Nein

4. Ein System ist durch die gewöhnliche Differentialgleichung $\ddot{y}(t) = u(t) + \sin(t) \cdot y(t)$ beschrieben. Ist das System *linear* und/oder *zeitinvariant* ?

(a) [x] nur linear	(b) [ ] nur zeitinvariant
(c) [ ] linear und zeitinvariant	(d) [ ] keines von beiden

5. Ein System ist durch die gewöhnliche Differentialgleichung $\ddot{y}(t) = u(t) + \sin(y(t))$ beschrieben. Ist das System *linear* und/oder *zeitinvariant* ?

(a) [ ] nur linear	(b) [x] nur zeitinvariant
(c) [ ] linear und zeitinvariant	(d) [ ] keines von beiden

6. Ein System ist durch die gewöhnliche Differentialgleichung $\ddot{y}(t) = u(t) + y(t)$ beschrieben. Ist das System *linear* und/oder *zeitinvariant* ?

(a) [ ] nur linear	(b) [ ] nur zeitinvariant
(c) [x] linear und zeitinvariant	(d) [ ] keines von beiden

7. Welche Übertragungsfunktion $G(s)$ hat das LTI-System $\dot{x}(t) = -4x(t) + u(t),\ y(t) = 3x(t) + 2u(t)$?

(a) [ ] $\frac{-4s+1}{3s+1}$	(b) [x] $\frac{2s+11}{s+4}$	(c) [ ] $\frac{3}{s+4} + 11$	(d) [ ] $\frac{4}{s+2} + 3$

8. Welches System wird durch die Übertragungsfunktion $G(s) = \frac{s+2}{s^2+1}$ beschrieben ?

(a) [ ] $\dot{y} + 2y = \ddot{u} + u$	(b) [x] $\ddot{y} + y = \dot{u} + 2u$	(c) [ ] $\ddot{y} + 2\dot{y} = \ddot{u} + u$	(d) [ ] $\ddot{y} + y = \ddot{u} + 2\dot{u}$

9. Hintereinanderschaltung von $G_1(s) = \frac{3}{s^2-2}$ und $G_2(s) = \frac{2}{s^2+2}$ resultiert in dem System $G(s) = \ldots$

(a) [ ] $\frac{3s^2+6}{2s^2-4}$	(b) [ ] $\frac{5s^2+2}{s^4-4}$	(c) [ ] $\frac{5}{2s^2}$	(d) [x] $\frac{6}{s^4-4}$

points on page: 9	

10. Ist die folgende Aussage richtig oder falsch? “Eine Totzeit erzeugt in einem dynamischen System eine konstante Phasendrehung”.

(a) ☐ Richtig	(b) ☒ Falsch

11. Ist die folgende Aussage richtig oder falsch? “Bei einem LTI System ist der Phasenverlauf immer monoton fallend”.

(a) ☐ Richtig	(b) ☒ Falsch

12. Ist die folgende Aussage richtig oder falsch? “Ein System ist stabil, wenn dessen Eigenwerte in der rechten komplexen Halbebene liegen”.

(a) ☐ Richtig	(b) ☒ Falsch

13. Ist die folgende Aussage richtig oder falsch? “Ein System, das steuerbar ist, ist auch immer stabil”.

(a) ☐ Richtig	(b) ☒ Falsch

14. Die Übertragungsfunktion $G(s)$ eines SISO Systems $\dot{x} = Ax + Bu, y = Cx + Du$ ist gegeben durch:

(a) ☐ $C(A - sI)^{-1}B + D$	(b) ☒ $C(sI - A)^{-1}B + D$
(c) ☐ $C(A - sI)^{-1}B$	(d) ☐ $B(sI - A)^{-1}D + B$

15. Der Bode-Phasenplot eines Integrationsgliedes ist konstant und hat den folgenden Wert:

(a) ☐ 90 Grad	(b) ☐ 0 Grad	(c) ☒ -90 Grad	(d) ☐ -180 Grad

16. Der Bode-Phasenplot eines Proportionalgliedes ist konstant und hat den folgenden Wert:

(a) ☐ 90 Grad	(b) ☒ 0 Grad	(c) ☐ -90 Grad	(d) ☐ -180 Grad

17. Der Bode-Amplitudenplot eines Proportionalgliedes $G(s) = 100$ ist konstant und hat den folgenden Wert:

(a) ☐ -20 dB	(b) ☐ 0 dB	(c) ☐ 20 dB	(d) ☒ 40 dB

18. Der Bode-Amplitudenplot eines Integrationsgliedes hat die folgende Steigung (in dB pro Dekade = dB/Dek):

(a) ☒ -20 dB/Dek	(b) ☐ 0 dB/Dek	(c) ☐ 20 dB/Dek	(d) ☐ 40 dB/Dek

19. Betrachten Sie die offene Kette $G_0(s) = \frac{s+27}{s^2+4s+3}$ und den daraus resultierenden geschlossenen Kreis (mit negativem Einheitsfeedback). Was ist der Steady-State Fehler des geschlossenen Kreises?

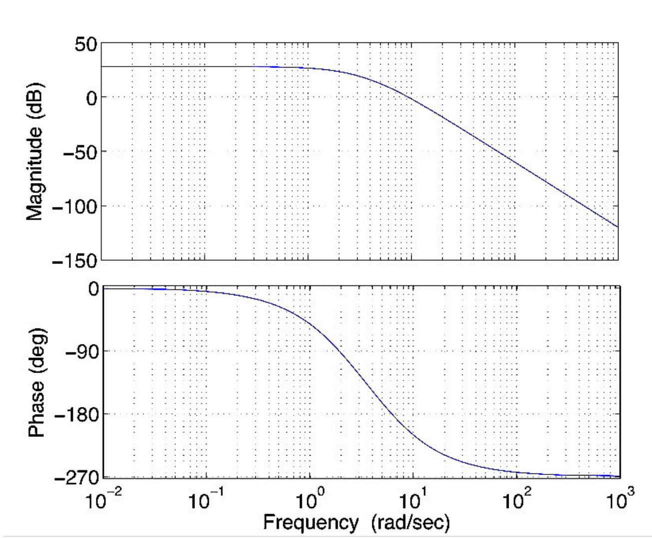
(a) ☐ 1%	(b) ☐ 3%	(c) ☒ 10%	(d) ☐ 27%

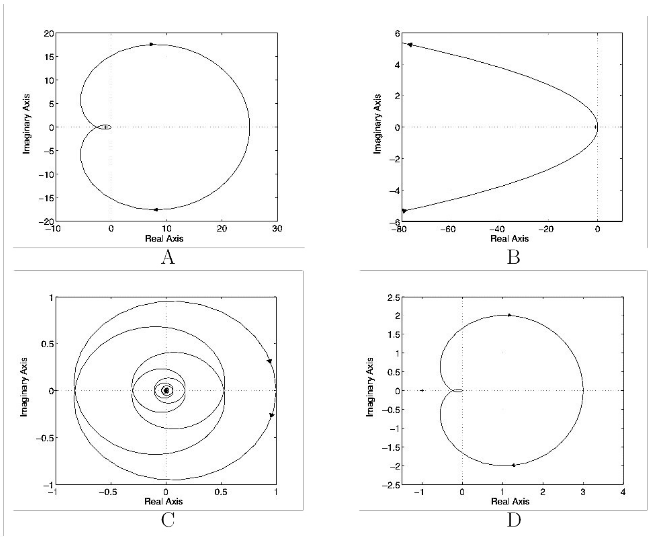
20. Welche Eigenschaften hat die Matrix K, die man durch das MATLAB Kommando `K=place(A,B,p)` erhält ($A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ und $B \in \mathbb{R}^{n\times 1}$) ?

(a) ☐ B ist Eigenvektor von AK mit $AKB = pB$	(b) ☐ AK hat p reelle Eigenwerte aus B
(c) ☐ $A - KB$ hat Eigenwerte aus p	(d) ☒ $A - BK$ hat Eigenwerte aus p

points on page: 11	

21. Betrachten Sie das (stabile) System mit dem folgenden Bode-Diagramm (links) [2]





22. Welches der Nyquist-Diagramme (rechts) entspricht dem Bode-Diagramm aus 21?

(a) [x] A	(b) [ ] B	(c) [ ] C	(d) [ ] D

23. Was ist der relative Grad (Polüberschuss) des Systems mit dem Bode-Diagramm aus 21?

(a) [ ] 0	(b) [ ] 1	(c) [ ] 2	(d) [x] 3

24. Was ist die statische Verstärkung (DC-Gain) des Systems mit dem Bode-Diagramm aus 21?

(a) [ ] 0	(b) [ ] 1	(c) [x] 25	(d) [ ] 50

25. Wo liegt in etwa die Knickfrequenz des Systems mit dem Bode-Diagramm aus 21?

(a) [ ] 0 rad/sec	(b) [x] 4 rad/sec	(c) [ ] 10 rad/sec	(d) [ ] 40 rad/sec

26. Wo liegt in etwa die Schnittfrequenz des Systems mit dem Bode-Diagramm aus 21?

(a) [ ] 0 rad/sec	(b) [ ] 4 rad/sec	(c) [x] 10 rad/sec	(d) [ ] 40 rad/sec

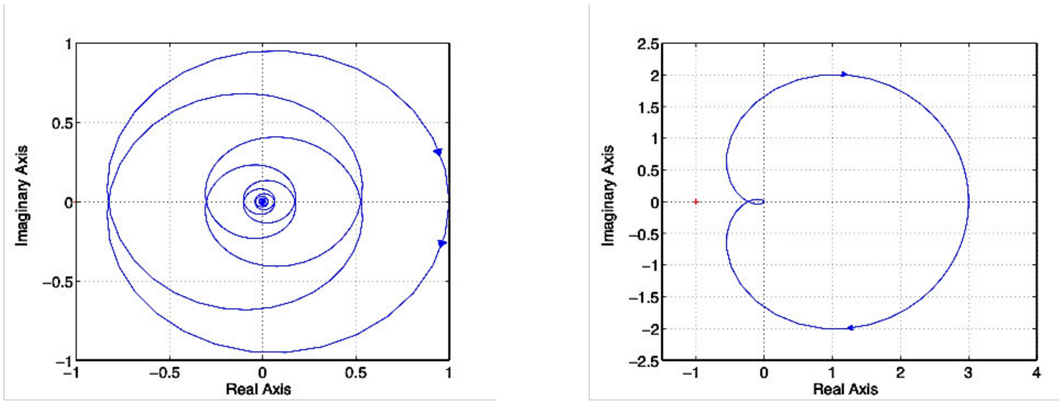
27. Erfüllt das System mit dem Bode-Diagramm aus 21 das Nyquist-Stabilitätskriterium?

(a) [ ] Ja	(b) [x] Nein

points on page: 6	

[2] Bildquelle: Üb. 3, HS12 Regelsysteme, M. Morari

28. Betrachten Sie die Systeme mit den folgenden Nyquist-Diagrammen[2]. Welches der Systeme erfüllt das Nyquist-Stabilitätskriterium, und wenn ja, mit welcher Amplituden- und welcher Phasenreserve?



29. Linkes Diagramm (aus 28): Welche Amplitudenreserve hat das System (in etwa)?

(a) [ ] keine	(b) [ ] 0.8	(c) [x] 1.25	(d) [ ] 4

30. Linkes Diagramm (aus 28): Welche Phasenreserve hat das System (in etwa)?

(a) [ ] keine	(b) [ ] 20 Grad	(c) [ ] 60 Grad	(d) [x] 180 Grad

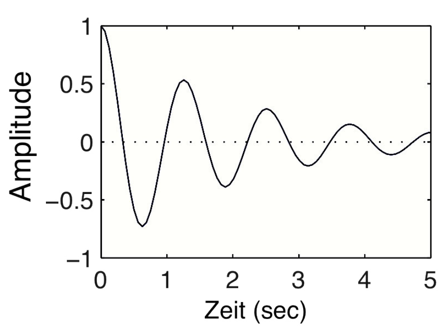
31. Rechtes Diagramm (aus 28): Welche Amplitudenreserve hat das System (in etwa)?

(a) [ ] keine	(b) [ ] 0.8	(c) [ ] 1.25	(d) [x] 4

32. Rechtes Diagramm (aus 28): Welche Phasenreserve hat das System (in etwa)?

(a) [ ] keine	(b) [ ] 20 Grad	(c) [x] 60 Grad	(d) [ ] 180 Grad

33. Betrachten Sie das System mit folgender Impulsantwort[3]:



Welcher Übertragungsfunktion $G(s)$ entspricht es in etwa?

(a) [x] $\frac{s+1}{s^2+s+25}$	(b) [ ] $\frac{1}{s^2+25}$	(c) [ ] $\frac{s+1}{(s+5)(s+5)}$	(d) [ ] $\frac{s^2+1}{(s+5)(s+3)}$

points on page: 5	

[3]Bildquelle: Klausur WS 2007, C. Ament

1. $p_A(\lambda) = \det(\lambda I - A)$

2. $g(t) = \dot{h}(t)$

3. $K_{max} = \int_0^\infty |sin(t)|dt = \lim_{n\to\infty} n \cdot \int_0^\pi sin(t)dt = \lim_{n\to\infty} 2n = \infty$

4. $\ddot{y} = ay + bu \Rightarrow$ linear, aber a zeitabhängig $\Rightarrow \ddot{y} = f(y, u, t)$ nicht zeitinvariant

5. $\ddot{y} \neq ay + bu \Rightarrow$ nicht linear, aber $\ddot{y}$ zeitunabhängig $\Rightarrow$ zeitinvariant

6. $\ddot{y} = ay + bu \Rightarrow$ linear und $\ddot{y}$ zeitunabhängig $\Rightarrow$ zeitinvariant

7. Laplacetransformation $G = \frac{Y}{U}$

$sX = -4X + U \Rightarrow X = \frac{U}{s+4} \quad Y = 3X + 2U$
$\Rightarrow Y = \frac{3U}{s+4} + 2U = \frac{2s+11}{s+4}U$

8. Laplacerücktransformation $G = \frac{Y}{U}$

$\frac{Y}{U} = \frac{s+2}{s^2+1} \Rightarrow Y(s^2 + 1) = U(s + 2)$

9. $G(s) = G_1(s) \cdot G_2(s)$

10. Nein, Phase nimmt immer stärker ab

11. Nein, vgl zB Lead-Compensator

12. Nein, in der linken

13. Nein, diese Eigenschaften sind unabhängig

14. Laplacetransformation $G = \frac{Y}{U}$

$sX = AX + BU \Rightarrow sX - AX = BU \Rightarrow (sI - A)X = BU \Rightarrow X = (sI - A)^{-1}BU$
$Y = CX + DU = C(sI - A)^{-1}BU + DU = (C(sI - A)^{-1}B + D)U$

15. $G(s) = \frac{1}{s} = \frac{1}{j\omega} = \frac{-j}{\omega} \Rightarrow$ auf negativer Im-Achse im Nyquistplot (-90°)

16. $G(s) = k_p \Rightarrow$ auf positiver $(k_p > 0)$ Re-Achse im Nyquistplot (0°)

17. $20\log_{10}(100) = 20 \cdot 2 = 40$

18. $|G(s)| = \frac{1}{\omega} \quad \Delta_{dB} = 20\log_{10}\left(\frac{1}{10\omega}\right) - 20\log_{10}\left(\frac{1}{\omega}\right) = 20\log_{10}\left(\frac{\omega}{10\omega}\right) = -20$

19. $error_{ss} = \frac{1}{1+G_o(0)} = \frac{1}{1+9} = 0,1$

20. Negativeszustandsfeedbackverstärkungsmatrixberechnung

21. Pack die Lupe aus!

22. Phasendrehung von 0° auf -270° $\Rightarrow$ A oder D, Phasenreserve eindeutig negativ $\Rightarrow$ A

23. Phasendrehung von 0° auf -270°=3· -90°

24. Nyquistplot (A) beachten! Oder 28dB exakt ablesen

25. -3dB Punkt, Geraden im Amplitudenplot verlängern und Schnittpunkt ablesen

26. Frequenz bei der die Amplitude 0dB ist

27. Nein, Nyquistplot umrundet den Punkt (-1|0)

28. Aufg. 29-32 am Besten ausmessen, aber Maßstab beachten!

29. negativster Re-Achsenschnittpunkt bei -0,8 $\Rightarrow Gm = \frac{-1}{-0{,}8} = 1,25$

30. Berührpunkt mit dem Einheitskreis bei (1|0)

31. negativster Re-Achsenschnittpunkt bei -0,258 $\Rightarrow Gm = \frac{-1}{-0{,}25} = 4$

32. Einheitskreis einzeichnen, abschätzen 30°$<Pm<$90°

33. Um gedämpft schwingen zu können braucht das System Polstellen mit Imaginärteil(Schwingung) und negativem Realteil(Dämpfung). b nur imaginär($\pm j\sqrt{5}$). c nur real(-5). d nur real (-5,-3).

34. Definieren Sie, wann man ein LTI-System $\dot{x} = Ax + Bu$, $y = Cx + Du$ *beobachtbar* nennt. Testen Sie, ob das System

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \text{und} \quad D = \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}$$

beobachtbar ist.

Ein LTI-System ist beobachtbar, wenn die Matrix $\mathcal{O} = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix}$ Rang n hat.

hier: $CA = \begin{bmatrix} 0 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow \mathcal{O} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ hat Rang 1 aber n ist 2.
Das System ist nicht beobachtbar.

2+2	

35. Für ein LTI-System $\dot{x} = Ax + Bu$, $y = Cx + Du$ wird mit Hilfe einer Matrix L der folgende Zustandsbeobachter entworfen:

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu + L(y - C\hat{x} - Du)$$

Welcher Systemdynamik gehorcht der Beobachterfehler $e(t) = \hat{x}(t) - x(t)$?

Unter welcher Bedingung konvergiert der geschätzte Zustand $\hat{x}$ gegen den wirklichen Systemzustand $x(t)$?

$$\begin{aligned} \dot{e} = \dot{\hat{x}} - \dot{x} &= A\hat{x} + Bu + L(y - C\hat{x} - Du) - Ax - Bu \\ &= A(\hat{x} - x) + L(Cx + Du - C\hat{x} - Du) \\ &= A(\hat{x} - x) + LC(x - \hat{x}) \\ &= (A - LC)(\hat{x} - x) \\ &= (A - LC)e \end{aligned}$$

Der Zustand konvergiert, wenn der Fehler gegen Null geht. Das heißt das System $\dot{e} = (A - LC)e$ muss stabil sein. Die Matrix $(A - LC)$ muss also Eigenwerte mit negativen Realteilen haben.

2+2	

points on page: 8	

36. Betrachten Sie das folgende System in Regelungsnormalform mit

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 5 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Finden Sie (durch Rechnung auf Papier) eine Matrix K, so dass die Closed-Loop Systemmatrix $A_{\mathrm{CL}} = A - BK$ die drei (stabilen) Eigenwerte -1, -2 und -3 hat.

$$K = \begin{bmatrix} k_1 & k_2 & k_3 \end{bmatrix} \quad BK = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ k_1 & k_2 & k_3 \end{bmatrix} \quad A_{CL} = A - BK = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2-k_1 & 3-k_2 & 5-k_3 \end{bmatrix}$$

$$\chi_{CL} = \det(\lambda I - A_{CL}) = \det \begin{bmatrix} \lambda & -1 & 0 \\ 0 & \lambda & -1 \\ k_1 - 2 & k_2 - 3 & \lambda + k_3 - 5 \end{bmatrix}$$ muss die Nullstellen -1,-2 und -3 haben:

$$\lambda^2(\lambda + k_3 - 5) + (k_1 - 2) + \lambda(k_2 - 3) \stackrel{!}{=} (\lambda+1)(\lambda+2)(\lambda+3)$$
$$\lambda^3 + \lambda^2(k_3 - 5) + \lambda(k_2 - 3) + k_1 - 2 \stackrel{!}{=} \lambda^3 + 6\lambda^2 + 11\lambda + 6$$
$$\Leftrightarrow k_3 - 5 = 6, \quad k_2 - 3 = 11, \quad k_1 - 2 = 6$$
$$\Rightarrow k_3 = 11, \quad k_2 = 14, \quad k_1 = 8$$
$$K = \begin{bmatrix} 8 & 11 & 14 \end{bmatrix}$$

4	

points on page: 4	

37. Betrachten Sie das folgende instabile System $\ddot{y} = \kappa \sin(y) + u$ mit einer Konstanten $\kappa > 0$. Entwerfen Sie einen LTI-Regler, der das System auf den Wert $y = 0$ stabilisiert. Linearisieren Sie dafür zunächst das System, und benutzen Sie dann eine Entwurfsmethode Ihrer Wahl. Geben Sie am Ende die Übertragungsfunktion $K(s)$ des Reglers an, und zeigen Sie, dass der geschlossene Regelkreis tatsächlich stabil ist.

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y \\ \dot{y} \end{bmatrix} \quad \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, u) = \begin{bmatrix} f_1(\mathbf{x}, u) \\ f_2(\mathbf{x}, u) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ \kappa \sin(x_1) + u \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{x_{ss}} = \begin{bmatrix} 0 \\ ? \end{bmatrix} \quad u_{ss} = ?$$

$$Linearisierung : A = \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x_{ss}}, u_{ss}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\mathbf{x_{ss}}, u_{ss}) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(\mathbf{x_{ss}}, u_{ss}) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(\mathbf{x_{ss}}, u_{ss}) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(\mathbf{x_{ss}}, u_{ss}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \kappa \cos(0) & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \kappa & 0 \end{bmatrix}$$

$$B = \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial u}(\mathbf{x_{ss}}, u_{ss}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u}(\mathbf{x_{ss}}, u_{ss}) \\ \frac{\partial f_2}{\partial u}(\mathbf{x_{ss}}, u_{ss}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}$$

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \kappa & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u, \quad y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix} u$$

Als Entwurfsmethode wird hier das negative Zustandsfeedback mit Verstärkung K(s) gewählt. Andere Methoden wie Ausgangsfeedback, PID-Regler, PT-Glieder uvm sind auch möglich aber wahrscheinlich schwerer zu berechnen.

Aus der Vorlesung wissen wir das bei unserer Methode gilt: $A_{CL} = A - BK$

$$K = \begin{bmatrix} k_1 & k_2 \end{bmatrix} \quad BK = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ k_1 & k_2 \end{bmatrix} \quad A_{CL} = A - BK = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \kappa - k_1 & -k_2 \end{bmatrix}$$

$$\chi_{CL} = \det(\lambda I - A_{CL}) = \det \begin{bmatrix} \lambda & -1 \\ k_1 - \kappa & \lambda + k_2 \end{bmatrix} = \lambda(\lambda + k_2) + k_1 - \kappa$$

$$= \lambda^2 + \lambda k_2 + k_1 - \kappa) \stackrel{!}{=} 0$$

$$\Rightarrow \lambda_{1,2} = \frac{-k_2 \pm \sqrt{k_2^2 - 4k_1 + 4\kappa}}{2}$$

Wir wollen negative Realteile d.h. k_2 muss positiv sein, der Einfachheit halber: $k_2 = 2$

außerdem muss die Wurzel kleiner sein als k_2. Wir wählen $k_1 = \kappa + 1$, sodass $\sqrt{k_2^2 - 4k_1 + 4\kappa} = 0$

$$K(s) = \begin{bmatrix} \kappa - 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Um die Stabilität zu zeigen berechnen wir erneut die Eigenwerte von A_{CL}:

$$A_{CL} = A - BK = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\chi_{CL} = \det(\lambda I - A_{CL}) = \det \begin{bmatrix} \lambda & -1 \\ 1 & \lambda + 2 \end{bmatrix} = \lambda(\lambda + 2) + 1$$

$$= \lambda^2 + 2\lambda + 1 = (\lambda + 1)^2) \stackrel{!}{=} 0$$

$$\Rightarrow \lambda_{1,2} = -1$$

Der geschlossene Kreis ist stabil.

5+2	

points on page: 7	