Jonas Bilal
Robin Vogt
03.07.2020

Systemtheorie und Regelungstechnik
Übungsblatt 8

Ich hab noch last minute Änderungen vorgenommen, die sind glaube ich in Robins PDF nicht enthalten - für die Bewertung also nur das dannn bewerten bitte :D

Aufgabe 1

1,5/1,5

Für die Laplace-Transformation gilt:

$$f(t) \circ\!\!-\!\!\bullet \quad F(s) = \int_0^\infty f(t) e^{-st} \mathrm{d}t \tag{1}$$

a)

$$\begin{aligned}
f(t) &= \delta(t) \\
F(s) &= \int_0^\infty \delta(t) \cdot e^{-st} \mathrm{d}t \\
F(s) &= e^0 \\
F(s) &= 1
\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}
f(t) &= e^{-at} \\
&= \int_0^\infty e^{-at} \cdot e^{-st} \mathrm{d}t \\
&= \int_0^\infty e^{-at-st} \mathrm{d}t \\
&= \int_0^\infty e^{-(a+s)t} \mathrm{d}t \\
&= -\frac{1}{a+s} \left[e^{-(a+s)t} \right]_0^\infty \\
&= -\frac{1}{a+s} \cdot (0-1) \\
&= \frac{1}{a+s}
\end{aligned}$$

c)

$$
\begin{aligned}
f(t) &= \cos(\omega t) \\
F(s) &= \int_0^\infty \cos(\omega t) \cdot e^{-st} \mathrm{d}t \\
&= \int_0^\infty \frac{1}{2} \left(e^{j\omega t} + e^{-j\omega t}\right) \cdot e^{-st} \mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{2} \left[\int_0^\infty e^{-(-j\omega + s)t} \mathrm{d}t + \int_0^\infty e^{-(j\omega + s)t} \mathrm{d}t \right] \\
&= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{-j\omega + s} + \frac{1}{j\omega + s} \right] \\
&= \frac{1}{2} \cdot \frac{j\omega + s - (j\omega - s)}{\omega^2 + s^2} \\
&= \frac{s}{s^2 + \omega^2}
\end{aligned}
$$

Aufgabe 2 1,5/1,5

a)

$$
\begin{aligned}
F(s) &= \frac{4}{s} \\
f(t) &= 4\sigma(t)
\end{aligned}
$$

b)

$$
F(s) = \frac{3}{s^2 + 9}
$$

$$
\Rightarrow \quad f(t) = \sin(\omega t) \quad \text{für } \omega = 3 \, \frac{rad}{s}
$$

Kausalität $\rightarrow \sigma(t)$

c) Substituiere $u := s + 2$, dann sieht man leicht, das zzusamen mit dem Dämpfungssatz die Funktion lautet:

$$
F(t) = \frac{1}{(s+2)^2} \quad \bullet\!\!-\!\!\circ \quad \tilde{f}(t) = te^{-2t}
$$

$f(t) = \tilde{F}(t) \, \sigma(t) = e^{-2t} \, t \, \sigma(t)$

Kausalität

Aufgabe 3 1/1

Die Impulsantwort eines Systems sei gegeben mit

$$
g(t) = 2t + \sin(\omega t) \quad \text{mit } \omega > 0 \tag{2}
$$

Die Übertragungsfunktion des Sytems ergibt sich als die Laplacetransformierte $G(s)$ der Impulsantwort $g(t)$ mit

$$\begin{aligned}
G(s) &= \frac{2}{s^2} + \frac{\omega}{s^2+\omega^2} \\
&= \frac{2(s^2+\omega^2)+s^2\omega}{s^2(s^2+\omega)^2} \\
&= \frac{2s^2+2\omega^2+s^2\omega}{s^4+s^2\omega} \\
&= \frac{s^2(2+\omega)+2\omega^2}{s^4+s^2\omega^2}
\end{aligned}$$

Aus $G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)}$ folgt

$$\begin{aligned}
\frac{Y(s)}{U(s)} &= \frac{s^2(2+\omega)+2\omega^2}{s^4+s^2\omega^2} \\
(s^4+s^2\omega^2)Y(s) &= (s^2(2+\omega)+2\omega^2)U(s) \\
y^{(4)}+\omega^2\ddot{y} &= (2+\omega)\ddot{u}+2\omega^2 u
\end{aligned}$$

Aufgabe 4 1,5/2

a)

$$\begin{aligned}
G(s) &= G_1(s)\frac{G_2(s)}{1+G_2(s)G_3(s)} \\
&= \frac{s+1}{s^2-2s+3}\frac{\frac{2}{s^2+4}}{1+\frac{1}{s+2}\frac{2}{s^2+4}} \\
&= \frac{s+1}{s^2-2s+3}\frac{2(s+2)}{(s^2+4)(s+2)+2} \\
&= \frac{s+1}{s^2-2s+3}\frac{2(s+2)}{s^3+2s^2+4s+10} \\
&= \frac{2s^2+6s+4}{(s^3+2s^2+4s+10)(s^2-2s+3)} \\
&= \frac{2s^2+6s+4}{s^5+3s^3+8s^2-8s+30} \quad \leftarrow \text{schön}
\end{aligned}$$

b) Mit Hilfe der etwas mühsamen Rechnung ist es nun sehr einfach die Grade zu bestimmen. Der Grad ist offenbar 5, da der Nennergrad 5 ist. Der relative Grad ist 5-~~3~~ 2 = 2 3.

Aufgabe 5 2/2

a)

$$
\begin{aligned}
2\ddot{y} + 10\dot{y} + 12y &= 4\dot{u} + 2u \\
\ddot{y} + 5\dot{y} + 6y &= 2\dot{u} + u \\
s^2Y(s) + 5sY(s) + 6Y(s) &= 2sU(s) + U(s) \\
(s^2 + 5s + 6)Y(s) &= (2s + 1)U(s) \\
G(s) &= \frac{Y(s)}{U(s)} \\
G(s) &= \frac{2s + 1}{s^2 + 5s + 6}
\end{aligned}
$$

b) Polstellen:

$$
\begin{aligned}
\lambda_{0,i} &= -\frac{5}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{5}{2}\right)^2 - 6} \\
\lambda_{0,1} &= -2 \\
\lambda_{0,2} &= -3
\end{aligned}
$$

Nullstellen:

$$
\lambda_1 = -\frac{1}{2}
$$

c) Da das System nur negativen Polstelle hat und diese insbesondere einen negativen Realanteil haben, ist das System BIBO-stabil.

Aufgabe 6 1,5/2

a) Aus einer Zustandsraumdarstellung lässt sich die Übertragungsfunktion berechnen, indem das System Laplace-transformiert wird. Dann erhält man

$$
G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D \tag{3}
$$

Einsetzen der Matrizen A, B, C und D ergibt

$$
\begin{aligned}
G(s) &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \right)^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (s+1) & -1 \\ 0 & (s-2) \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \frac{1}{(s+1)(s-2)} \begin{bmatrix} (s-2) & 1 \\ 0 & (s+1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{s+1} & \frac{1}{(s+1)(s-2)} \\ 0 & \frac{1}{s-2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{s-2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \frac{1}{s-2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix} \\
&= \frac{1}{s-2} \cdot (s-1)
\end{aligned}
$$

b)

$$\dot{y}(t) - 2y(t) = \dot{u}(t) - u$$

9/10 gut :)