Jonas Bilal
Robin Vogt
29.05.2020

Systemtheorie und Regelungstechnik
Übungsblatt 3

Ich hab kurz vor der Abgabe nochmal was geändert, darum weicht die Abgabe ein bisschen ab. Bei der Bewertung bitte nur die für Robin und mich bewerten.

Aufgabe 1

a)

Intuitiv ist die Linearität klar, da $y(t)$ nur als linearer Term auftaucht. Formal: Seien zwei Lösungstrajektorieren $y_1(t), u_1(t)$ und $y_2(t), u_2(t)$ gegeben. Dann gilt für die Summe:

$$\begin{aligned} \lambda f(y_1, u_1) + \mu f(y_2, u_2) = \lambda \dot{y}_1(t) + \mu \dot{y}_2(t) &= \lambda \sin(t) y_1(t) - \lambda k u_1(t) + \mu \sin(t) y_2(t) - \mu k u_2(t) && (1) \\ &= \sin(t)(\lambda y_1(t) + \mu y_2(t)) - k(\lambda u_1(t) + \mu u_2(t)) && (2) \\ &= f(\lambda y_1 + \mu y_2, \lambda u_1 + \mu u_2) && (3) \end{aligned}$$

Also ist die DGL linear. Zur Zeitinvarianz:

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \cos(t) y \neq 0 \quad (4)$$

Zeitinvarianz ist nicht erfüllt.

b)

$$\begin{aligned} f(y_1, u_1) + f(y_2, u_2) = \dot{y}_1(t) + \dot{y}_2(t) &= y_1(t)u_1(t) + y_2(t)u_2(t) && (5) \\ &\neq y_1(t)u_1(t) + y_1(t)u_2(t) + y_2(t)u_2(t) + y_2(t)u_1(t) && (6) \\ &= (y_1(t) + y_2(t))(u_1(t) + u_2(t)) = f(y_1 + y_2, u_1 + u_2) && (7) \end{aligned}$$

Linearität ist nicht erfüllt. Allerdings Zeitinvarianz, da

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} yu = 0 \quad (8)$$

3/3

Aufgabe 2

a)

Der Gleichgewichtszustand erfüllt die Bedingung $\dot{x}(t) = 0$:

$$0 = u(t) - k\sqrt{x(t)} \tag{9}$$

$$x_{ss} = \frac{u_{ss}^2}{k^2} \tag{10}$$

b)

$$A = -\frac{\partial f}{\partial x}|_{x=x_{ss},u=u_{ss}} = -\frac{k}{2}\frac{1}{\sqrt{x_{ss}}} = -\frac{k}{2}\frac{1}{\sqrt{\frac{u_{ss}^2}{k^2}}} = -\frac{1}{2}\frac{k^2}{u_{ss}} \tag{11}$$

$$B = \frac{\partial f}{\partial u}|_{x=x_{ss},u=u_{ss}} = 1 \tag{12}$$

Die Linearisierung ist also

$$\delta\dot{x}(t) = \frac{1}{2}\frac{k^2}{u_{ss}}\delta x(t) + \delta u(t) \tag{13}$$

c)

Einsetzen der Werte ergibt

$$x_{ss} = \frac{u_{ss}^2}{k^2} = 16\ kg \tag{14}$$

$$A = -\frac{k^2}{2u_{ss}} = -0.075\ \frac{1}{\mathrm{s}} \tag{15}$$

$$B = 1 \tag{16}$$

$$\delta\dot{x}(t) = -0.075\ \frac{1}{\mathrm{s}}\delta x(t) + \delta u(t) \tag{17}$$

d)

Gleichgewichtspunkt

$x_{1,ss} = \frac{u_{ss}^2}{k_1^2}$ wie oben. Die Bestimmung von $x_{2,ss}$ führt hingegen mit $\dot{x} = 0$ auf die folgende Gleichung:

$$-k_2(x_2 - T_a) + \frac{T_h - x_2}{x_1}u = 0 \tag{18}$$

$$-k_2 x_2 x_1 + k_2 T_a x_1 + T_h u - x_2 u = 0 \tag{19}$$

$$-x_2(k_2 x_1 + u) + k_2 T_a x_1 + T_h u = 0 \tag{20}$$

$$x_2 = \frac{T_h u + k_2 T_a x_1}{k_2 x_1 + u} = \frac{T_h u + k_2 T_a x_1}{k_2 \frac{u_{ss}^2}{k_1^2} + u_{ss}} \tag{21}$$

Der Gleichgewichtspunkt ist damit

$$x_{ss} = \begin{bmatrix} \frac{u_{ss}^2}{k_1^2} \\ \frac{T_h u + k_2 T_a x_1}{k_2 \frac{u_{ss}^2}{k_1^2} + u} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 16 \text{ kg} \\ 324 \text{ K} \end{bmatrix} \tag{22}$$

Linearisierung

$$A = \frac{\partial f}{\partial x}(x_{ss}, u_{ss}) = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}\frac{k_1^2}{u_{ss}} & 0 \\ -\frac{T_h - x_2}{x_1^2} u_{ss} & -k_2 - \frac{u_{ss}}{x_1} \end{bmatrix} \tag{23}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{1}{2}\frac{k_1^2}{u_{ss}} & 0 \\ -\frac{T_h - \frac{T_h u_{ss} + k_2 Ta \frac{u_{ss}^2}{k_1^2}}{k_2 \frac{u_{ss}^2}{k_1^2} + u_{ss}}}{u_{ss}^3} k_1^4 & -k_2 - \frac{k_1^2}{u_{ss}} \end{bmatrix} \tag{24}$$

$$B = \frac{\partial f}{\partial u}(x_{ss}, u_{ss}) = \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{k_1^2}{u_{ss}^2} T_h - \frac{k_1^2}{u_{ss}^2} \frac{T_h u_{ss} + k_2 T_a \frac{u_{ss}^2}{k_1^2}}{k_2 \frac{u_{ss}^2}{k_1^2} + u_{ss}} \end{bmatrix} \tag{25}$$

Zahlen einsetzen und DGL aufstellen

4/4

$$A = \begin{bmatrix} -0.075\ \frac{1}{\mathrm{s}} & 0 \\ -0.15\ \frac{\mathrm{K}}{\mathrm{kg} \cdot \mathrm{s}} & -0.25\ \frac{1}{\mathrm{s}} \end{bmatrix} \tag{26}$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \frac{K}{kg} \end{bmatrix} \tag{27}$$

$$\delta \dot{x}(t) = A \delta x(t) + B \delta u(t) = \begin{bmatrix} -0.075\ \frac{1}{\mathrm{s}} & 0 \\ -0.15\ \frac{\mathrm{K}}{\mathrm{kg} \cdot \mathrm{s}} & -0.25\ \frac{1}{\mathrm{s}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta x_1(t) \\ \delta x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \frac{K}{kg} \end{bmatrix} \delta u(t) \tag{28}$$

Aufgabe 3

Die Simulationen erreichen die vorhergesagten Gleichgewichtspunkte. Für Zustand 1 bildet der Gleichgewichtspunkt eine obere Schranke (er scheint sogar gegen den Punkt zu konvergieren), für Zustand 2 eine untere (er scheint ebenfalls gegen den Gleichgewichtspunkt zu konvergieren - damit konvergiert die Ableitung gegen den Gleichgewichtspunkt gegen 0, also ist es genau so, wie es sein sollte.

Bonus-Teil

Die Abweichungen sind bei t = 50 bzw. den sich gemäß Plot neuen einstellenden Gleichgewichtspunkts am größten. Die Linearisierung kann nur in einer hinreichend kleinen Umgebung des Gleichgewichtspunktes gelten, dadurch entstehen die großen Abweichungen und Fehler.
Wir sind hier allerdings noch etwas unsicher, also darauf würden wir im Tutorat sehr gerne ausführlich eingehen :)

b) 1/1   c) 1/1   e) 1/1
d) 1/1   f) 0/1
=> 11/10

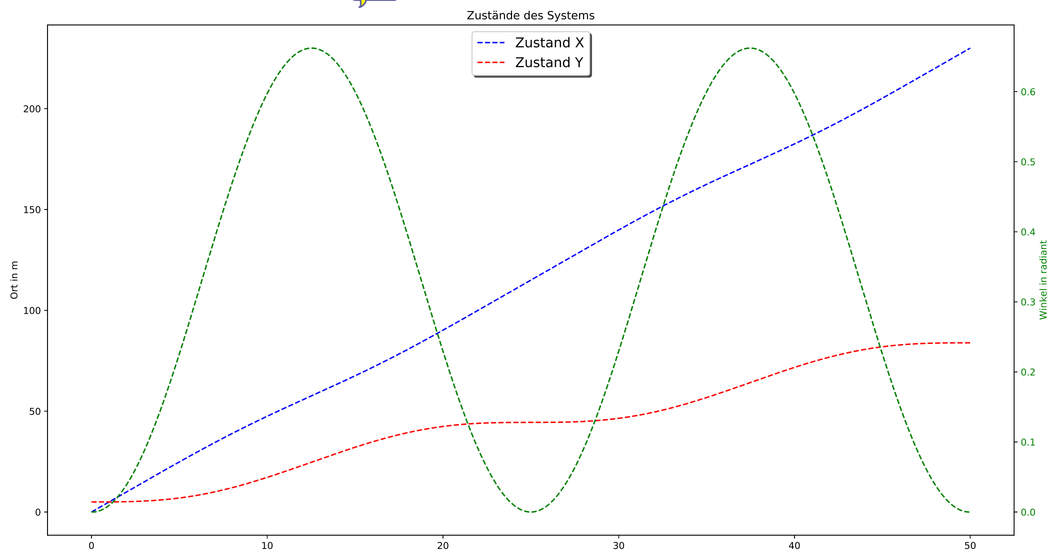

Abbildung 1: Zustände des Traktors

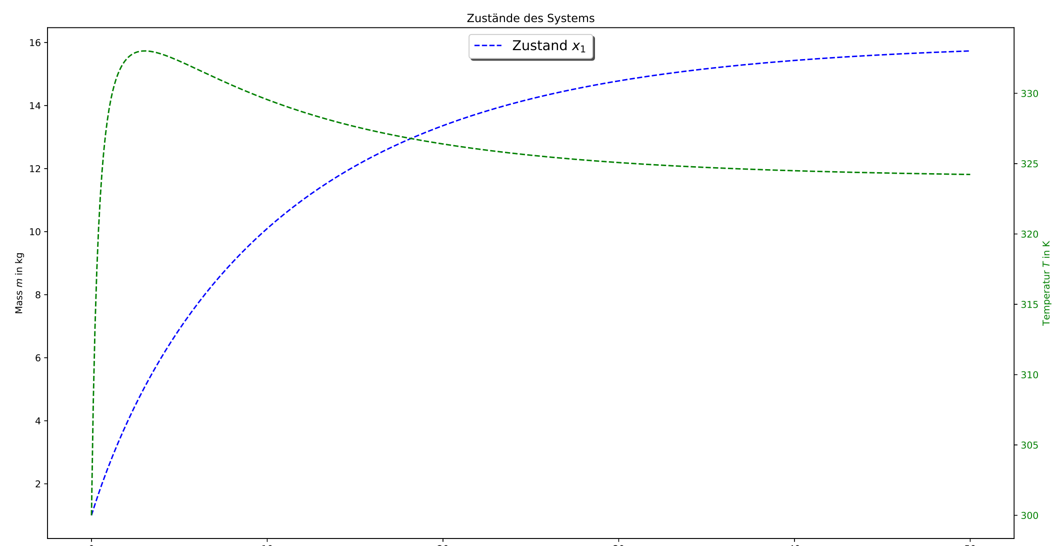

Abbildung 2: Zustände des Waschbecken

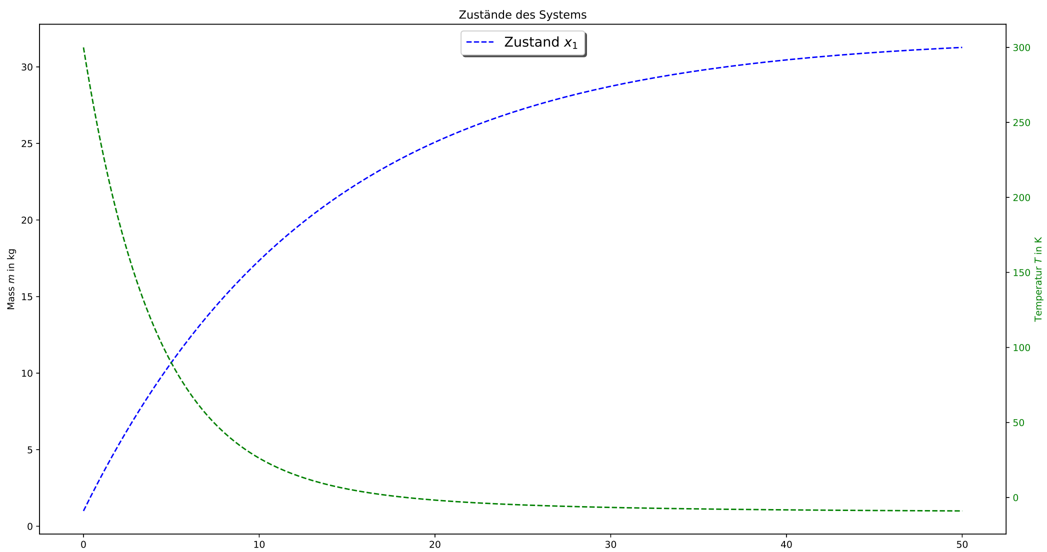

Abbildung 3: Zustände des Waschbecken bei einer Linearisierung. Man erkennt eine sehr deutliche Abweichung, da die Linearisierung nur in einer hinreichend kleinen Umgebung des Gleichgewichtspunkts gültig ist.