Jonas Bilal
Robin Vogt
29.05.2020

Systemtheorie und Regelungstechnik
Übungsblatt 3

Aufgabe 1

a)

Intuitiv ist die Linearität klar, da $y(t)$ nur als linearer Term auftaucht. Formal: Seien zwei Lösungstrajektorieren $y_1(t), u_1(t)$ und $y_2(t), u_2(t)$ gegeben. Dann gilt für die Summe:

$$\lambda f(y_1, u_1) + \mu f(y_2, u_2) = \lambda \dot{y}_1(t) + \mu \dot{y}_2(t) = \lambda \sin(t) y_1(t) - \lambda k u_1(t) + \mu \sin(t) y_2(t) - \mu k u_2(t) \quad (1)$$
$$= \sin(t)(\lambda y_1(t) + \mu y_2(t)) - k(\lambda u_1(t) + \mu u_2(t)) \quad (2)$$
$$= f(\lambda y_1 + \mu y_2, \lambda u_1 + \mu u_2) \quad (3)$$

Also ist die DGL linear. Zur Zeitinvarianz:

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \cos(t) y \neq 0 \quad (4)$$

Zeitinvarianz ist nicht erfüllt.

b)

$$f(y_1, u_1) + f(y_2, u_2) = \dot{y}_1(t) + \dot{y}_2(t) = y_1(t)u_1(t) + y_2(t)u_2(t) \quad (5)$$
$$\neq y_1(t)u_1(t) + y_1(t)u_2(t) + y_2(t)u_2(t) + y_2(t)u_1(t) \quad (6)$$
$$= (y_1(t) + y_2(t))(u_1(t) + u_2(t)) = f(y_1 + y_2, u_1 + u_2) \quad (7)$$

Linearität ist nicht erfüllt. Allerdings Zeitinvarianz, da

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} yu = 0 \quad (8)$$

Aufgabe 2

a)

Der Gleichgewichtszustand erfüllt die Bedingung $\dot{x}(t) = 0$:

$$0 = u(t) - k\sqrt{x(t)} \quad (9)$$
$$x_{ss} = \frac{u_{ss}^2}{k^2} \quad (10)$$

b)

$$A = -\frac{\partial f}{\partial x}|_{x=x_{ss},u=u_{ss}} = -\frac{k}{2}\frac{1}{\sqrt{x_{ss}}} = -\frac{k}{2}\frac{1}{\sqrt{\frac{u_{ss}^2}{k^2}}} = -\frac{1}{2}\frac{k^2}{u_{ss}} \tag{11}$$

$$B = \frac{\partial f}{\partial u}|_{x=x_{ss},u=u_{ss}} = 1 \tag{12}$$

Die Linearisierung ist also

$$\delta\dot{x}(t) = \frac{1}{2}\frac{k^2}{u_{ss}}\delta x(t) + \delta u(t) \tag{13}$$

c)

Einsetzen der Werte ergibt

$$x_{ss} = \frac{u_{ss}^2}{k^2} = 16\ kg \tag{14}$$

$$A = -\frac{k^2}{2u_{ss}} = -0.075\ \frac{1}{\mathrm{s}} \tag{15}$$

$$B = 1 \tag{16}$$

$$\delta\dot{x}(t) = -0.075\ \frac{1}{\mathrm{s}}\delta x(t) + \delta u(t) \tag{17}$$

d)

Gleichgewichtspunkt

$x_{1,ss} = \frac{u_{ss}^2}{k_1^2}$ wie oben. Die Bestimmung von $x_{2,ss}$ führt hingegen mit $\dot{x} = 0$ auf die folgende Gleichung:

$$-k_2(x_2 - T_a) + \frac{T_h - x_2}{x_1}u = 0 \tag{18}$$

$$-k_2x_2x_1 + k_2T_ax_1 + T_hu - x_2u = 0 \tag{19}$$

$$-x_2(k_2x_1 + u) + k_2T_ax_1 + T_hu = 0 \tag{20}$$

$$x_2 = \frac{T_hu + k_2T_ax_1}{k_2x_1 + u} = \frac{T_hu + k_2T_ax_1}{k_2\frac{u_{ss}^2}{k_1^2} + u_{ss}} \tag{21}$$

Der Gleichgewichtspunkt ist damit

$$x_{ss} = \begin{bmatrix} \frac{u_{ss}^2}{k_1^2} \\ \frac{T_hu+k_2T_ax_1}{k_2\frac{u_{ss}^2}{k_1^2}+u} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 16\ \mathrm{kg} \\ 324\ \mathrm{K} \end{bmatrix} \tag{22}$$

Linearisierung

$$A = \frac{\partial f}{\partial x}(x_{ss}, u_{ss}) = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}\frac{k_1^2}{u_{ss}} & 0 \\ -\frac{T_h - x_2}{x_1^2} u_{ss} & -k_2 - \frac{u_{ss}}{x_1} \end{bmatrix} \tag{23}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{1}{2}\frac{k_1^2}{u_{ss}} & 0 \\ -\frac{T_h - \frac{T_h u_{ss} + k_2 T_a \frac{u_{ss}^2}{k_1^2}}{k_2 \frac{u_{ss}^2}{k_1^2} + u_{ss}}}{u_{ss}^3} k_1^4 & -k_2 - \frac{k_1^2}{u_{ss}} \end{bmatrix} \tag{24}$$

$$B = \frac{\partial f}{\partial u}(x_{ss}, u_{ss}) = \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{k_1^2}{u_{ss}^2} T_h - \frac{k_1^2}{u_{ss}^2} \frac{T_h u_{ss} + k_2 T_a \frac{u_{ss}^2}{k_1^2}}{k_2 \frac{u_{ss}^2}{k_1^2} + u_{ss}} \end{bmatrix} \tag{25}$$

Zahlen einsetzen und DGL aufstellen

$$A = \begin{bmatrix} -0.075\ \frac{1}{\mathrm{s}} & 0 \\ -0.15\ \frac{\mathrm{K}}{\mathrm{kg} \cdot \mathrm{s}} & -0.25\ \frac{1}{\mathrm{s}} \end{bmatrix} \tag{26}$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \frac{K}{kg} \end{bmatrix} \tag{27}$$

$$\delta\dot{x}(t) = A\delta x(t) + B\delta u(t) = \begin{bmatrix} -0.075\ \frac{1}{\mathrm{s}} & 0 \\ -0.15\ \frac{\mathrm{K}}{\mathrm{kg} \cdot \mathrm{s}} & -0.25\ \frac{1}{\mathrm{s}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta x_1(t) \\ \delta x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \frac{K}{kg} \end{bmatrix} \delta u(t) \tag{28}$$

Aufgabe 3

b)

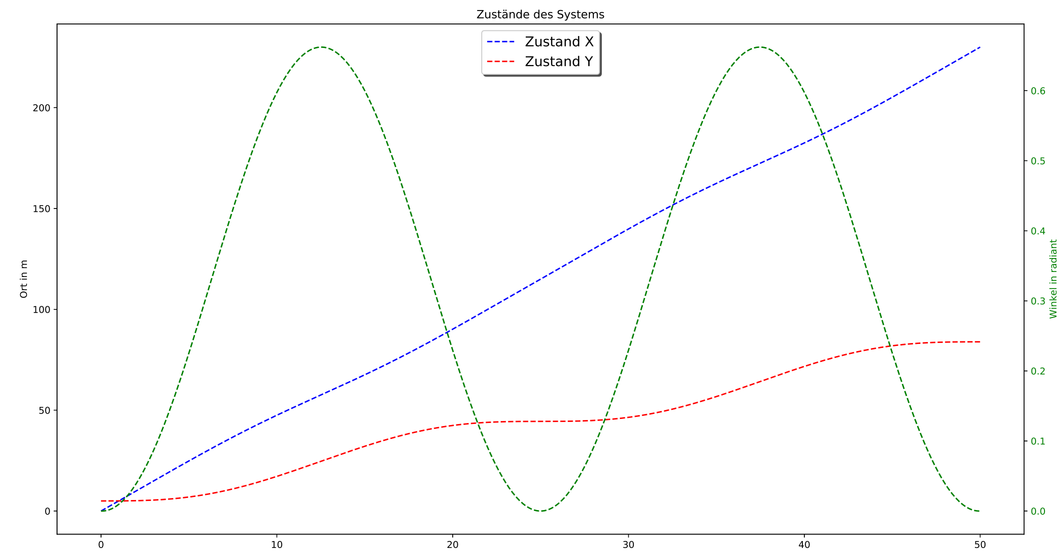

Abbildung 1: Zustände des Traktors

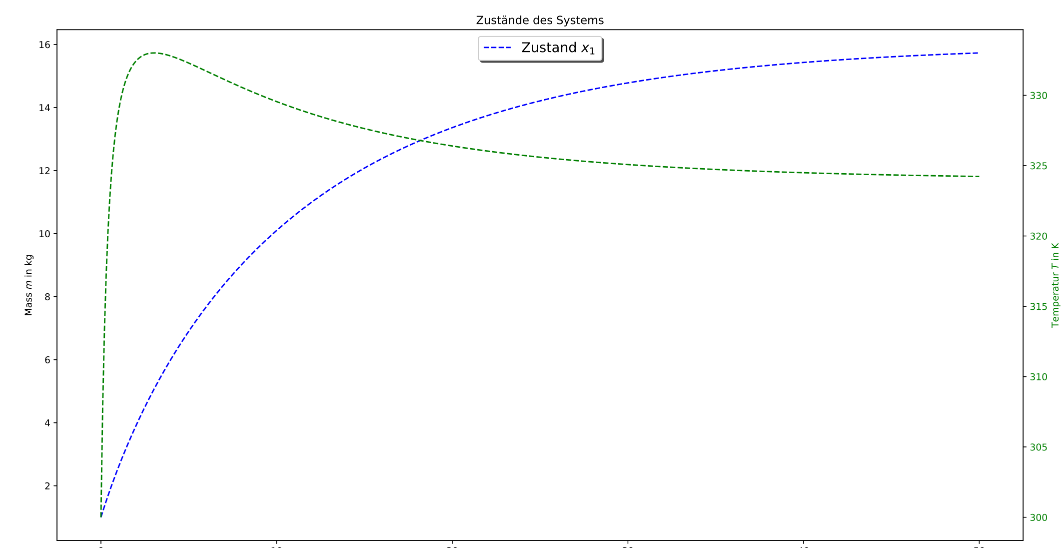

Abbildung 2: Zustände des Waschbecken

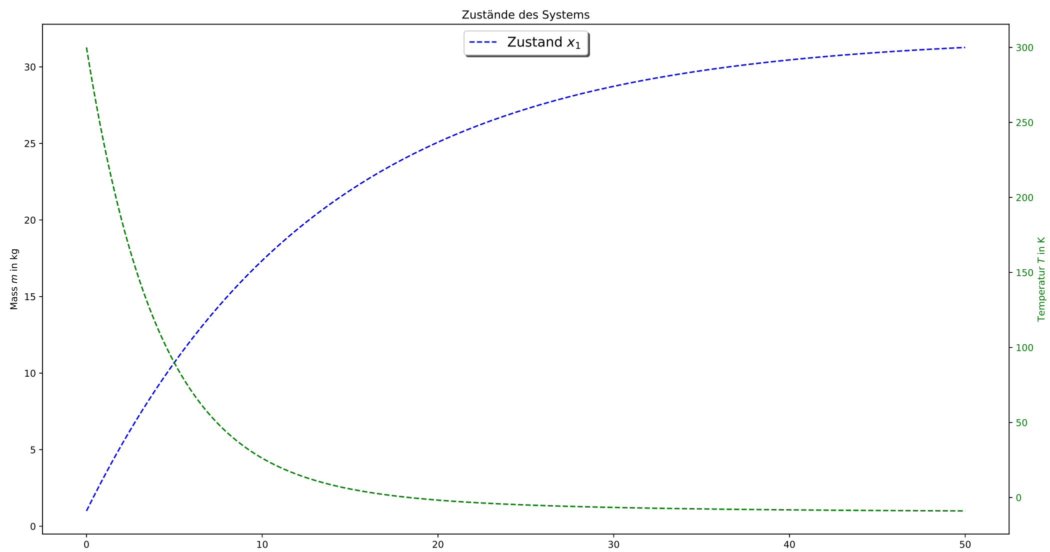

Abbildung 3: Zustände des Waschbecken bei einer Linearisierung. Man erkennt eine sehr deutliche Abweichung, da die Linearisierung nur in einer hinreichend kleinen Umgebung des Gleichgewichtspunkts gültig ist.