

## Aufgabe 1

Für die Laplace-Transformation gilt:

$$f(t) \quad \circ \longrightarrow \bullet \quad F(s) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-st} dt \quad (1)$$

a)

$$\begin{aligned} f(t) &= \delta(t) \\ F(s) &= \int_0^{\infty} \delta(t) \cdot e^{-st} dt \\ F(s) &= e^0 \\ F(s) &= 1 \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} f(t) &= e^{-at} \\ &= \int_0^{\infty} e^{-at} \cdot e^{-st} dt \\ &= \int_0^{\infty} e^{-at-st} dt \\ &= \int_0^{\infty} e^{-(a+s)t} dt \\ &= -\frac{1}{a+s} \left[ e^{-(a+s)t} \right]_0^{\infty} \\ &= -\frac{1}{a+s} \cdot (0 - 1) \\ &= \frac{1}{a+s} \end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned}
 f(t) &= \cos(\omega t) \\
 F(s) &= \int_0^\infty \cos(\omega t) \cdot e^{-st} dt \\
 &= \int_0^\infty \frac{1}{2} (e^{j\omega t} + e^{-j\omega t}) \cdot e^{-st} dt \\
 &= \frac{1}{2} \left[ \int_0^\infty e^{-(j\omega + s)t} dt + \int_0^\infty e^{-(j\omega - s)t} dt \right] \\
 &= \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{-j\omega + s} + \frac{1}{j\omega + s} \right] \\
 &= \frac{1}{2} \cdot \frac{j\omega + s - (j\omega - s)}{\omega^2 + s^2} \\
 &= \frac{s}{s^2 + \omega^2}
 \end{aligned}$$

## Aufgabe 2

a)

$$\begin{aligned}
 F(s) &= \frac{4}{s} \\
 f(t) &= 4\sigma(t)
 \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}
 F(s) &= \frac{3}{s^2 + 9} \\
 f(t) &= \sin(\omega t) \quad \text{für } \omega = 3 \frac{\text{rad}}{s}
 \end{aligned}$$

c) Substituiere  $u := s + 2$

$$F(s) = \frac{1}{(s+2)^2} \quad \bullet \longrightarrow \circ \quad f(t) = te^{-2t}$$

## Aufgabe 3

Die Impulsantwort eines Systems sei gegeben mit

$$g(t) = 2t + \sin(\omega t) \quad \text{mit } \omega > 0 \tag{2}$$

Die Übertragungsfunktion des Systems ergibt sich als die Laplacetransformierte  $G(s)$  der Impulsantwort  $g(t)$  mit

$$\begin{aligned} G(s) &= \frac{2}{s^2} + \frac{\omega}{s^2 + \omega^2} \\ &= \frac{2(s^2 + \omega^2) + s^2\omega}{s^2(s^2 + \omega^2)} \\ &= \frac{2s^2 + 2\omega^2 + s^2\omega}{s^4 + s^2\omega^2} \\ &= \frac{s^2(2 + \omega) + 2\omega^2}{s^4 + s^2\omega^2} \end{aligned}$$

Aus  $G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)}$  folgt

$$\begin{aligned} \frac{Y(s)}{U(s)} &= \frac{s^2(2 + \omega) + 2\omega^2}{s^4 + s^2\omega^2} \\ (s^4 + s^2\omega^2)Y(s) &= (s^2(2 + \omega) + 2\omega^2)U(s) \\ y^{(4)} + \omega^2\ddot{y} &= (2 + \omega)\ddot{u} + 2\omega^2 u \end{aligned}$$

## Aufgabe 4

a)

$$\begin{aligned} G(s) &= G_1(s) \frac{G_2(s)}{1 + G_2(s)G_3(s)} \\ &= \frac{s+1}{s^2-2s+3} \frac{\frac{2}{s^2+4}}{1 + \frac{1}{s+2} \frac{2}{s^2+4}} \\ &= \frac{s+1}{s^2-2s+3} \frac{2(s+2)}{(s^2+4)(s+2)+2} \\ &= \frac{s+1}{s^2-2s+3} \frac{2(s+2)}{s^3+2s^2+4s+10} \\ &= \frac{s+1}{s^2-2s+3} \frac{2s^2+6s+4}{s^3+2s^2+4s+10} \\ &= \frac{2s^2+6s+4}{s^5+3s^3+8s^2-8s+30} \end{aligned}$$

b) Mit Hilfe der etwas mühsamen Rechnung ist es nun sehr einfach die Grade zu bestimmen. Der Grad ist offenbar 5, da der Nennergrad 5 ist. Der relative Grad ist  $5-3 = 2$ .

## Aufgabe 5

a)

$$\begin{aligned}2\ddot{y} + 10\dot{y} + 12y &= 4\dot{u} + 2u \\ \ddot{y} + 5\dot{y} + 6y &= 2\dot{u} + u \\ s^2Y(s) + 5sY(s) + 6Y(s) &= 2sU(s) + U(s) \\ (s^2 + 5s + 6)Y(s) &= (2s + 1)U(s) \\ G(s) &= \frac{Y(s)}{U(s)} \\ G(s) &= \frac{s^2 + 5s + 6}{2s + 1}\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}\lambda_{0,i} &= -\frac{5}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{5}{2}\right)^2 - 6} \\ \lambda_{0,1} &= -2 \\ \lambda_{0,2} &= -3 \\ \lambda_1 &= -\frac{1}{2}\end{aligned}$$

c) Da das System nur eine Polstelle hat und diese einen negativen Realanteil hat, ist das System BIBO-stabil.

## Aufgabe 6

a) Aus einer Zustandsraumdarstellung lässt sich die Übertragungsfunktion berechnen, indem das System Laplace-transformiert wird. Dann erhält man

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D \quad (3)$$

Einsetzen der Matrizen  $A, B, C$  und  $D$  ergibt

$$\begin{aligned}
 G(s) &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \left( \begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \right)^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (s+1) & -1 \\ 0 & (s-2) \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \frac{1}{(s+1)(s-2)} \begin{bmatrix} (s-2) & 1 \\ 0 & (s+1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{s+1} & \frac{1}{(s+1)(s-2)} \\ 0 & \frac{1}{s-2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{s-2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} \frac{1}{s-2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix} \\
 &= \frac{1}{s-2}
 \end{aligned}$$

b)

$$\dot{y}(t) - 2y(t) = u(t)$$