Jonas Bilal
Robin Vogt
17.06.2020

Systemtheorie und Regelungstechnik
Übungsblatt 6

Aufgabe 1

Eine Ruhelage eines Systems ist ein Zustand, in dem sich der Zustand nicht ändert, d.h $\dot{x} = 0$.

Aufgabe 2

a) Lineare Systeme haben entweder exakt eine Ruhelage $x_{ss} = -A^{-1}Bu_{ss}$ oder unendlich viele Ruhelagen. Falls $\det(A) \neq 0$ gilt ersteres, falls $\det(A) = 0$, letztere

b) Falls $\det(A) \neq 0$, hat die Matrix B keinen Einfluss auf die Anzahl der Ruhelagen. Gilt hingegen $\det(A) = 0$, hat je nach Matrix B, das System unendlich viele Ruhelagen oder keine Ruhelage.

Aufgabe 3

Um die Stabilität eines Systems zu untersuchen, müssen wir die Nullstellen λ_i des charakteristischen Polynoms der Systemmatrix A wie folgt berechnen:

$$p_A(\lambda) = \det(\lambda I - A)$$

Falls alle Eigenwerte λ_i einen negativen Realanteil haben, ist das System stabil.
Falls ein Eigenwert λ_i einen positiven Realanteil hat, ist das System instabil.
Falls ein λ_i einen Realanteil von null hat, ist die Stabilität des System von der Struktur der Matrix A abhängig:

- Falls alle Eigenvektoren linear unabhängig sind, ist das System grenzstabil.
- Falls nicht alle Eigenvektoren linear unabhängig sind, ist das System instabil.

a) $\lambda_1 = -0,05 + i$
$\lambda_2 = -0,05 - i$
Da die Realanteiler aller Eigenwerte negativ sind, folgt Stabilität.

b) $\lambda_1 = i$
$\lambda_2 = -i$
Da $\Re(\lambda_i) = 0$ gilt, muss man über die Eigenvektoren die Stabilität untersuchen. (und überprüfen,

ob die Eigenvektoren linear unabhängig sind). Die Eigenvektoren ergeben sich (mit Python berechnet):

$$\begin{bmatrix} 1 \\ j \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -j \end{bmatrix} \tag{1}$$

Da sie linear unabhängig sind (wie man leicht nachrechnet), folgt Grenzstabilität.

c) $\lambda_1 = 0$
Da $\Re(\lambda_i) = 0$ gilt, muss man über die Eigenvektoren die Stabilität untersuchen. (und überprüfen, ob die Eigenvektoren linear unabhängig sind). Die Eigenvektoren ergeben sich (mit Python berechnet):

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{2}$$

Da sie linear abhängig sind, folgt Instabilität.

d)

e) $\lambda_1 = -1$
$\lambda_2 = -4 + i$
$\lambda_3 = -4 - i$ Da alle Realanteile negativ sind, folgt Stabilität.

f) $\lambda_1 = 0,5$
$\lambda_2 = -1$
$\lambda_3 = -2$ Da λ_1 einen positiven Realanteil hat, folgt Instabilität.

Aufgabe 4

Das linearisierte System ergibt sich als

$$\frac{\partial f}{\partial x} f(x, u) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{mgL}{I}\cos(x_2(t)) & 0 \end{bmatrix} \tag{3}$$

Nach Einsetzen der Ruhezustände x_{ss1} und x_{ss2} erhalten wir

für $x_{ss1} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

$$A_1 = \frac{\partial f}{\partial x} f(x_{ss1}) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{mgL}{I} & 0 \end{bmatrix} \tag{4}$$

für $x_{ss2} = \begin{bmatrix} \pi \\ 0 \end{bmatrix}$

$$A_2 = \frac{\partial f}{\partial x} f(x_{ss2}) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{mgL}{I} & 0 \end{bmatrix} \tag{5}$$

$$p_{A,1}(\lambda) = \lambda^2 + \frac{mgL}{I} \tag{6}$$

Daraus folgen die Eigenwerte $\lambda_{1,2} = \pm i\sqrt{\frac{mgL}{I}}$ - die Eigenwerte sind verschieden und damit gibt es genau zwei Eigenvekotren, die linear unabhängig sind. Für diese Linearisierung ist das System also grenzstabil.

$$p_{A,2}(\lambda) = \lambda^2 - \frac{mgL}{I} \tag{7}$$

Es folgt $\lambda_{1,2} = \pm\sqrt{\frac{mgL}{I}}$.
Wegen des positiven Realteils ist das System instabil geworden.