ENSAE $AS1$ **(2023/2024)**
TRAVAUX DIRIGES D'ANALYSE II
SÉRIE 4 (SÉRIES ENTIÈRES RÉELLES)

Exercice 1($\star\star$)
On considère la série entière $\sum_{n\geq 1} a_n x^n$, avec $a_n = n^{\frac{1}{n}} - 1$

(1) Montrer que $\ln(\sqrt[n]{a_n}) \sim \frac{1}{n}\ln[\frac{\ln(n)}{n}]$
(2) En déduire le rayon convergence de la série.

Exercice 2($\star\star$)
Rayon de convergence et somme de la série entière $\sum_{n\in\mathbb{N}}(3n+1)x^{3n}$

Exercice 3($\star\star\star$)
Soit la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n x^n$, avec $a_n = \frac{(-1)^n}{n(n-1)}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq 2$

(1) Rayon de convergence R de cette série.On pose $f(x) = \sum_{n\geq 2}^{+\infty} a_n x^n, \forall x \in]-R, R[$
(2) Calculer $f'(x)$, puis $f(x), \forall x \in]-R, R[$
(3) Déduire de ce qui précède les valeurs de $\sum_{n\geq 2}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n(n-1)}$ et $\sum_{n\geq 2}^{+\infty} \frac{1}{n(n-1)}$

Exercice 4($\star\star\star\star$)
Soient la série entière $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ avec $a_n = \frac{n^3+n+3}{n+1}$ et R son rayon de convergence.

(1) Déterminer R. On pose : $S(x) = \sum_{n\geq 0}^{+\infty} a_n x^n, x \in]-R, R[$.
(2) Montrer que $S(x) = \sum_{n\geq 0}^{+\infty}(n^2-n)x^n + 2\sum_{n\geq 0}^{+\infty} x^n + \sum_{n\geq 0}^{+\infty} \frac{x^n}{n+1}, \forall x/|x| < R$
(3) En déduire l'expression simplifiée de la somme totale $S(x)$ de la série.
(4) Vérifier la continuité de f en 0.
(5) Calculer la valeur de la somme $\alpha = \sum_{n\geq 0}^{+\infty} \frac{n^3+n+3}{(n+1)2^n}$.

Exercice 5($\star\star\star$)

(1) Rayon de convergence et somme de la série $\sum_{n\geq 0} Un$, avec $U_n = \dfrac{x^n}{n!}.\dfrac{n^2+3n-1}{n+3}$

(2) En déduire la valeur numérique de la somme $A = \sum_{n\geq 0} \dfrac{(-1)^n(n^2+3n-1)}{(n+3)n!}$

Exercice 6($\star\star\star\star$)

Soit $x \in]-1,1[$

(1) Convergence et somme de la série de terme général $x^n \cos^{2n}(t)$

(2) On pose $f(x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sum_{n=0}^{+\infty} x^n \cos^{2n}(t))dt$

  (a) Calculer $f(x)$

  (b) Déterminer le DSE de f

(3) Déduire de ce qui précède la valeur de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n}(t)dt$

Exercice 7($\star$) *par fonction*

Déterminer, dans chacun des cas suivants, le DSE de la fonction f :

(1) $f(x) = \sin(x^2)$; (2) $f(x) = \sin^2(x)$; (3) $f(x) = \ln(1+x^2)$; (4) $f(x) = \dfrac{e^x}{1-x}$; (5) $f(x) = \dfrac{\ln(1+x)}{1+x}$; (6) $f(x) = \arctan(\dfrac{1-x^2}{1+x^2}$; (7) $f(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{e^t-1}{t}dt$;

(8) $f(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{\sin(t)}{t}dt$; (9) $f(x) = \dfrac{x^2}{(x-1)(2-x)^2}$ et (10) $f(x) = \dfrac{1-x^2}{1-x+x^2}$

Exercice 8($\star\star$)

Doamine de définition et epression de la fonction f telle que :$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{(2n)!}$

Exercice 9($\star\star\star$)

Montrer qu'il existe une série entière $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ dont la somme S est solution de l'équation différentielle : $3xy' + (2-5x)y = x$. En déduire son rayon de convergence.

Exercice 10($\star\star\star$)

Déterminer une fonction f admettant un DSE, et solution de l'équation différentielle : $2xf''(x) + f'(x) - f(x) = 0, \forall x \in \mathbb{R}$

Exercice 11($\star\star\star$)

Soient les séries entières $\displaystyle\sum_{n\geq 0} x^n$ et $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{x^n}{n}$

(1) Préciser leurs rayons de convergence respectifs

(2) Calculer de deux manières différentes le produit $(\sum_{n\geq 0} x^n)(\sum_{n\geq 1} \frac{x^n}{n})$

(3) En déduire l'expression simplifiée et le domaine de définition de $S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (\sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{k})x^n$