ECOLE NATIONALE DE STATISTIQUE ET D'ANALYSE ECONOMIQUE (ENSAE), DAKAR

ISEP 2 - Devoir 1 d'Analyse 3 - 2021-2022
Durée : 2h

Exercice 1.

1. Donner la définition d'une équation défiiérentielle.
2. Expliquer comment résoudre une équation différentielle du premier ordre à variables séparables.
3. Montrer qu'une fonction $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ différentiable en un point x_0 de $\mathbb{R}^n$ est continue en x_0.

Exercice 2. Résoudre les équations différentielles

1. $y' = 1 - x^2 + y^2$,
2. $(x^2 - 1)y' - y = x^2$.

Exercice 3. On donne l'équation

$$y'' - 3y' + 2y = 1 + 2e^x. \qquad (E)$$

On note (EH) l'équation homogène associée.

1. Montrer que $f_1(x) = e^x$ et $f_2(x) = e^{2x}$ sont des solutions de l'équation (EH).
2. Déterminer la solution générale de l'équation (EH).
3. Trouver une solution particulière de l'équation (E).
4. Donner la solution générale de (E).

Exercice 4. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ donnée par

$$f(x,y) = \arccos \frac{1}{1 + x^2 + y^2}.$$

1. Etudier la continuité de f sur $\mathbb{R}^2$.
2. La fonction f admet-elle des dérivées partielles dans toutes les direction en tout point de $\mathbb{R}^2$?
3. La fonction f est-elle différentiable sur $\mathbb{R}^2$? Le cas échéant, donner la différentielle de f sur $\mathbb{R}^2$?

Exercice 5. Soit $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}^2$ donnée par $f(0,y) = (0,0)$ pour tout $y \in \mathbb{R}$ et

$$f(x,y) = \left(x^2 \sqrt{y} \cos \frac{1}{x^3}, x^2 \sqrt{y} \sin \frac{1}{x^3} \right)$$

si $(x,y) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$.

1. Montrer que f est différentiable en tout point de $\mathbb{R}^2$.
2. Déterminer la matrice jacobienne de f en tout point $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.
3. Quelles sont les valeurs prise par le déterminant de la matrice jacobienne de f en tout point de $\mathbb{R}^2$.