## ENSAE AS1 (2023/2024) CONTROLE 1 D'ANALYSE MATHÉMATIQUE - DURÉE = 4H

Exercice 1 (8pts = (1+1) + (1+1) + (1+1) + 2) Les questions (1),(2),(3) et (4) sont indépendantes

(1) On considère,  $A \subset \mathbb{R}+, A \neq \emptyset$  et majoré.

On pose :  $\sqrt{A} = {\sqrt{a}; a \in A}.$ 

- (a) Justifier l'existence de sup  $\sqrt{A}$ .
- (b) Exprimer  $\sup \sqrt{A}$  en fonction de  $\sup A$ .
- (2) (a) Montrer que  $\forall n \in \mathbb{N}, (2+\sqrt{3})^n + (2-\sqrt{3})^n$  est un nombre entier pair.
  - (b) En déduire  $\lim_{n\to+\infty} \sin[\frac{\pi}{2}(2+\sqrt{3})^n]$
- (3) On définit, pour tout  $n \in \mathbb{N}$  et  $n \geq 2$ :

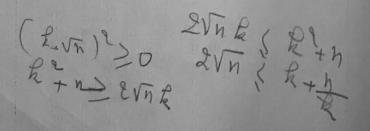
$$u_n = \prod_{k=2}^n \cos(\frac{\pi}{2^k})$$
, et on pose  $v_n = u_n \sin(\frac{\pi}{2^n})$ .

- (a) Montrer que  $(v_n)$  est une suite géométrique.
- (b) En déduire l'expression de  $u_n$  en fonction de n, puis  $\lim(u_n)$ .
- (4) Etudier, suivant les valeurs du réel a, la suite  $(u_n)_{n\geq 0}$  définie par :  $u_0=0, u_1=a$  et  $u_{n+2}=au_{n+1}+(1-a)u_n, \forall n\in\mathbb{N}.$

Exercice 2(4pts = 1 + 1 + (1 + 1))

Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , on pose :  $E_n = \{k + \frac{n}{k}, k \in \mathbb{N}^*\}.$ 

- (1) Justifier l'existence de inf  $E_n, \forall n \in \mathbb{N}^*$ .
- (2) Montrer l'égalité inf  $E_n = \inf_{1 \le k \le n} \{k + \frac{n}{k}\}$ . On pourra, sans le démontrer, utiliser, en cas d'existence des bornes inférieures, le résultat suivant :  $\inf(A \cup B) = \min(\inf A, \inf B)$ .
- (3) (a) Montrer que inf  $E_n \geq \sqrt{4n}, \forall n \in \mathbb{N}^*$ 
  - (b) Dans quel cas a-t-on l'égalité inf  $E_n = \sqrt{4n}$ ? A-t-on alors, dans ce cas, inf  $E_n = \min E_n$ ?



Cher-Un = Va-1642

Exercice 3(4pts = 2 + 1 + 1)

Soit  $(p,q) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$ , p > q et  $(u_0, v_0) \in \mathbb{R}^2$  tel que  $u_0 < v_0$ . On pose, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ :  $u_{n+1} = \frac{pu_n + qv_n}{p+q}$  et  $v_{n+1} = \frac{qu_n + pv_n}{p+q}$ .

- (1) Montrer que les suites  $(u_n)$  et  $(v_n)$  sont adjacentes.
- (2) (a) Calculer  $u_{n+1} + v_{n+1}, \forall n \in \mathbb{N}$ .
  - (b) En déduire la limite commune, l, aux deux suites.

Exercice 4(5pts = 2 + (1 + 2))

Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on considère la fonction  $f_n$  définie sur  $\mathbb{R}_+$  par  $f_n(x) = nx^{n+1} - (n+1)x^n - \frac{1}{2}$ .

- (1) Montrer que  $f_n$  admet une unique racine positive, notée,  $x_n$ .
- (2) (a) Etudier le sens de variation de la suite  $(x_n)_{n\geq 0}$  ainsi obtenue.
  - (b) Montrer que  $(x_n)_{n\geq 0}$  est convergente et calculer sa limite.