ENSAE

ITS 1

2017 - 2018

ALGEBRE 1 : CONTROLE 2

Exercice 1

On consdère dans $\mathfrak{S}_{12}$, la permutation :

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ 7 & 10 & 6 & 8 & 2 & 11 & 12 & 5 & 1 & 4 & 3 & 9 \end{pmatrix}$$

1. Décomposer σ en cycles disjoints et en produits de transpositions.
2. Calculer le nombre d'inversions et la signature de σ || $I(\sigma)$ et $\varepsilon(\sigma)$
3. Déterminer l'ordre de σ et calculer σ^{2018} $o(\sigma)$.

Exercice 2

1. Rappeler la définition des termes suivants :
   - Elément inversible d'un anneau.
   - Elément nilpotent d'un anneau
   - Anneau intègre.
2. Donner un exemplaire d'un anneau intègre et d'un anneau non intègre.
3. Soit $(A, +, \bullet)$ un anneau commutatif unitaire.

   3 - 1 Montrer $J = \{x \in A / \exists n \in \mathbb{N}^* : x^n = 0_A\}$ est un idéal de A.

   3 - 2 Soit $x \in A$ tel que $1_A - x \in J$. Montrer que x est inversible et $1 - x^{-1} \in J$.

Exercice 3

1. Factoriser dans $\mathbb{R}[x]$ les polynômes suivants : $A = x^6 + 1, B = x^9 + x^6 + x^3 + 1$
2. Soient :

   $P = \quad 2x^3 - x^2 - 5x - 2$

   $Q = \qquad 2x^2 - x - 3$

a) Déterminer $pgcd(P, Q)$.

b) En déduire les polynômes U et V tels que $pgdc(P, Q) = U.P + V.Q$

Exercice 4

Décomposer en éléments simples:

1. Dans $\mathbb{R}(x)$ $F_1 = \frac{x^3+3}{(x^2+1)(x^2-1)^2}$

2. Dans $\mathbb{C}(x)$ $F_2 = \frac{x^3+3}{(x^2+1)(x^2-1)}$.