Année universitaire : 2023-2024

Ecole Nationale de la Statistique et de l'Analyse Economique

(ENSAE) Pierre Ndiaye de Dakar **Dr. S. DIOUF**

Contrôle 2 D'algèbre 1 du 1er Semestre : Section AS1

Durrée : 4 heures

Exercice 1 : 4 points

Soient E et F deux espaces vectoriels sur $\mathbb{R}$. Soit f une application linéaire de E dans F.

1) Rappeler la définition de $Kerf$ et de Imf. Montrer que $Kerf$ et de Imf sont des sous espaces vectoriels de E et F respectivement.

2) Montrer que f est injectif si et seulement si $kerf = \{0_E\}$.

3) On se place dans le cas où sont E et F de dimension finie et que $dimE = dimF$. Montrer que f est bijectif si et seulement si f est injectif.

Exercice 2 : 5 points

On considère f l'application suivante par :

$f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^4$

$(x, y, z) \longmapsto (x + 2y + z, -y + 2z, y + z, x)$.

1) Montrer que f est linéaire.

2) On pose $B = \{e_1, e_2, e_3\}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Calculer $f(e_1)$, $f(e_2)$ et $f(e_3)$. Ces vecteurs forment-ils une famille libre ? Forment-ils une base de $\mathbb{R}^4$?

3) Déterminer $kerf$ et Imf.

4) On considère g l'application suivante par :

$g : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^3$

$(x, y, z, t) \longmapsto (t, x - z - t, -x + 2z + t)$.

$a)$ Détrminer $kerg$.

$b)$ Déterminer $dim(Img)$ et justifier que $Img = \mathbb{R}^3$.

5) Calculer $g \circ f$. L'application f est - elle bijective ?

Exercice 3 : 4 points

On considère les ensembles suivants :

$$E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \quad / \quad x + 2y = 0 \quad et \quad y - 3z = 0\},$$

$$F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \quad / \quad x - 3y + 2z = 0\},$$

1) Montrer que E et F sont deux sous espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$.

2) Déterminer une base de E, F, $E \cap F$, $E + F$.

3) A -t-on $E \oplus F = \mathbb{R}^3$?

Exercice 4 : 3 points

1) En utilisant l'algorithmed'Euclide, calculer le $PGCD$ de :

$P_1(X) = X^4 + X^3 - 5X^2 - 5X + 6$ et $P_2(X) = X^3 - 6X + 4$.

2) Trouver deux polynômes U et V tels que $UP_1 + VP_2 = X - 2$.

Exercie 5 : 4 points

Décomposer en élément simple sur $\mathbb{R}[X]$ les fractions rationnelles suivantes :
$F_1 = \dfrac{X^4 + X + 1}{X(X-1)(X-2)}$ et $F_2 = \dfrac{X^3 + 1}{X^2(X-1)^2}$.