ENSAE

*ISEP*2 (2022/2023)

ALGEBRE BILINEAIRE- CONTROLE 1 - 4H

EXERCICE 1(3pts = 1,5 + 1,5) *Les questions (1),(2) sont indépendantes*

(1) Etudier, suivant les valeurs du réel λ donné, la signature et le rang de la forme quadratique q définie,dans $\mathbb{R}^4$, par : $q(x, y, z, t) = x^2 + 4y^2 - 3z^2 + \lambda t^2 + 2\lambda xy$.

(2) Déterminer une base orthogonale de la forme quadratique q définie sur $\mathbb{R}^n$ par :

$$q(x) = \sum_{i=1}^{i=n}\sum_{j=1}^{j=n}(i + j - 1)x_i x_j, \forall x = (x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n.$$

On pourra utiliser l'égalité : $i + j - 1 = ij - (i - 1)(j - 1)$.

EXERCICE 2(3pts = 0,5 + 1 + 0,5 + 1)

Soit la forme quadratique q définie sur $\mathbb{R}^n$ (muni de sa base canonique $\mathcal{B}_0$) par :

$$q(x) = \sum_{1\leq i<j\leq n}(x_i - x_j)^2, \forall x = (x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n.$$

(1) Jusitifier l'inégalité de Cauchy-Schwartz vérifiée par q. En déduire l'égalité : $\mathcal{N}(q) = \mathcal{C}(q)$ (entre le noyau et le cône isotrope de q).

(2) Déterminer alors $\mathcal{N}(q)$.

(3) Quel est le rang de q?

(4) Préciser la matrice de q dans la base $\mathcal{B}_0$).

EXERCICE 3(7pts = (1 + 1 + 1) + (1 + 1 + 1) + 1)

On considère l'espace vectoriel $E = \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, muni de sa base canonique $\mathcal{B}_0$.

(1) Soit $\varphi : E \times E \to \mathbb{R}$ telle que $\varphi(A, B) = \frac{1}{2}[tr(A)tr(B) - tr(AB)], \forall A, B \in E$

(a) Montrer que φ est une f.b.s sur E. Préciser sa forme quadratique q associée.

(b) Déterminer la matrice de φ dans $\mathcal{B}_0$.

(c) Montrer que φ est non dégénérée.

(2) (a) Montrer que $A^2 - tr(A)A + (detA)\mathbb{I}_2 = 0, \forall A \in E$

(b) En déduire que $q(A) = detA$.

(c) Déterminer $\mathcal{C}(q)$, cône isotrope de q.

(3) Déduire de ce qui précède la relation :
$(trA)(trB) - tr(AB) = det(A + B) - detA - detB, \forall A, B \in E$

EXERCICE 4(4pts = 1 + 1 + 2)

Soit $E = \mathbb{R}[X]$, muni du produit scalaire : $\langle P, Q\rangle = \displaystyle\int_{-1}^{1} P(t)Q(t)dt$

et la forme linéaire φ définie sur E par $\varphi(P) = \displaystyle\int_{-1}^{1} |t|P(t)dt$. On pose : $H = Ker(\varphi)$.

(1) Montrer que $P - \varphi(P) \in H, \forall P \in E$.

(2) En déduire que $\displaystyle\int_{-1}^{1} P(t)Q(t)dt = (\int_{-1}^{1} |t|P(t)dt)(\int_{-1}^{1} Q(t)dt), \forall P \in E, Q \in H^{\perp}$

(3) Déterminer alors $H^{\perp}$. A-t-on $E = H \oplus H^{\perp}$?

EXERCICE 5(5pts = 0,5 + 0,5 + 1 + 1 + 1 + 1)

Soit le $\mathbb{R} - ev : E = \mathbb{R}_n[X]$.

On pose : $\langle P, Q\rangle = \displaystyle\int_{0}^{1} P(t)Q(t)dt, H = \mathbb{R}_{n-1}[X]$ et $P_n \in H^{\perp}$ tel que $P_n \neq 0$.

On considère la fonction : $\Phi_n : x \in \mathbb{R} \to \displaystyle\int_{0}^{1} P_n(t)t^x dt$

(1) Montrer que $(E, \langle , \rangle)$ est un espace euclidien.

(2) Préciser le degré de P_n.

(3) Calculer $\Phi_n(k), \forall k = 0, 1, 2, ..., n-1$.
En déduire que Φ_n est une fonction rationnelle.

(4) Déterminer l'expression de Φ_n à une constante multiplicative près.

(5) En déduire les coefficients de P_n.

(6) Déduire de ce qui précède une base orthogonale de E.

ENSAE $ISEP2$ (2022/2023)

CONTROLE $N°2$ D'ALGEBRE BILINEAIRE - DURÉE = 4 HEURES

Exercice 1 (4pts = 2 + 2) *Les questions (1) et (2) sont indépendantes* 25'

On munit $\mathbb{R}^3$ du produit scalaire canonique et on considère les deux matrices suivantes :

$$A = \frac{1}{45}\begin{bmatrix} 40 & 5 & -20 \\ -13 & 40 & -16 \\ 16 & 20 & 37 \end{bmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 13 & 1 & 1 \\ 1 & 13 & 1 \\ 1 & 1 & 13 \end{pmatrix}$$

(1) Donner la nature géométrique ainsi que les éléments caractéristiques de l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ représenté par A dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

(2) Diagonaliser, dans le groupe orthogonal $O_3(\mathbb{R})$, la matrice symétrique réelle B, puis en déduire une racine carrée M de B.

Exercice 2 (5pts = 0,5 + (1,5 + 0,5) + 1 + 1,5) 1h 30'

Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & -2 \\ 2 & 4 & -2 & -4 \\ -1 & -2 & 1 & 2 \\ -2 & -4 & 2 & 4 \end{pmatrix}$.

(1) Justifier, sans aucun calcul, le fait que la matrice A soit diagonalisable

(2) On considère, dans $\mathbb{R}^4$, le sous-espace vectoriel $N = \{X = (x, y, z, t)/AX = 0_{\mathbb{R}^4}\}$

  (a) Déterminer une base et la dimension de N.

  (b) En déduire que 0 est une valeur propre triple de A.

(3) Soit λ l'autre valeur propre de A. Calculer λ et déterminer le sous-espace propre qui lui est associé.

(4) Déduire de ce qui précède une diagonalisation de A dans $O_4(\mathbb{R})$. ?

Exercice 3 (4pts = 1 + 1,5 + 1,5) 15'

Soit la matrice symétrique réelle :

$$A = \begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 4 & -1 \\ 0 & 4 & 5 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 8 \end{pmatrix}$$

Montrer que A est définie positive en :

(1) calculant ses mineurs ;

(2) décomposant, suivant la méthode de Gauss, la forme quadratique q_A associée à A ;

(3) calculant les valeurs propres de A.

Exercice 4 (7pts = 1,5 + (1 + 0,5 + 1) + (1 + (1 + 1))) 1h

On considère l'espace vectoriel euclidien $\mathbb{R}^4$ muni du produit scalaire usuel $\langle , \rangle$ et de la base canonique $\mathcal{B}_0 = (e_1, e_2, e_3, e_4)$.

Soient les vecteurs $\varepsilon_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\varepsilon_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\varepsilon_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$

et le sous-espace vectoriel F de $\mathbb{R}^4$ engendré par $(\varepsilon_j)_{1 \leq j \leq 3}$

(1) Vérifier que la famille $(\varepsilon_j)_{1 \leq j \leq 3}$ est une base de F, puis construire la base orthonormée (u_1, u_2, u_3) de F déduite de $(\varepsilon_j)_{1 \leq j \leq 3}$ en appliquant le procédé d'orthonormalisation de Schmidt.

(2) On note par p_F la projection orthogonale sur F. $\forall x \in \mathbb{R}^4$,on pose $x = \sum x_i e_i$.

- (a) Exprimer $p_F(x)$ en fonction des x_i uniquement, puis en déduire $mat_{\mathcal{B}_0} P_F$.
- (b) Retrouver $mat_{\mathcal{B}_0} P_F$ par sa définition.
- (c) Donner l'expression de $d(x, F)$ en fonction des x_i seulement.

(3) Application : soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}^3$ par :

$$f(x, y, z) = (x - 2y - z - 1)^2 + (y + z - 1)^2 + (x - 2y - z + 2)^2 + (y + 3z + 2)^2$$

- (a) Calculer la valeur de $\alpha = \inf_{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3} f(x, y, z)$
- (b) Retrouver ce dernier résultat en utilisant :
  - (i) la question (2) (c)
  - (ii) une technique purement analytique

ENSAE

ISEP2 (2022/2023)

ALGÈBRE BILINÉAIRE-TRAVAUX DIRIGES - SERIE 1

EXERCICE 1 Soit φ la $f.b.s$ définie sur $\mathbb{R}^3$, muni de sa base canonique $\mathcal{B}_0 = (e_i)_{1\leq i\leq 3}$, par :

$$\varphi(x,y) = x_1y_1 + x_2y_2 + 3x_3y_3 + 3x_1y_3 - 3x_2y_3 + 3x_3y_1 - 3x_3y_2$$

(1) Calculer $\varphi(x,y)$ avec $x = 2e_1 - e_2$ et $y = 5e_1 + 15e_2 + e_3$

(2) Ecrire la matrice de φ dans la base $\mathcal{B}_0$

(3) Vérifier que $\mathcal{B} = (v_1, v_2, v_3)$, avec $v_1 = e_1 + e_2 + e_3, v_2 = e_2 + e_3$ et $v_3 = e_3$ est une base de $\mathbb{R}^3$ et déterminer de deux manières différentes $mat_{\mathcal{B}}\varphi$

EXERCICE 2 On considère $E = \mathbb{R}_n[X]$ et l'application φ telle que $\varphi(P,Q) = P(1)Q(0), \forall P, Q \in E$

(1) Montrer que φ est une forme bilinéaire sur E. A-t-on φ symétrique ?

(2) Soit $\mathcal{B}_0$ la base canonique de E, et soit $\mathcal{B} = (X^k(1-X)^{n-k})_0 \leq k \leq n$ une autre base de E. Déterminer la matrice de φ dans chacune de ces bases.

EXERCICE 3 Montrer que l'application q définie de $\mathbb{R}[x]$ vers $\mathbb{R}$ par $q(P) = \int_0^1 P(x)P''(x)dx$ est une forme quadratique sur $\mathbb{R}[x]$.

EXERCICE 4 Soit $\varphi : \mathbb{R}_3[X] \times \mathbb{R}_3[X] \to \mathbb{R}$ telle que $\varphi(P,Q) = \int_0^1 P(x)Q(x)dx$

(1) Montrer que φ est une f.b.s sur $\mathbb{R}_3[X]$

(2) Déterminer $\mathcal{C}(q)$, cône isotrope de la forme quadratique associée à φ

(3) Déterminer $mat_{\mathcal{B}_0}\varphi$, où $\mathcal{B}_0$ est la base canonique de $\mathbb{R}_3[X]$

EXERCICE 5 Soit $q : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, forme quadratique définie par $q(x) = x_1^2 - x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_2x_3, \forall x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$

(1) Déterminer $N(q)$, noyau de q

(2) Soit $F = vectv$, où $v = e_1 + e_2 + e_3$, les e_i étant les éléments de la base canonique de $\mathbb{R}^3$

(a) Déterminer $F^\perp$ et vérifier que $F^\perp \supseteq N(q)$

(b) Déterminer $F^{\perp\perp}$ et vérifier que $F^{\perp\perp} = F + N(q)$

EXERCICE 6 Soit q la forme quadratique définie sur $\mathbb{R}^4$ par

$$q(x) = x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_1x_2 - 2x_2x_3 - 2x_2x_4 + 4x_3x_4$$

et F le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ définie par les équations : $x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 0$ et $x_2 - x_4 = 0$. Déterminer $F^\perp$

EXERCICE 7 Décomposer, dans chacun des cas suivants, la forme quadratique q, définie sur $\mathbb{R}^3$ ou sur $\mathbb{R}^4$, en carrés indépendants à l'aide de la méthode de Gauss. On précisera la signature et le rang de q :

(1) $q(x) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 4(x_2x_3 + x_1x_3 + x_1x_2)$

(2) $q(x) = x_1^2 + 6x_2^2 - 4x_1x_2 + 8x_1x_3$

(3) $q(x) = 2x_1^2 + 3x_2^2 - x^3 - 8x_1x_3$

(4) $q(x) = x_1^2 + x_2^2 - 3x_4^2 + 5x_1x_2 - x_1x_4 + 2x_2x_4 - 7x_3x_4$

(5) $q(x) = xy + yz + xz + yt + xt + zt$

(6) $q(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 + 2yz\cos\alpha + 2zx\cos\beta + 2xy\cos\gamma$, où $\alpha, \beta, \gamma \in]0, \pi[$

EXERCICE 8 A l'aide de la méthode de Gauss , déterminer les vecteurs isotropes des formes quadratiques q suivantes définies sur $\mathbb{R}^3$:

(1) $q(x) = x_1^2 + 3x_2^2 - 8x_3^2 - 4x_1x_2 + 2x_1x_3 - 10x_2x_3$

(2) $q(x) = x_1^2 + 2x_2^2 - 2x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3$

EXERCICE 9 A l'aide de la méthode de Gauss, déterminer les vecteurs isotropes des formes quadratiques q suivantes suivantes définies sur $\mathbb{R}^3$:

(1) $q(x) = x_1^2 + 3x_2^2 - 8x_3^2 - 4x_1x_2 + 2x_1x_3 - 10x_2x_3$

(2) $q(x) = x_1^2 + 2x_2^2 - 2x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3$

EXERCICE 10 Déterminer, dans chacun des cas suivants, la signature de la forme quadratique q et une base orthogonale pour q :

(1) $q(x) = x_1^2 + 4x_2^2 + 9x_3^2 + 2x_1x_2 + 6x_2x_3$

(2) $q(x) = x_1^2 + 3x_2^2 + 8x_3^2 - 4x_1x_2 + 6x_1x_3 - 10x_2x_3$

(3) $q(x) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 2x_4^2 - 2x_1x_2 - 2x_1x_3 - 2x_1x_4 + 2x_2x_3 - 4x_2x_4$

EXERCICE 11 A l'aide de la méthode de Gauss, déterminer, suivant les valeurs des paramètres λ et μ, le rang de la forme quadratique q définie sur $\mathbb{R}^3$ ou $\mathbb{R}^4$:

(1) $q(x) = (1-\lambda)x_1^2 + 2\mu x_1x_2 + (1+\lambda)x_2^2 - 2\lambda x_1x_3 + 2\mu x_2x_3 + \mu x_3^2$

(2) $q(x) = x_1^2 - 3x_2^2 - 4x_3^2 + \lambda x_4^2 + 2\mu x_1x_2$

EXERCICE 12 On considère la forme quadratique q définie sur $\mathbb{R}^2$ par $q(x, y) = ax^2 + 2bxy + cy^2$, où a, b, c sont des réels donnés. On note par M la matrice de q dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$. Montrer que

(1) q non dégénérée $\Leftrightarrow rg(q) = 2 \Leftrightarrow det(M) \neq 0$

(2) q définie $\Leftrightarrow det M > 0$

(3) q définie positive $\Leftrightarrow det(M) > 0$ et $tr(M) > 0$

ENSAE

ISEP2 **(2022/2023)**

ALGÈBRE BILINÉAIRE-TRAVAUX DIRIGES - SERIE 2

EXERCICE 1 Pour quelles valeurs du réel λ, l'application f dénit ci-dessous représente-t-elle un produit scalaire sur $\mathbb{R}^3$?

$$f(x,y) = x_1y_1 + 6x_2y_2 + 3x_3y_3 + 2x_1y_2 + 2x_2y_1 + 3\lambda x_1y_3 + 3\lambda x_3y_1$$

EXERCICE 2 Soit $l^2(\mathbb{R}) = \{u = (u_n)_{n\geq 0} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} / \sum_{n=0}^{+\infty} u_n^2 < +\infty\}$

(1) Montrer que $l^2(\mathbb{R})$ est un $\mathbb{R} - ev$.
On pourra utiliser l'égalité : $(a+b)^2 \leq 2(a^2+b^2), \forall a, b \in \mathbb{R}$

(2) On pose : $\langle u, v\rangle = \sum_{n=0}^{+\infty} u_nv_n, \forall u, v \in l^2(\mathbb{R})$. Montrer que $(l^2(\mathbb{R}), \langle , \rangle)$ est un espace préhilbertien.On pourra utiliser l'égalité : $(a+b)^2 \geq 2|ab|, \forall a, b \in \mathbb{R}$

EXERCICE 3 Soit E un espace euclidien, F et G deux sous-espaces vectoriels de E.
Montrer que

(1) $F \subseteq G \Rightarrow F^\perp \supseteq G^\perp$
(2) $(F+G)^\perp = F^\perp \cap G^\perp$
(3) $(F \cap G)^\perp = F^\perp + G^\perp$

EXERCICE 4 On considère l'intégrale $I_n = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} x^n e^{-\frac{x^2}{2}} dx, n \in \mathbb{N}$

(1) (a) Montrer que cette integrale converge et que $I_{2p+1} = 0, \forall p \in \mathbb{N}$
(b) Montrer la relation de recurrence : $I_n = (n-1)I_{n-2}$ et calculer $I_{2p}, \forall p \in \mathbb{N}$.On rappelle que $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \sqrt{2\pi}$

(2) On pose $\langle P, Q\rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} P(x)Q(x)dx, \forall P, Q \in \mathbb{R}[X]$
(a) Justifier l'existence dans $\mathbb{R}$ de $\langle P, Q\rangle, \forall P, Q \in \mathbb{R}[X]$
(b) Montrer qu'il s'agit d'un produit scalaire
(c) Orthonormaliser, par le procédé de Gram-Schmidt, la famille $\{1, X\}$

EXERCICE 5 On munit $\mathbb{R}^4$ de la forme bilinéaire b définie, dans la base canonique, par $b(x,y) = x_1y_1 + 2x_2y_2 + 4x_3y_3 + 18x_4y_4 + x_1y_3 + x_3y_1 + 2x_2y_4 + 2x_4y_2 + 6x_3y_4 + 6x_4y_3$

(1) Montrer qu'il s'agit d'un produit scalaire

(2) Ecrire la matrice de b dans la base canonique de $\mathbb{R}^4$

(3) Soit F le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ défini par les équations suivantes : $x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0$ et $x_2 - 2x_4 = 0$. Déterminer $F^{\perp}$

EXERCICE 6 On définit sur $E = \mathbb{R}[X]$ la forme $\langle , \rangle$ par :
$\langle P, Q\rangle = \sum_{k=0}^{k=p+q} a_k b_k, \forall P = \sum_{k=0}^{k=p} a_k x^k, Q = \sum_{h=0}^{h=q} b_h x^h \in E$

(1) Montrer que $(E, \langle , \rangle)$ est un espace préhilbertien réel

(2) Montrer que la base canonique de E est orthonormale

(3) Soit $F = \{P \in E / P(0) = 0\}$

(a) Montrer que F est un hyperplan de E

(b) Déterminer $F^{\perp}$

EXERCICE 7 Déterminer, à l'aide du procédé de Gram-Schmidt, une base orthonormée du sous-espace F de $\mathbb{R}^4$ engendré par les vecteurs :
$v_1 = e_1 + e_2, v_2 = e_1 - e_3 + e_4, v_3 = e_2 + e_3 + e_4$

EXERCICE 8 Soit sur $\mathbb{R}^3$, la forme quadratique q définie par :
$q(x) = 4x_1^2 + 5x_2^2 + 3x_3^2 + 4x_1x_2 - 2x_2x_3 + 4x_1x_3, \forall x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$

(1) Trouver une base orthogonale pour q par la méthode de Gauss

(2) Montrer que q est définie positive

(3) Trouver une base orthonormée pour q par la méthode de Gram-Schmidt.

EXERCICE 9 On considère : E un espace euclidien de dimension n, $\langle , \rangle$ le produit scalaire de E,et $u \in \mathcal{L}(E)$

(1) Montrer que pour tout $y \in E$, l'application : $x \mapsto \langle u(x), y\rangle$ est une forme linéaire sur E

(2) En déduire qu'il existe une unique application $u^* : E \to E$ telle que $\langle u(x), y\rangle = \langle x, u^*(y)\rangle, \forall x, y \in E$

(3) Montrer que u^* est linéaire. On l'appelle *adjoint de u*.

(4) Soient $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, ..., e_n\}$ une base orthonormée de E et M la matrice de u dans $\mathcal{B}$. Déterminer la matrice M^* de u^* dans $\mathcal{B}$.

(5) Montrer que $Ker(u^*) = (Im(u))^{\perp}$ et $Im(u^*) = (Ker(u))^{\perp}$

EXERCICE 10 $\mathbb{R}^3$ étant muni de sa structure euclidienne canonique, etudier les endomorphismes de $\mathbb{R}^3$ définis dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ par les matrices suivantes :

$$A = \frac{1}{9}\begin{bmatrix} 8 & 1 & -4 \\ -4 & 4 & -7 \\ 1 & 8 & 4 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, C = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 2+\sqrt{3} & -\sqrt{2} & 2-\sqrt{3} \\ \sqrt{2} & 2\sqrt{3} & -\sqrt{2} \\ 2-\sqrt{3} & \sqrt{2} & 2+\sqrt{3} \end{bmatrix},$$

$$D = \begin{bmatrix} b^2 + a^2\cos(t) & a\sin(t) & ab(1-\cos(t)) \\ -a\sin(t) & \cos(t) & b\sin(t) \\ ab(1-\cos(t)) & -b\sin(t) & a^2 + b^2\cos(t) \end{bmatrix}, a, b, t \in \mathbb{R} / a^2 + b^2 = 1$$

ENSAE

$ISEP2$ (2022/2023)

ALGÈBRE BILINÉAIRE-TRAVAUX DIRIGES - SERIE 3

EXERCICE 1 Dans $\mathbb{R}^4$, muni du produit scalaire usuel, soit F le sous-espace vectoriel défini par les équations : $x+2y-z+t=0$ et $2x+y-z+t=0$

(1) Ecrire la matrice de la projection orthogonale sur F

(2) Déterminer un système d'équations de $F^\perp$

EXERCICE 2 On munit $\mathbb{R}^4$ de sa base canonique $\mathcal{B}_0$.
On pose $F=\{(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4/x+y+z+t=0 \; et \; x-y+z-t=0\}$

(1) Déterminer la matrice de la projection orthogonale p_F dans $\mathcal{B}_0$

(2) Calculer $d(a,F)$, avec $a=(1,2,3,4)$

EXERCICE 3 On considère $E=\mathbb{R}^4$ muni de sa base canonique $\mathcal{B}_0$.
On pose $v_1=(1,2,-1,1), v_2=(0,3,1,-1)$ et $F=Vect\{v_1,v_2\}$

(1) (a) Donner un système d'équations de $F^\perp$; puis une base orthonormée de $F^\perp$

(b) En déduire une base orthonormée $\mathcal{B}'=(e'_{1\leq i\leq 4})$ de $\mathbb{R}^4$ de $E=F\oplus F^\perp$, compatible avec la somme directe.

(2) Soit p_F la projection orthogonale sur F.Pour tout $x\in E$, donner l'expression de $p_F(x)$ en fonction de x et les e'_i

(3) En déduire la matrice de p_F dans $\mathcal{B}_0$

(4) Calculer la distance $d((1,0,0,1),F)$

(5) Retrouver ce dernier résultat en utilisant les matrices de Gram.

EXERCICE 4 Soit E un espace euclidien muni d'une base orthonormée $\mathcal{B}=(i,j,k)$.

Soit p l'endomorphisme de E tel que $mat_{\mathcal{B}}(p)=A=\frac{1}{6}\begin{bmatrix}5&-2&1\\-2&2&2\\1&2&5\end{bmatrix}$

Montrer que p est une projection orthogonale sur un plan vectoriel P que l'on précisera.

EXERCICE 5 Soit $E=\mathbb{R}_3[x]$, muni de sa structure euclidienne canonique (c'est à dire que sa base canonique : $(1,x,x^2,x^3)$ est une base orthonormée de E.

(1) Déterminer une base orthonormée de l'hyperplan $H=\{P\in E/P(1)=0\}$

(2) En déduire la projection orthogonale de $x\in E$ sur H et $d(x,H)$

EXERCICE 6 Soit $E=\{f\in\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R}), \int_0^1 t^2f(t)dt<+\infty\}$

(1) Montrer que E est un $\mathbb{R}-ev$

(2) Montrer que $\langle f,g\rangle=\int_0^1 t^2f(t)g(t)dt, \forall f,g\in E\}$ définit un produit scalaire sur E

(3) En déduire une méthode de calcul de $\alpha=\inf_{(a,b)\in\mathbb{R}^2}\int_0^1 t^2(\ln t-at-b)^2dt$