**ECOLE NATIONALE DE STATISTIQUE ET D'ANALYSE ECONOMIQUE (ENSAE), DAKAR**

Travaux dirigés d'Analyse 3
ISEP 2- 2023-2024
**TD 2 - Fonctions de plusieurs variables**

**Exercice 1** Les fonctions suivantes ont-elles une limite en l'origine ?

1. $f(x,y) = (x+y)\sin\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right)$,
2. $f(x,y) = \frac{1-\cos(xy)}{xy^2}$,
3. $f(x,y) = \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$,
4. $f(x,y) = \frac{|x+y|}{x^2+y^2}$,
5. $f(x,y,z) = \frac{xy+yz}{x^2+2y^2+3z^2}$.

**Exercice 2** Étudier la continuité sur $\mathbb{R}^2$ des fonctions définies par :

1. $f(x,y) = \frac{x^2y}{x^2+y^2}$ si $(x,y) \neq (0,0)$ et $f(0,0) = 0$ ;
2. $f(x,y) = \frac{x^3-y^3}{x^2+y^2}$ si $(x,y) \neq (0,0)$ et $f(0,0) = 0$.

**Exercice 3** Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. On considère la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2+xy+y^2}{(x^2+y^2)^\alpha} & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

1. Montrer que $f$ est continue sur $\mathbb{R}^2$ si et seulement si $\alpha < 1$.
2. Montrer que $f$ est différentiable sur $\mathbb{R}^2$ si et seulement si $\alpha < \frac{1}{2}$.

**Exercice 4** Montrer d'après la definition que la fonction $f(x,y) = x^2+y^2$ est différentiable dans $\mathbb{R}^2$. Calculer la différentielle.

**Exercice 5** Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x,y) = xe^{xy}$. Est-elle différentiable au point $(1,0)$ ?

**Exercice 6** Déterminer l'ensemble de continuité de l'application $f$ définie de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ par :
$f(x,y) = x\sin\frac{1}{y} + y\sin\frac{1}{x}$ si $xy \neq 0$ et $f(x,y) = 0$ si $xy = 0$.

**Exercice 7** On considére la fonction $f$ définie de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ par :

$$f(x,y) = \frac{x^3}{x^2+y^2} \text{ si } (x,y) \neq (0,0) \quad \text{et} \quad f(0,0) = 0.$$

Étudier la continuité de $f$, l'existence et la continuité des dérivées partielles premières de $f$.

**Exercice 8** On considére la fonction $f$ définie de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ par :

$$f(x,y) = \frac{y^3}{\sqrt{x^2+y^4}} \text{ si } (x,y) \neq (0,0) \text{ et } f(0,0) = 0.$$

a) Montrer que $f$ est continue en $(0,0)$.
b) Établir que, pour tout $v$ de $\mathbb{R}^2 - (0,0)$, $f$ admet une dérivèe première en $(0,0)$ suivant $v$.
c) Monter que $f$ n'est pas différentiable en $(0,0)$.

**Exercice 9** On considére la fonction $f$ définie de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ par :

$$f(x,y) = \left(e^x - e^y, x+y\right).$$

Montrer que $f$ est un $C^1$-difféomorphisme de $\mathbb{R}^2$ sur $\mathbb{R}^2$.

**Exercice 10** On considére la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}^2 - (0,0)$ dans $\mathbb{R}$ par :

$$f(x,y) = xy\ln(x^2+y^2).$$

a) Montrer que $f$ admet un prolongement continu à $\mathbb{R}^2$, noté encore $f$.
b) Etudier l'existence et la continuité des dérivées partielles premères de $f$.
c) Etudier l'existence et la continuité des dérivées partielles secondes de $f$.

**Exercice 11** On considére la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ par :

$$f(x,y) = xy - xy^2 + yx^2.$$

Déterminer les extrémums locaux et globaux de $f$.

**Exercice 12** Déterminer les extrémums locaux de $f$ dans chacun des cas suivants :

1. $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = 3xy - x^3 - y^3$,
2. $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = (x-y)(y-1)e^{x+y} + (x-1)e^x + (y-1)e^y$,
3. $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $f(x,y,z) = \frac{1}{2}(x^2+y^2+z^2) - xyz$.