6.8.4 Calcul de la matrice de Jordan d'une matrice donnée

Une question naturelle est : Étant donnée une matrice A explicite, comment calculer une matrice de Jordan $\mathcal{J}$ à laquelle elle est semblable ? Pour répondre à cette question il faut suivre les étapes suivantes :

1. Calculer le polynôme caractéristique.
2. Vérifier si le polynôme caractéristique est scindé.
3. Pour chaque valeur propre λ, on calcule alors la suite des sous-espaces $ker(A - \lambda I_n)^i$ où i est l'ordre de multiplicité de λ.

Voici deux exemples pratiques de réponse à cette question :

Exemple 1 : Trouver la forme réduite de Jordan de la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 14 \\ 0 & 1 & 5 & 7 \\ 0 & 0 & 2 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R}).$$

<u>**Solution.**</u> On a :

$$\begin{aligned} P_A(X) &= det(A - XI_4) \\ &= (1-X)^2(2-X)^2. \end{aligned}$$

D'après le lemme de décomposition des noyaux on a :

$$E = \ker(f - Id_E)^2 \oplus \ker(f - 2Id_E)^2,$$

où $E = \mathbb{R}^4$, f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^4$ canoniquement associé à A et $(e_1, \ldots, e_4)$ la base canonique de $\mathbb{R}^4$. Pour $\ker(f - Id_E)$, on résout :

$$\begin{cases} 2y + 3z + 14t = 0 \\ 5z + 7t = 0 \\ z + 7t = 0 \\ t = 0, \end{cases}$$

ce qui équivaut à $y = z = t = 0$.
Donc $e_1 = (1, 0, 0, 0)$ engendre $\ker(f - Id_E)$.

Après avoir fait les calculs, on trouve $(A-I)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 13 & 49 \\ 0 & 0 & 5 & 42 \\ 0 & 0 & 1 & 14 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

D'où :

$$(x, y, z, t) \in \ker(f - Id_E)^2 \Leftrightarrow z = t = 0$$

donc (e_1, e_2) est une base de $\ker(f - \mathrm{Id}_E)^2$.
Ainsi, $\{e_2\}$ engendre un supplémentaire de $\ker(f - Id_E)$ dans $\ker(f - \mathrm{Id}_E)^2$.
D'où, la base de $\ker(f - \mathrm{Id}_E)^2$ disposée comme suit :

$$\begin{array}{c} e_2 \\ \uparrow \\ (f - \mathrm{Id}_E)(e_2) = 2e_1. \end{array}$$

Soit f_1 la restriction de f sur $\ker(f - \mathrm{Id}_E)^2$, on a :

$$Mat(f_1, (2e_1, e_2)) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

On trouve que $\ker(f - 2Id_E)$ est de dimension 1 engendré par $u_1 = (13, 5, 1, 0)$.
Pour $ker(f - 2Id_E)^2$ on résout :

$$\begin{cases} x - 4y + 7z + 21t = 0 \\ \quad y - 5z + 28t = 0. \end{cases}$$

Ce qui est équivalent à :

$$\begin{cases} x = 13z - 133t \\ y = 5z - 28t. \end{cases}$$

D'où u_1 et $u_2 = (-133, -28, 0, 1)$ constituent une base de $\ker(f - 2Id_E)^2$.
Ainsi $\{u_2\}$ engendre un supplémentaire de $\ker(f - 2Id_E)$ dans $\ker(f - 2\,\mathrm{Id}_E)^2$.
D'où la base de $\ker(f - 2\,\mathrm{Id}_E)^2$ est disposée comme suit :

$$\begin{array}{c} u_2 \\ \uparrow \\ (f - 2\,\mathrm{Id}_E)(u_2) = 7u_1. \end{array}$$

par rapport à cette base la matrice de f_2 induite par f sur $\ker(f - 2\,\mathrm{Id}_E)^2$ est :

$$Mat(f_2, (7u_1, u_2)) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Finalement :

$$Mat(f,(2e_1,e_2,7u_1,u_2)) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

C'est la réduite de Jordan de A.
La matrice de passage de la base canonique de $\mathbb{R}^4$ à la base $B' = (2e_1, e_2, 7u_1, u_2)$ est la matrice :

$$P = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 91 & -133 \\ 0 & 1 & 35 & -28 \\ 0 & 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

On a :

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Exemple 2 : Trouver la forme réduite de Jordan de la matrice :

$$\begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & -4 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -5 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Solution. Le polynôme caractéristique de A est :

$$P_A(X) = det(A - XI_4) = (3+X)^4.$$

On pose $M = A + 3I$. On a :

$$M = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

On cherche une base de $Ker(M)$ et on trouve que :

$$dim \ker(M) = 2.$$

Enfin :

$$v_1 = Mv_2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ -4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Il nous manque un vecteur u qui soit dans $\ker(M) \setminus Vect(v_1)$. On peut choisir :

$$u = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \in \ker(M) \setminus Vect(v_1).$$

Ainsi (u, v_1, v_2, v_3) est une base de Jordan dans laquelle la réduite de Jordan est exactement J.
La matrice de passage correspondante est alors :

$$P = \begin{pmatrix} -4 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$