Année universitaire : 2023-2024

Ecole Nationale de la Statistique et de l'Analyse Economique

(ENSAE) Pierre Ndiaye de Dakar Dr. S. DIOUF

Contrôle 1 D'algèbre 1 du 1^{er}Semestre : Section AS1

Durrée : 4 heures

Exercice 1 : 1,5 pts Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $x_0, x_1, \cdots, x_n$ des nombres réels dans $[0,1]$ tels que : $x_0 \leq x_1 \leq \cdots \leq x_n \leq 1$.

Montrer par l'absurde que $\exists i \in \{1, 2, \cdots, n\}$ *tel que* $|x_i - x_{i-1}| \leq \dfrac{1}{n}$.

Exercice 2 : 4 pts (Les parties I, II, III, et IV sont indépendantes)

Partie I : Soit $\mathcal{R}$ la relation binaire dans $E = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ définie par : $x\mathcal{R}y \Longleftrightarrow x + y$ est divisible par 3.

1. $\mathcal{R}$ est -elle réflexive ?
2. $\mathcal{R}$ est -elle symétrique ?
3. $\mathcal{R}$ est -elle antisymétrique ?
4. $\mathcal{R}$ est -elle transitive ?

Partie II : Une relation binaire $\mathcal{R}$ sur un ensemble E est dite **circulaire** si pour tous $x, y, z \in E$, on a : $(x\mathcal{R}y \quad et \quad y\mathcal{R}z) \Longrightarrow z\mathcal{R}x$.

Montrer qu'une relation binaire est d'équivalence si et seulement si elle est réflexive et circulaire.

Partie III : On dit qu'une relation binaire sur un ensemble E est une relation de **prépériode** si elle est réflexive et transitive.

Soit P une relation binaire de prépériode. On considère la relation binaire $\mathcal{R}$ définie par : $x\mathcal{R}y \Longleftrightarrow (xPy \quad et \quad yPx)$.

Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'equivalence.

Partie IV : Dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$, on définit $\mathcal{R}$ par : $(x, y)\mathcal{R}(x', y') \Longleftrightarrow xy' = x'y$.

1. Démontrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'equivalence.
2. Déterminer les classes d'equivalences de $(0, 1)$ et de $(6, 2)$.
3. Soit $(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$. Calculer $C(x, y)$; la classe déquivalence de (x, y).

Exercice 3 : 3 pts

Soit les deux applications suivantes :

$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \qquad \text{et} \qquad g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

$$(x, y) \longmapsto f(x, y) = x + y \qquad\qquad x \longmapsto g(x) = (x^2, -x^2)$$

1. f est-elle injective ? f est-elle surjective ?
2. g est-elle injective ? g est-elle surjective ?
3. Calculer $(f \circ g)(x)$.
4. $f \circ g$ est-elle injective ? $f \circ g$ est-elle surjective ?

Exercice 4 : 3 pts (Les parties I et II sont indépendantes)

Partie I : Soit $(G, .)$ un groupe. Le **centre** de G, noté $Z(G)$, est l'ensemble : $Z(G) = \{x \in G / xy = yx, \forall y \in G\}$.

1. Vérifier que $Z(G)$ est un sous-groupe commutatif de G.
2. Montrer que G est commutatif si et seulement si $G = Z(G)$.

Partie II : Étant donnés un groupe G et une partie non vide A de G, on appelle **normalisateur** et **centralisateur** de A, les parties $N(A)$ et $C(A)$ de A, respectivement déterminés par : $N(A) = \{x \in G / Ax = xA\}$ *et* $C(A) = \{x \in G / \forall a \in A, ax = xa\}$.

1. Montrer que $N(A)$ est un sous-groupe de G.

2. Montrer que $C(A)$ est un sous-groupe de $N(A)$.

3. Calculer $N(Z)$.

Exercice 5 : 4 pts.

On note $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ l'ensemble des réels suivant :

$$\mathbb{Z}[\sqrt{2}] = \{m + n\sqrt{2} / m, n \in \mathbb{Z}\}.$$

1. Montrer que $(\mathbb{Z}[\sqrt{2}], +, .)$ est un sous-anneau de $\mathbb{R}$.

2. On considère l'application

$f : \mathbb{Z}[\sqrt{2}] \longrightarrow \mathbb{Z}[\sqrt{2}]$

$m + n\sqrt{2} \longmapsto f(m + n\sqrt{2}) = m - n\sqrt{2}$

Montrer que f est un automorphisme de l'anneau $(\mathbb{Z}[\sqrt{2}], +, .)$

3. On considère l'application

$N : \mathbb{Z}[\sqrt{2}] \longrightarrow \mathbb{Z}$

$x \mapsto N(x) = xf(x)$

Montrer que N est un morphisme d'anneaux pour la multiplication.

4. Montrer qu'un élément x de $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ est inversible si et seulement si $N(x) = \pm 1$.

5. On note $\mathbb{Q}[\sqrt{2}] = \{m + n\sqrt{2} / m, n \in \mathbb{Q}\}$.

Montrer que $(\mathbb{Q}[\sqrt{2}], +, .)$ est un corps.

PROBLEME **Anneaux booléens**

Partie 1: Etude de la différence symétrique. 2,5

Soient A et B deux sous-ensembles d'un ensemble E. On appelle *différence symétrique* de A et B le sous-ensemble:

$$A\Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A).$$

1. Démontrer que la différence symétrique est commutative.
2. Est-elle associative? on peut utiliser la fonction indicatrice
3. Admet-elle un élément neutre?
4. Montrer que $A\Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$. on peut utiliser la fonction indicatrice
5. Montrer que l'intersection est distributive sur la différence symétrique.

Partie 2: Etude d'un anneau de Boole 2,5 pts

On considère un anneau A dont l'addition (loi de groupe) et la multiplication sont respectivement notées $+$ et $\times$. On note 0 l'élément neutre de l'addition. On dit que l'anneau A est un *anneau de Boole* si tout élément de A est idempotent pour la multiplication, c'est-à-dire si

$$\forall x \in A, \quad x \times x = x$$

1. Montrer que l'anneau $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, +, \times)$ est un anneau de Boole.
2. (a) Montrer que dans un anneau de Boole, tout élément est son propre symétrique pour l'addition.
   (b) En déduire qu'un anneau de Boole est nécessairement commutatif.
3. On suppose que A est intègre. Montrer alors que $Card(A) \leq 2$.

BONUS: Partie 3: Exemple d'anneau de Boole en théorie des ensembles 3pts

1. Dans cette question, on considère E un ensemble non vide et on désigne par $\mathcal{P}(E)$ l'ensemble des parties de E. En utilisant la première partie, montrer que $(\mathcal{P}(E), \Delta, \cap)$ est un anneau de Boole.
2. Dans la suite de ce problème, $(A, +, \times)$ désignera un anneau de Boole, et on désigne par E l'ensemble des éléments m de A, non nuls et tels que pour tout $x \in A$, $mx = 0$ ou $mx = m$.
   Montrer que si m et m' sont deux éléments distincts de E alors $mm' = 0$.
3. Pour tout élément $x \in E$, on définit la partie
   $$\Phi(x) = \{m \in E | mx = m\}.$$
   (a) Montrer que, pour tout x et y de A, $\Phi(xy) = \Phi(x) \cap \Phi(y)$.
   (b) Montrer que, pour tout $(x, y) \in A^2$, $\Phi(x + y + xy) = \Phi(x) \cup \Phi(y)$.
   (c) Montrer que pour tout $x \in A$, $\Phi(1 + x) = \overline{\Phi(x)}$ (le complémentaire est dans E).
   (d) Montrer que, pour tout $(x, y) \in A^2$, $\Phi(x)\Delta\Phi(y) = \Phi(x + y)$.
   (e) En déduire que Φ est un morphisme d'anneaux de $(A, +, \times)$ dans $(\mathcal{P}(E), \Delta; \cap)$.
4. On suppose à présent que $(A, +, \times)$ est un anneau de Boole de cardinal fini.
5. (a) Soit x_0 un élément non nul de A. Montrer que si $x_0 \notin E$, il existe $x_1 \in A$ tel que $x_0x_1 \neq 0$ et $x_0x_1 \neq x_0$. En déduire l'existence d'un élément $y \in A$ tel que $x_0y \in E$.
   (b) En déduire que le morphisme Φ est injectif.
   (c) Soit F un sous-ensemble de E, et soit S_F la somme des éléments de F (avec par convention $S_\emptyset = 0$). Déterminer la partie $\Phi(S_F)$. En déduire que le morphisme Φ est surjectif.
   (d) Prouver que le cardinal d'un anneau booléen fini est une puissance de 2.