ECOLE NATIONALE DE STATISTIQUE ET D'ANALYSE ECONOMIQUE (ENSAE), DAKAR

AS 2 - Devoir 1 d'Analyse 3 - 2021-2022
Durée : 2h

Exercice 1.

1. Donner la définition d'une équation diffiérentielle de Riccati et de Benoulli.
2. Expliquer comment résoudre une équation différentielle de Bournoulli.
3. Donner un exemple de fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ amettant des dérivées partielles en un point $x_0 \in \mathbb{R}^2$ sans y être différentiable.

Exercice 2. Résoudre les équations différentielles suivantes : $y' + y - (\cos x - \sin x)y^2 = 0$, $xy' - 2x^2\sqrt{y} = 4y$, $y' - 2xy + y^2 = 2 - x^2$, $x^2y' + xy + x^2y^2 = 1$, $2y' + y^2 - \frac{3}{x^2} = 0$, $xy' - (2x+1)y + y^2 = -x^2$, $y' - \frac{1}{2x}y = \frac{1}{x}y^2 + 1$.

Exercice 3. Déterminer les solutions maximales de l'équation différentielle suivante avec les conditions initiales $y(0) = 0$ et $y'(0) = 0$:

$$y' - 2y = e^x$$

Exercice 4. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ donnée par

$$f(x,y) = \arcsin\left(-\frac{1}{1+x^2+y^2}\right).$$

1. Etudier la continuité de f sur $\mathbb{R}^2$.
2. La fonction f admet-elle des dérivées partielles dans toutes les direction en tout point de $\mathbb{R}^2$?
3. La fonction f est-elle différentiable sur $\mathbb{R}^2$? Le cas échéant, donner la différentielle de f sur $\mathbb{R}^2$?

Exercice 5. Soit $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}^2$ donnée par $f(0,y) = (0,0)$ pour tout $y \in \mathbb{R}$ et

$$f(x,y) = 2\left(x^2\sqrt{y}\sin\frac{1}{x^3}, x^2\sqrt{y}\cos\frac{1}{x^3}\right)$$

si $(x,y) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$.

1. Montrer que f est différentiable en tout point de $\mathbb{R}^2$.
2. Déterminer les dérivées partielles de f, si elles existent.