ENSAE $AS1$ (2023/2024)

CONTROLE $N°2$ D'ANALYSE II - DURÉE = 4H

Exercice 1 : 5pts = 1,5 + 1,5 + 2

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(t) = \dfrac{1+t^2}{1+t^4}$ et l'intégrale $I = \displaystyle\int_0^1 f(t)dt$

(1) Calculer la valeur de I

(2) Déterminer le DSE de f et préciser son rayon de convergence.

(3) Déduire de ce qui précède la valeur de la somme $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n \frac{2n+1}{(4n+1)(4n+3)}$

Exercice 2 : 5pts = 1 + 2 + 2

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{\ln(x+\sqrt{1+x^2})}{\sqrt{1+x^2}}$ arcsh? $\frac{1}{\sqrt{1+x}} = \sum (-1)^n$

(1) Montrer que f vérifie la relation (1) : $(1+x^2)f'(x) + xf(x) = 1, \forall x \in \mathbb{R}$

(2) Déterminer alors le DES de f. Préciser son rayon de convergence.

(3) En déduire le DES de la fonction g telle que $g(x) = [\ln(x+\sqrt{1+x^2})]^2, \forall x \in \mathbb{R}$ ainsi que son rayon de convergence

Exercice 3 : 6pts = (1 + 1) + (1 + 1) + (1 + 1)

Pour tout couple $(n,p) \in \mathbb{N}^2$, on pose : $a_{n,p} = \displaystyle\int_0^1 x^p(\ln x)^n dx$

(1) (a) Etablir une relation de récurrence entre $a_{n,p}$ et $a_{n-1,p}$

(b) En déduire l'expression de $a_{n,p}, \forall (n,p) \in \mathbb{N}^2$

(2) dans cette question p est un entier naturel fixé.

(a) Etudier la nature de la série $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{1}{a_{n,p}}$.

(b) Calculer $A_p = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{a_{n,p}}$

(3) (a) Etudier la nature de la série $\displaystyle\sum_{p\geq 0} A_p$

(b) Calculer $A = \displaystyle\sum_{p=0}^{+\infty} A_p$

Exercice 4 : 9pts = 1 + (1 + 1) + (1 + 1) + (1 + 1 + 1 + 1)

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $I_n = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{(1+t^4)^n}$. On admet que $I_1 = \frac{\pi\sqrt{2}}{4}$

(1) Montrer, sans calculer sa limite, que la suite $(I_n)_{n\geq 1}$ est convergente.

(2) (a) Montrer que $I_n - I_{n+1} = \frac{1}{4n} I_n, \forall n \in \mathbb{N}^*$

(b) En déduire l'expression de I_n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

(3) (a) Déterminer la nature de la série numérique $\sum_{n\geq 1} \ln(\frac{4n-1}{4n})$

(b) En déduire $\lim_{n\to+\infty} I_n$

(4) On pose :$S_n = \sum_{k=1}^{k=n} (-1)^{k-1} I_k, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

(a) Justifier la convergence de la série numérique : $\sum_{n\geq 1} (-1)^{n-1} I_n$

(b) Montrer que $S_n = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{2+t^4} + (-1)^{n+1} B_n$, avec $B_n = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{(2+t^4)(1+t^4)^n}$

(c) En déduire que $0 \leq B_n \leq I_n, \forall n \in \mathbb{N}^*$

(d) Déduire de ce qui précède la valeur de la somme $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} I_n$

"Les examens sont des exercices de volonté.En cela ils sont beaux et bons (...). L'épreuve de l'examen est utile et juste, et en dépit de faciles déclamations, celui qui ne l'a point surmontée n'en surmontera aucune autre". Paul VALERY, Variété 3

BONNES VACANCES! BONNES VACANCES! BONNES VACANCES!