ENSAE $ITS1$ (2019/2020)
CONTROLE $N°1$ D'ALGÈBRE GÉNÉRALE DURÉE = 4H

Exercice 1 (6 pts = 0,5 + 1,5 + 1 + (1 + 1) + (0,5 + 0,5))
On pose : $G =]-1,+1[$ et $a * b = \dfrac{a+b}{1+ab}, \forall a, b \in G$

(1) Vérifier qu'on définit ainsi une loi de composition interne $*$ dans G.

(2) Montrer que $(G,*)$ est un groupe abélien. $H = [0,1[$ est il un sous-groupe de $(G,*)$?

(3) Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$ fixé. On pose : $H_x = \{\dfrac{x^m - 1}{x^m + 1}, m \in \mathbb{Z}\}$. Montrer que H_x est un sous-groupe de G.

(4) Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $a \in G$, on pose : $a^{*n} = a * a * a ... * a$ (produit de n facteurs tous égaux à a).

(a) Montrer que $a^{*n} = \dfrac{P_n(a)}{Q_n(a)}$, où P_n et Q_n sont des polynômes vérifiant : $P_n(a) + Q_n(a) = (1+a)^n$.

(b) Déterminer les parités de P_n et Q_n, puis les expliciter.

(5) Application :

(a) Montrer que l'application th (tangente hyperbolique)réalise un isomorphisme du groupe $(\mathbb{R}, +)$ sur le groupe $(G,*)$.

(b) En déduire le calcul de $th(nx)$ en fonction de $th(x), \forall n \in \mathbb{N}$ et $\forall x \in \mathbb{R}$.

Exercice 2 (4 pts = 2 + 1 + 1)
Soit I un idéal d'un anneau commutatif A.
On appelle **radical** de I, l'ensemble $\sqrt{I} = \{x \in A / \exists n \in \mathbb{N}^*, x^n \in I\}$.

(1) Montrer que $\sqrt{I}$ est un idéal de A.

(2) Déterminer $\sqrt{12\mathbb{Z}}$.

(3) Comparer $\sqrt{\sqrt{I}}$ et $\sqrt{I}$

Exercice 3 (10 pts = 2 + 1,5 + (0,5 + 2 + 2) + 2)
(les questions 1°, 2°, 3° et 4° sont indépendantes)

(1) Déterminer les valeurs du réel a pour que le polynôme $A = X^4 - X + a$ soit divisible par le polynôme $B = X^2 - aX + 1$.

(2) Calculer le PGCD de A et B, polynômes définis par : $A = X^5 - X^4 - X^3 + 2X + 2$ et $B = X^4 + 5X^3 + 10X^2 + 9X + 5$. On pourra calculer $A(j)$ et $B(j)$ où $j = e^{2i\frac{\pi}{3}}$.

(3) On considère le polynôme P défini par $P = (X+1)^7 - X^7 - 1$

(a) Vérifier que $0, -1$ et $j = e^{2i\frac{\pi}{3}}$ sont des racines de P.

(b) Décomposer le polynôme P en facteurs premiers dans $\mathbb{C}[X]$ puis dans $\mathbb{R}[X]$.

(c) En déduire la décomposition de la fraction rationnelle $F = \dfrac{1}{P}$ en éléments simples sur $\mathbb{R}$.

(4) Calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} \sum\limits_{k=2}^{k=n} \dfrac{3k^2 - 1}{(k-1)^2 k^2 (k+1)^2}$

BAREME :
I = 6pts
II = 4 pts
III = 10 pts