ECOLE NATIONALE DE STATISTIQUE ET D'ANALYSE ECONOMIQUE (ENSAE), DAKAR

Travaux dirigés d'Analyse 3
AS2 - 2022-2023
TD 3

Exercice 1 Les fonctions suivantes ont-elles une limite en l'origine ?

1. $f(x,y) = (x+y)\sin\left(\dfrac{1}{x^2+y^2}\right)$,
2. $f(x,y) = \frac{1-\cos(xy)}{xy^2}$,
3. $f(x,y) = \dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$,
4. $f(x,y) = \dfrac{|x+y|}{x^2+y^2}$,
5. $f(x,y,z) = \dfrac{xy+yz}{x^2+2y^2+3z^2}$.

Exercice 2 Étudier la continuité sur $\mathbb{R}^2$ des fonctions définies par :

1. $f(x,y) = \frac{x^2y}{x^2+y^2}$ si $(x,y) \neq (0,0)$ et $f(0,0) = 0$;
2. $f(x,y) = \frac{x^3-y^3}{x^2+y^2}$ si $(x,y) \neq (0,0)$ et $f(0,0) = 0$.

Exercice 3 Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. On considère la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2+xy+y^2}{(x^2+y^2)^\alpha} & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

1. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}^2$ si et seulement si $\alpha < 1$.
2. Montrer que f est différentiable sur $\mathbb{R}^2$ si et seulement si $\alpha < \frac{1}{2}$.

Exercice 4 Montrer d'après la definition que la fonction $f(x,y) = x^2+y^2$ est différentiable dans $\mathbb{R}^2$. Calculer la différentielle.

Exercice 5 Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x,y) = xe^{xy}$. Est-elle différentiable au point $(1,0)$?

Exercice 6 Déterminer les extrémums locaux de f dans chacun des cas suivants :

1. $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = 3xy - x^3 - y^3$,
2. $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = (x-y)(y-1)e^{x+y} + (x-1)e^x + (y-1)e^y$,
3. $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $f(x,y,z) = \dfrac{1}{2}(x^2+y^2+z^2) - xyz$.