ANSD, DAKR
ISE1 : Maths/Eco

2023-2024
Dr. Diop

Examen de Convexité et Optimisation
Durée : 2 heures

Exercice 1 (6 points)

Soit $a \in \mathbb{R}$. On définit $f_a : (x, y) \mapsto x^2 + y^2 + axy - 2x - 2y$.

1. Pour quelles valeurs de a, la fonction f_a est-elle convexe ? Et strictement convexe ?
2. Discuter en fonction des valeurs du paramètre a de l'existence de solutions au problème d'optimisation $\inf\{f_a(x, y),\ (x, y) \in \mathbb{R}^2\}$.
3. Lorsque $a \in]-2, 2[$, résoudre le problème précédent.

Exercice 2 (6points)

La direction d'une usine de meubles a constaté qu'il y a des temps morts dans chacun des départements de l'usine. Pour remédier à cette situation, elle décide d'utiliser ces temps morts pour fabriquer deux nouveaux modèles de bureaux, M1 et M2. Les temps de réalisation pour chacun de ces modèles dans les ateliers de sciage, d'assemblage et de sablage ainsi que les temps libres dans chacun de ces ateliers sont donnés dans le tableau ci-dessous. Ces temps représentent le nombre d'heures nécessaires à un homme pour effectuer le travail. Les profits que la compagnie peut réaliser pour chacun de ces modèles sont de 300 \$ pour M1 et de 200 \$ pour M2.

	M_1	M_2	TEMPS LIBRES
Sciage	1	2	20
Assemblage	2	1	22
Sablage	1	1	12

La direction désire déterminer combien de bureaux de chaque modèle elle doit fabriquer pour maximiser son profit.

1. Déterminer le programme de base permettant de réaliser l'objectif
2. Résoudre le problème par la méthode graphique.
3. Résoudre le problème par la méthode algébrique
4. Résoudre le problème par la méthode graphique

Exercice 3 (8points)

Soit $A \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$. On considère la fonction $f : \mathbb{R}^n \setminus \{0_{\mathbb{R}^n}\} \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \frac{\langle Ax, x \rangle}{\|x\|^2},$$

où $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est le produit scalaire euclidien de $\mathbb{R}^n$ et $\| \cdot \|$ la norme induite.

1. Montrer que f est $\mathcal{C}^\infty$ sur son ensemble de définition.
2. Montrer que les problèmes d'optimisation

$$\inf_{x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0_{\mathbb{R}^n}\}} f(x) \qquad \text{et} \qquad \sup_{x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0_{\mathbb{R}^n}\}} f(x)$$

   possèdent une solution.
3. Déterminer l'ensemble des points critiques de la fonction f.
4. Résoudre les deux problèmes ci-dessus.
5. Démontrer que la matrice hessienne de f en un point critique $x^* \in \mathbb{R}^n \setminus \{0_{\mathbb{R}^n}\}$ est

$$\operatorname{Hess} f(x^*) = \frac{2}{\|x^*\|^2} (A - f(x^*)\, \mathrm{I}_n),$$

   où I_n désigne la matrice identité de taille n.
6. En déduire que tous les points critiques qui ne sont pas solution d'un des problèmes ci-dessus sont des points-selles.

Bonne chance !