Ecole nationale de la Statistique et de l'Analyse économique Pierre Ndiaye

$M_X(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{xt} f(x)\, dx$

Année scolaire: 2023-2024
Classe: AS 1
Examen: Calcul des probabilités
Durée: 3 heures
Enseignant: Dr Alassane AW

Exercice 1. Un système de protection antimissile se compose de n radars fonctionnant indépendamment, chacun avec une probabilité de 0,9 de détecter un missile entrant dans une zone qui est couverte par toutes les unités militaires.

1. Si $n = 5$ et qu'un missile entre dans la zone militaire, quelle est la probabilité que quatre radars exactement détectent le missile?

2. Quel est le nombre minimum de radars qu'il faut mettre en place si l'on veut que la probabilité de détection d'un missile entrant dans la zone militaire soit de 0,999?

Exercice 2. Une étude géologique indique qu'un puits de pétrole d'exploration foré dans une région particulière devrait contenir du pétrole avec une probabilité de 0,2. $p = 0,2$

1. Quelle est la probabilité que la première découverte de pétrole se produise sur le troisième puits foré?

   1er succès géométrique

2. Quelle est la probabilité que la troisième découverte de pétrole se produise sur le septième puits foré? $f(x) =$ $p^2(1-p)^{x-1}$

3. Trouver la moyenne et la variance du nombre de puits qui doivent être forés si l'entreprise veut mettre en place trois puits producteurs. $r = 1$

Exercice 3. Soient X une variable aléatoire et a et b deux nombres réels donnés avec $a \neq 0$.

1. Montrer que la fonction génératrice des moments de la variable aléatoire $aX + b$ est donnée par

$$M_{aX+b}(t) = e^{bt} M_X(at).$$

$r\frac{1}{p}$ $r\frac{1-p}{p^2}$

2. Supposons que X suit une loi gamma de paramètres $\alpha = 2$ et β inconnu et $Y = 2X/\beta$.

   (a) Calculer la fonction génératrice des moments de la variable aléatoire Y.

   (b) Quelle est la loi suivie par Y?

$M_{ax+b}(t) = \int_{-\infty} e^{xt} f(t)\, dt$

Exercice 4. Soit X une variable aléatoire dont la fonction de densité de probabilité est donnée par

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2x}{\theta} e^{-x^2/\theta} & \text{si } x > 0, \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

$M_{ax+b}(t)$

où $\theta > 0$ est inconnu.

$E(aX+b) = aE(X) + b$

1. Calculer la fonction de densité de probabilité de la variable aléatoire $Y = X^2$.

2. Quelle est la loi de probabilité suivie par la variable aléatoire $Y = X^2$?

Exercice 5. Soit X une variable aléatoire dont la fonction de masse de probabilité est donnée dans le tableau suivant

x	-2	0	2
$f(x) = \mathbb{P}(X = x)$	p	$1 - 2p$	p

1. Quelles sont les valeurs possibles pour le nombre réel p?

2. Montrer que $\mathbb{E}(X) = 0$ et $\mathrm{Var}(X) = 8p$.

3. Le coefficient d'asymétrie de la variable aléatoire X est définie par

$$\xi = \frac{\mathbb{E}[(X - \mu)^3]}{\sigma^3}.$$

où $\mu = \mathbb{E}(X)$ est la moyenne de X et $\sigma^2 = \mathrm{Var}(X)$ est la variance de X. Le coefficient d'aplatissement de X est défini par $\sigma^2 \times \sigma =$ $\sigma = \sqrt{\mathrm{Var}(X)}$

$$\kappa = \frac{\mathbb{E}[(X - \mu)^4]}{\sigma^4}.$$

(a) Calculer ξ et κ.

(b) Quelles sont les valeurs de p qui rendent le coefficient d'aplatissement grand?