ISE 1 ECO **Année: 22-23**

DEVOIR1 D'ALGEBRE LINEAIRE

Semestre 1 - Durée 2heures

Exercice 1. (08*pts*) *Soit la matrice* $A = \begin{pmatrix} 1 & -a & a^2 \\ a & -a^2 & a \\ a & 1 & -a^3 \end{pmatrix}$ *(avec* $a \in \mathbb{R}$*)*

(1) *Déterminer l'ensemble* E *des valeurs de* a *pour lesquelles* $|A| \neq 0$.

(2) *On suppose que* $a \in E$.

i) À l'aide de la comatrice de A*, calculer l'inverse de* A.

ii) En déduire l'unique triplet $(x; y; z)$ *solution du système:* $(S) \begin{cases} x - ay + a^2 z = a \\ ax - a^2 y + az = 1 \\ ax + y - a^3 z = 1 \end{cases}$

Exercice 2. (12*pts*)

Soit $\mathbb{R}_3[X]$ *l'espace vectoriel réel des polynômes de degré inférieur ou égal à 3.*

Et soit f *l'application de* $\mathbb{R}_3[X]$ *vers* $\mathbb{R}_3[X]$ *qui au polynôme* $P(x)$ *associe*

$f(P(x)) = P'(x) + P''(x) + xP(0)$.

$P'(x)$ *est la dérivée première de* $P(x)$ *et* $P''(x)$ *sa dérivée seconde.*

(1) *Montrer que* f *est une application linéaire.*

(2) *Donner la matrice* M*, de* f *dans la base canonique* $\mathcal{B}$ *de* $\mathbb{R}_3[X]$ *puis le rang de* f.

(3) *Soit* $\mathcal{B}' = \{1; 1 - x; (1 - x)^2; (1 - x)^3\}$ *un système de vecteurs de* $\mathbb{R}_3[X]$. *Donner la matrice de* $\mathcal{B}'$ *relativement à la base canonique* $\mathcal{B}$ *de* $\mathbb{R}_3[X]$. *En déduire que* $\mathcal{B}'$ *est une base de* $\mathbb{R}_3[X]$.

(4) *Déterminer la matrice de passage* P *de* $\mathcal{B}'$ *à* $\mathcal{B}$.

(5) *Donner la matrice* N *de* f *dans la base* $\mathcal{B}'$.

(6) *Déterminer* $Ker(f)$ *et* $Im(f)$.

(7) f *est - elle un automorphisme? Justifier.*

Fin de l'épreuve