ENSAE $AS1$ (2022/2023)
CONTROLE $N°2$ D'ALGÈBRE LINÉAIRE II
DURÉE = 4H

Exercice 1 : 6pts = 1,5 + (1,5 + 1) + 1 + 1

On considère la matrice carrée d'ordre 4 : $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

(1) Déterminer $p_A(X)$, polynôme caractéristique de A

(2) (a) En déduire les valeurs propres et les sous-espaces propres de A

(b) La matrice A est elle diagonalisable ? Justifier.

(3) Montrer que A est semblable à $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

(4) Résoudre le système différentiel $X'(s) = AX(s), \forall s \in \mathbb{R}$,
avec $X(s) =^t (x_1(s), x_2(s), x_3(s), x_4(s))$ et $X(0) =^t (0, -1, 0, -1)$

Exercice 2 : 4pts = (1 + 1) + 1 + 1

On considère la matrice carrée d'ordre 4 : $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

(1) (a) Calculer le polynôme caractéristique de A

(b) La matrice A est elle diagonalisable ?

(2) Déterminer, en fonction de n, l'expression de $A^n, \forall n \in \mathbb{N}$

(3) Résoudre le système linéaire récurrent $AX_n = X_{n+1}, \forall n \in \mathbb{N}$,
où $X_n =^t (u_n, v_n, w_n, t_n)$ et $X_0 =^t (u_0, v_0, w_0, t_0)$ est donné.

Exercice 3 : 5pts = (1 + 1) + 1 + (1 + 1)

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 45 & -39 & 11 \end{pmatrix}$

(1) (a) Déterminer le polynôme caratéristique de A

(b) la matrice A est elle diagonalisable ? Justifier.

(2) Montrer que A est semblable à la matrice triangulaire $T = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$

(3) Applications :

(a) Déterminer la suite $(U_n)_{n\geq 0}$ telle que $U_{n+1} = 45U_{n-2} - 39U_{n-1} + 11U_n, \forall n \geq 2$ et $U_0 = U_1 = U_2 = 1$

(b) Déterminer la fonction Y, dérivable sur $\mathbb{R}$, telle que $Y''' = 45Y'' - 39Y' + 11Y$, avec $Y''(0) = Y'(0) = Y(0) = 1$

Exercice 4 : 7pts = 1 + (1 + 1 + 1) + 1 + (1 + 1)

On considère le $\mathbb{R} - ev$: $E = \mathbb{R}_n[x]$, muni de sa base canonique $\mathcal{B}_0$, et l'application φ définie sur E par $\varphi(P) = (X-1)P'$

(1) Montrer que φ est un endomorphisme de E

(2) (a) Déterminer le noyau de φ

(b) A-t-on φ injective ?

(c) Préciser le rang de φ

(3) Déterminer la matrice Ω de φ dans $\mathcal{B}_0$

(4) (a) Préciser le spectre de Ω

(b) Montrer que la matrice Ω est diagonalisable