ENSAE $ITS1$ (2018/2019)
CONTROLE $N°1$ D'ALGÈBRE GÉNÉRALE DURÉE = 4H

Exercice 1 (3 pts = 1,5 + 1,5)
Soient $G = \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$ et $\star$ la loi dans G définie par

$$(x, y) \star (x', y') = (xx', xy' + \frac{y}{x'})$$

(1) Montrer que $(G, \star)$ est un groupe. Est il commutatif?

(2) Montrer que $H = \{(x, x - \frac{1}{x}), x \in \mathbb{R}^*\}$ est un sous-groupe de G. Est il commutatif?

Exercice 2 (5 pts = 1,5 + 1,5 + 2)
On définit dans $A = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ les opérations suivantes : $\forall z = (a, b)$ et $z' = (a', b')$ éléments de A, on pose : $z + z' = (a + a', b + b')$ et $z \bullet z' = (aa' - bb', ab' + a'b)$

(1) Montrer que $(A, +, \bullet)$ est un anneau unitaire. Est il intègre?

(2) Pour tout $z = (a, b) \in A$, on note $\bar{z} = (a, -b)$. Montrer que l'application h de A dans lui-même, définie par $h(z) = \bar{z}$ est un automorphisme d'anneaux, c'est à dire : h est bijective et $\forall z, z' \in A$ on a $h(z + z') = h(z) + h(z')$,et $h(z \bullet z') = h(z) \bullet h(z')$.

(3) Soit $\mathcal{N}$ l'application de A dans $\mathbb{Z}$ définie par $\mathcal{N}(z) = a^2 + b^2, \forall z = (a, b) \in A$

(a) Montrer que $\mathcal{N}(z \bullet z') = \mathcal{N}(z)\mathcal{N}(z'), \forall z, z' \in A$. L'application $\mathcal{N}$ est elle un homomorphisme de groupes?

(b) Montrer que $z \in A$ est inversible dans A si et seulement si $\mathcal{N}(z)$ est inversible dans $\mathbb{Z}$

(c) Déterminer l'ensemble $A^\times$ des éléments inversibles de A.

Exercice 3 (3 pts = 2 + 1)
Soient les polynômes $A = X^5 - X^4 - X^3 + 2X + 2$ et $B = X^4 + 5X^3 + 10X^2 + 9X + 5$

(1) Déterminer le $PGCD(A, B)$. On pourra , si l'on veut, calculer $A(j)$ et $B(j)$ où $j = \frac{-1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

(2) En déduire la décomposition en facteurs premiers de A et B dans $\mathbb{R}[X]$

Exercice 4 (3 pts)
On considère le polynôme $P = X^4 + 2X^2 + 4X + \alpha$ où $\alpha \in \mathbb{R}$ est une constante. Donner une condition nécessaire et suffisante sur α pour que P admette une racine double.

$P' = 4X^3 + 4X + 4$

$P'(x_0) = 4X_0^3 + 4X_0 + 4 = 0$

$X_0^3 + X_0 + 1 = 0$

$X_0^4 + 2X_0^2 + 4X_0 + \alpha = 0$

Exercice 5 (3 pts = 1,5 + 1,5)

Soit la fraction rationnelle $F = \dfrac{X}{X^4 + X^2 + 1}$

(1) Décomposer F en éléments simples sur $\mathbb{R}$

(2) En déduire l'expression de $\displaystyle\sum_{k=1}^{k=n} \frac{k}{k^4 + k^2 + 1}$ en fonction de n puis sa limite quand n tend vers $+\infty$

Exercice 6 (3 pts = 2 + 1)

On considère la fraction rationnelle $F = \dfrac{P}{Q^n}$, où $n \in \mathbb{N}^*$, $P, Q \in \mathbb{R}[X]$ et Q polynôme irréductible.

(1) Montrer, en utilisant les divisions successives par Q, qu'il existe des polynômes : $Q_n, R_n, R_{n-1}, ..., R_2, R_1$, avec $d^\circ R_k < d^\circ Q, \forall k = 1, 2, ..., n$, tels que $P = Q^n Q_n + Q^{n-1}R_n + Q^{n-2}R_{n-1} + ... + QR_2 + R_1$. En déduire la décomposition de F en éléments simples sur $\mathbb{R}$

(2) Application : décomposer en éléments simples sur $\mathbb{R}$ les fractions rationnelles suivantes :

(a) $F = \dfrac{X^8 - X^4 + 2}{(X^2 + X + 1)^3}$

(b) $F = \dfrac{X^5 - X + 1}{(X^2 + 1)^n}, n \in \mathbb{N}, n \geq 2$

BAREME
I = 3 pts
II = 5 pts
III = 3 pts
IV = 3 pts
V = 3 pts
VI = 3 pts