ENSAE $AS1$ (2023/2024)
CONTROLE 1 D'ANALYSE MATHÉMATIQUE - DURÉE = 4H

Exercice 1 (8pts = (1 + 1) + (1 + 1) + (1 + 1)+ 2)
Les questions (1),(2),(3) et (4) sont indépendantes

(1) On considère, $A \subset \mathbb{R}+, A \neq \emptyset$ et majoré.
On pose : $\sqrt{A} = \{\sqrt{a}; a \in A\}$.
  (a) Justifier l'existence de $\sup \sqrt{A}$.
  (b) Exprimer $\sup \sqrt{A}$ en fonction de $\sup A$.

(2) (a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, (2+\sqrt{3})^n + (2-\sqrt{3})^n$ est un nombre entier pair.
  (b) En déduire $\lim\limits_{n \to +\infty} \sin[\frac{\pi}{2}(2+\sqrt{3})^n]$

(3) On définit, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $n \geq 2$:
$u_n = \prod_{k=2}^{n} \cos(\frac{\pi}{2^k})$, et on pose $v_n = u_n \sin(\frac{\pi}{2^n})$.
  (a) Montrer que (v_n) est une suite géométrique.
  (b) En déduire l'expression de u_n en fonction de n, puis $\lim(u_n)$.

(4) Etudier, suivant les valeurs du réel a, la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ définie par :
$u_0 = 0, u_1 = a$ et $u_{n+2} = au_{n+1} + (1-a)u_n, \forall n \in \mathbb{N}$.

Exercice 2(4pts = 1 + 1 + (1 + 1))

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose : $E_n = \{k + \frac{n}{k}, k \in \mathbb{N}^*\}$.

(1) Justifier l'existence de $\inf E_n, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

(2) Montrer l'égalité $\inf E_n = \inf\limits_{1 \leq k \leq n} \{k + \frac{n}{k}\}$.
On pourra, *sans le démontrer*, utiliser,en cas d'existence des bornes inférieures, le résultat suivant : $\inf(A \cup B) = \min(\inf A, \inf B)$.

(3) (a) Montrer que $\inf E_n \geq \sqrt{4n}, \forall n \in \mathbb{N}^*$
  (b) Dans quel cas a-t-on l'égalité $\inf E_n = \sqrt{4n}$?
  A-t-on alors, dans ce cas, $\inf E_n = \min E_n$?

$(k-\sqrt{n})^2 \geq 0$
$k^2 + n \geq 2\sqrt{n}\,k$

$2\sqrt{n}\,k \leq k^2 + n$
$2\sqrt{n} \leq k + \frac{n}{k}$

$U_{n+1} - U_n = V_n - V_{n+1}$

$U_n - U_0 = -V_n + V_0$

$pl + ql -$

Exercice 3(4pts = 2 + 1 + 1)

Soit $(p, q) \in (\mathbb{R}_+^*)^2, p > q$ et $(u_0, v_0) \in \mathbb{R}^2$ tel que $u_0 < v_0$.
On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_{n+1} = \dfrac{pu_n + qv_n}{p+q}$ et $v_{n+1} = \dfrac{qu_n + pv_n}{p+q}$.

(1) Montrer que les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes.

(2) (a) Calculer $u_{n+1} + v_{n+1}, \forall n \in \mathbb{N}$.

(b) En déduire la limite commune, l, aux deux suites.

Exercice 4(5pts = 2 + (1 + 2))

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on considère la fonction f_n définie sur $\mathbb{R}_+$ par
$f_n(x) = nx^{n+1} - (n+1)x^n - \dfrac{1}{2}$.

(1) Montrer que f_n admet une unique racine positive, notée, x_n.

(2) (a) Etudier le sens de variation de la suite $(x_n)_{n\geq 0}$ ainsi obtenue.

(b) Montrer que $(x_n)_{n\geq 0}$ est convergente et calculer sa limite.