

ENSAE ASI (2022/2023)
 CONTROLE 2 D'ANALYSE 1 - DURÉE = 3H

Exercice 1 (5pts = 1 + 2 + 2) Les questions (1), (2) et (3) sont indépendantes

- (1) Soit $p \in \mathbb{N}$. Calculer $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(e^{x^p} - 1) \sin(x^p)}{(1 - \cos(x))^p}$
- (2) Déterminer le $DL_7(0)$ de $f(x) = \sqrt{x^2 + \cos(x)}$
- (3) Calculer $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^7} [\text{Arctan}(\text{Arcsin}(x)) - \text{Arcsin}(\text{Arctan}(x))]$

Exercice 2 (5pts = 1,5 + (1,5 + 1,5 + 0,5)) Les questions (1) et (2) sont indépendantes

- (1) Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, telle que $f(x) = e^{-\frac{1}{x}}$, si $x > 0$ et $f(0) = 0$, si $x \leq 0$.
 Montrer que f est de classe C^∞ sur \mathbb{R} et préciser la valeur de $f^{(n)}(0)$, $\forall n \in \mathbb{N}$.
- (2) Soit la fonction f définie sur $] \frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2} [$ par :

$$f(x) = \frac{e^{\sqrt{1+\sin(x)}} - e}{\tan(x)}, \text{ si } x \neq 0 \text{ et } f(0) = \lim_{x \rightarrow 0} f(x)$$

- (a) Calculer $f(0)$
- (b) Calculer $f'(0)$
- (c) Préciser la position de la courbe de f par rapport à sa tangente au point d'abscisse 0.

Exercice 3 (10pts = (1 + 2 + 1) + 2 + 2 + 2)

On considère la fonction f définie sur \mathbb{R} par

$$f(x) = (x + 2 - \frac{1}{x}) \text{Arctan}(x), x \neq 0 \text{ et } f(0) = -1$$

- (1) (a) Déterminer le $DL_3(0)$ de $f(x)$
 (b) En déduire l'étude de la continuité et de la dérivabilité de f en 0.
 (c) Préciser la position de la courbe \mathcal{C} de f par rapport à sa tangente (T) au point d'abscisse 0.
- (2) Etudier les branches infinies de \mathcal{C} , puis préciser la position de \mathcal{C} par rapport à ses asymptotes obliques. On rappelle que $\text{Arctan}(x) + \text{Arctan}(\frac{1}{x}) = \frac{\pi}{2}, \forall x > 0$ et $\text{Arctan}(x) + \text{Arctan}(\frac{1}{x}) = -\frac{\pi}{2}, \forall x < 0$
- (3) Etudier les variations de f
- (4) Construire \mathcal{C} , ses asymptotes ainsi que (T).