Ecole Nationale de la Statistique
et de l'Analyse Economique

Année Académique 2022-2023
Dr Y.CISS

AS 1 - ENSAE - DAKAR
Contrôle 1 de Théorie des Probabilités [1]
Durée : 4h

Exercice 1 Une municipalité a lancé une étude concernant les problèmes liés au transport. Sur une ligne de bus, une enquête a permis de révéler que le retard (ou l'avance) sur l'horaire officiel du bus à une station donnée, peut être représenté(e) par une variable aléatoire réelle, notée X, exprimée en minutes, qui suit une loi normale $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$.

On admet de plus que la probabilité que le retard soit inférieur à 7 minutes est égale à $p = 0,8413$ et que l'espérance de X est de 5 minutes.

1. Déterminer la valeur de σ.
2. Quelle est la probabilité que le retard soit supérieur à 9 minutes ?
3. Sachant que le retard est supérieur à 3 minutes, quelle est la probabilité que le retard soit inférieur à 7 minutes ?
4. Monsieur Baldé fréquente cette ligne de bus tous les jours pendant 10 jours. On suppose que les retards journaliers sont indépendants.
   a) On désigne par Y la v.a.r. égale au nombre de jours où Monsieur Baldé a attendu moins de 7 minutes. Déterminer la loi de Y, donner sans calcul, son espérance et sa variance.
   b) On définit par Z la v.a.r. discrète réelle indiquant le rang k du jour où pour la première fois Monsieur Baldé attend plus de 7 minutes si cet événement se produit. Dans le cas contraire si le temps d'attente est inférieur à 7 minutes pendant les dix jours, Z prend la valeur 0.
   Déterminer en fonction de p la probabilité des événements $[Z = 0]$, puis $[Z = k]$ pour $1 \leq k \leq 10$.
5. Lassé des retards de son bus, Monsieur AW décide de prendre le bus ou le Ter selon le protocole suivant :
   - le premier jour, il prend le bus.
   - si le jour$n$ $(n \in \mathbb{N})$ il attend plus de 7 minutes pour prendre le bus, le jour $n+1$ il prend le Ter, sinon il prend de nouveau le bus.
   si le jour$n$ il prend le Ter, le jour $n+1$ il prend le Ter ou le bus de façon équiprobable.
   On note pn la probabilité de l'événement A_n : " Monsieur Aw prend le bus le jour n ".
   a) Justifier que pour $n \in \mathbb{N}^*$: $p_{n+1} = (p - \frac{1}{2})p_n + \frac{1}{2}$.
   b) Soit α le réel vérifiant : $\alpha = (p - \frac{1}{2})\alpha + \frac{1}{2}$ Déterminer α en fonction de p, puis montrer que, pour tout entier naturel n non nul : $p_n = (p - \frac{1}{2})^{n-1}(1 - \alpha) + \alpha$.
   c) La suite (p_n) est-elle convergente ? Si oui quelle est sa limite ?

Annexe : Si $Z \sim N(0, 1)$, on donne :

$$F_Z(2) = 0,9772; \quad F_Z(1) = 0,8413; \quad F_Z(0.44) = 0,67; \quad F_Z(0) = \frac{1}{2}.$$

Exercice 2 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $\forall t \in \mathbb{R}$, $f(t) = \frac{1}{\pi(1+t^2)}$.

1. Montrer que f est une densité de probabilité.
2. Soit X une variable aléatoire de densité f. La variable X admet-elle une espérance ?
3. Soit $Y = \frac{1}{X}$. Déterminer la fonction de répartition de Y et ensuite une densité de Y. Y admet-elle une espérance ?
4. Soit $Z = X^2$. Déterminer la fonction de répartition de Z et ensuite une densité de Z.

Exercice 3 Soit $\theta > 0$ un nombre réel fixé et $Z = (X, Y)$ un vecteur aléatoire dont la densité f est définie sur $\mathbb{R}^2$ par

$$f(x, y) = K \exp(-\theta y) 1_{(0<x<y)}, \qquad (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

1. Déterminer la valeur de K.
2. Déterminer les lois marginales de Z ainsi que $\mathbb{E}[X]$ et $\mathbb{V}ar[X]$. Les variables aléatoires X et Y sont-elles indépendantes ?
3. On pose $U = X$ et $V = Y - X$.
   (a) Déterminer la loi du couple (U, V).
   (b) Les variables aléatoires U et V sont-elles indépendantes ?
4. Calculer $\mathbb{C}ov[X, Y]$. En déduire $\mathbb{V}ar[Y]$.
5. Calculer $\mathbb{E}[Y/X]$. En déduire $\mathbb{E}[Y]$.
6. Calculer deux façons différentes $\mathbb{P}[Y > X^2]$.

[1] Cours Dr Y. CISS

Exercice 4 Soit $(X, Y)'$ un vecteur gaussien centré (d'espérance $(0,0)'$) et de matrice de variance-covariance

$$\Sigma = \begin{pmatrix} 1 & u \\ u & 4 \end{pmatrix}$$

1. Déterminer le coefficient de corrélation linéaire $\rho(X, Y)$ de X et Y en fonction de u. En déduire les valeurs de u pour lesquelles $|(X, Y)| \leq 1$.
2. Pour quelle(s) valeurs de u, les variables marginales sont-elles indépendantes ?
3. Pour quelle(s) valeurs de u, le vecteur gaussien $(X, Y)'$ admet-il une densité ?
4. On suppose maintenant que $u = 1$.
   (a) Donner la densité conjointe du vecteur gaussien $(X, Y)'$.
   (b) Calculer la densité conditionnelle de Y sachant $X = x$ et en déduire la loi de $Y/(X = x)$.
   (c) Exprimer $\mathbb{E}[Y/X]$ en fonction de X et en déduire la loi de $\mathbb{E}[Y/X]$.
   (d) Quelle est la loi du couple aléatoire $(U, V)' = (-X, X + 2Y)'$? Les variables aléatoires $-X$ et $X + 2Y$ sont elles indépendantes ?

GOOD LUCK