ENSAE

ENSAE
AS2
UE Maths : Algébre 3
Année universitaire : 2023-2024

Responsable de COURS et TD : Pr.I.Mbaye

Devoir 1 (3heures)

Exercice 1 : (5pts) On considère la forme quadratique sur $\mathbb{R}^3$ définie par :

$$\phi(x, y, z) = x^2 + 5y^2 + z^2 + 4xy + 2xz + 6yz.$$

1. Décomposer ϕ comme combinaison linéaire de carrés de formees linéaires indépendantes par la méthode de GAUSS.
2. Déterminer la signature, le rang et le noyau de ϕ.
3. Déterminer une base de $\mathbb{R}^3$ orthogonale pour la forme quadratique ϕ.
4. Trouver un vecteur non qui annule la forme quadratique ? comme s'appelle un tel vecteur ?

Exercice 2 : (5pts) Soient φ une fbs sur $E \times E$ et A une partie de E.

1. Rappeler la définition de l'orthogonal de A pour φ.
2. Montrer que pour tout sous-espace A de E, on a $A \subset (A^{\perp})^{\perp}$.
3. Montrer que $E = \{0\}^{\perp}$.

Exercice 3 : (5pts) On considère la forme quadratique $\mathbb{R}^3$ définie par :

$$\phi(x) = 2x_1^2 + 2x_1x_3 + 2ax_2x_3 + 2x_3^2,$$

où $a \in \mathbb{R}$ est un paramètre. Pour quelles valeurs de a la forme quadratique ϕ est -elle :

1. non-dégénérée ?
2. non-définie ?

Exercice 4 : (5pts) Soient a, b, c des paramètres réels et $\phi : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ l'application définie par $\varphi(x, y) = a(x_1y_2 + x_2y_1) + b(x_2y_3 + x_3y_2) + c(x_3y_1 + x_1y_3)$, où $x = (x_1, x_2, x_3)$ et $y = (y_1, y_2, y_3)$.

1. Montrer que φ est une forme bilinéaire symétrique.
2. Déterminer la matrice 'a laquelle elle est associée.
3. Montrer que φ n'est jamais un produit scalaire quelque soit le choix des paramètres réels a, b et c.