Ecole Nationale de la Statistique et de l'Analyse Economique
(ENSAE) Pierre Ndiaye de Dakar

Année universitaire: 2023-2024

Dr. S. DIOUF

Contrôle 1 D'algèbre 1 du 2^{nd}*Semestre* : *Section AS*1
Durrée: 4 heures

Exercice 1: 3 points
Dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, soit:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ -1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Déterminer le polynôme caractéristique de A.
2. Trouver les valeurs propres et les sous espaces propres associés de A.
3. Déduire que A est diagonalisable.
4. Déterminer le polynôme minimal de A.
5. Déduire A^2 en fonction de A et de I_3.

Exercice 2: 3 points
Soit E l'ensemble des polynômes de degré inférieur où égalà 2 à coefficients réels et f l'application linéaire de E vers E définie par :
$f(P)(X) = (X^2-1)P''(X) + 2XP'(X)$, $\forall X \in \mathbb{R}$
où $P \in E$, P' et P'' désignent respectivement la dérivée première et la dérivée seconde de P.
1. Calculer la matrice A de f par rapport la base canonique $\mathcal{B} = (1, X, X^2)$ de E.
2. Trouver les valeurs propres et les sous espaces propres associés de A.
3. Déduire que A est diagonalisable.
4. Déterminer le polynôme minimal de A.

Exercice 3: 3 points
Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ tel que sa matrice dans la base canonique $\mathcal{B}$ est:

$$A = \begin{pmatrix} -4 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -2 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

1. Déterminer les sous espaces propres de f et préciser leurs dimensions respectives.
2. Déterminer le polynôme minimal de f.
3. Déduire si f est diagonalisable ou non.

Exercice 4: 6 points
On considère l'application de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ par:

$$f(x, y, z) = (3x - y + z, -x - 2y - 5z, x + y + 3z).$$

1) a) Déterminer la matrice A de f par rapport à la base canonique B de $\mathbb{R}^3$.
b) Donner une famille génératrice de Imf.
c) Calculer $det(A)$. L'application f ets-elle bijective?

$d)$ Déterminer $Kerf$. Donner une base de $Kerf$ et en déduire que $Kerf$ est de dimension 1.
$e)$ Déterminer la dimension de Imf. Donner une base de Imf.
2) On considère les trois vecteurs suivants de $\mathbb{R}^3$:
$u = (-4, 1, 3)$, $v = (2, 0, -1)$, $w = (-1, 1, 1)$.
$a)$ Calculer le déterminant $det_B(u, v, w)$. Justifier que $B' = \{u, v, w\}$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
b Donner la matrice de passage P de B à B' et calculer P^{-1}.
c) Calculer la matrice A' de f par rapport à la base B'.
3) Soit p un vecteur de $\mathbb{R}^3$. On note (a, b, c) ses coordonnées dans la base B et (α, β, γ) ses coordonnées dans la base B'. Exprimer a, b, et c en fonction de α, β et γ et α, β et γ en fonction de a, b, et c.
4) Déterminer la matrice C de $f \circ f$ relativement à la base B.

Exercice 5: 6 points
Soient a et b deux rels.
On note f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & a-1 \\ 3 & 2 & a \\ a-1 & a & a+1 \end{pmatrix}$$

On considre le systme linéaire (S) d'inconnues $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$

$$(S) \begin{cases} x + ay + (a-1)z & = b \\ 3x + 2y + az & = -1 \\ (a-1)x + ay + (a+1) & = 1 \end{cases}$$

1)$a)$ Calculer $det(A)$. On exprimera le résultat sous la forme $detA = \lambda a^2(4-a)$ où λ est un réel non nul à préciser.
$b)$ Soit b un réel donné. Pour quelles valeurs de a est-on assuré que le systme (S) admet une solution unique?
2) On suppose dans cette question que $a = 4$.
On note C_1 et C_2 les deux premiers colonnes de A.
$a)$ Justifier que $rg(A) \leq 2$.
$b)$Montrer que $rg(A) = 2$ et $\{C_1, C_2\}$ forme une base de Imf.
$c)$ En déduire que (S) admet des solutions si et seulement si le déterminant
1 4 b
3 2 -1
3 4 1
est nul.
$d)$ Montrer que (S) n'admet de solution que pour une valeur de b préciser:
-en utilisant les résultats précédents;
-en résolvant directement (S) l'aide de la méthode de Gauss.
3) On suppose que $a = 0$. Ecrire dans ce cas le système (S) et le résoudre lorsque c'est possible.