**ENSAE $AS1$ (2023/2024)**
**CONTROLE 2 D'ANALYSE 1 - DURÉE = 3H**

**Exercice 1** (4pts = 1 + 1,5 + 1,5) *Les questions (1),(2) et (3) sont indépendantes*

(1) Soit $a \in \mathbb{R}^{*+}$. Calculer $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{x^a - a^x}{x^x - a^a}$

(2) Déterminer le $DL_3(0)$ de $f(x) = [\ln x - \ln(1 - e^{-x})]\dfrac{e^{-x}}{x}$

(3) Montrer que $[Arctan(Arcsin(x)) - Arcsin(Arctan(x))]$ admet, au voisinage de 0, une partie principale d'ordre $p = 7$ que l'on précisera.

**Exercice 2** (5pts = 2 + 1 + 2)

Soit la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par :

$$f(x) = (x - \frac{1}{2})e^{\frac{1}{x^2 - x}}, \forall x \in ]0, 1[, \text{ et } f(x) = 0, \forall x \in \mathbb{R} \setminus ]0, 1[$$

(1) Montrer que $f$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, et préciser les valeurs de $f'(0)$ et $f'(1)$

(2) Montrer que $f$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0, 1[$ et donner, sur cet intervalle, la forme de l'expression de $f^{(k)}$, dérivée d'ordre $k$ de $f$.

(3) En déduire que $f$ est de $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, et préciser les valeurs de $f^k(0)$ et $f^k(1)$

**Exercice 3** (13pts = (1,5 + 1,5 + 1) + (1,5 + 1 + 1) + 1,5 + 1 + (1 + 1 + 1))

On considère la fonction $f$ telle :

$f(x) = e^{\frac{1}{x}}\sqrt{1 + x + x^2}$. On note par $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère cartésien du plan,et par $\mathcal{D}_f$, son ensemble de définition.

(1) (a) Déterminer $\mathcal{D}_f$ et préciser les limites de $f$ aux bornes de $\mathcal{D}_f$.

(b) On suppose que $x \to \infty$ et on pose : $X = \dfrac{1}{x}$ et $g(X) = f(\frac{1}{X})$.
Déterminer le $DL_2(0)$ de $g(X)$.

(c) En déduire que $\mathcal{C}_f$ admet deux asymptotes obliques $\Delta$ et $\Delta'$ dont on précisera les équations ainsi que leurs propositions par rapport à $\mathcal{C}_f$.

(2) (a) Jutifier la dérivabilité de $f$ sur $\mathcal{D}_f$. Calculer la dérivée de $f$ et prouver que
$$f'(x) = (2x^3 - x^2 - 2x - 2)\frac{e^{\frac{1}{x}}}{2x^2\sqrt{1 + x + x^2}}, \forall x \in \mathcal{D}_f$$

(b) Montrer qu'il existe unique $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $1 < \alpha < 2$ et $f(\alpha) = 0$.

(c) Montrer que la fonction $f$ admet un prolongement par continuité à gauche en 0 et que ce prolongement admet une demi-tangente dont on précisera la pente. *(Voir verso)*

(3) Etudier le sens de variation de $f$ , puis dreser son tableau de variations

(4) Construire, avec soin, la courbe $C_f$. On donne $\alpha \simeq 1,55$ et $f(\alpha) \simeq 4,2$

(5) Soit $n \in \mathbb{N}, n \geq 5$.

(a) Montrer que l'équation $f(x) = n$ admet deux solutions distinctes $u_n$ et $v_n$ sur $\mathbb{R}^{*+}$ vérifiant $u_n < \alpha$ et $v_n > \alpha$

(b) Montrer que les suites $(u_n)_{n\geq 5}$ et $(v_n)_{n\geq 5}$ sont monotones et que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0, \lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$

(c) En utilisant l'équation $f(u_n) = n$ (respectivemnt $f(v_n) = n$), déterminer un équivalent simple de $u_n$ (respectivement de $v_n$).