Ce système linéaire admet pour solution :

$$x_1 = \frac{1}{\det(A)} \times \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_n & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} ; x_2 = \frac{1}{\det(A)} \times \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & b_n & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} ;$$

$$\ldots ; x_n = \frac{1}{\det(A)} \times \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,n-1} & b_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,n-1} & b_n \end{vmatrix}$$

et plus généralement :

$$x_k = \frac{1}{\det(A)} \times \begin{array}{c} \begin{array}{c} k^\circ \\ \text{ligne} \\ \downarrow \end{array} \\ \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_1, k-1 & b_1 & a_{1,k+1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_n, k-1 & b_n & a_{n,k+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \end{array}$$

# 2. Enoncés des exercices

## Exercice 1

1) Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Vérifier que :

$$\begin{vmatrix} 7 & 2 & -1 & 0 \\ -17 & -1 & 0 & -7 \\ 15 & 0 & 3 & 9 \\ 17 & 3 & -4 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

et que :

$$\begin{vmatrix} 4 & 2 & \alpha \\ -1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & \alpha - 2 \end{vmatrix} = 3\alpha - 18$$

a) Le vecteur $(7,-17,15,17)$ de $\mathbb{R}^4$ est-il combinaison linéaire des vecteurs $(2,-1,0,3)$, $(-1,0,3,-4)$ et $(0,-7,9,2)$ ?

b) Déterminer selon le paramètre réel $\alpha$ si la famille de vecteurs de $\mathbb{R}^3$ suivante est libre ou liée :

$$a=(4,-1,3),\ b=(2,2,1),\ c=(\alpha,1,\alpha-2).$$

2) Déterminer les valeurs du réel $\alpha$ pour lesquelles la matrice :

$$B=\begin{pmatrix} 4 & -1 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \\ \alpha & 1 & \alpha-2 \end{pmatrix}$$

est inversible (On ne demande pas de calculer $B^{-1}$) ; dans ce cas, calculer $\det\left(B^{-1}\right)$ puis $\det\left(B^{-2}\right)$ et $\det\left(B^{-3}\right)$.

3) a) Montrer que si $u=(2,1)$ et $v=(1,2)$ alors $(u,v)$ forme une base de $\mathbb{R}^2$.

b) On pose : $P_0=X^0+X,\ P_1=X+X^2,\ P_2=2X^0+2X+X^2$.

Montrer que $(P_0,P_1,P_2)$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.

4) On admet (vérifications élémentaires) que $u_1=(1,1,0,0)$, $u_2=(1,0,1,0)$ et que $u_3=(1,0,0,1)$ sont trois vecteurs linéairement indépendants de $\mathbb{R}^4$.

a) Donner une base de $F=vect\{u_1,\ u_2,\ u_3\}$.

b) Soit $u=(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4$. Montrer que $u\in F \Leftrightarrow y+z+t-x=0$.

### Exercice 2

1) Donner la matrice $A$ du système linéaire d'inconnues $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$ :

$$(S)\begin{cases} 2x-y+z=0 \\ x-2y-z=3 \\ 3x+y+2z=1 \end{cases}.$$

2) Vérifier que $\det A=6$. Montrer que $(S)$ admet une solution unique.

3) Résoudre $(S)$ :

a) Par la méthode de Gauss.

b) En utilisant les fomules de Cramer.

## Exercice 3

1) Soit $m \in \mathbb{R}$. Donner la matrice $A$ du système linéaire d'inconnues $(x,y,z) \in \mathbb{R}^4$ :

$$\begin{cases} x+2y-z+2t=1 \\ 3x+y+z+2t=3 \\ x-3y+3z-t=1 \\ 5x+5y-z+7t=m \end{cases}.$$

2) Le système linéaire est-il de Cramer ? Que peut-on en déduire pour l'ensemble des solutions de $(S)$ ?

3) On note $f$ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^4$ dont $A$ est la matrice (relativement à la base canonique).

   a) Justifier que $rg(A) \leq 3$.

   b) Montrer que les trois derniers vecteurs colonnes de $A$ sont linéairement indépendants. En déduire que $rg(A) = 3$ et donner une base de $\mathrm{Im} f$.

4) Montrer l'équivalence entre les énoncés suivants:

   i) $(S)$ admet au moins une solution.

   ii) Le vecteur $v = (1,3,1,m)$ appartient à $\mathrm{Im} f$.

   iii) $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \\ -3 & 3 & -1 & 1 \\ 5 & -1 & 7 & m \end{vmatrix} = 0.$

   iv) $m = 5$.

5) Résoudre $(S)$ par la méthode de Gauss et retrouver la condition $(iv)$ de la question 4

## Exercice 4

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} \alpha_1 & 1 & 1 \\ 0 & \alpha_2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ de $\mathcal{M}_{4,3}(\mathbb{R})$. On suppose que $\alpha_1 \neq 0$ et $\alpha_2 \neq 0$.

On note $f$ l'application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^4$ dont $A$ est la matrice (par rapport aux bases canoniques).

1) Rappeler la relation qu'il existe entre $rg(A)$ et $rg(f)$ et justifier que $rg(A) \leq 3$.

2) A l'aide d'un théorème du cours, donner la valeur de $rg(A)$.

3) On se propose de retrouver ce résultat différemment.

   a) Calculer $f(x,y,z)$ pour tout $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$.

   b) En déduire $\ker f$ et $\dim \ker f$ et retrouver la valeur de $rg(A)$.

4) Déterminer le rang des matrices :

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \alpha_2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \alpha_2 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 1 & \alpha_2 & 0 & 0 \\ \alpha_1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

## Exercice 5

Donner le rang du système $(a,b,c,d)$ de $\mathbb{R}^6$ où .

$$a = (2,0,0,0,0,0),\ b = (1,3,0,0,0,0),\ c = (1,-2,1,0,0,0),\ d = (1,0,0,3,0,0).$$

## Exercice 6

1) Soit $(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4$.

En utilisant la méthode de Gauss, résoudre le système linéaire suivant :

$$(S)\begin{cases} x + 3y - z = a \\ 3x - y + z = b \\ -2x + y - 3z = c \end{cases}$$

d'inconnues $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$.

2) Montrer alors que la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 3 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & -3 \end{pmatrix}$ est inversible et calculer $A^{-1}$.

## Exercice 7

1) Pour quelles valeurs des réels $a$ et $b$ le système linéaire :

$$(S)\begin{cases} x + ay = 2a \\ bx + 2y + az = 4 - a^3 \\ x + ay + bz = 0 \end{cases}$$

est-il de Cramer ?

Résoudre $(S)$ dans ce cas.

2) Lorsque $(S)$ n'est pas de Cramer, discuter selon les valeurs de $a$ et $b$ l'existence d'une solution de $(S)$ et résoudre $(S)$.

# 3. Corrigés des exercices

## Exercice 1

1) a) On forme le déterminant suivant :

$$\det\begin{pmatrix} 7 & 2 & -1 & 0 \\ -17 & -1 & 0 & -7 \\ 15 & 0 & 3 & 9 \\ 17 & 3 & -4 & 2 \end{pmatrix} = 0.$$

Comme ce déterminant est nul, on en déduit que la famille $\{a,b,c,d\}$ est liée.

b) On forme le déterminant suivant :

$$\det\begin{pmatrix} 4 & 2 & \alpha \\ -1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & \alpha-2 \end{pmatrix} = 3\alpha-18.$$

Deux cas se présentent :

- 1° cas : $\alpha = 6$

Dans ce cas, le déterminant précédent est nul, donc la famille $\{a,b,c\}$ est liée.

- 2° cas : $\alpha \neq 6$

Dans ce cas, le déterminant précédent est non nul, donc la famille $\{a,b,c\}$ est libre.

2) On calcule le déterminant suivant :

$$\det\begin{pmatrix} 4 & -1 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \\ \alpha & 1 & \alpha-2 \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} 4 & 2 & \alpha \\ -1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & \alpha-2 \end{pmatrix} = 3\alpha-18.$$

La matrice $B$ est donc inversible si et seulement si $3\alpha-18 \neq 0$, c'est-à-dire si et seulement si $\alpha \neq 6$.

On a donc :

$$\begin{cases} \det(B^{-1}) = \dfrac{1}{3\alpha-18}, \\ \det(B^{-2}) = \left(\det(B^{-1})\right)^2 = \dfrac{1}{(3\alpha-18)^2}, \\ \det(B^{-3}) = \left(\det(B^{-1})\right)^3 = \dfrac{1}{(3\alpha-18)^3}. \end{cases}$$

3) a) Formons la matrice $P$ définie par :

$$P = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

On a $\det P = 4 - 1 = 3 \neq 0$.

La famille $\{u_1, u_2\}$ forme donc une base de $\mathbb{R}^2$.

b) Formons la matrice $P$ définie par :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

On a : $\det P = -1 + 2 = 1 \neq 0$.

La famille $\{P_0, P_1, P_2\}$ forme donc une base de $\mathbb{R}_2[X]$.

4) a) La famille $\{u_1, u_2, u_3\}$ est une famille libre.

De plus elle est une famille génératrice de $F$, par définition.

La famille $\{u_1, u_2, u_3\}$ est une base de $F$.

b) Le vecteur $u = (x, y, z, t)$ appartient à $F$ si et seulement si la famille $\{u_1, u_2, u_3, u\}$ est liée, c'est-à-dire si et seulement si :

$$\det(u_1, u_2, u_3, u) = 0.$$

On a facilement :

$$\det(u_1, u_2, u_3, u) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & x \\ 1 & 0 & 0 & y \\ 0 & 1 & 0 & z \\ 0 & 0 & 1 & t \end{vmatrix} = y + z + t - x.$$

On en déduit que $u = (x, y, z, t) \in F$ si et seulement si $y + z + t - x = 0$.

## Exercice 2

1) La matrice du système linéaire considéré est donnée par :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

2) On a :

$$\det A = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -3 & -2 & -1 \\ 5 & 1 & 2 \end{vmatrix}, C_1 \leftarrow C_1 + 2C_2$$

$$= \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -3 & -3 & -1 \\ 5 & 3 & 2 \end{vmatrix}, C_2 \leftarrow C_2 + C_3$$

$$= 1 \times \begin{vmatrix} -3 & -3 \\ 5 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= -9 + 15 = 6.$$

Ainsi : $\det A$ est non nul, donc le système $(S)$ admet une solution unique.

3) a) Permutons la première ligne avec la deuxième :

$$(S) \begin{cases} x - 2y - z = 3 \\ 2x - y + z = 0 \\ 3x + y + 2z = 1 \end{cases}$$

puis :

$$\begin{cases} x - 2y - z = 3 \\ -3y + 3z = -6 \\ 7y + 5z = -8 \end{cases} \quad \begin{matrix} (L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1) \\ (L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1) \end{matrix}$$

et :

$$\begin{cases} x - 2y - z = 3 \\ 3y + 3z = -6 \\ -2z = 6. \end{cases} \quad (L_3 \leftarrow L_3 - \frac{7}{3} L_1)$$

Donc, la solution du système linéaire $(S)$ est :

$$x = 2\,;\ y = 1\,;\ z = -3\,.$$

3) b) On calcule $\begin{vmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 3 & -2 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 12.$

De plus $\det(A) = 6$, donc :

$$x = \frac{1}{\det(A)} \times \begin{vmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 3 & -2 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 2.$$

De même, $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 6$. Donc $y = \dfrac{1}{\det(A)} \times \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 1.$

De même, $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & 3 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -18$. Donc $z = \dfrac{1}{\det(A)} \times \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & 3 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -3.$

## Exercice 3

1) On calcule :

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & -3 & 3 & -1 \\ 5 & 5 & -1 & 7 \end{pmatrix} = 0.$$

On en déduit que ce système linéaire n'est pas de Cramer.

On en déduit que ce système linéaire, soit admet une infinité de solutions, soit n'en admet pas.

2) a) On vient de voir que le déterminant de la matrice de $f$ est nul, on en déduit que $f$ n'est pas bijective, donc que :

$$rg(A) = \dim \operatorname{Im} f \leq 3.$$

b) On montre avec les méthodes que les trois derniers vecteurs colonnes de $A$ sont linéairement indépendants.

Notant $C_2, C_3, C_4$ les trois derniers vecteurs colonnes de $A$. On a

$$\dim vect\{C_2, C_3, C_4\} = 3,$$

et :

$$vect\{C_2, C_3, C_4\} \subset \operatorname{Im} f,$$

donc : $\dim \operatorname{Im} f \geq 3$. or, d'après la question précédente, $\dim \operatorname{Im} f \leq 3$ donc

$$rg(A) = \dim \operatorname{Im} f = 3.$$

Une base de $\operatorname{Im} f$ est donc :

$$\{C_2, C_3, C_4\}.$$

4) • Démontrons que a) ⇒ b). Supposons que $(S)$ admet au moins une solution $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$.

Alors il existe $(\alpha, \beta, \gamma, \delta) \in \mathbb{R}^4$, tels que :

$$\operatorname{Im} f \ni \alpha C_1 + \beta C_2 + \gamma C_3 + \delta C_4 = v.$$

Donc $v \in \operatorname{Im} f$.

• Démontrons que b) ⇒ a). Supposons que $v \in \operatorname{Im} f$.

Alors il existe $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$, tels que :

$$v = \alpha C_2 + \beta C_3 + \gamma C_4.$$

Une solution du système linéaire est donc :

$$(0, \alpha, \beta, \gamma).$$

• Démontrons que b) ⇒ c). Le vecteur $v \in \operatorname{Im} f$ si et seulement si la famille $\{C_2, C_3, C_4, v\}$ est liée, c'est-à-dire si et seulement si :

$$\det(C_2, C_3, C_4, v) = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \\ -3 & 3 & -1 & 1 \\ 5 & -1 & 7 & m \end{vmatrix} = 0.$$

• Démontrons que c) ⇒ d). En calculant le déterminant, on trouve :

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \\ -3 & 3 & -1 & 1 \\ 5 & -1 & 7 & m \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow m = 5.$$

La résolution de ce système linéaire par la méthode de Gauss donne successivement :

$$\begin{cases} x+2y-z+2t=1 \\ 3x+y+z+2t=3 \\ x-3y+3z-t=1 \\ 5x+5y-z+7t=m, \end{cases}$$

puis :

$$\begin{cases} x+2y-z+2t=1 & \\ -5y+4z-4t=0 & L_2 \leftarrow L_2-3L_1 \\ -5y+4z-3t=0 & L_3 \leftarrow L_3-L_1 \\ -5y+4z-3t=m-5, & L_4 \leftarrow L_4-5L_1 \end{cases}$$

et enfin :

$$\begin{cases} x+2y-z+2t=1 & \\ -5y+4z-4t=0 & L_3 \leftarrow L_3-L_2 \\ t=0 & L_4 \leftarrow L_4-L_2. \\ t=m-5. & \end{cases}$$

Deux cas se présentent :

• 1$^{er}$ cas : $m \neq 5$.

On aurait $t=0$ et $t=m-5 \neq 0$. Ce qui est impossible. Donc, dans le cas $m \neq 5$, il n'y a pas de solutions au système linéaire $(S)$.

• 2$^e$ cas : $m=5$.

Dans ce cas, le système linéaire $(S)$ devient :

$$\begin{cases} x+2y-z+2t=1 \\ -5y+4z-4t=0 \\ t=0. \end{cases}$$

c'est-à-dire

$$t=0\,;\, y=\frac{4}{5}z\,;\, x=z-2y=\frac{-3}{5}z.$$

Ainsi, l'ensemble des solutions est :

$$\left\{\left(\frac{-3}{5}z,\frac{4}{5}z,z,0\right),\ z\in\mathbb{R}\right\}.$$

## Exercice 4

1) Par définition, on a :
$$rg(f) = rg(A).$$

L'application $f$ n'est pas bijective, donc $\operatorname{Im} f \neq \mathbb{R}^4$, donc $\dim \operatorname{Im} f \leq 3$, c'est-à-dire
$$rg(f) \leq 3.$$

2) Le rang de $A$ est l'ordre de la plus grande matrice extraite inversible de $A$, donc
$$rg(A) = 2.$$

3) a) On a :
$$f(x,y,z) = (\alpha_1 x + y + z, \alpha_2 y + z, 0, 0).$$

b) Déterminons $\ker f$:

On résout :
$$\begin{cases} \alpha_1 x + y + z = 0 \\ \alpha_2 y + z = 0, \end{cases}$$

soit, puis que $\alpha_1 \neq 0$ :
$$\begin{cases} x = \dfrac{1}{\alpha_1}(\alpha_2 - 1)y \\ y = y \\ z = -\alpha_2 y \end{cases}, y \in \mathbb{R}.$$

On en déduit une base de $\ker f$:
$$\left\{ \begin{pmatrix} \dfrac{\alpha_2 - 1}{\alpha_1} \\ 1 \\ -\alpha_2 \end{pmatrix} \right\}.$$

D'après le théorème du rang, on a :
$$rg(f) = \dim \mathbb{R}^3 - \dim \ker f = 3 - 1 = 2.$$

4) On a :
$$rg(A) = rg({}^t A),$$

donc :

$$rg\begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \alpha_2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 2.$$

De plus, le rang de $A$ n'est pas modifié lorsqu'on permute deux lignes ou deux colonnes de $A$, ainsi :

$$rg\begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \alpha_2 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 2,$$

et :

$$rg\begin{pmatrix} 1 & \alpha_2 & 0 & 0 \\ \alpha_1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 2.$$

## Exercice 5

Soit $A$ la matrice définie par :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

La plus grande matrice extraite de $A$ et inversible est :

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

On en déduit que :

$$rg(A) = 4.$$

## Exercice 6

1) On résout le système linéaire suivant par la méthode de Gauss :

$$\begin{cases} x + 3y - z = a \\ 3x - y + z = b \\ -2x + y - 3z = c \end{cases}$$

On a successivement :

$$\begin{cases} x + 3y - z = a \\ -10y + 4z = b - 3a \\ 7y - 5z = 2a + c, \end{cases}$$

puis :

$$\begin{cases} x + 3y - z = a \\ -10y + 4z = b - 3a \\ -22z = -a + 7b + 10c, \end{cases}$$

Ainsi :

$$\begin{cases} x = \dfrac{a + 4b + c}{11} \\ y = \dfrac{7a - 5b - 4c}{22} \\ z = \dfrac{a - 7b - 10c}{22}. \end{cases}$$

2) Le calcul de $\det A$ donne :

$$\det A = 22,$$

et :

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{11} & \dfrac{4}{11} & \dfrac{1}{11} \\ \dfrac{7}{22} & \dfrac{-5}{22} & \dfrac{-2}{11} \\ \dfrac{1}{22} & \dfrac{-7}{22} & \dfrac{-5}{11} \end{pmatrix}.$$

## Exercice 7

1) On calcule :

$$\det\begin{pmatrix}1 & a & 0\\ b & 2 & a\\ 1 & a & b\end{pmatrix} = \begin{vmatrix}1 & a & 0\\ b & 2 & a\\ 1 & a & b\end{vmatrix}, L_1 \leftarrow L_1 - L_3$$

$$= \begin{vmatrix}0 & 0 & -b\\ b & 2 & a\\ 1 & a & b\end{vmatrix}$$

$$= -b\begin{vmatrix}b & 2\\ 1 & a\end{vmatrix}$$

$$= -b(ab-2).$$

On en déduit que le système linéaire est de Cramer lorsque $b \neq 0$ et $ab \neq 2$.

Résolution du système linéaire :

Nous utiliserons pour cela les formules de Cramer.

Calculons tout d'abord les déterminants :

$$\det\begin{pmatrix}2a & a & 0\\ 4-a^3 & 2 & a\\ 0 & a & b\end{pmatrix} = \begin{vmatrix}2a & a & 0\\ 4-a^3 & 2 & a\\ 0 & a & b\end{vmatrix}, C_1 \leftarrow C_1 - 2C_2$$

$$= \begin{vmatrix}0 & a & 0\\ -a^3 & 2 & a\\ -2a & a & b\end{vmatrix}$$

$$= -a\begin{vmatrix}-a^3 & a\\ -2a & b\end{vmatrix}$$

$$= -a^2\begin{vmatrix}-a^2 & 1\\ -2a & b\end{vmatrix}$$

$$= -a^3\begin{vmatrix}-a & 1\\ -2 & b\end{vmatrix} = -a^3(-ab+2)$$

$$= a^3(ab-2),$$

puis :

$$\det\begin{pmatrix}1 & 2a & 0\\ b & 4-a^3 & a\\ 1 & 0 & b\end{pmatrix} = \begin{vmatrix}1 & 2a & 0\\ b & 4-a^3 & a\\ 1 & 0 & b\end{vmatrix}$$

$$C_2 \leftarrow C_2 - 2aC_1$$

$$= \begin{vmatrix}1 & 0 & 0\\ b & 4-a^3-2ab & a\\ 1 & -2a & b\end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix}4-a^3-2ab & a\\ -2a & b\end{vmatrix}$$

$$= b\left(4-a^3-2ab\right)+2a^2$$

$$= -a^3b+2a^2-2ab^2+4b$$

$$= -a^2(ab-2)-2b(ab-2)$$

Enfin :

$$\det\begin{pmatrix}1 & a & 2a\\ b & 2 & 4-a^3\\ 1 & a & 0\end{pmatrix} = \begin{vmatrix}1 & a & 2a\\ b & 2 & 4-a^3\\ 1 & a & 0\end{vmatrix}, L_1 \leftarrow L_1 - L_3$$

$$= \begin{vmatrix}0 & 0 & 2a\\ b & 2 & 4-a^3\\ 1 & a & 0\end{vmatrix}$$

$$= 2a\begin{vmatrix}b & 2\\ 1 & a\end{vmatrix}$$

$$= 2a(ab-2).$$

Finalement, la solution du système linéaire $(S)$ est :

$$\begin{cases} x = \dfrac{a^3(ab-2)}{-b(ab-2)} \\ \\ y = \dfrac{-a^2(ab-2)-2b(ab-2)}{-b(ab-2)} \\ \\ z = \dfrac{2a(ab-2)}{-b(ab-2)}, \end{cases}$$

soit :

$$\begin{cases} x = \dfrac{-a^3}{b} \\ \\ y = \dfrac{a^2+2b}{b} \\ \\ z = \dfrac{-2a}{b} \end{cases}$$

2) a) Cas où $b = 0$

Le système linéaire $(S)$ s'écrit :

$$\begin{cases} x + ay = 2a \\ 2y + az = 4 - a^3 \\ x + ay = 0. \end{cases}$$

Deux sous-cas se présentent :

- $a = 0$

Le système linéaire s'écrit :

$$\begin{cases} x = 0 \\ 2y = 4 \\ x = 0. \end{cases}$$

Les solutions de $(S)$ sont donc données par :

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 2, \ z \in \mathbb{R}. \\ z = z \end{cases}$$

- $a \neq 0$

Le système linéaire $(S)$ s'écrit :

$$\begin{cases} x + ay = 2a & (1) \\ 2y + az = 4 - a^3 & (2) \\ x + ay = 0. & (3) \end{cases}$$

En effectuant $(1) - (3)$, on obtient :

$$0 = 2a \neq 0.$$

On en déduit que le système linéaire $(S)$ n'admet pas de solutions.

b) Cas où $b \neq 0$

Le système linéaire $(S)$ s'écrit :

$$\begin{cases} x + ay = 2a \\ bx + 2y + az = 4 - a^3 \\ x + ay + bz = 0. \end{cases}$$

On résout ce système linéaire par la méthode du pivot de Gauss.

On a successivement :

$$\begin{cases} x + ay = 2a \\ (ab - 2)y - az = 2ab - 4 + a^3 \\ bz = -2a, \end{cases}$$

puis :

$$\begin{cases} x + ay = 2a \\ (ab - 2)y - az = 2(ab - 2) + a^3 \\ z = \dfrac{-2a}{b}. \end{cases}$$

À nouveau, deux sous-cas se présentent :

- $ab = 2$

Le système linéaire devient :

$$\begin{cases} x + ay = 2a \\ -az = a^3 \\ z = \dfrac{-2a}{b}. \end{cases}$$

Comme $ab = 2$, alors, forcement, $a \neq 0$.

On a donc :

$$\begin{cases} x + ay = 2a \\ z = -a^2 \\ z = \dfrac{-2a}{b}. \end{cases}$$

Or $\dfrac{-2a}{b} = \dfrac{-2}{b} \times a = -a \times a = -a^2$, donc on a :

$$\begin{cases} x + ay = 2a \\ z = -a^2. \end{cases}$$

Ainsi, l'ensemble des solutions de $(S)$ est :

$$\begin{cases} x = 2a - ay \\ y = y \qquad , y \in \mathbb{R}. \\ z = -a^2, \end{cases}$$

- $ab \neq 2$

On a alors : $b \neq 0$ et $ab \neq 2$. Dans ce cas, le système linéaire $(S)$ est de Cramer et on a déjà calculé précédemment son unique solution.