Ecole Nationale de la Statistique
et de l'Analyse Economique

Année Académique 2023-2024
Dr Y.CISS

AS 1 - ENSAE - DAKAR
Contrôle 2 de Théorie des Probabilités [1]
Durée : 4h

Exercice 1 .

1. Enoncer les définitions des convergences presque sûre, en probabilité et en loi.
2. Enoncer l'inégalité de Markov (sans oublier de donner les hypothèses).
3. Enoncer l'inégalité de Bienaymé-Chebychev (sans oublier de donner les hypothèses).
4. Démontrer l'inégalité de Bienaymé-Chebychev.
5. Enoncer la loi forte des grands nombres (sans oublier de donner les hypothèses).
6. Enoncer le théorème central limite (sans oublier de donner les hypothèses).
7. Soit X une variable aléatoire réelle de loi normale $N(0,1)$. Soit ε une variable aléatoire indépendante de X de loi $\mathbb{P}(\varepsilon = -1) = P(\varepsilon = 1) = \frac{1}{2}$.
   On pose $Y = \varepsilon X$.
   (a) Montrer que Y suit une loi $N(0,1)$.
   (b) Le vecteur (X, Y) est-il gaussien ? Justifier.
8. Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires réelles qui converge vers une variable aléatoire X dans L_2 (ou en moyenne quadratique). Est-ce que $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge dans L_1 ? Si non, exhiber une contre exemple, si oui, prouver le.
9. Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires, indépendantes, de loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$. On pose $\overline{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$.
   (a) Montrer à l'aide de l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev que la suite $(\overline{X}_n)_{n\geq 1}$ converge en probabilité vers une constante a que l'on précisera.
   (b) A l'aide du théorème central limite, donner une suite réelle $(a_n)_{n\geq 1}$ telle que la suite

$$a_n\left(\overline{X}_n - \frac{1}{\lambda}\right)$$ $\mathbb{E}(X) = \frac{1}{\lambda}$ $Var(X) = \frac{1}{\lambda^2}$

   converge en loi vers une limite à préciser.
10. Soit (X, Y) un vecteur aléatoire gaussien tel que $\mathbb{V}ar[X] > 0$. On pose

$(V, V) = (X, \varepsilon X) - (X, X^2)$

$$Z = Y - \frac{Cov(X,Y)}{\mathbb{V}ar[X]}X.$$

   (a) Montrer que (X, Y, Z) est un vecteur gaussien.
   (b) Les variables aléatoires réelles X et Z sont-elles indépendantes ? Justifier.

Exercice 2 .

Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de v.a.r. indépendantes, de même loi d'espérance μ et de variance $\sigma^2 < +\infty$. Pour tout entier $n \geq 2$, on note

$$\overline{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \quad \text{et} \quad S_n = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X}_n)^2.$$

1. Calculer $\mathbb{E}(S_n)$.
2. Montrer que S_n converge presque sûrement vers une constante que l'on précisera.
3. En déduire que

$$T_n = a_n \frac{\overline{X}_n - \mu}{\sqrt{S_n}}$$

   converge en loi vers une limite que l'on précisera (on précisera également la suite $(a_n)_n$).

[1] Cours : Dr Y. CISS

$P(\mathbb{E}(|X|) \geq \alpha) \leq \frac{\mathbb{E}(|X|)}{\alpha}$

Exercice 3 .

Dans une entreprise, une machine produit des pièces dont les dimensions très précises doivent être respectées. la proportion des pièces défectueuses est de 3%. On examine 1000 pièces choisies au hasard et on note X la v.a. représentant le nombre de pièces défectueuses.

1. Par quelle loi peut-on approximer la loi de probabilité de la v.a. X ? Justifiez votre réponse.
2. Calculer la probabilité d'avoir plus de 50 pièces défectueuses.
3. Calculer la probabilité d'avoir entre 20 et 40 pièces défectueuses.
4. Calculer la probabilité pour que la différence absolue entre le nombre de pièces défectueuses et la moyenne soit inférieur ou égale à 15.

Annexe : Si $Z \sim N(0,1)$, on donne :

$$F_Z(3,7) = 0,99989; \quad F_Z(1,85) = 0,96784; \quad F_Z(2,78) = 0,99728.$$

$P = C_{1000}^{15}$

$P(\mathbb{R} \in \mathbb{R})$