ENSAE *ISE1 – Maths et ISEP3* **(2023/2024)**

CONTROLE N°2 D'ANALYSE FONCTIONNELLE - DUREE = 4H

Exercice 1 *Les questions (1), (2) et (3) sont indépendantes*

(1) Soient n fonctions convexes : $f_1, f_2, ..., f_n$ de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$, et g, une fonction de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$, convexe sur $\mathbb{R}^n$ et croissante par rapport à chacune de ses n variables.
Montrer que la fonction F de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$, définie par : $F(x) = g[f_1(x), f_2(x), ..., f_n(x)]$ est convexe sur $[a,b]$.

(2) Soient A et B deux parties non vides de $\mathbb{R}^n$.
Montrer que $[A] + [B] = [A+B]$ (Enveloppes convexes)

(3) Soit $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ muni du produit scalaire $\langle M, N\rangle = Tr({}^tMN), \forall M, N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
On considère $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ fixées et $\varphi_{A,B}$ l'application de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $\varphi_{A,B}(M) = AM - MB$.
 (a) Montrer que $\varphi_{A,B}$ est un endomorphisme continu de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
 (b) Déterminer $\varphi^*_{A,B}$, l'endomorphisme adjoint de $\varphi_{A,B}$.

Exercice 2

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et l'application $f : (\mathbb{R}^*_+)^n \to \mathbb{R}$ définie par $f(x_1, x_2, ..., x_n) = (\prod_{i=1}^{n} x_i)^{\frac{1}{n}}$

(1) Déterminer $\nabla f(x)$, pour tout $x \in (\mathbb{R}^*_+)^n$,

(2) (a) Déterminer $\nabla^2 f(x), \forall x \in (\mathbb{R}^*_+)^n$.
 (b) Pour tout $x = (x_1, x_2, ..., x_n) \in (\mathbb{R}^*_+)^n$, on pose : ${}^ty = (\frac{1}{x_1}, \frac{1}{x_2}, ..., \frac{1}{x_n})$ et $J = diag(\frac{1}{x_1^2}, \frac{1}{x_2^2}, ..., \frac{1}{x_n^2})$. Exprimer $\nabla^2 f(x)$ en fonction de : f, y, J et n.

(3) Montrer que la fonction f est concave sur $(\mathbb{R}^*_+)^n$.

Exercice 3

On note $E = \mathbb{R}_n[X]$, muni du produit scalaire $\langle P, Q\rangle = \int_0^1 P(t)Q(t)dt, \forall P, Q \in E$.

On considère l'application u définie par $[u(P)](x) = \int_0^1 (x+t)^n P(t)dt, \forall P \in E, \forall x \in \mathbb{R}$.

(1) Montrer que u est un endomorphisme de E.
(2) Montrer que u est continu.
(3) Déterminer u^* l'endomorphisme adjoint de u.
(4) Calculer Tr(u), la trace de u.

Exercice 4

On considère l'espace hilbertien (réel) $l^2(\mathbb{R})$ muni de sa base canonique $\mathcal{B} = (e_n = (\delta_{nk})_{k\in\mathbb{N}})_{n\in\mathbb{N}}$, et E son sous-espace vectoriel constitué des suites nulles à partir d'un certain rang, c-à-d : $E = \{u = (u_n)_{n\geq 0} \in l^2(\mathbb{R}) / \exists N \in \mathbb{N}; u_n = 0, \forall n \geq N\}$.

On munit E du produit scalaire canonique de $l^2(\mathbb{R})$: $\langle u, v\rangle = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n v_n$, qui fait ainsi de E un espace préhilbertien.

Soit, enfin, l'application f de E dans $\mathbb{R}$ définie par $f(u) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{u_n}{n+1}, \forall u = (u_n)_{n\geq 0} \in E$.

(1) (a) Montrer que f est bien définie.

(b) Montrer que f est une forme lineaire continue sur E.

(2) Soit $F = Ker(f)$. Montrer que F est un sous-espace fermé de E strictement continu dans E.

(3) On suppose qu'il existe $x \in F^\perp$ tel que $x \neq 0_E$.

(a) Montrer que $f(x) \neq 0$ et que $x - (n+1)f(x)e_n \in F, \forall n \in \mathbb{N}$.

(b) En déduire que $\langle x, e_n\rangle \neq 0, \forall n \in \mathbb{N}$.

(c) Montrer alors que $F^\perp = \{0_E\}$.

(4) A-t-on $E = F \oplus F^\perp$? A-t-on $F^{\perp\perp} = F$?

(5) (a) Montrer qu'il n'existe pas d'élément a de E tel que $f(u) = \langle u, a\rangle, \forall u \in E$.

(b) Que peut on en déduire pour E ?

BAREME

Exercice 1 : 5pts = 1,5 + 1,5 +(1 + 1)
Exercice 2 : 6pts = 1,5 + 1 + 2 + 1,5
Exercice 3 : 5pts = 1 + (1 + 1) + 2
Exercice 4 : 8pts = (1 + 1) + 1 + (1 +0,5 + 0,5) + 1 + (1 + 1)