ENSAE $AS1$ (2023/2024)
CONTROLE $N°1$ D'ANALYSE II - DURÉE = 4H

Exercice 1 7pts = 1,5 + 1,5 + (0,5 + 1 + 0,5) + 2

(Les questions (1), (2),(3) et (4) sont indépendantes) Calculer :

(1) $I = \int_0^1 2x\sqrt{\frac{1-x^2}{1+x^2}}dx$. On pourra poser : $u = x^2$.

(2) $J = \int \sqrt[3]{e^x - 1}dx$. On pourra poser : $u = \sqrt[3]{e^x-1}$.

(3) (a) Factoriser $X^4 - X^2 + 1$ dans $\mathbb{R}[X]$.

(b) En déduire la valeur de $K = \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{u^2}{u^4 - u^2 + 1}du$,

(c) Calculer alors $K' = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin(x)\sin(2x)}{\sin^4(x) + \cos^4(x) + 1}dx$.

(4) Calculer $L = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^4}\prod_{k=1}^{2n}(n^2+k^2)^{\frac{1}{n}}$.

Exercice 2 : 7pts = 1,5 + 1,5 + 1,5 + 1 + 1,5

On considère, pour tout $n \in \mathbb{N}$, les intégrales :

$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(2n+1)x}{\sin x}dx;$

$J_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2nx}{\sin x}dx$

$K_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos(4n+1)x}{\cos x}dx.$

(1) Montrer que $(I_n)_{n\geq 0}$ est une suite constante et calculer la valeur de I_n, $\forall n \in \mathbb{N}$.

(2) Calculer $\lim_{n\to+\infty} K_n$. (On pourra effectuer d'abord une IPP, puis passer à la limite).

(3) Evaluer $I_n - J_n$ en fonction de K_n. En déduire $\lim_{n\to+\infty} J_n$.

(4) Etablir une relation de recurrence entre J_n et $J_{n-1}, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

(5) En déduire l'expression de $J_n, \forall n \in \mathbb{N}$, puis $\lim_{n\to+\infty}(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \dots + \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1})$.

Exercice 3 : 7 pts = (0,5 + 1 + 1,5) + (1,5 + 1 + 0,5) + 1

On considère la fonction f définie par $f(x) = \displaystyle\int_x^{2x} \frac{t^2}{t^2 + \sin^2 t} dt, \forall x \neq 0$ et $f(0) = 0$.

(1) (a) Montrer que f est impaire.

(b) Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$.

(2) (a) Montrer que $\displaystyle\int_x^{2x} \frac{t^2}{t^2+1} dt \leq f(x) \leq x, \forall x \geq 0$.

(b) En déduire que la courbe $\mathcal{C}$ de f admet une asymptote Δ dont on donnera une équation cartésienne. Préciser la position de $\mathcal{C}$ par rapport à Δ.

(3) (a) Justifier la dérivabilité de f sur $\mathbb{R}$. Calculer $f^{'}(x), \forall x \in \mathbb{R}^*$, puis calculer $f'(0)$.

(b) Etudier le sens de variation de f sur $\mathbb{R}_+$.

(c) En déduire le tableau de variation de f.

(4) Construire la courbe de f dans un repère cartésien du plan.

Exercice 4 : 4 pts = 1 + 1 + 2

(Les questions (1), (2) et (3) sont indépendantes)

Existence, **puis** calcul de chacune des intégrales suivantes :

(1) $A = \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{x^2 - 2}{x^3\sqrt{x^2-1}} dx$

(2) $B = \displaystyle\int_{-2}^{1} \frac{dx}{\sqrt[3]{x^3 - 3x + 2}}$. Remarquer que : $x^3 - 3x + 2 = (x-1)^3(\ldots)$

(3) $C(a) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{(t^2 + a^2)dt}{(t+a)^2(1+t^2)}$.

On discutera suivant les valeurs du réel positif ou nul a.

$f(x) - x$