Jeudi oct 2023

19/20

# Algèbre 3, Devoir 1:

## Exercice 1

05

$\phi(x,y,z) = x^2 + 5y^2 + z^2 + 4xy + 2xz + 6yz$

1) Décomposons $\varphi$

on a: $\phi(x,y,z) = (x+2y+z)^2 - 4y^2 - 4yz - z^2 + 5y^2 + z^2 + 6yz$

$= (x+2y+z)^2 + y^2 + 2yz$

$= (x+2y+z)^2 + (y+z)^2 - z^2$

ou 1

posons $u = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, $l_1(u) = x+2y+z$

$l_2(u) = y+z$

$l_3(u) = z$

0,5

D'où $\boxed{\phi(x,y,z) = l_1^2(u) + l_2^2(u) - l_3^2(u)}$

2 signature de $\phi$

$sgn(\phi) = (2,1) \Rightarrow rg(\phi) = 3$

$\Rightarrow$ ~~dim Ker $\{0$~~

$\Rightarrow \dim Ker(\phi) = 0$

$\Rightarrow Ker(\phi) = \{0\}$

0,5 0,5 0,5

D'où $\boxed{sgn(\phi) = (2,1),\ rg(\phi) = 3,\ Ker(\phi) = \{0\}}$

3- Déterminons une base orthogonale pour $\phi$

Considérons $\theta = \begin{pmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \end{pmatrix}$, $u = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ tel que :

$$\begin{cases} \theta_1 = x + 2y + z \\ \theta_2 = y + z \\ \theta_3 = z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \theta_1 - 2\theta_2 + 2\theta_3 + \theta_3 \\ y = \theta_2 - \theta_3 \\ z = \theta_3 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = \theta_1 - 2\theta_2 + \theta_3 \\ y = \theta_2 - \theta_3 \\ z = \theta_3 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \end{pmatrix}$$

$M = Mat_{(B)}(\phi)$

posons $a = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $c = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\varphi$ est la f.b.s associée à $\phi$

2W

on a : $\varphi(a,b) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} ($

$$\varphi(a,b) = {}^t a M b = (1\ 0\ 0) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = (1\ 0\ 0) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

$$\varphi(a,c) = (1\ 0\ 0) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = (1\ 0\ 0) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = 0$$

$$\varphi(b,c) = (-2\ 1\ 0) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = (-2\ 1\ 0) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = 0$$

par ailleurs $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$

$$\boxed{\text{D'où } (a,b,c) \text{ forme une base orthogonale pour } \phi \text{ avec } a = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, c = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}}$$

4) Trouvons un vecteur non nul qui annule la forme quadratique :

soit $u$, ce vecteur, $u = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, $u \neq 0$

on a : $\phi(u) = 0 \Rightarrow (x+2y+z)^2 + (y+z)^2 - z^2 = 0$

— pour $y = 0$, $(x+z)^2 - z^2 = 0$

$\Rightarrow x + 2z = 0$

— pour $z = 1$, $x = -2$

Ainsi, $u = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

* Vérification : $\phi(u) = 4 + 1 + 2(-2)$

---

4) Trouvons un vecteur non nul qui annule $\phi$

soit $u$, ce vecteur, $u = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, $u \neq 0$

on a : $\phi(u) = 0 \Rightarrow (x+2y+z)^2 + (y+z)^2 - z^2 = 0$

— pour $y = 0$, $(x+z)^2 = 0 \Rightarrow x + z = 0$

$\Rightarrow x = -z$

prenons $x = 1 \Rightarrow z = -1$

Ainsi, $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

* Vérification : $\phi(1, 0, -1) = 1 + 1 - 2 = 0$ 1

$\boxed{\text{D'où } u \neq 0,\ u = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ annule } \phi \quad \text{On dit que } u \text{ est un vecteur isotrope à } \phi}$

Scanned with CamScanner

Exercice 2

1) Rappelons la définition de $A^\perp$ pour $\varphi$

on a : $\boxed{A^\perp = \{y \in E \,/\, \forall a \in A,\ \varphi(y,a) = 0\}}$

1

2) Montrons que pour tout $A \in \mathcal{P}(E)$, $A \subset (A^\perp)^\perp$

soit $A \in \mathcal{P}(E)$, $x \in A$

Ainsi, $\forall\, y \in A^\perp$, $\varphi(x,y) = 0$

$\Rightarrow x \in (A^\perp)^\perp$

$\Rightarrow A \subset (A^\perp)^\perp$

D'où $\boxed{A \subset (A^\perp)^\perp}$

1

3. Montrons que $E = \{0\}^\perp$

- On sait que $\forall A \in E$, $A^\perp \subset E$ car par définition, $A^\perp = \{y \in E \,/\, \forall a \in A, \varphi(y,a) = 0\}$

Ainsi, $\{0\} \subset E \Rightarrow \{0\}^\perp \subset E$ (1)

0.2

- Réciproquement, $\forall\, x \in E$, $\varphi(x,0)$

$= {}^t x \,M\, 0$ (avec $M = \mathrm{Mat}_{(B)}\,\phi$

$= 0$

$\phi =$ f.q associée à $\varphi$

et comme 0 est l'unique élément de $\{0\}$

alors $x \in \{0\}^\perp \Rightarrow E \subset \{0\}^\perp$ (2)

$\boxed{\text{De (1) et (2), on déduit que } E = \{0\}^\perp}$

2

Exercice 3 05

$\phi : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$

$x, y, z$

$(x_1, x_2, x_3) \longmapsto \phi(x) = 2x_1^2 + 2x_1x_3 + 2ax_2x_3 + 2x_3^2$

* Déterminons pour quelles valeurs de $a$, $\phi$ est

1) non dégénérée

on a : $\phi(x) = 2x_1^2 + 2x_1x_3 + 2ax_2x_3 + 2x_3^2$

$= 2(x_1^2 + x_1x_3) + 2ax_2x_3 + 2x_3^2$

$= 2\left(\left(x_1 + \frac{1}{2}x_3\right)^2 - \frac{1}{4}x_3^2\right) + 2ax_2x_3 + 2x_3^2$

$= 2\left(x_1 + \frac{1}{2}x_3\right)^2 - \frac{1}{2}x_3^2 + 2ax_2x_3 + 2x_3^2$

$= 2\left(x_1 + \frac{1}{2}x_3\right)^2 + \frac{3}{2}x_3^2 + 2ax_2x_3$

$= 2\left(x_1 + \frac{1}{2}x_3\right)^2 + \frac{3}{2}\left(x_3^2 + \frac{4a}{3}x_2x_3\right)$

$= 2\left(x_1 + \frac{1}{2}x_3\right)^2 + \frac{3}{2}\left(x_3 + \frac{2a}{3}x_2\right)^2 - \frac{2}{3}a^2x_2^2$

$-\frac{3}{9}$

$\frac{2}{3} \times \frac{9}{\cancel{1}}$

$-6$

* pour $a \neq 0$, $sgn(\phi) = (2, 1) \Rightarrow rg(\phi) = 3$

$\Rightarrow \dim Ker(\phi) = 0$

$\Rightarrow Ker\,\phi = \{0\}$

$2\left(1 + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{2}(1-2)^2 - 4$

$2\left(\frac{3}{2}\right)^2 + \frac{3}{2}$

$\frac{9}{2} + \frac{3}{2} =$

$\phi$ est non dégénérée. OK 2/2

* pour $a = 0$, $sgn(\phi) = (2, 0) \Rightarrow rg(\phi) = 2$

$\Rightarrow \dim Ker(\phi) = 1$

$\Rightarrow Ker(\phi) \neq \{0\}$

$$\boxed{\text{D'où } \phi \text{ est non dégénérée si et seulement si } a \neq 0}$$

2

2) Déterminons pour quelles valeurs de a, $\phi$ est non définie.

* pour $a=0$, $\phi(u) = 2(x_1+\frac{1}{2}x_3)^2+\frac{3}{2}(x_3+\frac{2a}{3}x_2)^2$

$$= 2(x_1+\frac{1}{2}x_3)^2+\frac{3}{2}x_3^2$$

$\phi(u)=0 \Rightarrow x_1 = x_3 = 0$

$-$ si $x_2 = 1$, $\phi(0,1,0) = 0$

or ~~0+1~~ $\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$

$\boxed{\text{Donc } \phi \text{ n'est pas définie. Pour } a=0}$

* pour $a \neq 0$,

considérons $w = \begin{pmatrix}1\\-3/a\\1\end{pmatrix}$ 6/4

on a: $\phi(w) = 2+2+2a(-\frac{3}{a})+2$

$= 6-6$

$= 0$

et comme $w \neq 0_{\mathbb{R}^3}$ 2,5

$\boxed{\text{On déduit que } \phi \text{ n'est pas définie, Pour tout } a \neq 0}$

8

0/2

Exercice 4

$\phi: \mathbb{R}^3 \cdot \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$

$(x,y) \longmapsto a(x_1y_2+x_2y_1)+b(x_2y_3+x_3y_2)+c(x_3y_1+x_1y_3)$

6/4

1) Montrons que $\varphi$ est une forme bilinéaire symétrique

- Symétrie :

soient $x, y \in \mathbb{R}^3$

on a : $\varphi(y,x) = a(y_1x_2 + y_2x_1) + b(y_2x_3 + y_3x_2) + c(y_3x_1 + y_1x_3)$

$$= a(x_1y_2 + x_2y_1) + b(x_2y_3 + x_3y_2) + c(x_3y_1 + x_1y_3)$$

$$= \varphi(x,y)$$

OK

Donc $\boxed{\varphi \text{ est symétrique } (1)}$

- linéarité par rapport à la première place.

soient $x, x', y \in \mathbb{R}^3$, $\alpha \in \mathbb{R}$

on a : $\varphi(\alpha x + x', y)$

$$= a((\alpha x_1 + x_1')y_2 + (\alpha x_2 + x_2')y_1) + b((\alpha x_2 + x_2')y_3 + (\alpha x_3 + x_3')y_2)$$
$$+ c((\alpha x_3 + x_3')y_1 + y_3(\alpha x_1 + x_1'))$$

$$= a(\alpha x_1y_2 + x_1'y_2 + \alpha x_2y_1 + x_2'y_1) + b(\alpha x_2y_3 + x_2'y_3) + \alpha x_3y_2 + x_3'y_2$$
$$+ c(\alpha x_3y_1 + x_3'y_1 + \alpha x_1y_3 + x_1'y_3)$$

$$= \alpha\left[a(x_1y_2 + x_2y_1) + b(x_2y_3 + x_3y_2) + c(x_3y_1 + x_1y_3)\right]$$
$$+ a(x_1'y_2 + x_2'y_1) + b(x_2'y_3 + x_3'y_2) + c(x_3'y_1 + x_1'y_3)$$

$$= \alpha\varphi(x,y) + \varphi(x',y)$$

$\varphi$ est ~~linéaire~~ linéaire par rapport à la première place.

D'où $\boxed{\varphi \text{ est une forme bilinéaire symétrique}}$

2) Déterminons les matrice à laquelle $q$ est associée

- soit $\phi$, la f.q associée à $q$

on a: $\phi(x_1, x_2, x_3) = 2ax_1x_2 + 2bx_2x_3 + 2cx_1x_3$

Ainsi, la matrice associée à $\phi$ dans la base cannonique est:

$$\boxed{M = \begin{pmatrix} 0 & a & c \\ a & 0 & b \\ c & b & 0 \end{pmatrix}}$$

1,5

3) Montrons que $q$ n'est jamais un produit scalaire, $\forall$ a, b et c

Vu que $q$ est une f.b.s, alors $q$ n'est pas un produit scalaire $\Rightarrow$ la f.q $\phi$ associée n'est pas définie et/ou positive.

Il suffit donc de trouver un vecteur $u \neq 0$ tel que $\phi(u) = 0$

OK

- Prenons $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

on a; $\phi(1,0,0) = 2a(0) + 2b(0) + 2c(0)$
$= 0$

2

Donc $\phi$ n'est pas définie

OK

On conclut donc que $\forall$ $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$, $q$ n'est pas un produit scalaire

OK