ENSAE $AS1$ **(2023/2024)**
TRAVAUX DIRIGES D'ANALYSE II - SÉRIE 3 (SÉRIES RÉELLES)

Exercice 1($\star\star$) *par série*

Etudier, dans chacun des cas suivants, la série $\displaystyle\sum_n u_n$:

(1) $u_n = \dfrac{n^{\ln(n)}}{(\ln(n))^n}$, (2) $u_n = \dfrac{n!a^n}{n^n}$, où a est un paramétre réel non nul. (3) $u_n = \dfrac{n!}{n^{2n}}$, (4) $u_n = n^{-\sqrt{n}}$, (5) $u_n = \dfrac{1}{n\sqrt[n]{n}}$, (6) $u_n = (\dfrac{n}{n+1})^{n^2}$,(7) $u_n = \dfrac{1}{\sqrt{n-1}} + \dfrac{1}{\sqrt{n+1}} - \dfrac{2}{\sqrt{n}}$.

Exercice 2($\star\star$) *par série*

Etudier la série $\sum_n u_n$ (où a et α sont des paramètres réels) :

(1) $u_n = (-1)^n\sqrt{n}\tan(\frac{1}{n})$, (2) $u_n = (n+\dfrac{1}{2})\ln(1+\dfrac{1}{n})-1$, (3) $u_n = \sin\dfrac{1}{n} - \ln(1+\dfrac{1}{n})$, (4) $u_n = a\sin(\dfrac{1}{n}+\sqrt{n^2+2}-\sqrt{n^2+1})$, (5) $u_n = (1+e^{-n})^{n^2+1}-1$, (6) $u_n = (1+\dfrac{1}{n}+\dfrac{a}{n^2})^{n+1}-e$, (7) $u_n = \sqrt{a+n^2} - \sqrt{b+n+n^2}$, (8) $u_n = \arg ch(\dfrac{1}{\cos\dfrac{1}{n}})$, (9) $u_n = \tan\frac{1}{n} - \sin\frac{1}{n}$, (10) $u_n = (1+\dfrac{a}{n})^n - \dfrac{n}{n+1}e^a$, (11) $u_n = (n\sin\dfrac{1}{n})^{n^\alpha}$, (12) $u_n = \ln(n\sin(\dfrac{1}{n}))$

Exercice 4($\star\star\star$)

On pose $U_n = \dfrac{1\times 2\times 3\times ...\times (2n)}{(1+4)(1+4.2^2)...(1+4.n^2)}, \forall n\in\mathbb{N}^*$

(1) Montrer que $\ln(U_n) = \displaystyle\sum_{k=1}^{k=n}\ln(\frac{1-\frac{1}{2k}}{1+\frac{1}{4k^2}})$

(2) En déduire $\displaystyle\lim_{n\mapsto+\infty} U_n$.

Exercice 5($\star\star$) *par série*

Calculer les sommes des séries ci-dessous après avoir prouvé leur existence :

(1) $\displaystyle\sum_{n\geq 3}\frac{4n-3}{n(n^2-4)}$,

(2) $\displaystyle\sum_{n\geq 2}\frac{1}{9(n^2-1)}$

(3) $\displaystyle\sum_{n\geq 0}\frac{9}{(3n+1)(3n+4)}$

(4) $\displaystyle\sum_{n\geq 0}\frac{n^2-n+2}{n!}$