ENSAE $AS1$ (2022/2023)
CONTROLE $N°2$ D'ANALYSE II - DURÉE = 4H

Exercice 1 : 5pts = (1 + 1,5) + 1 + 1,5
Les questions sont indépendantes

(1) Nature des séries numériques

(a) $\sum_{n\geq 0} u_n$, avec $u_n = (1+\frac{1}{n+1})^{2n} - (1+\frac{2}{n+1})^n$

(b) $\sum_{n\geq 2} u_n$, avec $u_n = \frac{n^{2\alpha}}{\alpha^n + \ln(n)}$, où $\alpha \in \mathbb{R}_+$ donné.

(2) Rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\geq 1} (1+\frac{1}{n})^{n^2} \frac{n^n}{n!} x^n$

(3) ~~DES~~ DSE de f telle que $f(x) = \frac{x^2+1}{(1+x)^3}$

Exercice 2 : 4pts = 1 + 2 + 1

On considère la série entière $\sum_{n\geq 1} \frac{x^{2n+2}}{n(n+1)(2n+1)}$

(1) Déterminer son rayon de convergence R

(2) Calculer sa somme $S(x), \forall x \in]-R, R[$

(3) En déduire la valeur de la somme $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n(n+1)(2n+1)}$

Exercice 3 : 4pts = 1 + 1 + 2

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{-x^2} \int_0^x e^{t^2} dt$

(1) Justifier la dérivabilité de f sur $\mathbb{R}$

(2) Montrer que $f'(x) = 1 - 2xf(x), \forall x \in \mathbb{R}$

(3) Déterminer le DSE de f et préciser son rayon de convergence.

Exercice 4 : 9pts = (1 + 1) + (1 + (1,5 + 1,5 + 1)) + 2

On considère la série entière $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ telle que $a_n = \dfrac{4^n}{C_{2n}^n}, \forall n \in \mathbb{N}$

(1) (a) Déterminer le rayon de convergence R de cette série

(b) Etudier la nature des séries numériques : $\sum_{n\geq 0}(-1)^n a_n$ et $\sum_{n\geq 0} a_n$.

On pourra utiliser la formule de Stirling.

(2) Soit $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ la somme de la série, $\forall x \in]-R, R[$.

(a) Montrer que $2x(1-x)S'(x) - (2x+1)S(x) = -1, \forall x \in]0,1[$.
On pourra utiliser la relation : $(2n-1)a_n - 2na_{n-1} = 0, \forall n \in \mathbb{N}^*$

(b) On pose $S(x) = h(x)\dfrac{\sqrt{x}}{(1-x)^{\frac{3}{2}}}, \forall x \in]0,1[$

(i) Montrer que $h'(x) = -\dfrac{\sqrt{1-x}}{2x^{\frac{3}{2}}}, \forall x \in]0,1[$

(ii) En déduire l'expression de $h(x)$ (On pourra poser $x = \sin^2(\theta)$)

(iii) Déterminer alors l'expression de $S(x)$ pour tout $x \in [0,1[$

(3) Déduire de ce qui précède la valeur de la somme $\sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{1}{C_{2n}^n}$