Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de São Paulo
Professor: Matheus M. Garcia
Disciplina Aritmética
Primeira avaliação bimestral **Data:**____/____/ 2017
Nome:____ **Prontuário:**___________

Observações

• Esta avaliação tem a finalidade de verificar o que você compreendeu de parte daquilo que nós estudamos nesse segundo bimestre. Desta forma, solicito que você procure responder a todas as questões com seriedade, deixando todos os cálculos na folha, para que eu possa avalia-lo melhor.
• O resultado final deve estar à caneta (Azul ou Preta).
• Caso seja passando cola, a sua prova e do companheiro terá valor zero, sem contestamento.

"Matemática é um assunto tão sério que ninguém deve perder a oportunidade de torná-la divertida".
(Blaise Pascal)

Questões

1. Mostre por indução a validade das seguintes fórmulas para todo natural n:

   (a) $1 - 2^2 + 3^2 - \cdots + (-1)^{n-1}n^2 = (-1)^{n-1}\frac{n(n+1)}{2}$.
   (b) $1^2 + 3^2 + \cdots + (2n-1)^2 = \frac{1}{3}n(2n-1)(2n+1)$.
   (c) $1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$.

2. Mostre por indução a validade das seguintes fórmulas para todo número natural n:

   (a) $\frac{1}{1.3} + \frac{1}{3.5} + \cdots + \frac{1}{(2n-1)+(2n+1)} = \frac{n}{2n+1}$.
   (b) $\frac{1}{1.4} + \frac{1}{4.7} + \frac{1}{7.10} + \cdots + \frac{1}{(3n-2)(3n+1)} = \frac{n}{3n+1}$.
   (c) $\frac{1}{1.5} + \frac{1}{5.9} + \frac{1}{9.13} + \cdots + \frac{1}{(4n-3)(4n+1)} = \frac{n}{4n+1}$.
   (d) $\frac{1}{1.2.3} + \frac{1}{2.3.4} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{n(n+3)}{4(n+1)(n+2)}$.
   (e) $\frac{1^2}{1.3} + \frac{2^2}{3.5} + \cdots + \frac{n^2}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{n(n+1)}{2(2n+1)}$.

3. Mostre por indução a validade das seguintes fórmulas para todo número natural n:

   (a) $1.2^0 + 2.2^1 + 3.2^2 + \cdots + n.2^{n-1} = 1 + (n-1)^{2n}$.
   (b) $\left(1+\frac{1}{1}\right)\left(1+\frac{1}{2}\right)^2 \cdots \left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n-1} = \frac{n^{n-1}}{(n-1)!}$.
   (c) $1.1! + 2.2! + 3.3! + \cdots + n.n! = (n+1)! - 1$.

4. Se sen$(\alpha) \neq 0$, mostre que, para todo $n \in \mathbb{N}$ vale a desigualdade:

$$\cos\alpha.\cos 2\alpha.\cos 2^2\alpha \cdots \cos 2^n\alpha = \frac{\text{sen}2^{n+1}\alpha}{2^{n+1}\text{sen}\alpha}.$$

   SUGESTÃO: Use a fórmula $sen2\beta = 2sen\beta\cos\beta$.

5. Mostre que:

   (a) $n! > 2^n$, se $n \geq 4$.
   (b) $n! > 3^n$, se $n \geq 7$.
   (c) $n! > 4^n$, se $n \geq 9$.

6. Para todo $n \in \mathbb{N}$, mostre que, nos inteiros,

   (a) 80 divide $3^{4n} - 1$.
   (b) 9 divide $4^n + 6n - 1$.
   (c) 8 divide $3^{2n} + 7$.
   (d) 9 divide $n4^{n+1} - (n + 1)4^n + 1$.