Taller 1 Control de calidad. 2024-I

Universidad Nacional de Colombia

Michel Mendivenson Barragán Zabala* Anderson Arley Quintero Morales†

2024-03-13

Ejercicio 1:

En la tabla que se muestra a continuación de este enunciado, se reportan los tres últimos dígitos de las mediciones de los diámetros interiores de un cilindro para la construcción de los motores de cierta marca comercial de automóvil. El régimen de la producción de los cilindros es tal que las muestras se pueden recolectar cada media hora, pero con tamaños de máximo cinco unidades. Es de interés establecer si el proceso se encontraba bajo control estadístico cuando se recolectaron las muestras, mediante el diseño de las **Cartas $\bar{X}$ y R.**

Muestra	x1	x2	x3	x4	x5
1	205	202	204	–	–
2	207	205	202	–	–
3	196	201	198	202	–
4	203	198	196	217	–
5	201	202	199	–	–
6	197	203	–	–	–
7	205	196	201	–	–
8	197	199	196	–	–
9	201	200	–	–	–
10	195	203	204	199	200
11	202	202	–	–	–
12	198	203	–	–	–
13	202	196	200	–	–
14	201	187	209	202	200
15	202	196	204	197	199
16	200	204	197	199	–
17	197	199	201	201	–
18	205	204	202	200	–
19	200	201	199	200	–
20	201	205	196	201	–
21	197	198	199	–	–
22	200	200	201	205	201
23	202	202	204	–	–
24	198	203	201	198	–
25	204	201	201	–	–
26	206	194	197	–	–
27	200	204	198	–	–

*Departamento de Estadística, mbarraganz@unal.edu.co
†Departamento de Estadística, aquinteromo@unal.edu.co

Muestra	x1	x2	x3	x4	x5
28	199	199	–	–	–
29	198	204	–	–	–
30	203	200	204	199	200
31	196	203	197	201	–
32	197	199	203	–	–
33	197	194	199	200	199
34	203	201	196	201	–

Como se puede observar en la tabla, no todas las muestras son del mismo tamaño por lo que se decide usar la metodología explicada en el capítulo *6.3.2. The x and s Control Charts with Variable Sample Size* del libro *Introduction to statistical quality control* del autor *Douglas C. Montgomery.* Donde se establece una carta cuyos límites superior e inferior varian de acuerdo al tamaño de la muestra n. Así pues, el autor define:

- La línea central de la carta:

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{m} n_i \bar{x_i}}{\sum_{i=1}^{m}} n_i$$

- La estimación de $\bar{s}$:

$$\bar{s} = \left[\frac{\sum_{i=1}^{m} (n_i - 1) s_i^2}{\sum_{i=1}^{m} n_i \ - m} \right]^{-\frac{1}{2}}$$

Siendo m la cantidad de muestras recolectadas, n_i el tamaño de la muestra i, así como $\bar{x_i}$ es la media de la muestra i y s_i^2 su varianza.

- El límite inferior de la carta:

$$\bar{x} - A_3 \bar{s}$$

  Con A_{3i} corresponiente a la tabla de valores usando el tamaño n_i.

- El límite superior de la carta:

$$\bar{x} + A_3 \bar{s}$$

  Por esto, calculamos la media, la varianza y el tamaño de cada una de las muestras en el siguiente bloque de código:

```
D1$Media = apply(X = D1, MARGIN = 1, FUN = function(x) mean(x[1:5], na.rm = T))
D1$Var = apply(X = D1, MARGIN = 1, FUN = function(x) var(x[1:5], na.rm = T))
D1$n_i = apply(X = D1, MARGIN = 1, FUN = function(x) sum(!is.na(x[1:5])))
```

De donde obtenemos las siguientes medias, varianzas y tamaños de muestra:

n_i	Var	Media
3	2.3333333	203.6667
3	6.3333333	204.6667
4	7.5833333	199.2500
4	89.6666667	203.5000
3	2.3333333	200.6667
2	18.0000000	200.0000
3	20.3333333	200.6667

n_i	Var	Media
3	2.3333333	197.3333
2	0.5000000	200.5000
5	12.7000000	200.2000
2	0.0000000	202.0000
2	12.5000000	200.5000
3	9.3333333	199.3333
5	63.7000000	199.8000
5	11.3000000	199.6000
4	8.6666667	200.0000
4	3.6666667	199.5000
4	4.9166667	202.7500
4	0.6666667	200.0000
4	13.5833333	200.7500
3	1.0000000	198.0000
5	4.3000000	201.4000
3	1.3333333	202.6667
4	6.0000000	200.0000
3	3.0000000	202.0000
3	39.0000000	199.0000
3	9.3333333	200.6667
2	0.0000000	199.0000
2	18.0000000	201.0000
5	4.7000000	201.2000
4	10.9166667	199.2500
3	9.3333333	199.6667
5	5.7000000	197.8000
4	8.9166667	200.2500

Y calculando los valores de $\bar{x}$ y $\bar{s}$:

```r
# Cálculo del valor de la línea central
XBarra = sum(D1$Media * D1$n_i) / sum(!is.na(D1[,1:5]))

# Cálculo del ancho del intervalo
SBarra = sqrt(sum((D1$n_i - 1) * D1$Var)/(sum(!is.na(D1[,1:5])) - nrow(D1)))
```

```
## El valor de X barra estimado es: 200.4407
```

```
## El valor de S barra estimado es: 3.674802
```

Los siguientes valores corresponden a los valores tabulados con los distintos tamaños de cada una de las muestras:

```r
A3n2 = 2.659
A3n3 = 1.954
A3n4 = 1.628
A3n5 = 1.427

A = c(A3n2,A3n3, A3n4, A3n5)
```

Y finalmente, se realiza la gráfica:

```r
library(latex2exp)
plot(y = D1$Media, x = 1:34, type = 'b', col = 'darkblue',
     main = TeX('Carta $\\bar{X}$'), ylab = 'Media muestral', xlab = 'Número de muestra',
```

```
     ylim = c(min(XBarra - A * SBarra),max(XBarra + A * SBarra)), cex.main = 2)
abline(h = XBarra, col = 'darkgray', lwd = 1)


LimInf = seq(from = 0.5, by = 1, length.out = 34)
LimMay = seq(from = 1.5, by = 1, length.out = 34)

UCL = XBarra +  A[D1$n_i - 1] * SBarra
LCL = XBarra -  A[D1$n_i - 1] * SBarra

segments(x0 = LimInf+0.1, x1 = LimMay-0.1, y0 = UCL, y1 = UCL, col = 'darkblue', lwd = 1.5)
segments(x0 = LimInf+0.1, x1 = LimMay-0.1, y0 = LCL, y1 = LCL, col = 'darkblue', lwd = 1.5)
```

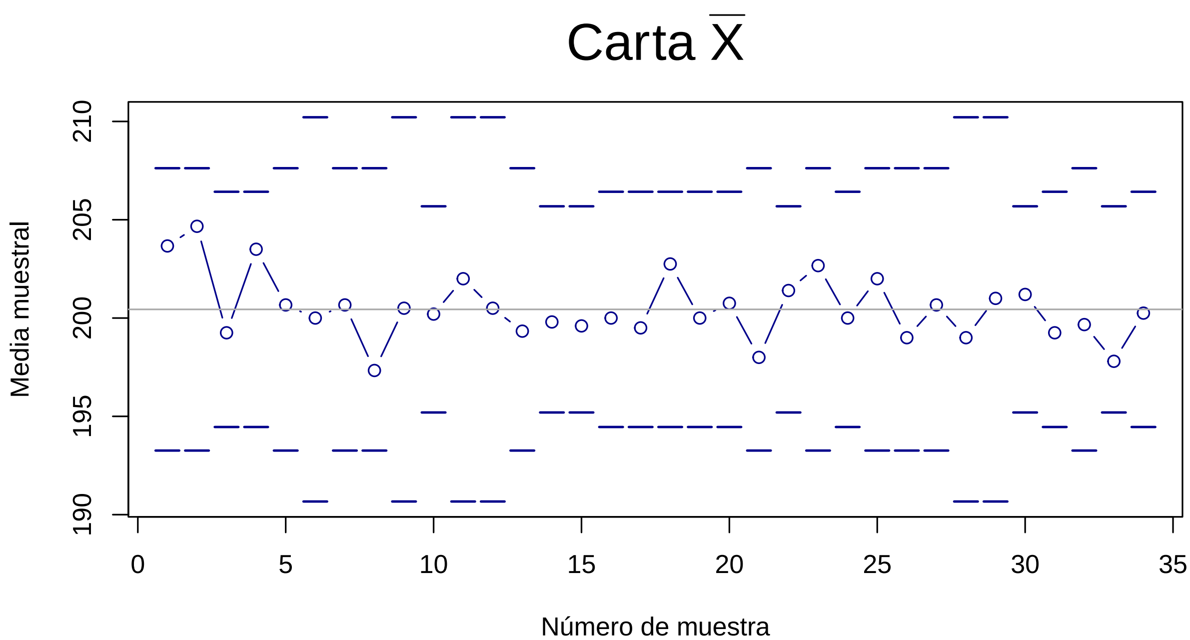


Figure 1: Carta X barra para tamaño de muestra variable (Ejemplo cilindros)

Al revisar esta gráfica, como no hay puntos fuera de los límites de la carta ni notamos patrones aparentes por lo que determinamos que la media de la estadística de control del proceso es estable en el momento. Por otro lado, la carta **R** se construye de una forma similar con la línea central $\bar{s}$ y los límites superior e inferior $B_{4i}\bar{s}$ y $B_{3i}\bar{s}$. Al tratarse de tamaños de muestra de 2 a 5, B_{3i} es siempre 0 por lo que sólo nos interesará el límite superior. A continuación la carta de control:

```
B4n2 = 3.267; B4n3 = 2.568; B4n4 = 2.266; B4n5 = 2.089

B = c(B4n2,B4n3, B4n4, B4n5)

plot(y = sqrt(D1$Var), x = 1:34, type = 'b', col = 'darkblue', main = TeX('Carta $R$'),
     ylab = 'Desviación estándar muestral', xlab = 'Número de muestra',
     ylim = c(0,max(B4n2 * SBarra)), cex.main = 2)
abline(h = SBarra, col = 'darkgray', lwd = 1)
```

```
LimInf = seq(from = 0.5, by = 1, length.out = 34)
LimMay = seq(from = 1.5, by = 1, length.out = 34)

UCL = B[D1$n_i - 1] * SBarra

segments(x0 = LimInf + 0.1, x1 = LimMay - 0.1, y0 = UCL, y1 = UCL, col = 'darkblue', lwd = 1.5)
```

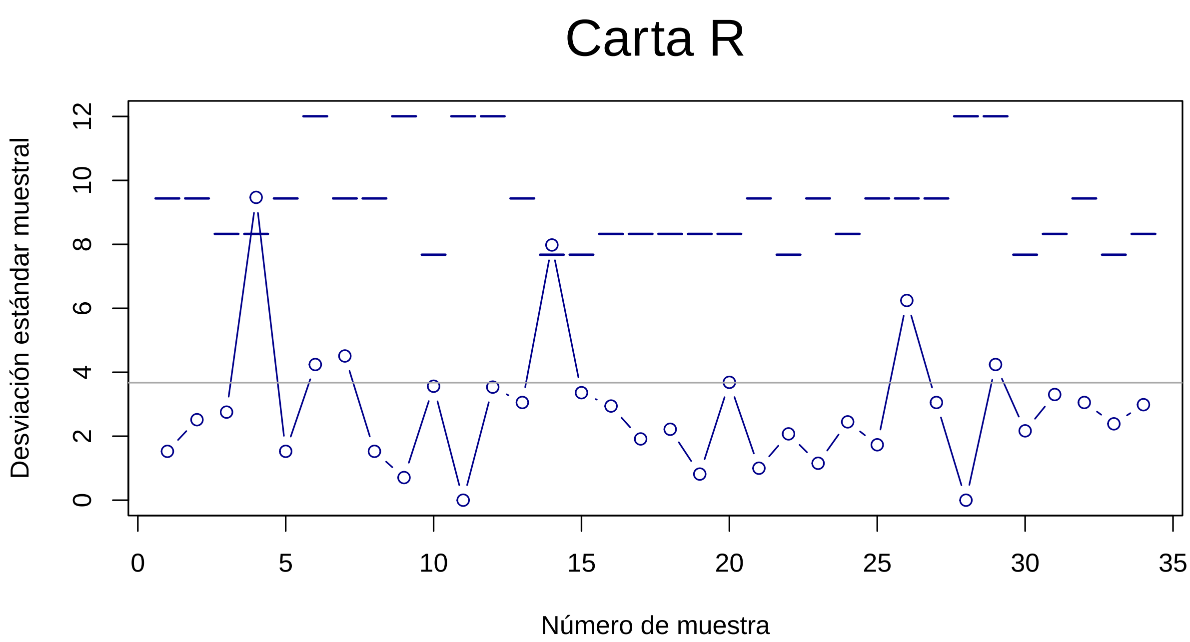


Figure 2: Carta R para tamaño de muestra variable (Ejemplo cilindros)

En cuanto a la varianza de la característica de calidad del proceso, vemos que esta no se encuentra estable o bajo control debido a que la muestra 4 y la muestra 14 están fuera de los límites de control.

Hablando de este método para construir cartas de control, se menciona que otra aproximación posible es tomar $n = \bar{n}$, esta alternativa funciona bien sobre todo si los tamaños de las muestras no varían demasiado y permite una mejor visualización de la carta. Sin embargo, la alternativa con los límites variando permite tener en cuenta el tamaño de la muestra y por ende tener menos falsas alarmas. En términos prácticos, en cuanto a presentaciones es mejor la primera alternativa, pero en términos técnicos es más adecuada la técnica aquí presentada. Además, estas cartas también son más sensibles a cambios pequeños pues los límites se ajustarán para detectar estas variaciones más rápidamente.

Ejercicio 2:

En primer lugar importamos la base de datos, y construimos la carta $\bar{x}$ para el nivel medio teniendo en cuenta los valores de μ_0 y σ_0

```
Punto2 <- read.csv2("Ejercicio 1 Taller 1.csv", sep="")
Punto2$X_barra <- rowMeans(Punto2[, c("X1", "X2", "X3", "X4", "X5")])
library(ggplot2)
mu_0=20
UCL=20+(6*(3/sqrt(22)));UCL
```

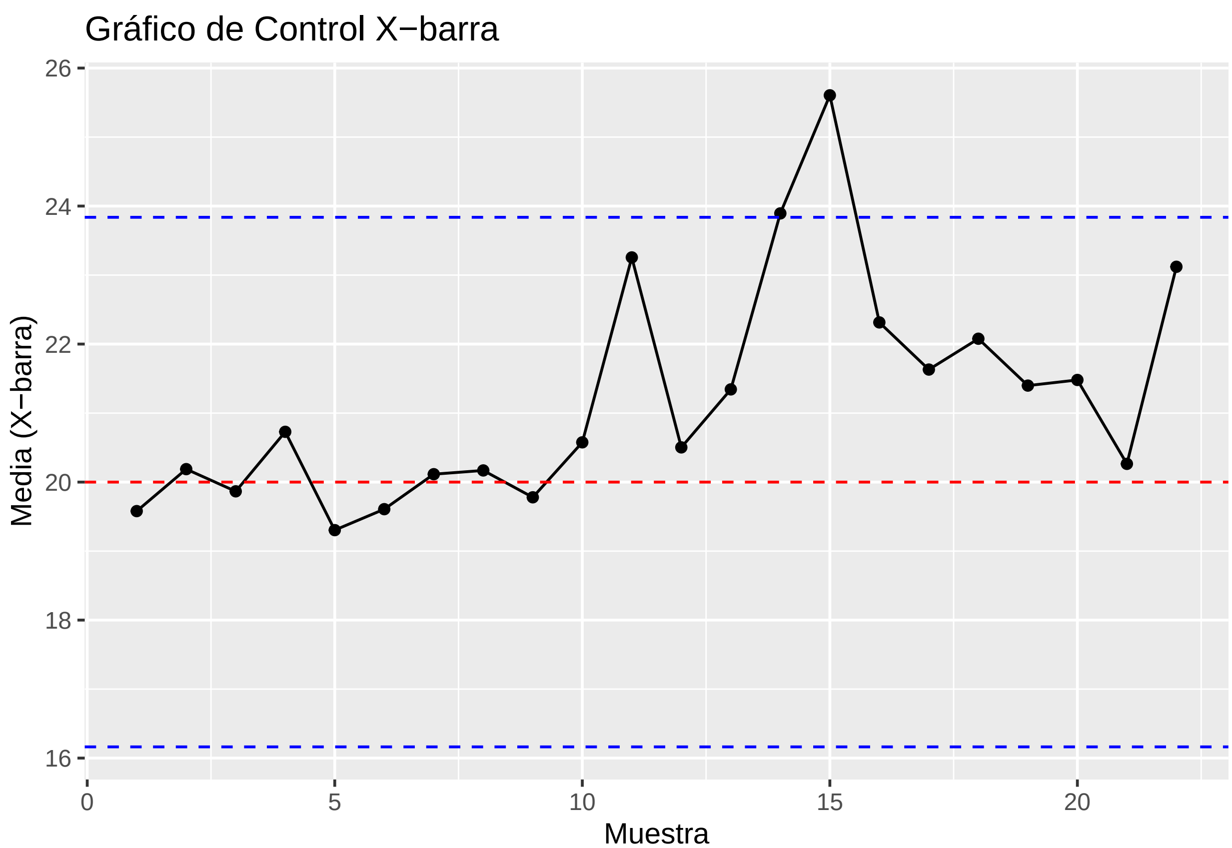
```
## [1] 23.83761
```

```r
LCL=20-(6*(3/sqrt(22)));LCL
```

```
## [1] 16.16239
```

Y asi obtenemos los limites y linea central correspondiente a la carta, ahora procedemos a graficarla:

```r
ggplot(Punto2, aes(x = MUESTRA, y = X_barra)) +
  geom_line() +
  geom_point() +
  geom_hline(yintercept = 20, linetype = "dashed", color = "red") +
  geom_hline(yintercept = 20+(6*(3/sqrt(22))), linetype = "dashed", color = "blue") +
  geom_hline(yintercept = 20-(6*(3/sqrt(22))), linetype = "dashed", color = "blue") +
  labs(x = "Muestra", y = "Media (X-barra)", title = "Gráfico de Control X-barra")
```



Con base en el grafico podemos decir que el proceso se sale de control a partir de la muestra numero 14 ya que se sale de los limites de control con una magnitud de:

```r
mean(Punto2$X_barra[14:22])-mu_0
```

```
## [1] 2.420578
```

Lo anterior sale de comparar la media del proceso desde que sale de control hasta el final de la toma de muestras contra μ_0 lo que nos da como resultado 2.420578 que en este caso seria la magnitud de cambio.