Control Estadístico de Calidad

Entrega 1. 2024-II

Michel Mendivenson Barragán Zabala
Departamento de Estadística
Universidad Nacional de Colombia

mbarraganz@unal.edu.co

Juan Sebastián Huertas Pirajan
Departamento de Estadística
Universidad Nacional de Colombia

juhuertasp@unal.edu.co

Diego Andres Paez Molina
Departamento de Estadística
Universidad Nacional de Colombia

dpaezm@unal.edu.co

18 de marzo de 2024

Ejercicio 1: Sea $X \sim N(\mu, \sigma)$ una característica de calidad. Mediante simulaciones, establezca el comportamiento del ARL (en control y fuera de él) de las Cartas R y S para observaciones normales con límites 3σ y muestras de tamaño (a) $n = 3$ y (b) $n = 10$ ¿Qué regularidades observa?

Para la implementación de la solución, se creará en R una función que nos permita simular cuantás veces querramos el momento en que un proceso da una alerta (bien sea verdadera o falsa) con argumentos que nos permitan modificar tanto el tamaño de muestra n como los límites de la carta de control y su línea central para cada una de las cartas. Las funciones se definen como sigue:

```r
RunLengthS = function(mu = 0, sigma = 1, CorrimientoSigma = 1,n = 3, m = 1000){
  S = c() ; c4 = sqrt(2/(n-1)) * gamma(n/2) / gamma((n-1)/2); CLs = c4 * sigma;
  LCL = sigma * (c4 - 3 * sqrt(1 - c4**2)); UCL = sigma * (c4 + 3 * sqrt(1 - c4**2))

  pb = txtProgressBar(min = 0, max = m, style = 3) # Barra de progreso

  i = 0
  while (length(S) < m){
    s = sd(rnorm(n, mu, CorrimientoSigma))
    i = i + 1
    if (s < LCL | s > UCL){
      S = c(S, i)
      i  = 0; setTxtProgressBar(pb, length(S))
    }}
  return(S)}

RunLengthR = function(mu = 0, sigma = 1, CorrimientoSigma = 1,n = 3, m = 1000){
  # Constantes carta R
  d3 = c(0.853, 0.888, 0.880, 0.864, 0.848, 0.833, 0.820, 0.808, 0.797, 0.787, 0.778, 0.770,
         0.763, 0.756, 0.750, 0.744, 0.739, 0.734, 0.729, 0.724, 0.72, 0.716, 0.712,0.708)
  d2 = c(1.128, 1.693, 2.059, 2.326, 2.534, 2.704, 2.847, 2.970, 3.078, 3.173, 3.258, 3.336,
         3.407, 3.472, 3.532, 3.588, 3.640, 3.689, 3.735, 3.778, 3.819, 3.858, 3.895, 3.931)
  d3 = d3[n-1]; d2 = d2[n-1]; R = c(); UCL = (d2 + 3 * d3) * sigma; LCL = (d2 - 3 * d3) * sigma

  pb = txtProgressBar(min = 0, max = m, style = 3) # Barra de progreso
```

```r
i = 0
while(length(R) < m){
  r = diff(range(rnorm(n, mu, CorrimientoSigma)))
  i = i + 1
  if (r < LCL | r > UCL){
    R = c(R, i)
    i = 0; setTxtProgressBar(pb, length(R))
  }}
return(R)}
```

Tenga en cuenta que la salida de la función es un vector con los valores de los tiempos en que se detecto una señal dados los límites y la línea central correspondientes al proceso en control (El proceso en control se definió con $\mu = 0$, $\sigma = 1$ y además para cada uno se tomaron m = 1000 muestras de tiempos en que se generó una alerta). Los resultados para diferentes corrimientos se grafican a continuación:

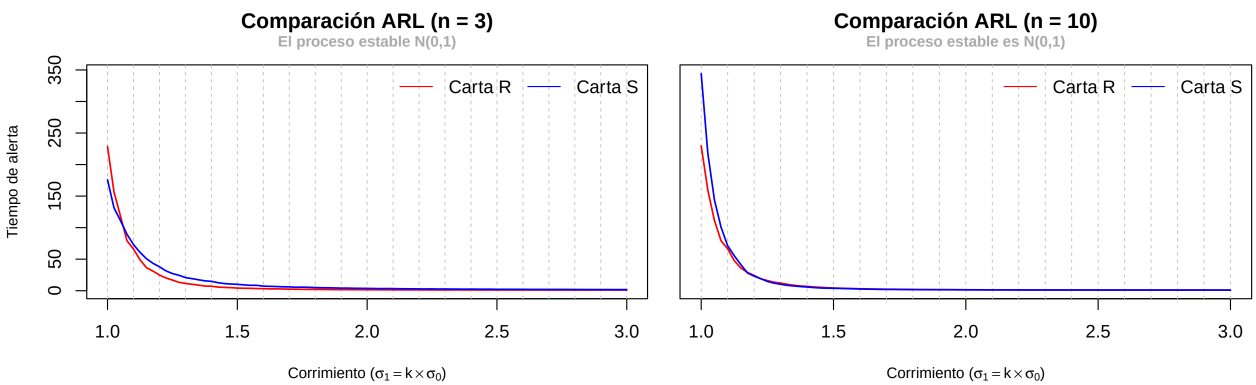


Figura 1: Comparación de ARL entre cartas R y S para n = 3, 10.

Se tomaron 81 corrimientos a intervalos regulares desde 1 hasta 3 por lo que una tabla no sería útil para analizar la información. Para $n = 3$ a la carta R le toma, en promedio, más tiempo para producir falsas alarmas para un proceso estable mientras que para los corrimientos de $1{,}1 \times \sigma$ en adelante, la carta R también tiende a tardar menos en dar una alarma verdadera. Por otro lado, la carta S para un tamaño de subgrupos racionales de 10 tarda en promedio más tiempo que la carta R para dar falsas alarmas y en cuanto a alarmas verdaderas no parece diferenciarse demasiado respecto a la carta R.

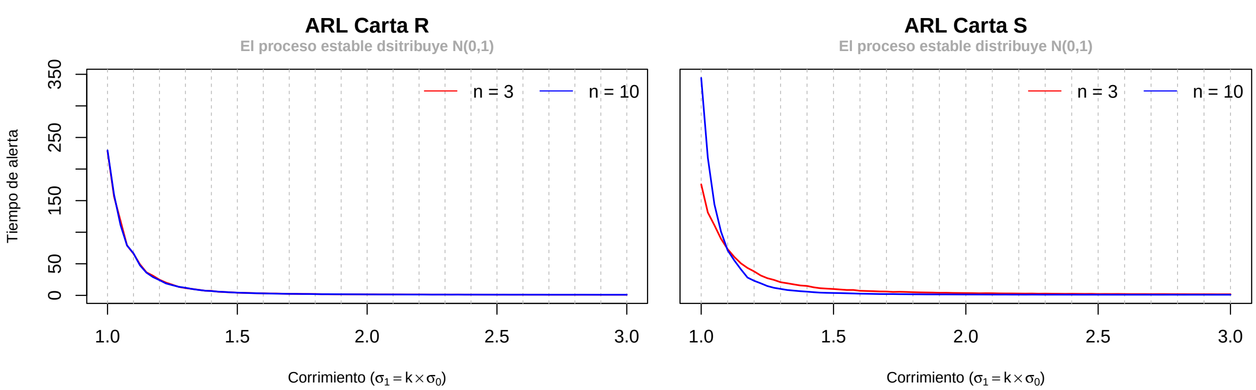


Figura 2: Comparación de ARL para cada carta con n = 3, 10

Además vemos que la carta R tiene un comportamiento más estable respecto al cambio del tamaño de los subgrupos racionales mientras que S tiende a comportarse mejor a medida que este aumenta debido a, en promedio, presentar tanto una menor frecuencia de falsas alarmas como mayor frecuencia de alarmas verdaderas.

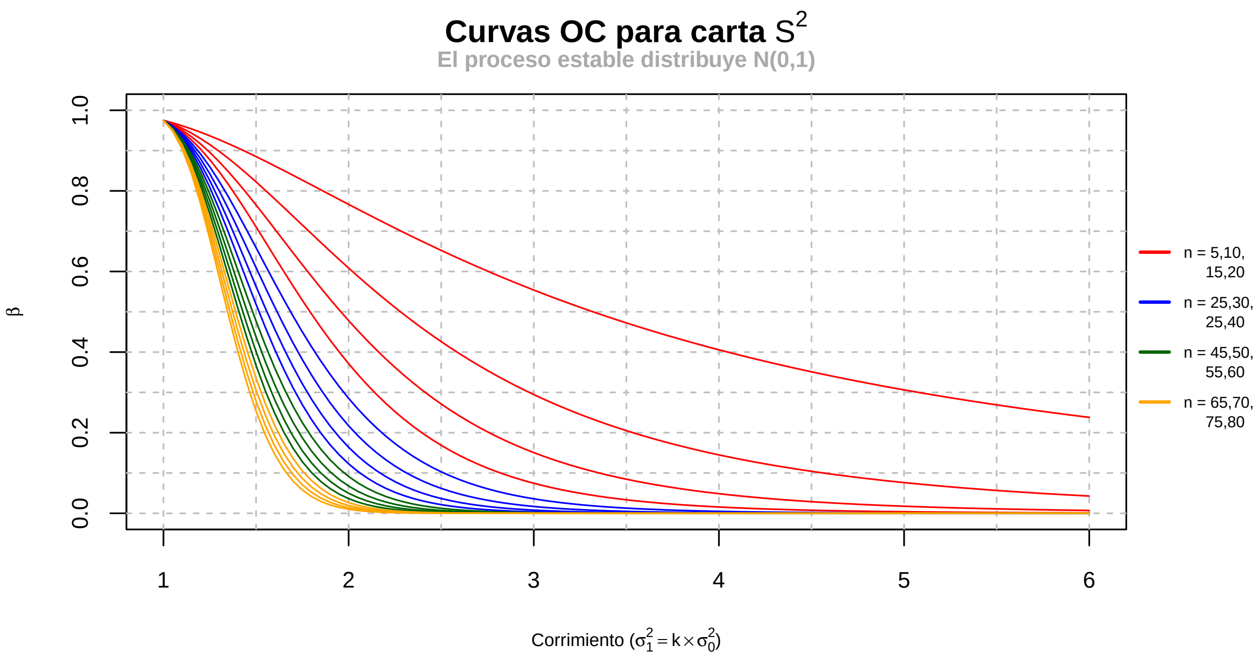
Ejercicio 2: Sea $X \sim N(\mu, \sigma)$ una característica de calidad. Se sabe que los valores objetivo de los parámetros del proceso son $\mu = \mu_0$ y $\sigma = \sigma_0$. Construir las curvas OC de la carta S^2 con límites de probabilidad. Interpretar los resultados

Recordemos que los límites de probabilidad de una carta de control S^2 se calculan usando la distribución chi-cuadrada ($UCL = \frac{\sigma_0^2}{n-1}\chi^2_{(1-\alpha/2;\ n-1)}$ y $LCL = \frac{\sigma_0^2}{n-1}\chi^2_{(\alpha/2;\ n-1)}$). Lo que nos interesa calcular es la probabilidad $P(LCL < S^2 < UCL|\sigma^2 = \sigma_1^2)$ y como la variable aleatoria definida como $\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}$ tiene distirbución χ^2 con $n-1$ grados de libertad podemos calcular la probai¿bilidad así:

$$
\begin{aligned}
P\left(LCL < \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} < UCL|\sigma^2 = \sigma_1^2\right) &= P\left(LCL < \frac{(n-1)S^2}{\sigma_1^2} < UCL\right) \\
&= P\left(\frac{(n-1)LCL}{\sigma_1^2} < S^2 < \frac{(n-1)UCL}{\sigma_1^2}\right) \\
&= P\left(\chi^2_{(n-1)} < \frac{(n-1)UCL}{\sigma_1^2}\right) - P\left(\chi^2_{(n-1)} < \frac{(n-1)LCL}{\sigma_1^2}\right)
\end{aligned}
$$

Y calculando estas probabilidades podremos graficar las curvas OC, con el fin de realizar esta operación de forma más sencilla se crea la siguiente función en R:

```
OCs2 = function(n = 5, sigma2_0 = 1, corrimiento = 1){
  UCL = sigma2_0/(n-1) * qchisq(0.975, df = n - 1)
  LCL = sigma2_0/(n-1) * qchisq(0.025, df = n - 1)
  beta = pchisq((n-1) * UCL / corrimiento , df = n - 1)
  - pchisq((n-1) * LCL / corrimiento , df = n - 1)
  return(beta)
}
```



Note que el incremento en el tamaño de los subgrupos racionales se realizo en múltiplos de 5 a cambio de obtener un gráfico más entendible y útil. Respecto al gráfico como tal, vemos que la carta S^2 es más efectiva para muestras lo suficientemente grandes y además de esto, vemos también que a partir de tamaños de alrededor de 50 no es realmente productivo intentar aumentar n pues la relación costo-beneficio podría no ser óptima. Finalmente, revisando el gráfico nos damos cuenta que para corrimientos $\sigma_1^2 = 1{,}5\ \sigma_0^2$ se obtiene una probabilidad de detectar el cambio en el siguiente subgrupo racional de más del 50 % para $n > 15$ por lo que sería recomensable usar esta carta para procesos en que se permitan tomar más de 15 muestras.

Ejercicio 3: Sea $X \sim N(\mu_0, \sigma_0)$ una característica de calidad. Construya la carta $\bar{X}$ para el monitoreo de la media del proceso. Genere 10 muestras de tamaño n provenientes de X, de tal modo que la media muestral de ninguna de ellas caiga fuera de los límites de control. A partir del undécimo momento de monitoreo se pide generar muestras del mismo tamaño n provenientes de una distribución normal con media $\mu_1 = \mu_0 + k\sigma_0$ y $\sigma_1 = \sigma_0$ (con $k = 1,0$) hasta que la carta emita una señal por primera vez. Si se asume que el proceso caracterizado por X es estable y que se desconoce el momento en el cual se produjo el incremento en el nivel medio, ¿en qué muestra ocurrió el cambio en la media del proceso más probablemente?

Ejercicio 4: Sea $X \sim N(\mu_0, \sigma_0)$ una característica de calidad. Se pide:

a. Mediante simulaciones, establezca el comportamiento del ARL de la Carta $\bar{X}$ con límites tres sigma para observaciones normales.

b. Genere 20 subgrupos racionales de tamaño $n = 3$ provenientes de X. Asúmase que el proceso es estable en cuanto a dispersión y con los subgrupos iniciales, construya la carta $\bar{X}$ como es habitual hasta verificar la estabilidad del proceso. Establezca el comportamiento del ARL para la carta que se obtiene del análisis de Fase I realizado.

c. Repetir lo indicado en el literal (b) con 50 subgrupos racionales de tamaño $n = 3$. Comente los resultados.

Ejercicio 5: Calcular el ARL de la Carta $\bar{X}$ mediante cadenas de Markov. Diseñar la carta con límites de control ubicados a tres desviaciones estándar de la media y dividiendo la región de control estadístico en franjas de ancho igual a una desviación estándar.