Taller 1 Control de calidad. 2024-I

Universidad Nacional de Colombia

Michel Mendivenson Barragán Zabala* Anderson Arley Quintero Morales†

2024-03-19

Ejercicio 1:

En la tabla que se muestra a continuación de este enunciado, se reportan los tres últimos dígitos de las mediciones de los diámetros interiores de un cilindro para la construcción de los motores de cierta marca comercial de automóvil. El régimen de la producción de los cilindros es tal que las muestras se pueden recolectar cada media hora, pero con tamaños de máximo cinco unidades. Es de interés establecer si el proceso se encontraba bajo control estadístico cuando se recolectaron las muestras, mediante el diseño de las **Cartas** $\bar{X}$ y R.

Muestra	x1	x2	x3	x4	x5
1	205	202	204	–	–
2	207	205	202	–	–
3	196	201	198	202	–
4	203	198	196	217	–
5	201	202	199	–	–
6	197	203	–	–	–
7	205	196	201	–	–
8	197	199	196	–	–
9	201	200	–	–	–
10	195	203	204	199	200
11	202	202	–	–	–
12	198	203	–	–	–
13	202	196	200	–	–
14	201	187	209	202	200
15	202	196	204	197	199
16	200	204	197	199	–
17	197	199	201	201	–
18	205	204	202	200	–
19	200	201	199	200	–
20	201	205	196	201	–
21	197	198	199	–	–
22	200	200	201	205	201
23	202	202	204	–	–
24	198	203	201	198	–
25	204	201	201	–	–
26	206	194	197	–	–
27	200	204	198	–	–
28	199	199	–	–	–
29	198	204	–	–	–
30	203	200	204	199	200

*Departamento de Estadística, mbarraganz@unal.edu.co
†Departamento de Estadística, aquinteromo@unal.edu.co

Muestra	x1	x2	x3	x4	x5
31	196	203	197	201	–
32	197	199	203	–	–
33	197	194	199	200	199
34	203	201	196	201	–

Como se puede observar en la tabla, no todas las muestras son del mismo tamaño por lo que se decide usar la metodología explicada en el capítulo *6.3.2. The x and s Control Charts with Variable Sample Size* del libro *Introduction to statistical quality control* del autor *Douglas C. Montgomery.* Donde se establece una carta cuyos límites superior e inferior varian de acuerdo al tamaño de la muestra n. Así pues, el autor define:

- La línea central de la carta:

$$\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^{m} \bar{x}_i}{m}$$

- La estimación de $\bar{R}$:

$$\bar{R} = \frac{MAXx_i - MINx_i}{m}$$

- El límite inferior de la carta R:

$$D_{3,i} * \bar{R}$$

Con $D_{3,i}$ corresponiente a la tabla de valores usando el tamaño de muestra correspondiente a cada una de ellas.

- El límite superior de la carta:

$$D_{4,i} * \bar{R}$$

Con $D_{4,i}$ corresponiente a la tabla de valores usando el tamaño de muestra correspondiente a cada una de ellas.

```r
D1$n_i = apply(X = D1, MARGIN = 1, FUN = function(x) sum(!is.na(x[1:5])))
D1$RM <- apply(D1, MARGIN = 1, FUN = function(x) max(x[1:5],na.rm = TRUE) - min(x[1:5], na.rm = TRUE))
D1$x_ = apply(X = D1, MARGIN = 1, FUN = function(x) mean(x[1:5], na.rm = TRUE))
```

De donde obtenemos las siguientes medias, varianzas y tamaños de muestra:

n_i	RM	x_
3	3	203.6667
3	5	204.6667
4	6	199.2500
4	21	203.5000
3	3	200.6667
2	6	200.0000
3	9	200.6667
3	3	197.3333
2	1	200.5000
5	9	200.2000
2	0	202.0000

n_i	RM	x_
2	5	200.5000
3	6	199.3333
5	22	199.8000
5	8	199.6000
4	7	200.0000
4	4	199.5000
4	5	202.7500
4	2	200.0000
4	9	200.7500
3	2	198.0000
5	5	201.4000
3	2	202.6667
4	5	200.0000
3	3	202.0000
3	12	199.0000
3	6	200.6667
2	0	199.0000
2	6	201.0000
5	5	201.2000
4	7	199.2500
3	6	199.6667
5	6	197.8000
4	7	200.2500

Y calculando los valores de $\bar{x}$ y $\bar{R}$:

```
# Cálculo del valor de la línea central
XBarra = mean(D1$x_)

# Cálculo del ancho del intervalo
RBarra = mean(D1$RM)
```

```
## El valor de X barra estimado es: 200.4877
```

```
## El valor de S barra estimado es: 6.058824
```

```
D4n2 = 3.267; D4n3 = 2.575; D4n4 = 2.282; D4n5 = 2.115

D_4 = c(D4n2,D4n3, D4n4, D4n5)

plot(y =(D1$RM), x = 1:34, type = 'b', col = 'darkblue', main = ('Carta R'),
     ylab = 'Rangos', xlab = 'Número de muestra',
     ylim = c(0,25), cex.main = 2)
abline(h = RBarra, col = 'darkgray', lwd = 1)


LimInf = seq(from = 0.5, by = 1, length.out = 34)
LimMay = seq(from = 1.5, by = 1, length.out = 34)

UCL = D_4[D1$n_i - 1] * RBarra

segments(x0 = LimInf + 0.1, x1 = LimMay - 0.1, y0 = UCL, y1 = UCL, col = 'darkblue', lwd = 1.5)
```

Como obtenemos dos puntos que se salen de los limites de control procedemos a eliminar los puntos que se salen de los limites y volvemos a construir la carta R.

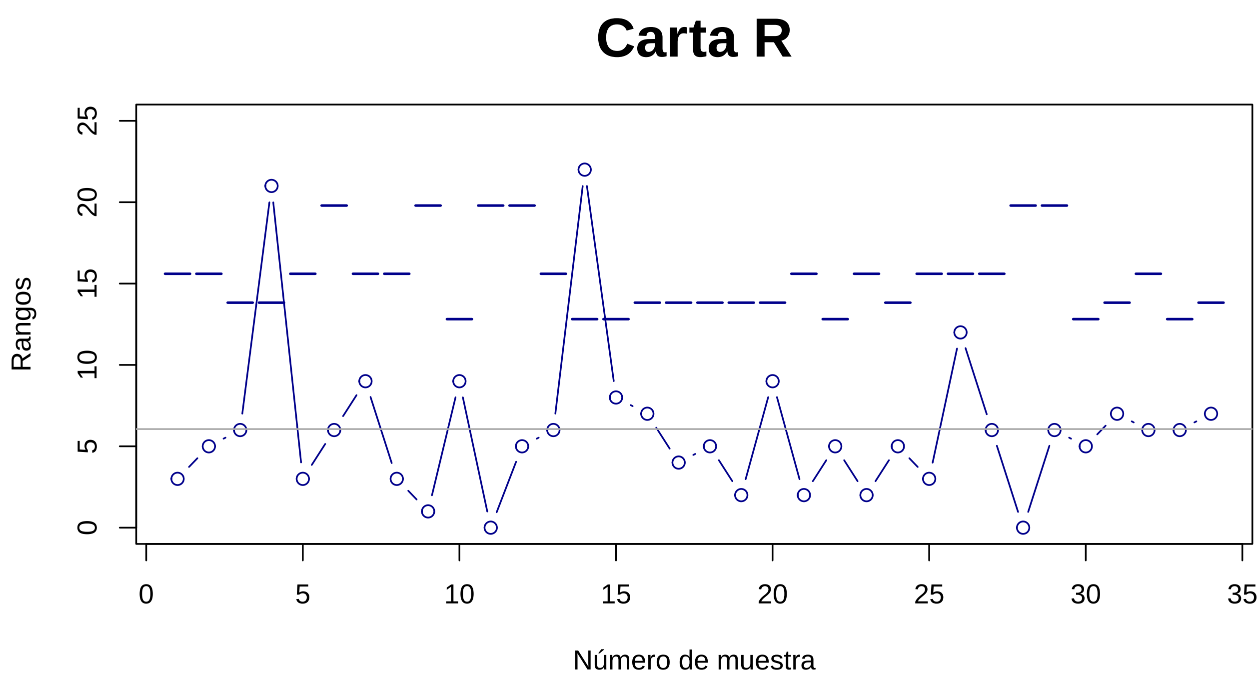


Figure 1: Carta R para tamaño de muestra variable (Ejemplo cilindros)

```
```r
D2=D1
D2 <- subset(D2, !(row.names(D2) %in% c("4", "14")))
D2$n_i = apply(D2, MARGIN = 1, FUN = function(x) sum(!is.na(x[1:5])))
D2$RM <- apply(D2, MARGIN = 1, FUN = function(x) max(x[1:5],na.rm = TRUE) - min(x[1:5], na.rm = TRUE))
D2$x_ = apply(X = D2, MARGIN = 1, FUN = function(x) mean(x[1:5], na.rm = TRUE))
```
```

```r
# Cálculo del valor de la línea central
XBarra = mean(D2$x_)

# Cálculo del ancho del intervalo
RBarra = mean(D2$RM)
```

```
## El valor de X barra estimado es: 200.4151
```

```
## El valor de S barra estimado es: 5.09375
```

```r
plot(y =(D2$RM), x = 1:32, type = 'b', col = 'darkblue', main = ('Carta R'),
     ylab = 'Rangos', xlab = 'Número de muestra',
     ylim = c(0,25), cex.main = 2)
abline(h = RBarra, col = 'darkgray', lwd = 1)


LimInf = seq(from = 0.5, by = 1, length.out = 34)
LimMay = seq(from = 1.5, by = 1, length.out = 34)

UCL = D_4[D2$n_i - 1] * RBarra

segments(x0 = LimInf + 0.1, x1 = LimMay - 0.1, y0 = UCL, y1 = UCL, col = 'darkblue', lwd = 1.5)
```

Ahora como vemos que ninguno de los puntos se sale de los limites de control procedemos a realizar la carta $\bar{X}$

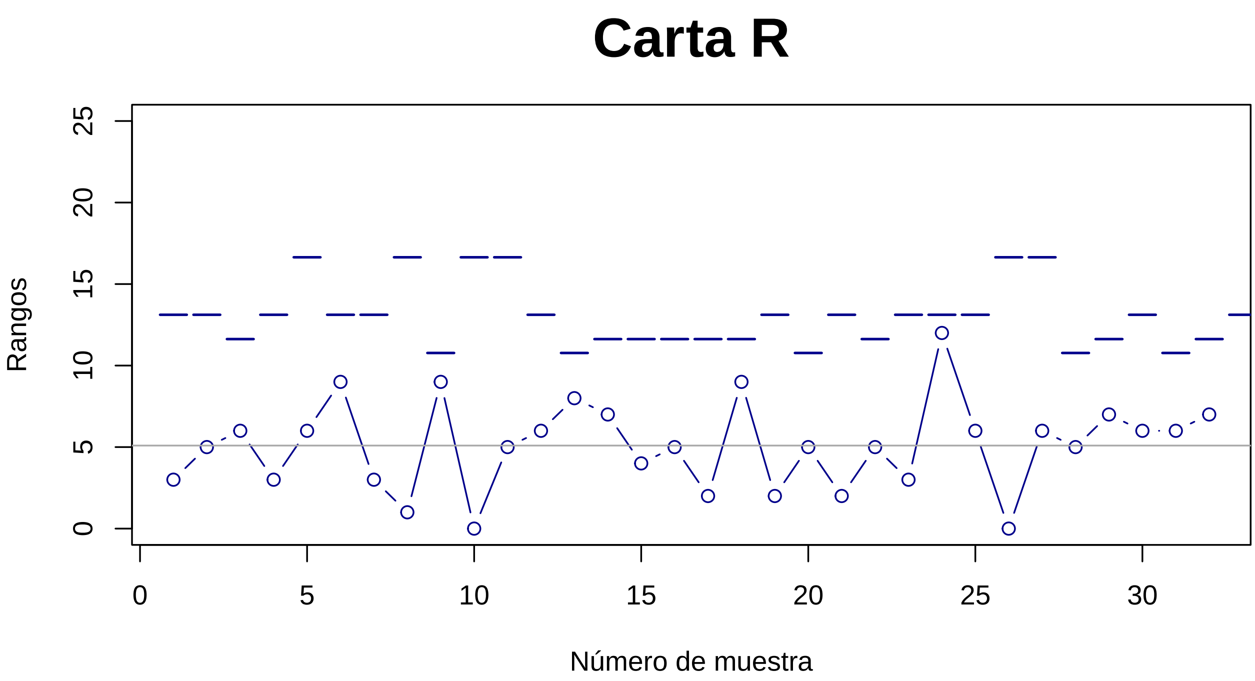


Figure 2: Carta R para tamaño de muestra variable (Ejemplo cilindros)

```
A2n2 = 1.880
A2n3 = 1.023
A2n4 = 0.729
A2n5 = 0.577

A = c(A2n2,A2n3, A2n4, A2n5)
```

```
library(latex2exp)
plot(y = D2$x_, x = 1:32, type = 'b', col = 'darkblue',
     main = TeX('Carta $\\bar{X}$'), ylab = 'Media muestral', xlab = 'Número de muestra',
     ylim = c(min(XBarra - A * RBarra),max(XBarra + A * RBarra)), cex.main = 2)
abline(h = XBarra, col = 'darkgray', lwd = 1)


LimInf = seq(from = 0.5, by = 1, length.out = 34)
LimMay = seq(from = 1.5, by = 1, length.out = 34)

UCL = XBarra +  A[D2$n_i - 1] * RBarra
LCL = XBarra -  A[D2$n_i - 1] * RBarra

segments(x0 = LimInf+0.1, x1 = LimMay-0.1, y0 = UCL, y1 = UCL, col = 'darkblue', lwd = 1.5)
segments(x0 = LimInf+0.1, x1 = LimMay-0.1, y0 = LCL, y1 = LCL, col = 'darkblue', lwd = 1.5)
```

Ahora vemos que en la carta $\bar{X}$ no hay ningun punto que se salga fuera de los limites de control por lo que pasamos a el monitoreo en fase 2.

Hablando de este método para construir cartas de control, se menciona que otra aproximación posible es tomar $n = \bar{n}$, esta alternativa funciona bien sobre todo si los tamaños de las muestras no varían demasiado y permite una mejor visualización de la carta. Sin embargo, la alternativa con los límites variando permite tener en cuenta el tamaño de la muestra y por ende tener menos falsas alarmas. En términos prácticos, en cuanto a presentaciones es mejor la primera alternativa, pero en términos técnicos es más adecuada la técnica

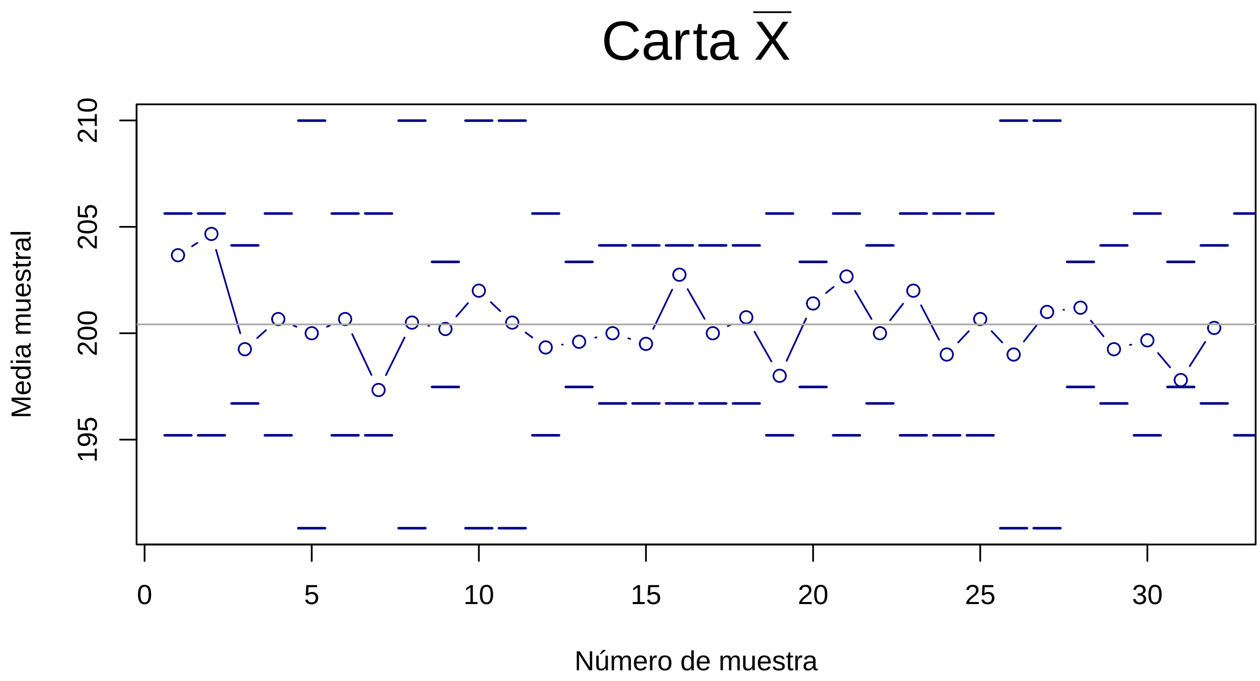


Figure 3: Carta X barra para tamaño de muestra variable (Ejemplo cilindros)

aquí presentada. Además, estas cartas también son más sensibles a cambios pequeños pues los límites se ajustarán para detectar estas variaciones más rápidamente.

Ejercicio 2:

En primer lugar importamos la base de datos, y construimos la carta $\bar{x}$ para el nivel medio teniendo en cuenta los valores de μ_0 y σ_0

```
Punto2 <- read.csv2("Ejercicio 1 Taller 1.csv", sep="")
Punto2$X_barra <- rowMeans(Punto2[, c("X1", "X2", "X3", "X4", "X5")])
library(ggplot2)
mu_0=20
UCL=20+(6*(3/sqrt(22)));UCL
```

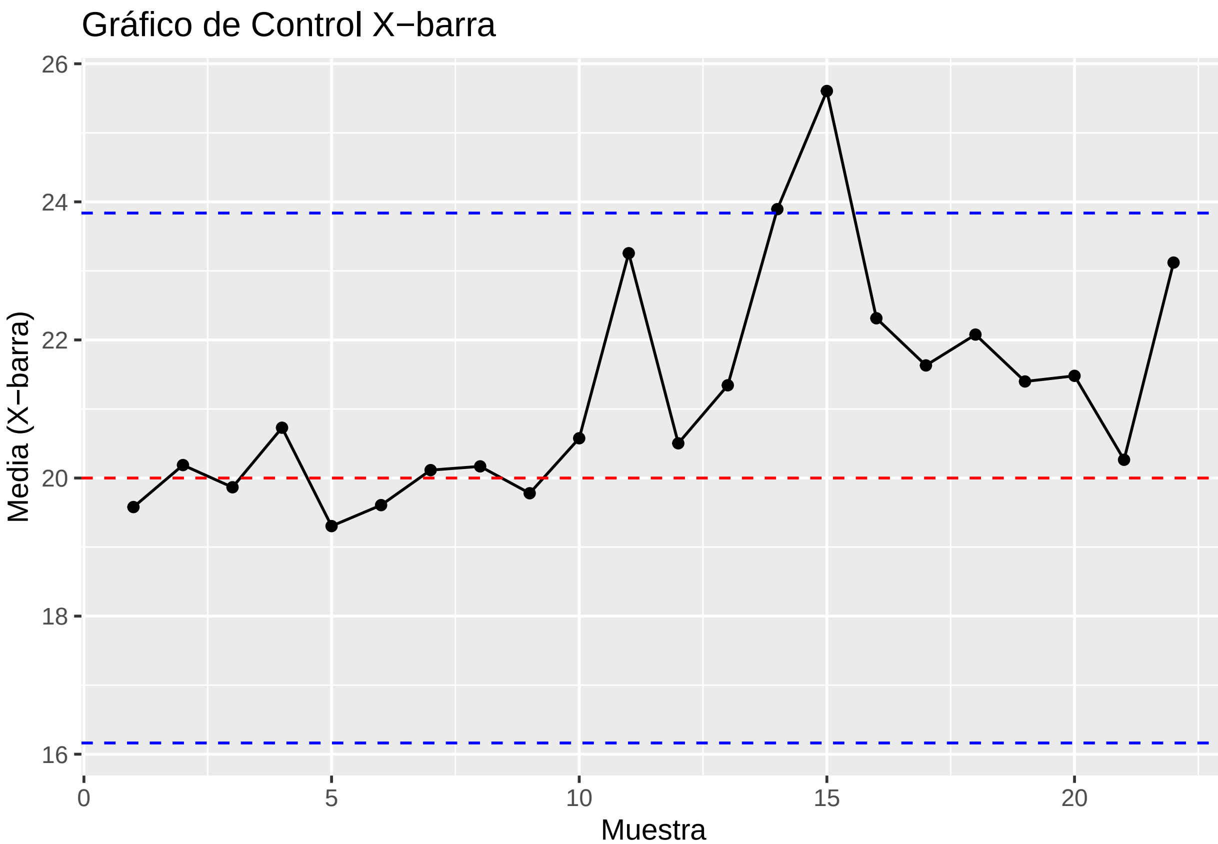
```
## [1] 23.83761
```

```
LCL=20-(6*(3/sqrt(22)));LCL
```

```
## [1] 16.16239
```

Y asi obtenemos los limites y linea central correspondiente a la carta, ahora procedemos a graficarla:

```
ggplot(Punto2, aes(x = MUESTRA, y = X_barra)) +
  geom_line() +
  geom_point() +
  geom_hline(yintercept = 20, linetype = "dashed", color = "red") +
  geom_hline(yintercept = 20+(6*(3/sqrt(22))), linetype = "dashed", color = "blue") +
  geom_hline(yintercept = 20-(6*(3/sqrt(22))), linetype = "dashed", color = "blue") +
  labs(x = "Muestra", y = "Media (X-barra)", title = "Gráfico de Control X-barra")
```



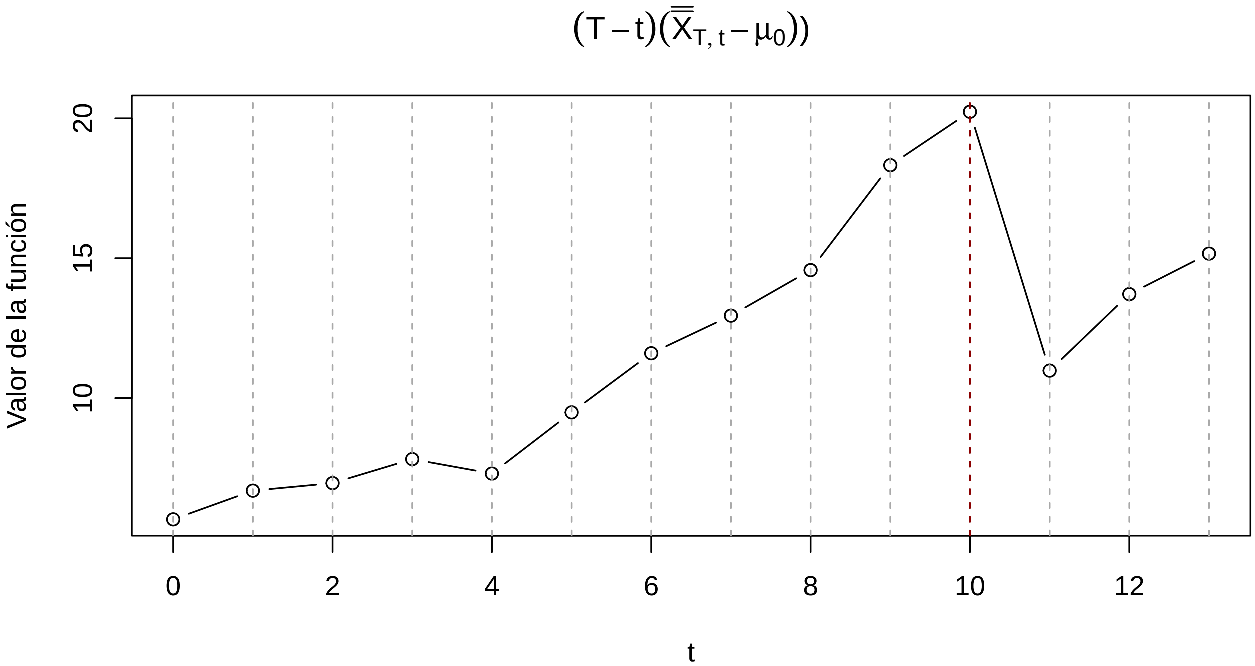
Ahora bien, la carta evidentemente es de un proceso que se salió de control y dió señal, pero ¿En qué momento se salió de control el proceso puede ser respondido maximizando la función $\underset{0\leq t<T}{\text{argmax}}\left[(T-t)(\bar{\bar{X}}_{T,t}-\mu_0)^2\right]$ para t siendo T el momento en que el proceso se salió de control . Implementando en R:

```r
medias = Punto2$X_barra[1:14]

funcion = c()
for (i in 0:(length(medias)-1)){
  TotalTime = length(medias)
  funcion = c(funcion, (TotalTime - i) * (1/(TotalTime - i) * sum(medias[(i+1):TotalTime]) - mu_0)^2)
}
```

Lo que finalmente nos lleva a la siguiente gráfica:

```r
library(latex2exp)
plot(x = 0:(TotalTime -1), y = funcion, type = 'b',
       ylab = 'Valor de la función', xlab = 't',
       main = TeX('$(T - t) (\\bar{\\bar{X}}_{T,t} - \\mu_0)^2$'))
abline(v = 0:(TotalTime-1), col = 'darkgray', lty = 2)
abline(v = 10, col = 'darkred', lty = 2)
```



Con base en el grafico podemos decir que el proceso se sale de control a partir de la muestra numero 11 pues es para la muestra que se maximiza la función y finalmente la magnitud del cambio es:

```
Punto2$X_barra[11] - mu_0
```

```
## [1] 3.256
```