

---

# CONTROL ESTADÍSTICO DE CALIDAD

---

ENTREGA 1. 2024-II

**Michel Mendivenson Barragán Zabala**  
Departamento de Estadística  
Universidad Nacional de Colombia

mbarraganz@unal.edu.co

**Juan Sebastián Huertas Pirajan**  
Departamento de Estadística  
Universidad Nacional de Colombia

juhuertasp@unal.edu.co

**Diego Andres Paez Molina**  
Departamento de Estadística  
Universidad Nacional de Colombia

dpaezm@unal.edu.co

17 de marzo de 2024

**Ejercicio 1:** Sea  $X \sim N(\mu, \sigma)$  una característica de calidad. Mediante simulaciones, establezca el comportamiento del  $ARL$  (en control y fuera de él) de las Cartas  $R$  y  $S$  para observaciones normales con límites  $3\sigma$  y muestras de tamaño (a)  $n = 3$  y (b)  $n = 10$  ¿Qué regularidades observa?

Para la implementación de la solución, se creará en R una función que nos permita simular cuántas veces querramos el momento en que un proceso da una alerta (bien sea verdadera o falsa) con argumentos que nos permitan modificar tanto el tamaño de muestra  $n$  como los límites de la carta de control y su línea central para cada una de las cartas. Las funciones se definen como sigue:

```
RunLengthS = function(mu = 0, sigma = 1, CorrimientoSigma = 1, n = 3, m = 1000){
  S = c() ; c4 = sqrt(2/(n-1)) * gamma(n/2) / gamma((n-1)/2); CLs = c4 * sigma;
  LCL = sigma * (c4 - 3 * sqrt(1 - c4**2)); UCL = sigma * (c4 + 3 * sqrt(1 - c4**2))

  pb = txtProgressBar(min = 0, max = m, style = 3) # Barra de progreso

  i = 0
  while (length(S) < m){
    s = sd(rnorm(n, mu, CorrimientoSigma))
    i = i + 1
    if (s < LCL | s > UCL){
      S = c(S, i)
      i = 0; setTxtProgressBar(pb, length(S))
    }
  }
  return(S)}

RunLengthR = function(mu = 0, sigma = 1, CorrimientoSigma = 1, n = 3, m = 1000){
  # Constantes carta R
  d3 = c(0.853, 0.888, 0.880, 0.864, 0.848, 0.833, 0.820, 0.808, 0.797, 0.787, 0.778, 0.770,
        0.763, 0.756, 0.750, 0.744, 0.739, 0.734, 0.729, 0.724, 0.72, 0.716, 0.712, 0.708)
  d2 = c(1.128, 1.693, 2.059, 2.326, 2.534, 2.704, 2.847, 2.970, 3.078, 3.173, 3.258, 3.336,
        3.407, 3.472, 3.532, 3.588, 3.640, 3.689, 3.735, 3.778, 3.819, 3.858, 3.895, 3.931)
  d3 = d3[n]; d2 = d2[n]; R = c(); UCL = (d2 + 3 * d3) * sigma; LCL = (d2 - 3 * d3) * sigma

  pb = txtProgressBar(min = 0, max = m, style = 3) # Barra de progreso
```

```

i = 0
while(length(R) < m){
  r = diff(range(rnorm(n, mu, CorrimientoSigma)))
  i = i + 1
  if (r < LCL | r > UCL){
    R = c(R, i)
    i = 0; setTxtProgressBar(pb, length(R))
  }
}
return(R)}

```

Tenga en cuenta que la salida de la función es un vector con los valores de los tiempos en que se detecto una señal dados los límites y la línea central correspondientes al proceso en control (El proceso en control se definió con  $\mu = 0$ ,  $\sigma = 1$  y además para cada uno se tomaron  $m = 1000$  muestras de tiempos en que se generó una alerta). Los resultados para diferentes corrimientos se grafican a continuación:

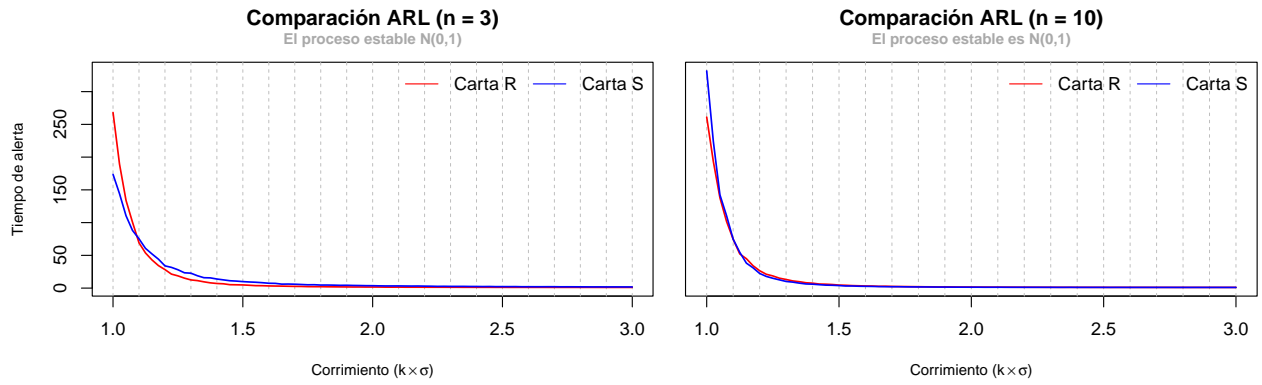


Figura 1: Comparación de ARL entre cartas R y S para  $n = 3, 10$ .

Se tomaron 81 corrimientos a intervalos regulares desde 1 hasta 3 por lo que una tabla no sería útil para analizar la información. Para  $n = 3$  a la carta  $R$  le toma, en promedio, más tiempo para producir falsas alarmas para un proceso estable mientras que para los corrimientos de  $1,1 \times \sigma$  en adelante, la carta  $R$  también tiende a tardar menos en dar una alarma verdadera. Por otro lado, la carta  $S$  para un tamaño de subgrupos racionales de 10 tarda en promedio más tiempo que la carta  $R$  para dar falsas alarmas y parece que hay una pequeña diferencia en cuanto a verdaderas alarmas a favor de la carta  $S$ .

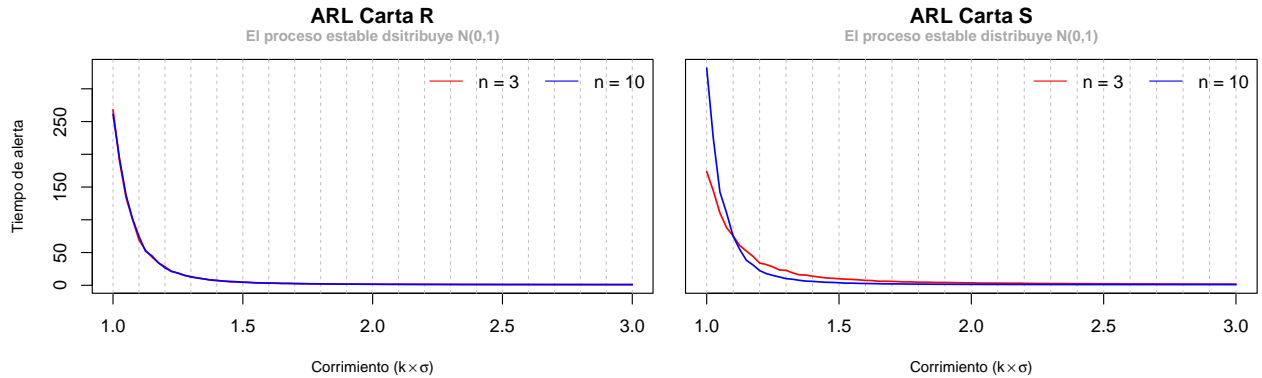


Figura 2: Comparación de ARL para cada carta con  $n = 3, 10$

Además vemos que la carta  $R$  tiene un comportamiento más estable respecto al cambio del tamaño de los subgrupos racionales mientras que  $S$  tiende a comportarse mejor a medida que este aumenta debido a, en promedio, presentar una menor frecuencia de falsas alarmas como mayor frecuencia de alarmas verdaderas.

**Ejercicio 2:** Sea  $X \sim N(\mu, \sigma)$  una característica de calidad. Se sabe que los valores objetivo de los parámetros del proceso son  $\mu = \mu_0$  y  $\sigma = \sigma_0$ . Construir las curvas OC de la carta  $S^2$  con límites de probabilidad. Interpretar los resultados

**Ejercicio 3:** Sea  $X \sim N(\mu_0, \sigma_0)$  una característica de calidad. Construya la carta  $\bar{X}$  para el monitoreo de la media del proceso. Genere 10 muestras de tamaño  $n$  provenientes de  $X$ , de tal modo que la media muestral de ninguna de ellas caiga fuera de los límites de control. A partir del undécimo momento de monitoreo se pide generar muestras del mismo tamaño  $n$  provenientes de una distribución normal con media  $\mu_1 = \mu_0 + k\sigma_0$  y  $\sigma_1 = \sigma_0$  (con  $k = 1, 0$ ) hasta que la carta emita una señal por primera vez. Si se asume que el proceso caracterizado por  $X$  es estable y que se desconoce el momento en el cual se produjo el incremento en el nivel medio, ¿en qué muestra ocurrió el cambio en la media del proceso más probablemente?

**Ejercicio 4:** Sea  $X \sim N(\mu_0, \sigma_0)$  una característica de calidad. Se pide:

- Mediante simulaciones, establezca el comportamiento del ARL de la Carta  $\bar{X}$  con límites tres sigma para observaciones normales.
- Genere 20 subgrupos racionales de tamaño  $n = 3$  provenientes de  $X$ . Asúmase que el proceso es estable en cuanto a dispersión y con los subgrupos iniciales, construya la carta  $\bar{X}$  como es habitual hasta verificar la estabilidad del proceso. Establezca el comportamiento del ARL para la carta que se obtiene del análisis de Fase I realizado.
- Repetir lo indicado en el literal (b) con 50 subgrupos racionales de tamaño  $n = 3$ . Comente los resultados.

**Ejercicio 5:** Calcular el ARL de la Carta  $\bar{X}$  mediante cadenas de Markov. Diseñar la carta con límites de control ubicados a tres desviaciones estándar de la media y dividiendo la región de control estadístico en franjas de ancho igual a una desviación estándar.