



UNIVERSIDAD
NACIONAL
DE COLOMBIA

Facultad de Ciencias
Departamento de Estadística

Caso de Estudio II.
Prueba Saber 11 2022-2:
Una perspectiva multinivel

Estadística Bayesiana
Docente:
Juan Camilo Sosa Martinez

Autores

Michel Mendivenson Barragan
`mbarraganz@unal.edu.co`
Sebastian Gil Sanchez
`ggil@unal.edu.co`

Octubre 2023

Prueba Saber 11 2022.2: Una perspectiva multinivel

La base de datos **Saber 11 2022-2.csv** que se encuentra disponible en la página web del curso, corresponde a los resultados de la prueba Saber 11 del segundo semestre de 2022. Los datos son de carácter público y se pueden descargar de manera gratuita en este [enlace](#).

De acuerdo con la Guía de *Usuario examen Saber 11*, el examen Saber 11 “es una evaluación estandarizada realizada semestralmente por el Icfes, que tiene como objetivos: servir de criterio para la entrada de estudiantes a las Instituciones de Educación Superior, monitorear la calidad de la formación que ofrecen los establecimientos de educación media y producir información para la estimación del valor agregado de la educación superior.”

$$PG = 5 \cdot \frac{5 \cdot M + 3 \cdot L + 3 \cdot C + 3 \cdot S + 1 \cdot I}{13},$$

donde M, L, C, S e I son los puntajes en las pruebas de Matemáticas, Lectura, Ciencias, Sociales, e Inglés, respectivamente. Por lo tanto, el puntaje global está diseñado de forma que asuma valores entre 0 puntos y 500 puntos, con una media de 250 puntos y una desviación estándar de 50 puntos.

El objetivo de este trabajo es ajustar modelos multinivel Bayesianos, tomando como datos de entrenamiento el **puntaje global** de los estudiantes, con el fin de modelar los resultados de la prueba a nivel nacional por **municipio y departamento**, para:

- Establecer un *ranking* y una segmentación probabilística de los departamentos según su puntaje global promedio.
- Establecer un *ranking* y una segmentación probabilística de los municipios según su puntaje global promedio.
- Desarrollar un modelo predictivo de la **incidencia de la pobreza monetaria** a partir del puntaje global promedio por departamento.
- Desarrollar un modelo predictivo de la **cobertura neta secundaria** a partir de del puntaje global promedio por municipio.

Tratamiento de datos

Para ajustar los modelo propuestos, se consideran únicamente los estudiantes con:

- Nacionalidad colombiana.
- Residencia en Colombia.
- Proceso de investigación en el Icfes en estado de "Publicar".
- Ubicación del colegio no es San Andrés.
- Sin datos faltantes en la ubicación del colegio por municipio, la ubicación del colegio por departamento y el puntaje global.

La base de datos conformada de esta forma contiene **525061 registros**.

Modelos¹

Para este trabajo se ajustarán inicialmente 5 modelos con los 525061 registros:

■ M_1 : Modelo normal

- $y_i | \theta, \sigma^2 \stackrel{ind}{\sim} N(\theta, \sigma^2)$ (Distribución muestral)
- Distribución previa:

$$\begin{aligned} \circ \theta &\sim N(\mu_0, \gamma_0^2) & \circ \sigma^2 &\sim GI\left(\frac{\nu}{2}, \frac{\nu_0 \sigma_0^2}{2}\right) \end{aligned}$$

para $i = 1, 2, \dots, n$ donde y_i denota el puntaje global del estudiante i , $N(\theta, \sigma^2)$ la distribución normal con media θ y varianza σ^2 , $GI(\alpha, \beta)$ la distribución Gamma-Inversa con media $\frac{\beta}{\alpha - 1}$ y varianza $\frac{\beta^2}{(\alpha - 1)^2(\alpha - 2)}$; y los hiperparámetros del modelo son $\mu_0, \gamma_0^2, \nu_0, \sigma_0^2$.

■ M_2 : Modelo normal con medias específicas por departamento

- $y_{i,j} | \theta_j, \sigma^2 \stackrel{ind}{\sim} N(\theta_j, \sigma^2)$ (Distribución muestral)
- Distribución previa:

$$\begin{aligned} \circ \theta_j | \mu, \tau^2 &\sim N(\mu, \tau^2) & \circ \tau^2 &\sim GI\left(\frac{\eta_0}{2}, \frac{\eta_0 \tau_0^2}{2}\right) \\ \circ \mu &\sim N(\mu_0, \gamma_0^2) & \circ \sigma^2 &\sim GI\left(\frac{\nu_0}{2}, \frac{\nu_0 \sigma_0^2}{2}\right) \end{aligned}$$

para $i = 1, 2, \dots, n_j$ y $j = 1, 2, \dots, m$ donde $y_{i,j}$ denota el puntaje global del estudiante i en el departamento j y los hiperparámetros del modelo son $\mu_0, \gamma_0^2, \eta_0, \tau_0^2, \nu_0, \sigma_0^2$.

■ M_3 : Modelo normal con medias y varianzas específicas por departamento

- $y_{i,j} | \theta_j, \sigma_j^2 \stackrel{ind}{\sim} N(\theta_j, \sigma_j^2)$ (Distribución muestral)
- Distribución previa:

$$\begin{aligned} \circ \theta_j | \mu, \tau^2 &\sim N(\mu, \tau^2) & \circ \sigma_j^2 | \nu, \sigma^2 &\sim GI\left(\frac{\nu}{2}, \frac{\nu \sigma^2}{2}\right) \\ \circ \mu &\sim N(\mu_0, \gamma_0^2) & \circ \nu &\text{es constante.} \\ \circ \tau^2 &\sim GI\left(\frac{\eta_0}{2}, \frac{\eta_0 \tau_0^2}{2}\right) & \circ \sigma^2 &\sim G\left(\frac{\alpha_0}{2}, \frac{\beta_0}{2}\right) \end{aligned}$$

donde $GI(\alpha, \beta)$ representa la distribución Gamma con media $\frac{\alpha}{\beta}$ y varianza $\frac{\alpha}{\beta^2}$ y $\mu_0, \gamma_0^2, \eta_0, \tau_0^2, \nu, \alpha_0, \beta_0$ son los hiperparámetros del modelo.

¹La información sobre las distribuciones condicionales completas de cada uno de los modelos se encuentra consignada en el [anexo A](#).

■ **M_4 : Modelo normal con medias específicas por municipio y departamento**

- $y_{i,j,k} | \zeta_{j,k}, \kappa^2 \stackrel{ind}{\sim} N(\zeta_{j,k}, \kappa^2)$ (Distribución muestral)
- Distribución previa:
 - $\zeta_{j,k} | \theta_k, \sigma^2 \sim N(\theta_k, \sigma^2)$
 - $\theta_k | \mu, \tau^2 \sim N(\mu, \tau^2)$
 - $\mu \sim N(\mu_0, \gamma_0^2)$
 - $\tau^2 \sim GI\left(\frac{\eta_0}{2}, \frac{\eta_0 \tau_0^2}{2}\right)$
 - $\sigma^2 \sim GI\left(\frac{\nu_0}{2}, \frac{\nu_0 \sigma_0^2}{2}\right)$
 - $\kappa^2 \sim GI\left(\frac{\xi_0}{2}, \frac{\xi_0 \kappa_0^2}{2}\right)$

donde $i = 1, 2, \dots, n_{j,k}$, $j = 1, 2, \dots, n_k$, $k = 1, 2, \dots, m$, $y_{i,j,k}$ representa el puntaje global del estudiante i en el municipio j en el departamento k y $\xi_0, \kappa_0^2, \mu_0, \gamma_0^2, \eta_0, \tau_0^2, \nu_0, \sigma_0^2$ son los hiperparámetros del modelo.

■ **M_5 : Modelo normal con medias específicas por municipio y departamento**

- $y_{i,j,k} | \zeta_{j,k}, \kappa^2 \stackrel{ind}{\sim} N(\zeta_{j,k}, \kappa^2)$ (Distribución muestral)
- Distribución previa:
 - $\zeta_{j,k} | \theta_k, \sigma_k^2 \sim N(\theta_k, \sigma_k^2)$
 - $\theta_k | \mu, \tau^2 \sim N(\mu, \tau^2)$
 - $\mu \sim N(\mu_0, \gamma_0^2)$
 - $\tau^2 \sim GI\left(\frac{\eta_0}{2}, \frac{\eta_0 \tau_0^2}{2}\right)$
 - $\sigma_k^2 | \nu, \sigma^2 \sim GI\left(\frac{\nu}{2}, \frac{\nu \sigma^2}{2}\right)$
 - ν es constante.
 - $\sigma^2 \sim G\left(\frac{\alpha_0}{\beta-0}\right)$
 - $\kappa^2 \sim GI\left(\frac{\xi_0}{2}, \frac{\xi_0 \kappa_0^2}{2}\right)$

donde $\xi_0, \kappa_0^2, \mu_0, \gamma_0^2, \eta_0, \tau_0^2, \nu, \alpha_0, \beta_0$ son los hiperparámetros del modelo.

Desarrollo metodológico ²

1. Presente mapas de Colombia por departamentos donde despliegue los valores de la media muestral del puntaje global y los valores de la **incidencia de la pobreza monetaria en 2018**.

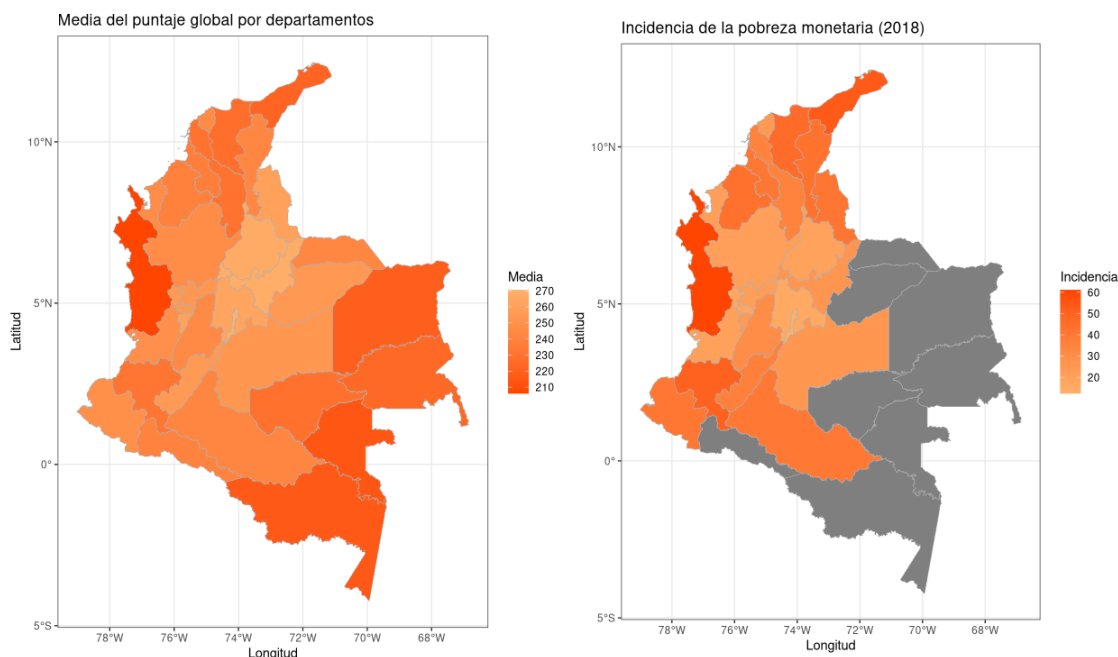


Figura 1: Media del puntaje global (Icfes 2022-I) vs Incidencia de la pobreza monetaria en 2018

Considerando que la Incidencia de la Pobreza Monetaria (IPM) se define como el porcentaje de la población que tiene un ingreso per cápita por debajo de la línea de pobreza y tomando como base el mapa coroplético presentado, se puede argumentar que parece existir una relación entre el IPM del año 2018 y la media del puntaje global de la prueba Saber Icfes 11 (2022). En los lugares con una media del puntaje global más baja, se observa un IPM más elevado. Esto sugiere que en los departamentos con un IPM bajo, existe, en promedio, un mejor rendimiento general en la prueba.

²Para información más detallada sobre el algoritmo usado para ajustar el muestreador de Gibbs vea el [anexo C](#).

2. Presente mapas de Colombia por municipios donde despliegue los valores de la media muestral del puntaje global y la **cobertura neta secundaria en 2022**.

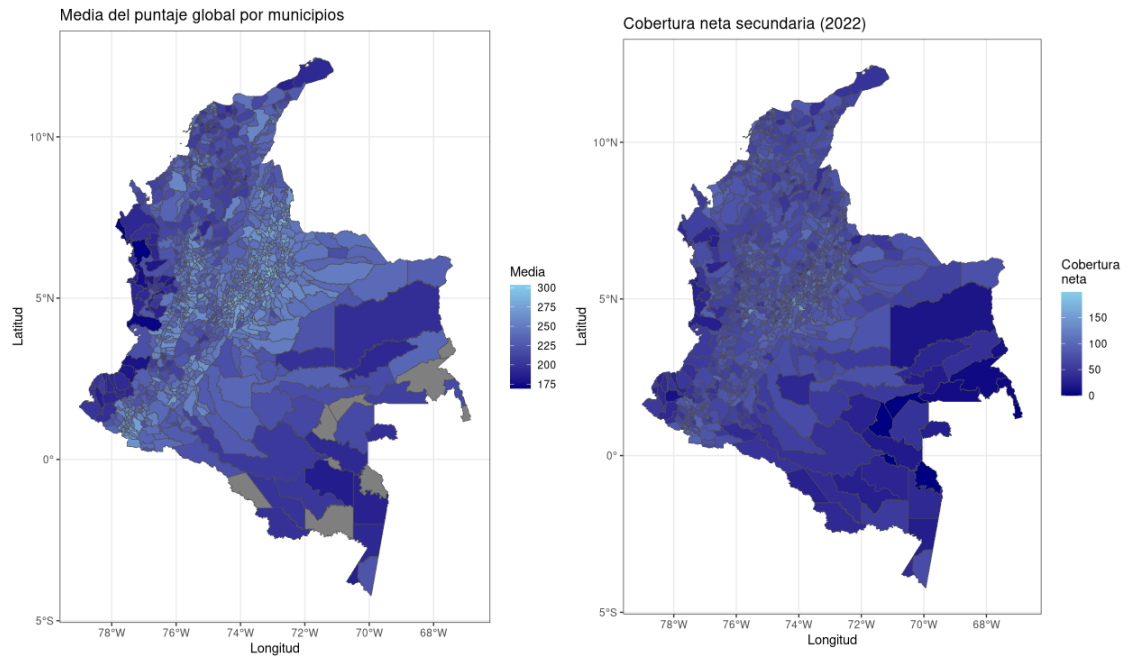


Figura 2: Media del puntaje global (Icfes 2022-I) vs Cobertura neta secundaria (2022)

De la misma forma que en el mapa anterior se exhibía cierta relación entre la media del puntaje global de la prueba con la incidencia de pobreza la pobreza monetaria, los mapas coroplético presentados aquí muestra que en zonas como el municipio de Cumaribo en el departamento de Vichada donde la cobertura neta secundaria es baja en relación al resto de municipios del país el puntaje global medio también tiende a ser bajo. Entiéndase la cobertura neta secundaria como los estudiantes matriculados en el sistema educativo en etapa secundaria sin incluir a los estuantes con extra edad.

3. Presentar el DAG (*Directed Acyclic Graph*) de los modelos M_2 , M_3 , M_4 y M_5

Gráficos acíclicos dirigidos

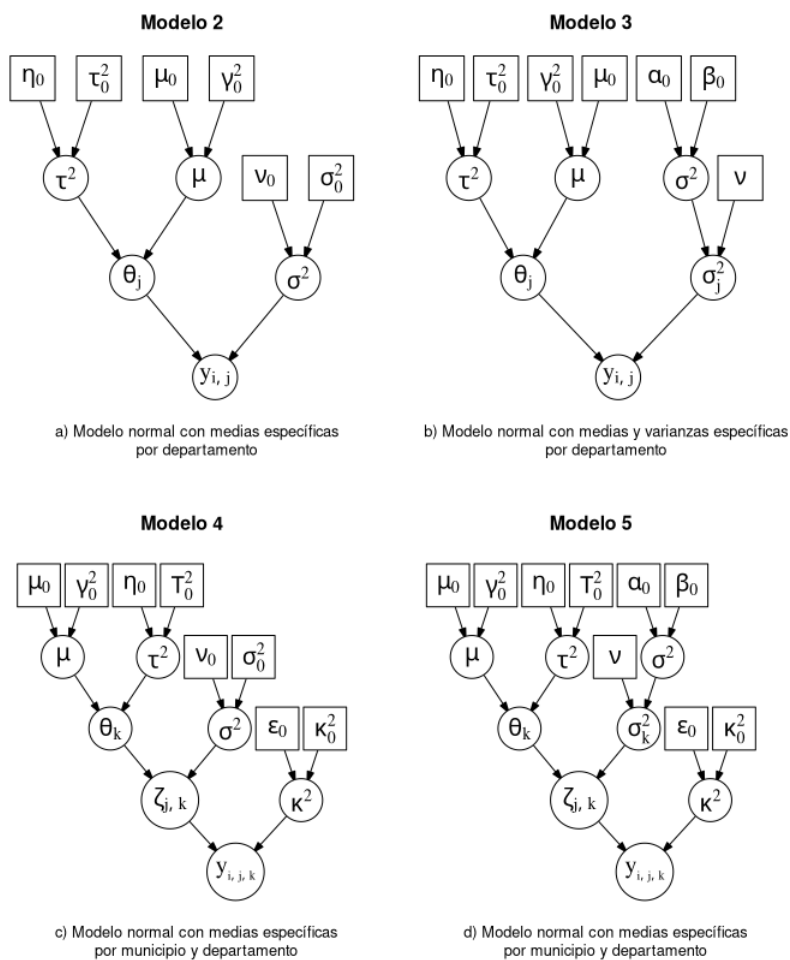


Figura 3: Representación DAG de los modelos

4. Dibujar la cadena de log-verosimilitud de M_2 , M_3 , M_4 y M_5 .

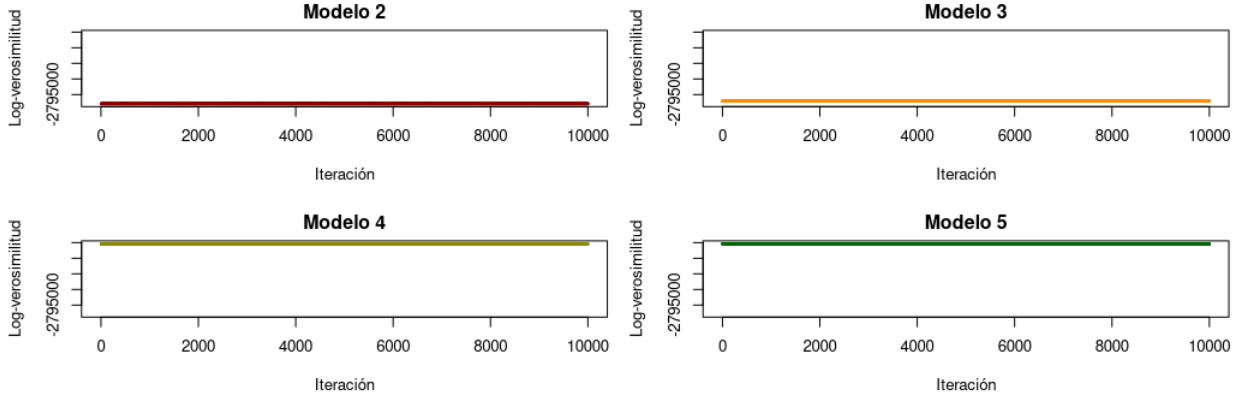


Figura 4: Cadenas de Log-verosimilitud por modelo

A lo largo de 10.000 iteraciones, se ha observado que las cadenas de los 4 modelos permanecen estables, lo que sugiere que el muestreador de Gibbs está explorando de manera efectiva el espacio de parámetros. Además, se ha constatado una convergencia en las cadenas, lo que nos lleva a concluir que las muestras generadas a partir de la distribución posterior serán estimaciones confiables de los parámetros. Por otra parte, los mejores modelos son aquellos con más parámetros siendo el 4 y el 5 los mejores en términos de la log-verosimilitud.³

5. Calcular el DIC y el WAIC de cada modelo.

	pDIC	DIC	pWAIC	WAIC
Modelo 1	1.986433	5636785	1.716754	5636785
Modelo 2	32.856347	5595932	31.080767	5595930
Modelo 3	63.423157	5594247	59.554916	5594243
Modelo 4	1001.970860	5551814	790.618132	5551603
Modelo 5	989.116552	5551802	780.864368	5551594

Tabla 1: Criterios de información DIC y WAIC.

Tanto el modelo 4 como el modelo 5 muestran un DIC y WAIC muy similares, y ambos son los más bajos entre todos los modelos considerados. Esto sugiere que son los modelos más adecuados y se ajustan de manera más óptima a los datos que los demás modelos considerados. Podríamos decir que entre más parámetros tengamos en cuenta en el modelo, mejor ajuste tendremos en el modelo siendo el mejor de ellos el modelo 5.

6. Calcular la media posterior y el intervalo de credibilidad al 95 % basado en percentiles de μ de cada modelo.⁴

A medida que el modelo incorpora más parámetros, se observa una disminución en el parámetro μ y un aumento en la amplitud del intervalo de confianza del 95 %. A la luz de los hallazgos an-

³Sin embargo, en términos de verosimilitud no parece haber un mejor modelo entre el 5 y el 4 como se evidencia en [anexo B](#).

⁴En el modelo 1 como tal no existe un parámetro μ y por eso se usa para ese modelo se usa el parámetro θ en esta tabla

	2.5 %	97.5 %	μ
Modelo 1	250.1328	250.4154	250.2740
Modelo 2	235.5614	249.0468	242.2726
Modelo 3	240.5734	244.5180	242.5267
Modelo 4	225.6614	239.1967	232.4660
Modelo 5	225.7542	239.3175	232.4876

Tabla 2: Estimación μ dada por cada modelo.

teriores, se podría inferir una mayor confiabilidad en los resultados proporcionados por el Modelo 5.

- Usando M_5 , hacer el *ranking* de los departamentos basado en las medias específicas de los departamentos. Comparar los resultados con un *ranking* frecuentista basado en la media muestral.

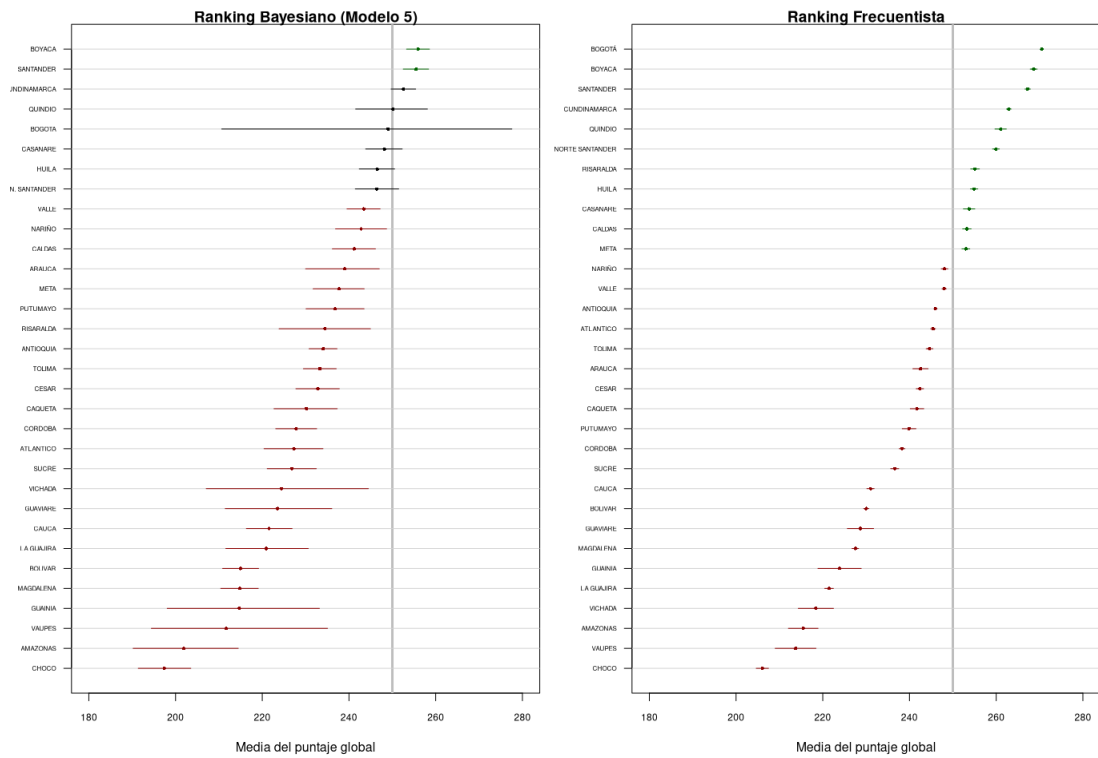


Figura 5: *Ranking* bayesiano vs. frecuentista

- Usando M_5 , hacer una segmentación de los departamentos usando las medias específicas de los departamentos, por medio del método de agrupamiento de **K-medias** con cinco grupos.

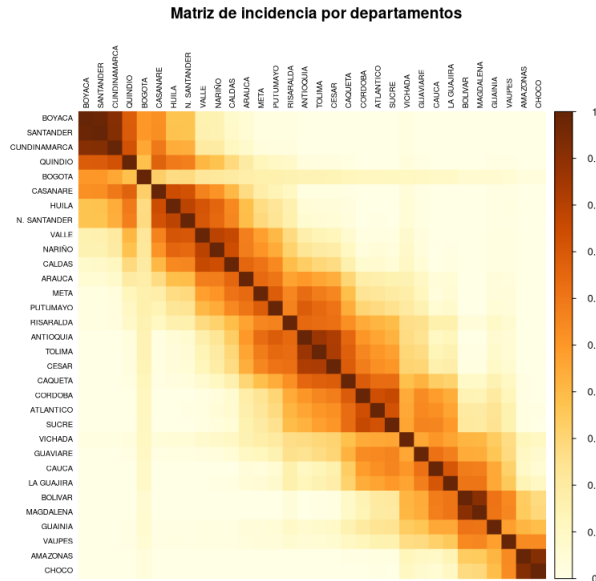


Figura 6: Matriz de incidencia por departamentos.

Matriz de incidencia: La disposición de la matriz de incidencia sigue el orden de clasificación de puntajes estimados por el modelo 5. Se observa una mayor coincidencia en la pertenencia al mismo grupo entre las departamentos cerca de la diagonal principal, lo cual es coherente. Esto indica que los departamentos con puntajes similares suelen estar interrelacionados.

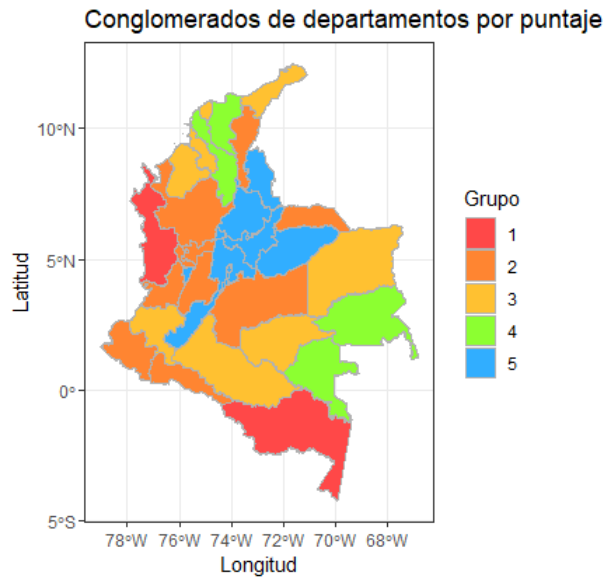


Figura 7: Mapa de conglomerados por departamentos

Mapa: En departamentos como Chocó y Amazonas, que comparten grupo, se tiende a observar puntajes bajos. Por otro lado, la región andina tiende a ser asignada al grupo 5 o al grupo 2.

9. Calcular la media posterior y un intervalo de credibilidad al 95 % de la **incidencia de la pobreza monetaria en 2018** (IPM) para todos los departamentos que no fueron medidos por el **DANE**, por medio de una regresión lineal simple de la IPM frente a las medias específicas de los departamentos de M_5

Código	Departamento	Media posterior	2.5 %	97.5 %
81	ARAUCA	30.837	26.039	36.162
85	CASANARE	25.446	22.527	28.373
86	PUTUMAYO	32.173	28.112	36.271
91	AMAZONAS	52.732	44.002	60.790
94	GUAINIA	45.162	34.111	55.545
95	GUAVIARE	39.957	32.484	47.500
97	VAUPES	46.948	33.213	57.905
99	VICHADA	39.445	27.805	49.968

10. Usando M_5 , hacer el *ranking* de los municipios basado en las medias específicas de los municipios. Luego, hacer una segmentación de los municipios usando las medias específicas de los municipios, por medio del método de agrupamiento de K-medias con ocho grupos.

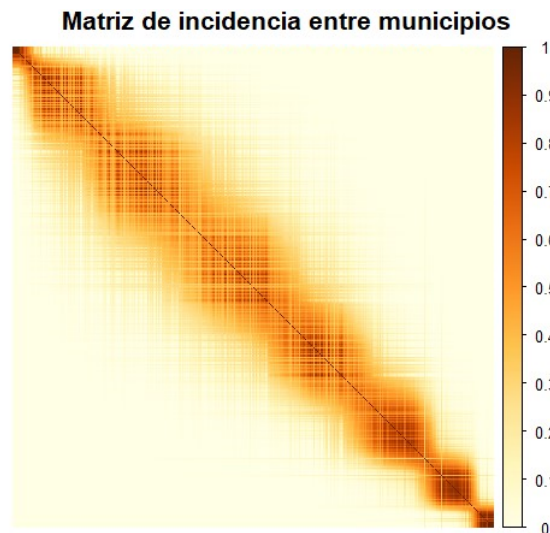


Figura 8: Matriz de incidencia por municipios.

Matriz de incidencia: La matriz de incidencia refleja el orden de clasificación de los puntajes estimados por el modelo 5. Se nota una mayor coincidencia en la pertenencia al mismo grupo entre los municipios cercanos a la diagonal principal. Además, se observa un patrón de agrupación entre los municipios, lo cual podría ser útil para determinar el número de grupos en los que podrían ser divididos los municipios, en caso de que se desee realizar dicha división.

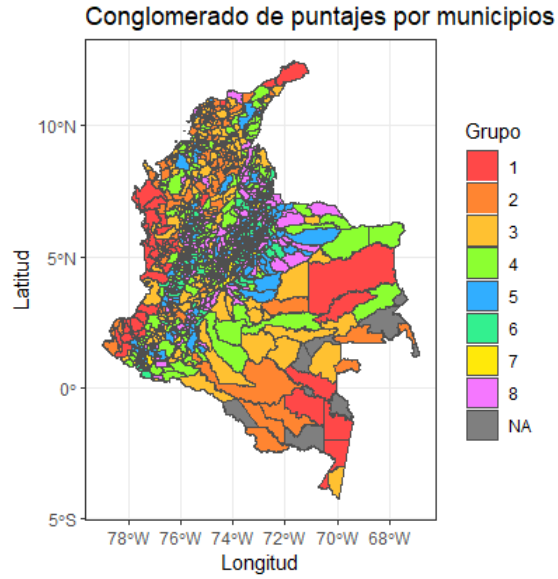
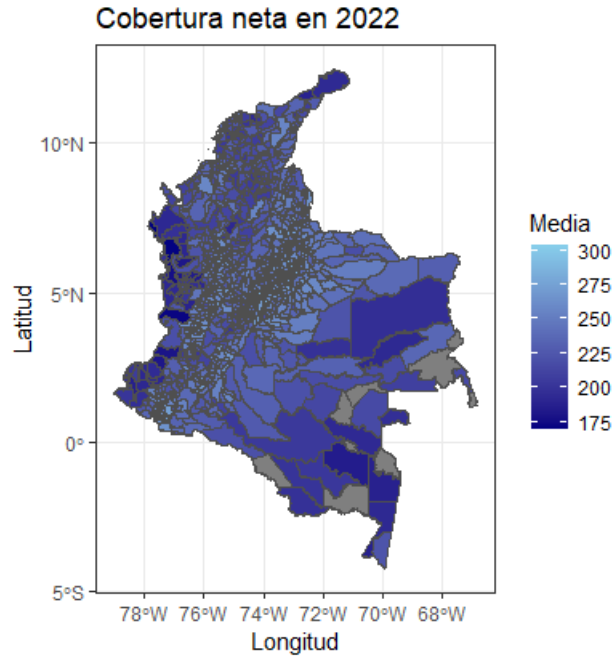


Figura 9: Mapa de conglomerados por municipios

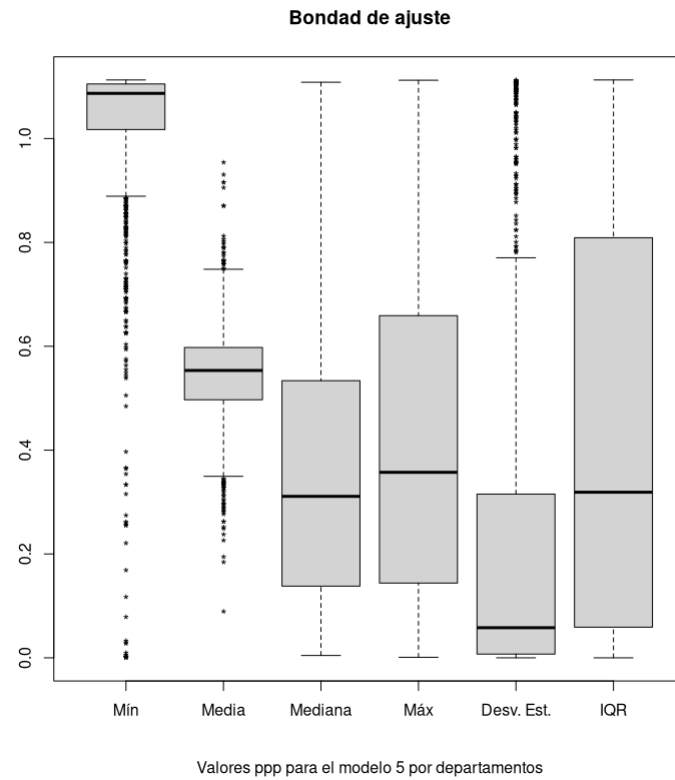
11. Calcular la media posterior y un intervalo de credibilidad al 95 % de la **cobertura neta secundaria en 2022** (CNS) para todos los municipios que no fueron medidos por el [MEN](#), por medio de una regresión lineal simple de la CNS frente a las medias específicas de los municipios de M_5 .

Código	Municipio	Media posterior	2.5 %	97.5 %
27086	BELÉN DE BAJIRÁ	57.222	54.0591	60.352
94663	MAPIRIPANA	55.209	46.129	63.524



12. Validar la bondad de ajuste de M_5 por medio de la distribución predictiva posterior en cada

municipio, utilizando como estadísticos de prueba el mínimo, el máximo, el rango intercuartílico, la media, la mediana, y la desviación estándar.



Se ajusta mejor la desviación estándar y la mediana al validar la bondad de ajuste. El valor mínimo y el IQR no se representan muy bien.

Anexos

A. Distribuciones condicionales completas

M_1 : Modelo normal

$$\theta | - \sim N \left(\frac{\frac{\mu_0}{\gamma_0^2} + \frac{n}{\sigma^2} \bar{y}}{\frac{1}{\gamma_0^2} + \frac{n}{\sigma^2}}, z \frac{1}{\frac{1}{\gamma_0^2} + \frac{n}{\sigma^2}} \right)$$

$$\sigma^2 | - \sim GI \left(\frac{\nu_0 + n}{2}, \frac{\nu_0 \sigma_0^2 + (n-1) s_\theta^2}{2} \right)$$

M_2 : Modelo normal con medias específicas por departamento

$$\theta_j | - \sim N \left(\frac{\frac{\mu}{\tau^2} + \frac{n_j}{\sigma^2} \bar{y}_{i,j}}{\frac{1}{\tau^2} + \frac{n_j}{\sigma^2}}, \frac{1}{\frac{1}{\tau^2} + \frac{n_j}{\sigma^2}} \right)$$

$$\sigma^2 | - \sim GI \left(\frac{\nu_0 + n}{2}, \frac{\nu_0 \sigma_0^2 + \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^{n_j} (y_{i,j} - \theta_j)^2}{2} \right)$$

$$\mu | - \sim N \left(\frac{\frac{\mu_0}{\gamma_0^2} + \frac{\sum_{j=1}^m \theta_j}{\tau^2}}{\frac{1}{\gamma_0^2} + \frac{m}{\tau^2}}, \frac{1}{\frac{1}{\gamma_0^2} + \frac{m}{\tau^2}} \right)$$

$$\tau^2 | - \sim GI \left(\frac{\eta_0 + m}{2}, \frac{\eta_0 \tau_0^2 + \sum_{j=1}^m (\theta_j - \mu)^2}{2} \right)$$

M_3 : Modelo normal con medias y varianzas específicas por departamento

$$\theta_j | - \sim N \left(\frac{\frac{\mu}{\tau^2} + \frac{n_j}{\sigma^2} \bar{y}_{i,j}}{\frac{1}{\tau^2} + \frac{n_j}{\sigma^2}}, \frac{1}{\frac{1}{\tau^2} + \frac{n_j}{\sigma^2}} \right)$$

$$\mu | - \sim N \left(\frac{\frac{\mu_0}{\gamma_0^2} + \frac{\sum_{j=1}^m \theta_j}{\tau^2}}{\frac{1}{\gamma_0^2} + \frac{m}{\tau^2}}, \frac{1}{\frac{1}{\gamma_0^2} + \frac{m}{\tau^2}} \right)$$

$$\tau^2 | - \sim GI \left(\frac{\eta_0 + m}{2}, \frac{\eta_0 \tau_0^2 + \sum_{j=1}^m (\theta_j - \mu)^2}{2} \right)$$

$$\sigma_j^2 | - \sim GI \left(\frac{\nu + n_j}{2}, \frac{\nu \sigma^2 + \sum_{i=1}^{n_j} (y_{i,j} - \theta_j)^2}{2} \right)$$

$$\sigma^2 \sim G \left(\alpha_0 + \frac{m\nu}{2}, \beta_0 + \frac{\nu}{2} \sum_{j=1}^m \frac{1}{\sigma_j^2} \right)$$

M_4 : Modelo normal con medias específicas por departamentos y municipios

$$\zeta_{j,k} | - \sim N \left(\frac{\frac{\sum_{i=1}^{n_{j,k}} y_{i,j,k}}{\kappa^2} + \frac{\theta_k}{\sigma^2}}{\frac{n_{j,k}}{\kappa^2} + \frac{1}{\sigma^2}}, \frac{1}{\frac{n_{j,k}}{\kappa^2} + \frac{1}{\sigma^2}} \right)$$

Con $n_{j,k}$ el número de estudiantes en el municipio j del departamento k .

$$\theta_k | - \sim N \left(\frac{\frac{\sum_{i=1}^{n_k} \zeta_{j,k}}{\sigma^2} + \frac{\mu}{\tau^2}}{\frac{n_k}{\sigma^2} + \frac{1}{\tau^2}}, \frac{1}{\frac{n_k}{\sigma^2} + \frac{1}{\tau^2}} \right)$$

Con n_k el número de municipios en el departamento k .

$$\sigma^2 | - \sim GI \left(\frac{\nu_0 + h}{2}, \frac{\nu_0 \sigma_0^2 + \sum_{k=1}^m \sum_{j=1}^{n_k} (\zeta_{j,k} - \theta_k)^2}{2} \right)$$

Con h el total de municipios.

$$\kappa^2 | - \sim GI \left(\frac{n + \xi_0}{2}, \frac{\xi_0 \kappa_0^2 + \sum_{k=1}^m \sum_{j=1}^{n_k} \sum_{i=1}^{n_{j,k}} (y_{i,j,k} - \zeta_{j,k})^2}{2} \right)$$

Con n el total de puntajes en la base de datos.

$$\mu | - \sim N \left(\frac{\frac{\sum_{k=1}^m \theta_k}{\tau^2} + \frac{\mu_0}{\gamma_0^2}}{\frac{m}{\tau^2} + \frac{1}{\gamma_0^2}}, \frac{1}{\frac{m}{\tau^2} + \frac{1}{\gamma_0^2}} \right)$$

$$\tau^2 | - \sim GI \left(\frac{\eta_0 + m}{2}, \frac{\eta_0 \tau_0^2 + \sum_{k=1}^m (\theta_k - \mu)^2}{2} \right)$$

M_5 : Modelo normal con medias específicas por departamentos y municipios

$$\zeta_{j,k} | - \sim N \left(\frac{\frac{\sum_{i=1}^{n_{j,k}} y_{i,j,k}}{\kappa^2} + \frac{\theta_k}{\sigma_k^2}}{\frac{n_{j,k}}{\kappa^2} + \frac{1}{\sigma_k^2}}, \frac{1}{\frac{n_{j,k}}{\kappa^2} + \frac{1}{\sigma_k^2}} \right)$$

$$\theta_k | - \sim N \left(\frac{\frac{\sum_{i=1}^{n_k} \zeta_{j,k}}{\sigma_k^2} + \frac{\mu}{\tau^2}}{\frac{n_k}{\sigma_k^2} + \frac{1}{\tau^2}}, \frac{1}{\frac{n_k}{\sigma_k^2} + \frac{1}{\tau^2}} \right)$$

$$\sigma_k^2 | - \sim GI \left(\frac{\nu + n_k}{2}, \frac{\nu \sigma^2 + \sum_{j=1}^{n_k} (\zeta_{j,k} - \theta_k)^2}{2} \right)$$

$$\kappa^2 | - \sim GI \left(\frac{n + \xi_0}{2}, \frac{\xi_0 \kappa_0^2 + \sum_{k=1}^m \sum_{j=1}^{n_k} \sum_{i=1}^{n_{j,k}} (y_{i,j,k} - \zeta_{j,k})^2}{2} \right)$$

$$\mu | - \sim N \left(\frac{\frac{\sum_{k=1}^m \theta_k}{\tau^2} + \frac{\mu_0}{\gamma_0^2}}{\frac{m}{\tau^2} + \frac{1}{\gamma_0^2}}, \frac{1}{\frac{m}{\tau^2} + \frac{1}{\gamma_0^2}} \right)$$

$$\tau^2 | - \sim GI \left(\frac{\eta_0 + m}{2}, \frac{\eta_0 \tau_0^2 + \sum_{k=1}^m (\theta_k - \mu)^2}{2} \right)$$

$$\sigma^2 | - \sim G \left(\frac{\nu m + \alpha_0}{2}, \frac{\beta_0 + \nu \sum_{k=1}^m \frac{1}{\sigma_k^2}}{2} \right)$$

B. Más información sobre los modelos

Coeficientes de variación de Monte Carlo

	Mínimo	Cuantil 25 %	Mediana	Media	Cuantil 75 %	Máximo
Modelo 1	0.0003	0.0007	0.0011	0.0011	0.0015	0.0019
Modelo 2	0.0007	0.0015	0.0020	0.0111	0.0034	0.2752
Modelo 3	0.0007	0.0019	0.0076	0.0159	0.0133	0.2447
Modelo 4	0.0006	0.0116	0.0169	0.0184	0.0237	0.2848
Modelo 5	0.0006	0.0117	0.0170	0.0413	0.0238	11.2630

Tabla 3: Coeficientes de variación de Monte Carlo.

Tenga en cuenta que para el modelo 1, sólo se tenían dos coeficientes de variación correspondientes a los parámetros σ^2 y θ por lo que esos valores de los cuantiles 25 % y 75 % así como el de la media deben usarse con cuidado.

Log-verosimilitud modelo 4 y 5.

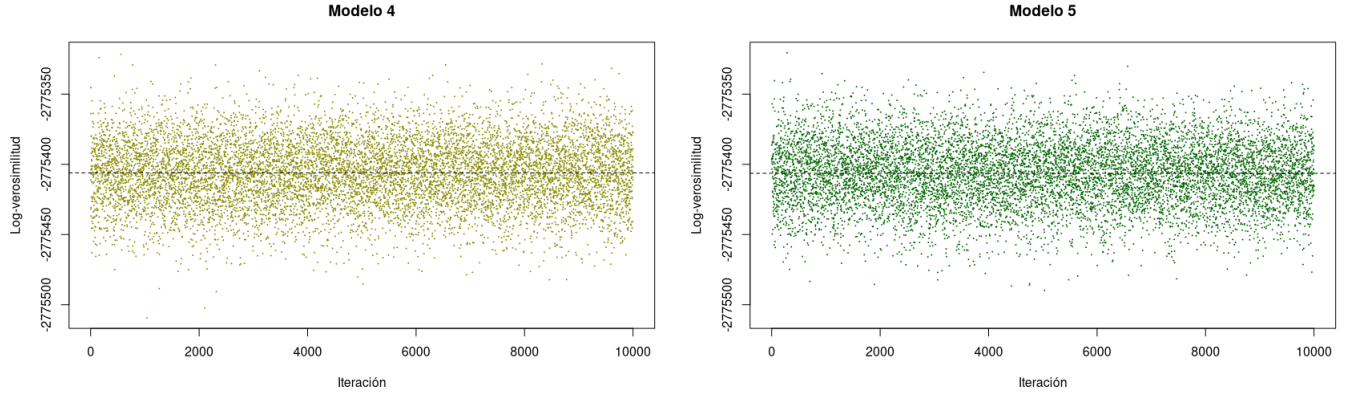


Figura 10: Log-verosimilitud modelos 4 y 5.

Las cadenas de Log-verosimilitud de los modelos 4 y 5 comparten incluso la misma media así como un rango bastante parecido siendo el mínimo valor de la cadena del modelo 5 ligeramente mayor al de la del modelo 4.

C. Información algoritmo usado

Los modelos presentados en las anteriores secciones son ajustados por medio de **muestreadores de Gibbs** con 101000 iteraciones cada uno. Las primeras 1000 iteraciones constituyen el período de calentamiento del algoritmo y dentro de las 100000 iteraciones restantes se hace un muestreo sistemático de amplitud 10 con el fin de reducir la autocorrelación. Para cada modelo se establecen hiperparámetros teniendo en cuenta la información que se conoce acerca de la prueba *Saber 11* de la siguiente forma:

- M_1 : $\mu_0 = 250$, $\gamma_0^2 = 50^2$, $\nu_0 = 1$, $\sigma_0^2 = 50^2$.
- M_2 : $\mu_0 = 250$, $\gamma_0^2 = 50^2$, $\eta_0 = 1$, $\tau_0^2 = 50^2$, $\nu_0 = 1$, $\sigma_0^2 = 50^2$.
- M_3 : $\mu_0 = 250$, $\gamma_0^2 = 50^2$, $\eta_0 = 1$, $\tau_0^2 = 50^2$, $\nu = 1$, $\alpha_0 = 1$, $\beta_0 = 1/50^2$.
- M_4 : $\xi_0 = 1$, $\kappa_0^2 = 50^2$, $\mu_0 = 250$, $\gamma_0^2 = 50^2$, $\eta_0 = 1$, $\tau_0^2 = 50^2$, $\nu_0 = 1$, $\sigma_0^2 = 50^2$.
- M_5 : $\xi_0 = 1$, $\kappa_0^2 = 50^2$, $\mu_0 = 250$, $\gamma_0^2 = 50^2$, $\eta_0 = 1$, $\tau_0^2 = 50^2$, $\nu = 1$, $\alpha_0 = 1$, $\beta_0 = 1/50^2$.

El código de los muestreadores mediante los cuales se ajustaron cada modelo se encuentra anexo a este informe.