Procesos Estocásticos. 2023-I.

Parcial 2. Parte A.

Michel Mendivenson Barragán Zabala

2023-05-19

---

1. En una guardería hay N niños y sólo una persona encargada de cuidarlos. De vez en cuando un bebé empieza a llorar exigiendo la atención de la niñera. Si la niñera esrá ocupada atendiendo a otro bebé, el nuevo bebé debe esperar su turno. Si en el tiempo t un bebé está tranquilo entonces la probabilidad de que él empiece a llorar y exija ser atendido en el intervalo $(\, t, t+h\,]$ es igual a $\lambda h + o(h)$. Si en el tiempo t un bebé está siendo atendido por la niñera entonces la probabilidad de que él se calme en el intervalo de tiempo $(\, t, t+h\,]$ es igual a $\mu h + o(h)$. Supóngase que $X_t :=$"número de bebés que están exigiendo ser atendidos en el tiempo t".

- **Asumimos $X_0 = 0$, $N = 50$, los valores $\lambda = 0.5$ y $\mu = 0.3$. ¿Cuál es la probabilidad de que a la larga haya 0 bebés esperando ser atendidos?**

  Con la información asignada no es díficil notar que se trata de un problema fácilmente modelable mediante un modelo de colas del tipo **(M/M/1/N)** debido a que el número de bebés es finito. Así pues las probabilidades que se darán en el sistema a la larga estarán dadas por:

$$P_n = \begin{cases} \frac{(1-\rho)\rho^n}{1-\rho^{N-1}} & si \quad \rho \neq 1 \\ \\ \frac{1}{N-1} & si \quad \rho = 1 \end{cases}$$

  para $n = 0, 1, ..., N$ dado que $\rho = \frac{\lambda}{\mu}$ y como en este caso $\lambda \neq \mu$ tendremos que la probabilidad está dada por $\frac{(1-\rho)\rho^n}{1-\rho^{N-1}}$ con n $= 0$ y se calcula de la siguiente forma:

```
#lambda
l = 0.5

#miu
m = 0.3

# Cantidad de bebés.
N = 50

# Queremos calcular la probabilidad de que en el sistema hayan 0 bebés:
n = 0

#Definición de rho
rho = l/m

#Cálculo de la probabilidad
P <- ((1-rho)*(rho^n))/(1 - (rho^{N+1}))
```

```
## [1] "Es decir, la probabilidad de que a la larga no hayan bebés llorando"
```

```
## [1] "es de:  3.23312510987473e-12"
```

- **Asumimos $X_0 = 0$, $N = 50$, los valores $\lambda = 0.3$ y $\mu = 0.5$. ¿Cuál es la probabilidad de que a la larga haya 0 bebés esperando ser atendidos?**

  Atendiendo a lo anteriormente dicho la probabilidad pedida en este caso se calcula de la siguiente forma:

```
l = 0.3
m = 0.5
N = 50
n = 0
rho = l/m
P <- ((1-rho)*(rho^n))/(1 - (rho^{N+1}))
```

```
## [1] "Es decir, la probabilidad de que a la larga no hayan bebés llorando"
```

```
## [1] "en este caso es de:  0.40000000000194"
```

---

2. Escriba en un programa de R u otro software para simular un proceso de Poisson homogéneo con intensidad $\lambda = 2$ en el intervalo $[0, 10]$ y siga los siguientes pasos:

Para generar una simulación vamos a usar el método de la distribución uniforme,pues así estaremos simulando directamente los tiempos de llegada entre eventos, y a almacenar todos los datos en un vector `simulation1`.

```
t <- 10 # "Intervalo" de tiempo
lambda <- 2 # Intensidad del proceso
n <- rpois(1,t*lambda) # Generación del criterio de parada.
simulation <- c(0,runif(n,0,t)) # Simulación de los tiempos entre el inicio del proceso y el k-ésimo ev
simulation <- sort(simulation) # Se ordenan estos tiempo de llegada.
```

Finalmente, los tiempos de llegada del proceso de Poisson fueron los siguientes:

```
## [1] 2.347598
## [1] 3.006734
## [1] 4.011057
## [1] 4.070665
## [1] 4.107071
## [1] 4.507105
## [1] 5.062907
## [1] 6.047019
## [1] 6.141323
## [1] 7.429062
## [1] 7.433086
## [1] 7.512585
## [1] 7.682638
## [1] 9.002013
```

- **Generar los tiempos entre llegadas de eventos.**

  Con lo que hicimos antes ya tenemos algo parecido a lo que se nos pide, solo tenemos que calcular la diferencia entre el tiempo en el que ocurrió el $k - ésimo$ evento y el evento $(k - 1)$.

```
TimeBetween <- c()
for (i in 1:(length(simulation)-1)){
  TimeBetween = c(TimeBetween, (simulation[i+1] - simulation[i]))
}
```

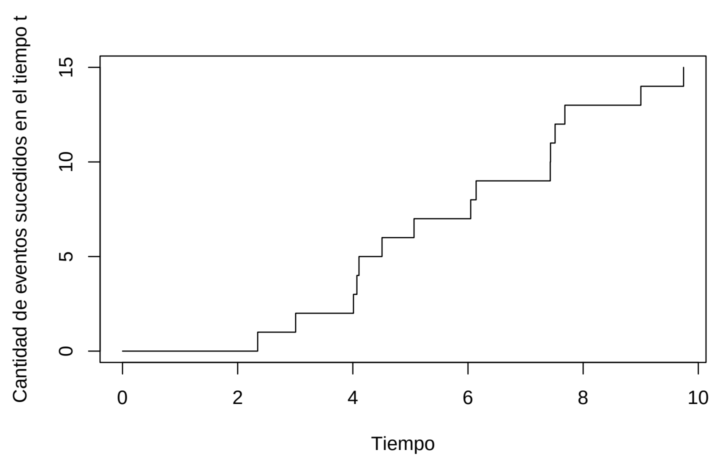
Y así los tiempos de llegada entre eventos son:

```
## [1] "Entre el inicio del proceso y la primera ocurrencia del evento pasaron 2.34759759157896"
```

```
## [1] "unidades de tiempo."
```

```
## [1] "Entre el evento  1  y el evento  2 pasaron 0.659136783797294  unidades de tiempo."
## [1] "Entre el evento  2  y el evento  3 pasaron 1.00432289065793  unidades de tiempo."
## [1] "Entre el evento  3  y el evento  4 pasaron 0.0596073945052922  unidades de tiempo."
## [1] "Entre el evento  4  y el evento  5 pasaron 0.036406060680747  unidades de tiempo."
## [1] "Entre el evento  5  y el evento  6 pasaron 0.400033914484084  unidades de tiempo."
## [1] "Entre el evento  6  y el evento  7 pasaron 0.555802185554057  unidades de tiempo."
## [1] "Entre el evento  7  y el evento  8 pasaron 0.984111984726042  unidades de tiempo."
## [1] "Entre el evento  8  y el evento  9 pasaron 0.0943044968880713  unidades de tiempo."
## [1] "Entre el evento  9  y el evento  10 pasaron 1.28773836884648  unidades de tiempo."
## [1] "Entre el evento  10  y el evento  11 pasaron 0.0040242588147521  unidades de tiempo."
## [1] "Entre el evento  11  y el evento  12 pasaron 0.0794995320029557  unidades de tiempo."
## [1] "Entre el evento  12  y el evento  13 pasaron 0.170052950270474  unidades de tiempo."
## [1] "Entre el evento  13  y el evento  14 pasaron 1.31937415106222  unidades de tiempo."
## [1] "Entre el evento  14  y el evento  15 pasaron 0.741808156017214  unidades de tiempo."
```

Además la trayectoría generada del proceso de Poisson es la siguiente:



- **Usar un tamaño de malla de h = 0.051.**
- **Ejecute sus programas de simulación 100 veces y trace un histograma.**

Una malla esencialmente lo que hace es dividir el intervalo de tiempo requerido en subintervalos del mismo tamaño de modo que usando el hecho de que en el intervalo $[a, b]$ se tiene que los eventos de un proceso de Poisson con parámetro de intensidad λ ocurren siguiendo una distribución $Pois(\lambda(b-a))$ se puedan generar el número de sucesos que ocurre por espacio de tiempo. Entonces, debemos cambiar nuestro algoritmo de forma que cumpla con los requisitos. Así:

```
h <- 0.051 #Tamaño de la malla.
Intensidad <- 2 #Parámetro de intensidad del proceso.
NoSimulaciones <- 100 #Simulaciones a generar.
TiempoMaximo <- 10 #Intervalo de tiempo para las simulaciones.

ParPoisson <- h*Intensidad

# Aquí se guardará el historial de cuántos eventos suceden por simulacion.
```

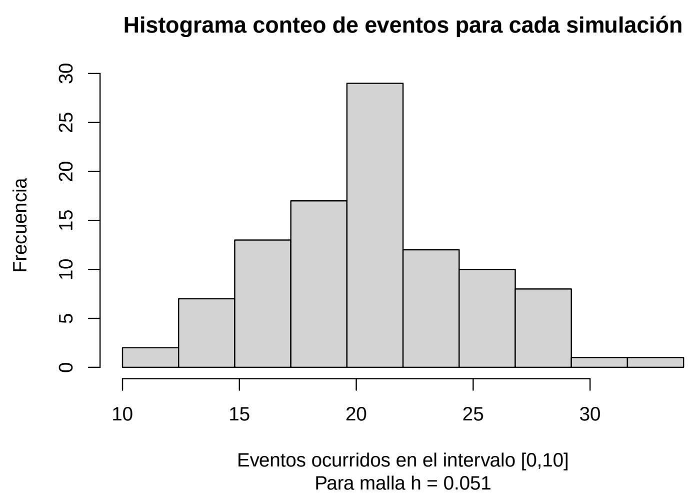
```r
NoEventos <- c()

# Se inicializa el proceso de la simulación.
for (i in 1:NoSimulaciones){
  # El siguiente bucle sería propiamente dicho la simulación
  # el for es usado para alcanzar la cantidad de simulaciones propuesta.
  tiempo = 0
  simulacion = c(0)
  while (tiempo <= TiempoMaximo){
    simulacion = c(simulacion,(rpois(1,ParPoisson)))
    tiempo = tiempo + h

  }

  NoEventos= c(NoEventos, sum(simulacion))
}
```

Finalmente, el histograma de cuántos eventos suceden en las simulaciones con la malla requerida es el siguiente:



---

3. Escriba en un programa de R u otro software un proceso de Poisson no homogéneo con intensidad $\lambda = e^{-\frac{t}{5}} + \frac{t}{5}$ en el intervalo $[0, 5000]$.

Teniendo en cuenta que para un proceso de Poisson $(N_t)_{t\geq 0}$ no homogéneo con función de intensidad $\lambda(t)$ se tiene que $N_0 = 0$, que sus incrementos son independientes y que para $0 \leq s < t$ se tiene que $N_t - N_s$ tiene distribución Poisson de parámetro $m(t) - m(s)$ donde

$$m(t) := \int_0^t \lambda(u)du$$

Podemos aproximar el proceso de Poisson no homogéneo usando una aproximación parecida a la del punto anterior: Subdividiendo el intervalo de tiempo total en intervalos de tiempo más pequeños y usando como parámetro de la distribución Poisson a $m(b) - m(a)$ para cada subintervalo intervalo $[a, b]$. Así:

```r
# La función de intensidad del proceso.
func_intensidad <- function(t) (exp(-t/5)+(t/5))
```

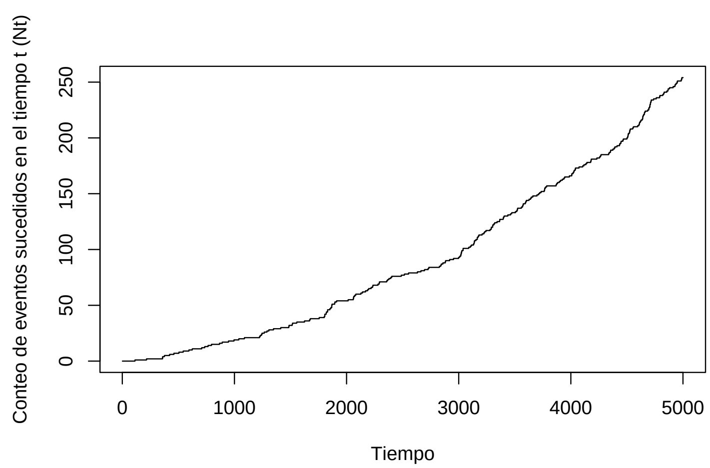
```r
# El tiempo máximo en el cual se quiere generar el proceso.
tiempo_maximo = 5000

# dNta será el conteo de eventos que sucede en cada subintervalo [a,b]
dNta = c()

# El siguiente bucle generá la simulación como tal:
# NOTA: Se usa la función de integración implementada en R base con lower
#       el límite inferior y upper el límite superior de integración.
for(i in 1:tiempo_maximo){
  dNta = c(dNta,rpois(1,
                      integrate(func_intensidad,
                                lower=(i-1)*0.01,
                                upper = i*0.01)$value))
}
# dNta es un vector numérico cuyo componente k-ésimo nos dice si existió o no
# un evento en el intervalo de tiempo k (0 si no hubo un evento o 1 si lo hubo)
dNta <- c(0, dNta)
Nta <- cumsum(dNta)

# Nta es a grandes rasgos un vector de conteos acumulados del proceso mientras
# que dNta no es acumulado.
```

De la simulación presentada obtenemos la siguiente trayectoría del proceso estocástico descrito.



---

4. Revisar el paper adjunto e implementar el método numérico.