Les fonctions en mathematique

Mendy Fatnassi

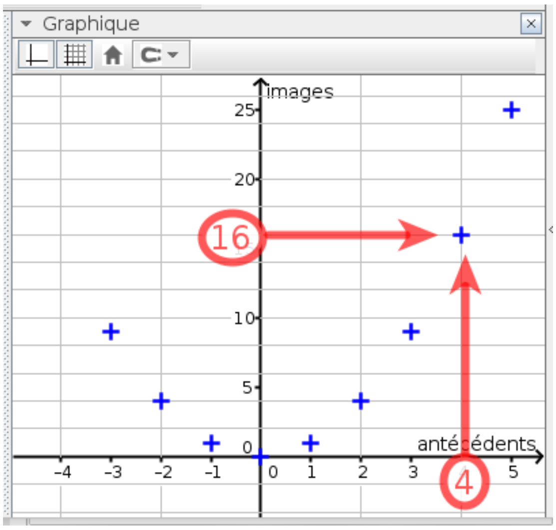
10 décembre 2020

Table des matières

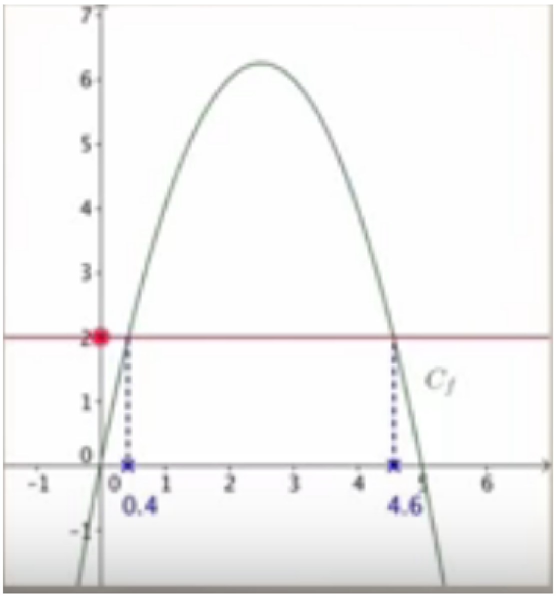
Chapitre 1 : Les Fonctions

1.1 Notion de fonction

Une fonction f(x) possede une image et un antecedant .L'image seras le resultat de x a travers f(x) et l'antecedant seras pour quelle x on obtient un resultat y , f(?)=y.
Par exemple f(5) :-> 25 , l'image de f(5) est 25 et l'antecedant de 25 est f(5).



On peux aussi resoudre une equation graphiquement , par exemple :
$f(x) = 5x - x^2$, on cherche f(2) donc $f(x) = 2 => 5x - x^2 = 2$:



1.2 Fonction affine polynome du 2nd degré

1.2.1 Fonction affine

Une fonction f définie sur R est une fonction affine si elle peut s'écrire sous la forme $f(x) = ax + b$ avec a et b réels.
avec a : le coef. directeur et b : l'ordonnée a l'origine.

Une fonction affine est graphiquement representer par une droite qui n'est pas parrallele a l'axe des ordonné. Il y a deux cas particuliers importants de fonctions affines : $f(x) = ax + b$

Si b = 0, c'est-à-dire, f(x) = ax; alors f est appelée fonction linéaire.
Si a = 0, c'est-à-dire, f(x) = b ; alors f est une fonction constante.

1.2.2 Fonction du 2nd degré

Si la fonction possede 3 coef. a,b et c on parleras d'equation du second degré .Ces fonctions sont representer graphiquement par une parabole .
Pour calculer un polynome du 2nd degré on applique la formule : $\Delta = b^2 - 4ac$:

- Si $\Delta > 0$ alors 2 solution : $x1 = \frac{-b-\Delta}{2a}$ et $x2 = \frac{-b+\Delta}{2a}$

- Si $\Delta = 0$ alors 1 solution : $x1 = \frac{-b}{2a}$

- Si $\Delta < 0$ alors il n'y a pas de solution réel.

1.3 limite de fonction

Si on veux trouver la limite pour un x donnée , $\lim_{x \to 4} 2x - 7$ et bien on remplace le x de la fonction par 4 (ce quoi il tend) :

$\lim_{x \to 4} 2x - 7 = 2 \times 4 - 7 = 1$ on dit que la limite de la fonction 2x-7 quand x tend vers 4 est 1 .

Pour les limite en $+/-\infty$ on ne remplace pas x par ∞ car cela n'est pas possible .On vas donc regarder :
$\lim_{x \to 0+} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x \to 0-} f(x) = -\infty$

<u>Forme Indeterminé</u> :

Parfois on fait face a des formes indeterminé que l'on note F.I. On est dans ce cas quand on a par exemple une somme de fonctions, l'une tendant vers $+\infty$, l'autre vers $-\infty$.
Il y a 4 formes indeterminé en tout :

$+\infty - \infty$, $0 \times \infty$, $\frac{\infty}{\infty}$ et $\frac{0}{0}$

Quand on a des polynômes, on peut tomber sur des F.I. Dans ce cas on utilise le **TH du plus haut degrés** (seulement si x tend vers $+/-\infty$).

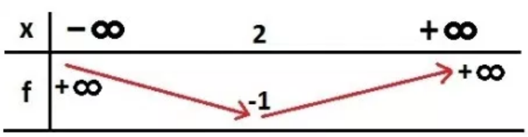
<u>Exemple</u> :

- $\lim_{x \to +\infty} x^2 - x = +\infty - \infty = F.I$
- $\lim_{x \to +\infty} x^2 - x = \lim_{x \to +\infty} x^2$
- $\lim_{x \to +\infty} \frac{x^2 - x}{9x^5 - 6x^2 + 7} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2}{9x^5} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{9x^3} = 0$

Grace aux limites on pourras completer le tableau de signe d'une fonction en y ajoutant les limites de x en $+/-\infty$.

Pour $x^2 - 4x + 3$ on a :

- $\lim_{x \to +\infty} x^2 - 4x + 3 = +\infty$
- $\lim_{x \to -\infty} x^2 - 4x + 3 = +\infty$



1.4 dérivée de fonction

Quand on a une fonction f, on peut calculer une autre fonction que l'on note f' (f prime) et qu'on appelle la dérivée de f .

Tableau de derivée :

f	f'
constante	0
x	1
x^2	2x
x^3	$3x^2$
x^n	$n \times x^{n-1}$
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$
$\sin(x)$	$\cos(x)$
$\cos(x)$	$-\sin(x)$

Exemple :

$f(x) = 7x^9 - 8x^3 + 5$ on vas alors dérivée chacun des termes et les constantes multiplicative sont simplement réecrites dans l'équation , ce qui donne :

$f'(x) = 7 \times 9x^8 - 8 \times 3x^2 + 0 \Rightarrow f'(x) = 63x^8 - 24x^2$

Par contre si on a des produits ou quotient de fonctions par exemple 2 fonctions u et v (cf.Tableau de derivee complexe).

$(u \times v)' = u'v + uv'$

$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v-uv'}{v^2}$

Exemple :

$f(x) = (2x + 1) \times (x^2 - 9)$ pour trouver la dérivée il est conseiller de faire comme suite :

$u = 2x + 1etu' = 2$
$v = x^2 - 9etv' = 2x$

Ensuite on remplace les formules dans l'expression de la fonction :

$f'(x) = u'v + uv' = (2) \times (x^2 - 9) + (2x + 1) \times (2x)$
$f'(x) = 2x^2 - 18 + 4x^2 + 2x$
$f'(x) = 6x^2 + 2x - 18$

On appelle cela des fonction composé , elles sont de la forme $f(x) = \sqrt{8x^2 - 5x + 4}$ ou $f(x) = \frac{1}{8x^6+4x^7-6x}$ en generale ces fonction sont noté u , $\sqrt{u}$ ou $\frac{1}{u}$.

Pour derivée ce genre de fonction on derivee le u comme si il s'agissait d'un réel x et on multiplie par u'.

Tableau de derivee complexe :

f	f'
u^2	$2u \times u'$
u^3	$3u^2 \times u'$
u^n	$n \times u^{n-1} \times u'$
$\frac{1}{u}$	$-\frac{1}{u^2} \times u'$
$\sqrt{u}$	$\frac{1}{2\sqrt{u}} \times u'$
$\sin(x)$	$\cos(x) \times u'$
$\cos(x)$	$-\sin(x) \times u'$

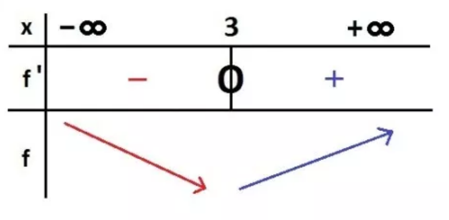
Interet :
f' sert a trouver les signes/variations de f .
- si f'>=0, alors f est croissante
- si f'<=0, alors f est décroissante

1.5 signes & variation

On cherche le tableau de signes de f' pour trouver le tableau de variation de f (**ne pas melanger f et f'**) , pour cela on calcule d'abord f' .

$f(x) = x^2 - 6x + 4$
$f'(x) = 2x - 6$

f' est de la forme ax+b , il suffit donc de savoir quand f' s'annule . $2x - 6 = 0 \Rightarrow 2x = 6 \Rightarrow x = 3$.



1.6 Equation de la tangeante

Une tangeante c'est une droite, elle est donc de la forme $y = ax + b$. Ensuite, cette droite longe la courbe de la fonction sans la traverser.

Voici la formule : $y = f'(a)(x - a) + f(a)$

1.7 Primitive

Pour faire simple, une primitive c'est l'inverse de la dérivée
$F'(x) = f(x)$
F est la primitive de f et f la dérivee de F.Si on dérive f(x) on obtient f'(x) , si on derivee la primitive c-a-d F'(x) on obtient f(x).

Tableau de primitive :

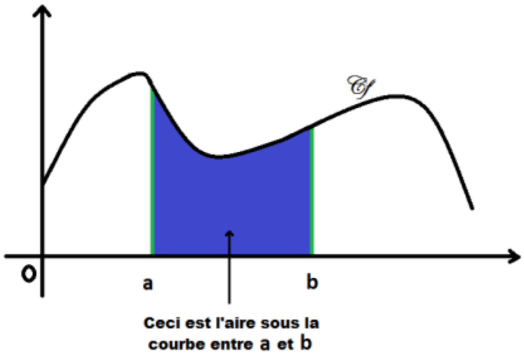
f	F
0	$constante$
x	$\frac{x^2}{2}$
x^2	$\frac{x^3}{3}$
x^3	$\frac{x^4}{4}$
x^n	$\frac{x^{n+1}}{n+1}$
x^{-1}	$ln(x)$
$\frac{1}{x}$	$\ln x$
$\frac{1}{x^2}$	$\frac{-1}{x}$
$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$\sqrt{x}$
e^x	e^x
$\sin(x)$	$-\cos(x)$
$\cos(x)$	$\sin(x)$

Tableau de primitive complexe :

f	F (LA PRIMITIVE)
$u' \times u$	$\frac{u^2}{2}$
$u' \times u^2$	$\frac{u^3}{3}$
$u' \times u^3$	$\frac{u^4}{4}$
$u' \times u^n$	$\frac{u^{n+1}}{n+1}$
$\frac{u'}{u}$	$ln(u)$
$\frac{u'}{u^2}$	$-\frac{1}{u}$
$\frac{u'}{u^n} = u' \times u^{-n}$	$\frac{u^{-n+1}}{-n+1} = \frac{1}{(-n+1) \times u^{n-1}}$
$\frac{u'}{2 \times \sqrt{u}}$	$\sqrt{u}$
$u' \times e^u$	e^u
$u' \times sin(u)$	$-cos(u)$
$u' \times cos(u)$	$sin(u)$

1.8 Integrale

Une intégrale c'est l'aire sous la courbe d'une fonction, entre deux points d'abscisses a et b.



Calcule d'une integrale :

Soient [a, b] un intervalle de R , une fonction continue sur [a, b] et F une primitive de f , on a :

$\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$

Exemple :

Si on veux integrer la fonction $f(x) = \frac{3}{x^2}$ sur l'intervale [1 ;4] il faut trouver une primitive de f(x) , or $\frac{3}{x^2}$ n'a pas de primitive on peux donc modifier un peux l'ecriture de celle ci $f(x) = 3 \times \frac{1}{x^2}$

Donc $F(x) = 3 \times -\frac{1}{x} = -\frac{3}{x}$

$\int_1^4 \frac{3}{x^2} = [-\frac{3}{x}]_1^4 = -\frac{3}{4} - (-\frac{3}{1}) = -\frac{3}{4} + \frac{12}{4} = \frac{9}{4}$