Metody Monte Carlo

Metody Monte Carlo

- Równania Bellmana można rozwiązać analitycznie.
- Złożoność obliczeniowa sięga $\mathrm{O}(\mathrm{n}^3)$ gdzie n oznacza liczbę stanów.
- W przypadku rozwiązywania dużych problemów istnieje wiele metod iteracyjnych:
  - Exhaustive search
  - Programowanie dynamiczne
  - Metody Monte Carlo
  - Temporal Difference Learning

Metody Monte Carlo

- Kluczowym problemem w przypadku korzystania z metod programowania dynamicznego jest fakt, że do ich rozwiązania konieczna jest znajomość pełnego modelu.

Metody Monte Carlo

- Kluczowym problemem w przypadku korzystania z metod programowania dynamicznego jest fakt, że do ich rozwiązania konieczna jest znajomość pełnego modelu.
- Oznacza to, że przed rozpoczęciem *planowania* musimy znać zarówno model przejścia $\boldsymbol{P}(\mathbf{s}, \mathbf{a}, \mathbf{s}')$– jak i wszystkie osiągalne nagrody : $\mathbf{R}(\mathbf{s}, \mathbf{a}, \mathbf{s}')$.

Metody Monte Carlo

- Kluczowym problemem w przypadku korzystania z metod programowania dynamicznego jest fakt, że do ich rozwiązania konieczna jest znajomość pełnego modelu.
- Oznacza to, że przed rozpoczęciem *planowania* musimy znać zarówno model przejścia $\boldsymbol{P}(\mathbf{s}, \mathbf{a}, \mathbf{s}')$– jak i wszystkie osiągalne nagrody : $\mathbf{R}(\mathbf{s}, \mathbf{a}, \mathbf{s}')$.
- Wykorzystując bezmodelowe metody uczenia jesteśmy w stanie obejść ten problem.

Metody Monte Carlo

- Kluczowym problemem w przypadku korzystania z metod programowania dynamicznego jest fakt, że do ich rozwiązania konieczna jest znajomość pełnego modelu.
- Oznacza to, że przed rozpoczęciem *planowania* musimy znać zarówno model przejścia $\boldsymbol{P}(\mathbf{s}, \mathbf{a}, \mathbf{s}')$– jak i wszystkie osiągalne nagrody : $\mathbf{R}(\mathbf{s}, \mathbf{a}, \mathbf{s}')$.
- Wykorzystując bezmodelowe metody uczenia jesteśmy w stanie obejść ten problem.
- W takim wypadku agent uczy się na podstawie swojego **doświadczenia,** poprzez powtarzające się **interakcje** z otoczeniem.

Metody Monte Carlo

- Podstawową sposobem uczenia bez modelu są **Metody Monte Carlo.**
- Uczenie opiera się na generowaniu **pełnych epizodów** – agent nie bootstrapuje swojego doświadczenia na podstawie wcześniejszych wyników.

Metody Monte Carlo

- Podstawową sposobem uczenia bez modelu są **Metody Monte Carlo.**
- Uczenie opiera się na generowaniu **pełnych epizodów** – agent nie bootstrapuje swojego doświadczenia na podstawie wcześniejszych wyników.
  - Oznacza to, że metody Monte Carlo można stosować jedynie w przypadku skończonych procesów decyzyjnych Markowa.

Metody Monte Carlo

- Podstawową sposobem uczenia bez modelu są **Metody Monte Carlo.**
- Uczenie opiera się na generowaniu **pełnych epizodów** – agent nie bootstrapuje swojego doświadczenia na podstawie wcześniejszych wyników.
  - Oznacza to, że metody Monte Carlo można stosować jedynie w przypadku skończonych procesów decyzyjnych Markowa.
  - Ale też oznacza to, że możliwe jest uczenie się problemów, które nie spełniają własności Markowa.

Metody Monte Carlo

- Idea uczenia MC jest prosta:
    - Wartość funkcji wartości w k-tej iteracji jest równa przeciętnej skumulowanej przyszłej nagrodzie otrzymanej w poprzednich iteracjach.
    - Na mocy prawa wielkich liczb, gdy ilość symulowanych epizodów będzie dążyła do nieskończoności to oszacowanie będzie dążyło do prawdziwej funkcji wartości.

Monte Carlo Prediction

- **Ewaluacja** – dana jest strategia π, należy dokonać jej oceny:
  - Zainicjuj algorytm wybierając dowolne początkowe wartości funkcji wartości, np. $V_0(s) = 0\ \forall s$.

W każdym kroku k:	W każdym kroku k:

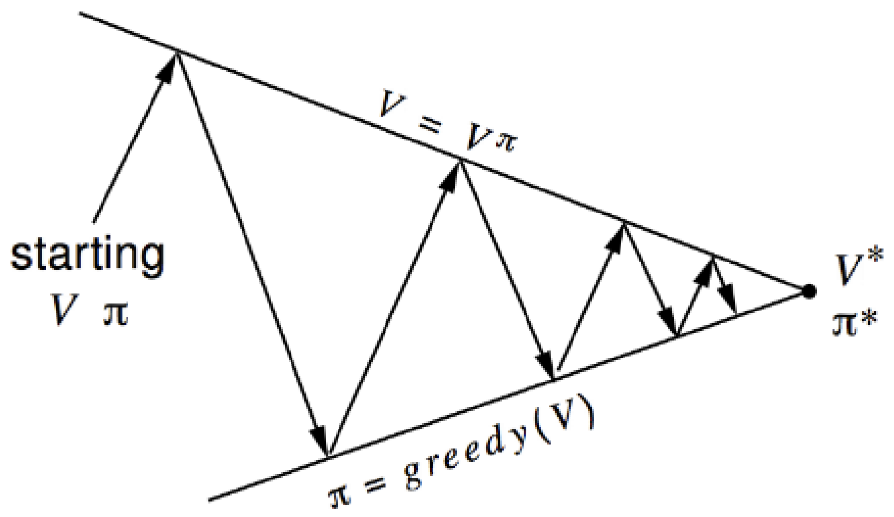
• Wygeneruj epizod na podstawie strategii π: $\mathrm{s}_0, \mathrm{a}_0, \mathrm{r}_1, \dots, s_{T-1}, a_{T-1}, r_T$
• Dla każdego ze stanów $s \in S$ należących do wygenerowanego epizodu, **gdy odwiedzasz go za pierwszym razem**:
  • Uaktualnij licznik odwiedzin stanu s: $n_s = n_s + 1$
  • Uaktualnij przeciętną wartość funkcji wartości: $V_k(s) = V_{k-1}(s) + \frac{1}{n_s}(R_k(s) - V_{k-1}(s))$
	• Wygeneruj epizod na podstawie strategii π: $\mathrm{s}_0, \mathrm{a}_0, \mathrm{r}_1, \dots, s_{T-1}, a_{T-1}, r_T$
	• Dla każdego ze stanów $s \in S$ należących do wygenerowanego epizodu, **za każdym razem gdy go odwiedzasz**:
	  • Uaktualnij licznik odwiedzin stanu s: $n_s = n_s + 1$
	  • Uaktualnij przeciętną wartość funkcji wartości: $V_k(s) = V_{k-1}(s) + \frac{1}{n_s}(R_k(s) - V_{k-1}(s))$

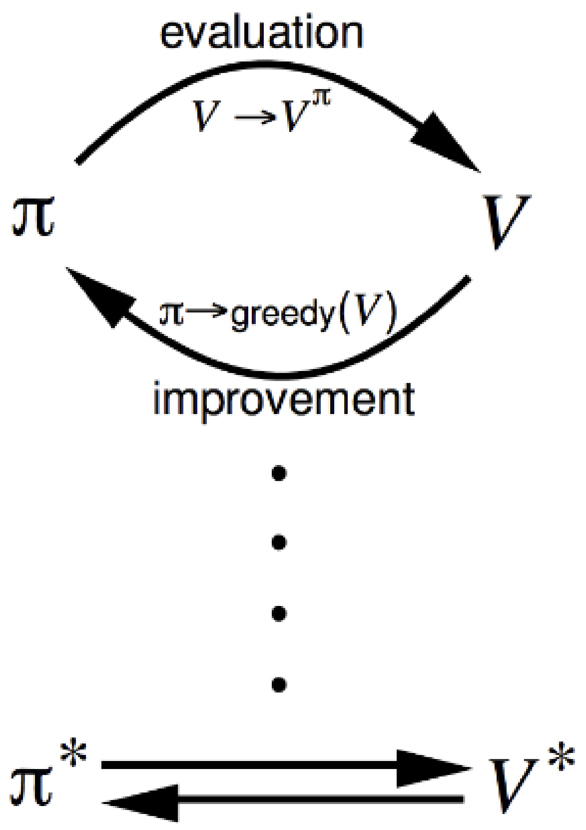
- Obie metody zbiegną $V(s) \rightarrow V_\pi(s)$ gdy $n_s \rightarrow \infty$.

Monte Carlo Control

- W przypadku poszukiwania optymalnej strategii π_* za pomocą metod Monte Carlo konieczna jest modyfikacja podejścia do rozwiązywanego problemu:

Monte Carlo Control





Policy evaluation Estimate v_π
Iterative policy evaluation

Policy improvement Generate $\pi' \geq \pi$
Greedy policy improvement

Źródło: http://www0.cs.ucl.ac.uk/staff/d.silver/web/Teaching_files/DP.pdf

Monte Carlo Control

- Zachłanna iteracja po funkcji $V(s)$ jest niemożliwa; wymaga znajomości modelu:

$$\pi' = \underset{a}{\operatorname{argmax}} \sum_{s,r} P(s, a, s')(r + V_\pi(s'))$$

Monte Carlo Control

- Zachłanna iteracja po funkcji $V(s)$ jest niemożliwa; wymaga znajomości modelu:

$$\pi' = \underset{a \in A}{\operatorname{argmax}} \sum_{s,r} P(s, a, s')(r + V_\pi(s'))$$

- Konieczne jest wykorzystanie funkcji $Q(s, a)$:

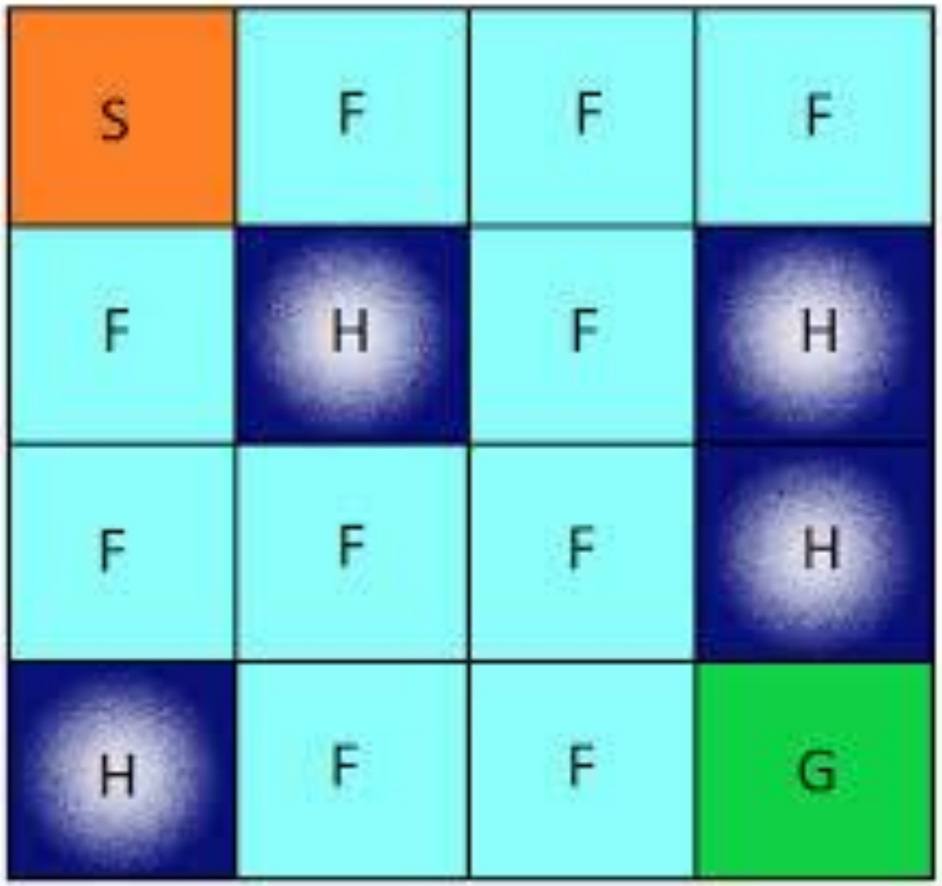
$$\pi' = \underset{a \in A}{\operatorname{argmax}}\, Q(s, a)$$

Monte Carlo Control z Eksploracją punktów startowych

1. Zainicjuj algorytm wybierając dowolne początkowe wartości funkcji wartości, np. $Q_0(s,a) = 0\ \forall s, a$, wektor odwiedzin part stan i akcja: $N(s,a) = 0\ \forall s, a$ i dowolną strategię π.
2. W każdej iteracji k:
   - Wylosuj początkową parę $\mathrm{s}_0 \in S, \mathrm{a}_0 \in A$
   - Wygeneruj epizod na podstawie strategii π: $\mathrm{s}_0, \mathrm{a}_0, \mathrm{r}_1, \dots, s_{T-1}, a_{T-1}, r_T$.
   - Przyjmij wartość skumulowanej przyszłej nagrody $R = 0$
   - Dla każdego $\mathrm{t} = \mathrm{T} - 1, \mathrm{T} - 2, \dots, 1, 0$:
     - Przypisz nową wartość $R = \beta R + r_{t+1}$
     - Jeżeli para $\mathrm{s_t}, \mathrm{a_t}$ nie występuje w $s_0, a_0, r_1, \dots, s_{t-1}, a_{t-1}$ (**jest pierwszym wystąpieniem**):
       - Uaktualnij licznik odwiedzin pary $\mathrm{s_t}, \mathrm{a_t}$:
         $$N(s_t, a_t) = N(s_t, a_t) + 1$$
       - Uaktualnij funkcję wartości akcji:
         $$Q(s_t, a_t) = Q(s_t, a_t) + \frac{1}{N(s,a)}\left(R - Q(s_t, a_t)\right)$$
       - Popraw zaproponowaną strategię zachowując się zachłannie:
         $$\pi(s) = \operatorname*{argmax}_{a \in A} Q(s,a)$$
3. Gdy $n \to \infty$ to $\pi \approx \pi_*$

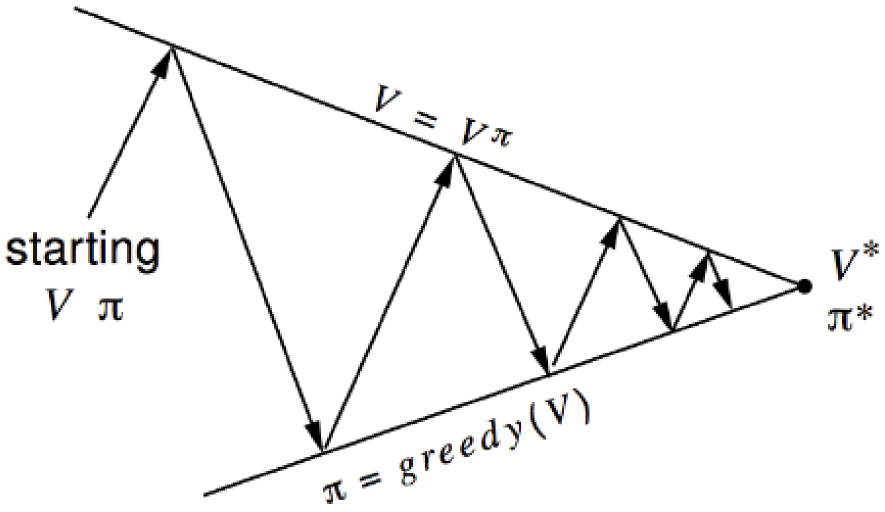
Przykład

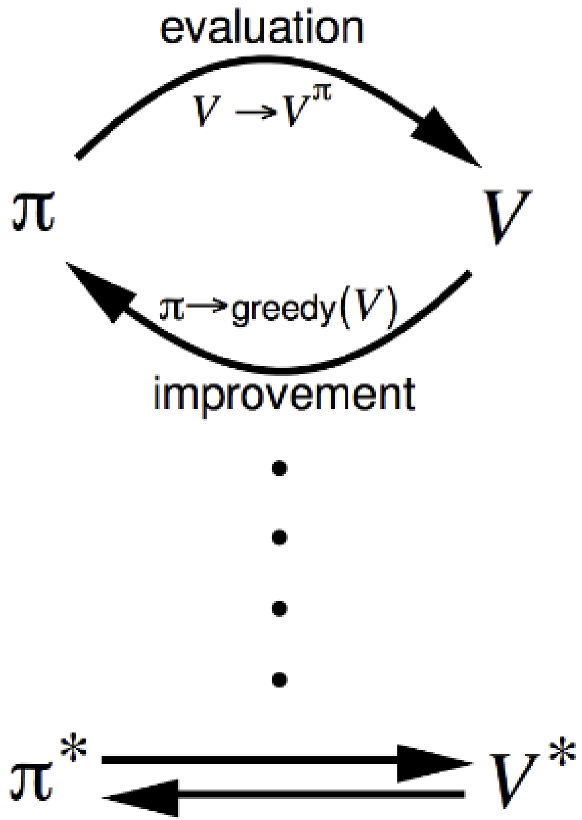
Frozen Lake cd.



- Celem agenta jest przejść z punktu S do Punktu G.
- Agent może iść po lodzie (pola oznaczone literą F), musi unikać wpadnięcia do przerębli (pola oznaczone jako H).
- Lód jest śliski; idąc przed siebie z pewnym prawdopodobieństwem p może się poślizgnąć i przesunąć w lewo lub w prawo w stosunku do swojej wyjściowej pozycji.

Monte Carlo Control





Policy evaluation Estimate v_π

Iterative policy evaluation

Policy improvement Generate $\pi' \geq \pi$

Greedy policy improvement

Źródło: http://www0.cs.ucl.ac.uk/staff/d.silver/web/Teaching_files/DP.pdf

Monte Carlo Control

- Problematyczny jest też fakt zapewnienia odpowiedniej ilości epizodów na podstawie których możliwe będzie oszacowanie $Q(s, a)$.
    - **Eksploracja**
    - **Eksploatacja**

Monte Carlo Control

- Problematyczny jest też fakt zapewnienia odpowiedniej ilości epizodów na podstawie których możliwe będzie oszacowanie $Q(s, a)$.
  - **Eksploracja**
  - **Eksploatacja**
- Tradycyjny algorytm zachłanny bardzo szybko zacznie eksploatować rozwiązanie suboptymalne.

Monte Carlo Control

- **Strategia ϵ-zachłanna (ϵ-greedy)**
- Najprostszy algorytm pozwalający na zachowanie ciągłej eksploatacji w trakcie uczenia się.
- Zapewnia, że każda z dopuszczalnych m akcji będzie wybierana z niezerowym prawdopodobieństwem.
  - Z $\mathrm{p} = 1 - \epsilon$ wybierz akcję zachłannie.
  - W przeciwnym wypadku wybieraj losowo.

Monte Carlo Control

- **Strategia ϵ-zachłanna (ϵ-greedy)**

$$\pi(a|s) = \begin{cases} \frac{\epsilon}{m} + 1 \ - \epsilon, gdy \ a_* = \underset{a \in A}{\operatorname{argmax}} \, Q(s,a) \\ \quad \frac{\epsilon}{m}, w \ przeciwnym \ wypadku \end{cases}$$

Monte Carlo Control

- **On-policy**
  - Zoptymalizuj strategię π bazując na doświadczeniu próbkowanym na podstawie tej właśnie strategii. (*„ucz się na swoich błędach”*)
- **Off-policy**
  - Zoptymalizuj strategię π bazując na doświadczeniu próbkowanym z innych strategii μ. (*„ucz się na czyichś błędach”*)

Monte Carlo On Policy

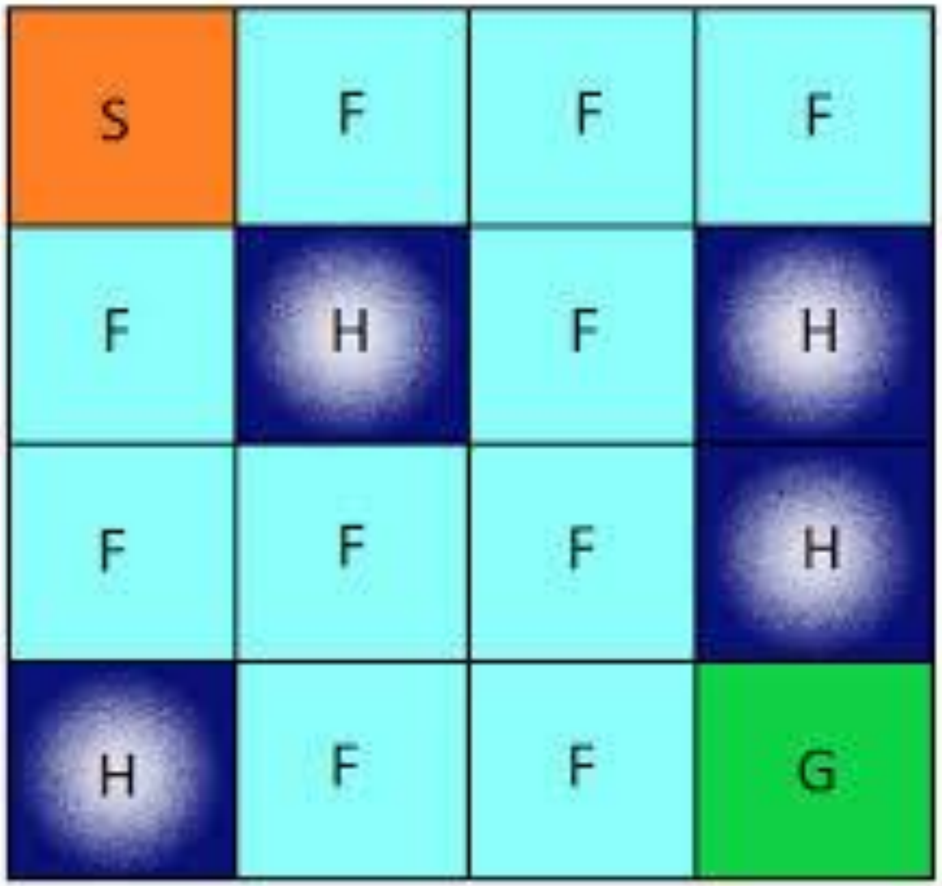
1. Zainicjuj algorytm wybierając dowolne początkowe wartości funkcji wartości, np. $Q_0(s,a) = 0\ \forall s,a$, wektor odwiedzin part stan i akcja: $N(s,a) = 0\ \forall s,a$ i dowolną ϵ-zachłanną strategię π.

2. W każdej iteracji k:
   - Wygeneruj epizod na podstawie strategii π: $\mathrm{s}_0, \mathrm{a}_0, \mathrm{r}_1, \dots, s_{T-1}, a_{T-1}, r_T$.
   - Przyjmij wartość skumulowanej przyszłej nagrody $R = 0$
   - Dla każdego $\mathrm{t} = \mathrm{T}-1, \mathrm{T}-2, \dots, 1, 0$:
     - Przypisz nową wartość $R = \beta R + r_{t+1}$
     - Jeżeli para $\mathrm{s}_\mathrm{t}, \mathrm{a}_\mathrm{t}$ nie występuje w $s_0, a_0, r_1, \dots, s_{t-1}, a_{t-1}$ (**jest pierwszym wystąpieniem**):
       - Uaktualnij licznik odwiedzin pary $\mathrm{s}_\mathrm{t}, \mathrm{a}_\mathrm{t}$:
       $$N(s_t, a_t) = N(s_t, a_t) + 1$$
       - Uaktualnij funkcję wartości akcji:
       $$Q(s_t, a_t) = Q(s_t, a_t) + \frac{1}{N(s,a)}\left(R - Q(s_t, a_t)\right)$$
       - Popraw zaproponowaną strategię zachowując się zachłannie:
       $$\pi(a|s) \leftarrow \begin{cases} 1 - \epsilon + \epsilon/|A(S_t)| \mid gdy\ a = \operatorname*{argmax}_{a \in A} Q(s,a) \\ \epsilon/|A(S_t)| \mid gdy\ a \neq \operatorname*{argmax}_{a \in A} Q(s,a) \end{cases} \quad \forall a \in A(S_t)$$

3. Gdy $n \to \infty$ to $\pi \approx \pi_*$

Przykład

Frozen Lake cd.



- Celem agenta jest przejść z punktu S do Punktu G.
- Agent może iść po lodzie (pola oznaczone literą F), musi unikać wpadnięcia do przerębli (pola oznaczone jako H).
- Lód jest śliski; idąc przed siebie z pewnym prawdopodobieństwem p może się poślizgnąć i przesunąć w lewo lub w prawo w stosunku do swojej wyjściowej pozycji.

Monte Carlo Off Policy

- Jednym z problemów związanych z uczeniem bezmodelowym jest to, że agent musi nauczyć zachowywać się optymalnie zgodnie z pewną optymalną strategią a zarazem eksplorować środowisko.
- W jaki sposób połączyć te dwa cele?

Monte Carlo Off Policy

- W przypadku uczenia on policy konieczny był pewien kompromis, zamiast zachowywać się zgodnie z zadaną deterministyczną strategią π agent korzystał z ϵ-zachłannej strategii π', takiej że $\pi'(a|s) > 0 \; \forall \; A(s)$.

Monte Carlo Off Policy

- W przypadku uczenia on policy konieczny był pewien kompromis, zamiast zachowywać się zgodnie z zadaną deterministyczną strategią π agent korzystał z ϵ-zachłannej strategii π', takiej że $\pi'(a|s) > 0 \; \forall \; A(s)$.
- Uczenie off policy jest dużo prostsze. Agent uczy się docelowej strategii (*target policy*) π za pomocą strategii kontrolującej zachowanie (*behavior policy*) μ takiej że
$$\pi(a|s) > 0 \;\rightarrow\; \mu(a|s) > 0 \; \forall \; A(s)$$
- Zakładamy, że obie strategię pokrywają taką samą przestrzeń (*assumption of coverage*).

Monte Carlo Off Policy

- Problemem jest to, że w ramach uczenia off policy chcemy nauczyć się jednej strategii za pomocą próbek generowanych z innej. Aby było to możliwe musimy wykorzystać technikę znaną jako próbkowanie ważności (*importance sampling*).

Importance sampling

- Prawdopodobieństwo wystąpienia trajektorii $\mathrm{s}_\tau, \mathrm{a}_\tau, \mathrm{r}_{\tau+1}, \dots, s_{T-1}, a_{T-1}, r_T$ w trakcie korzystania ze strategii π:

$$\Pr\{\mathrm{s}_\tau, \mathrm{a}_\tau, \mathrm{r}_{\tau+1}, \dots, s_{T-1}, a_{T-1}, r_T | s_t, a_t \sim \pi\} = \prod_{t=\tau}^{T} \pi(a_t|s_t) P(s_t, a_t, s_{t+1})$$

- Relatywne prawdopodobieństwo wystąpienia trajektorii zarówno w strategii celu π jak i strategii zachowania μ (*importance sampling ratio*):

$$\rho_{\tau:T-1} = \frac{\prod_{t=\tau}^{T} \pi(a_t|s_t) P(s_t, a_t, s_{t+1})}{\prod_{t=\tau}^{T} \pi(a_t|s_t) P(s_t, a_t, s_{t+1})}$$

Importance sampling

- **Ordinary importance sampling**
  - Przeskaluj wyniki korzystając z ρ i następnie uśrednij rezultat:

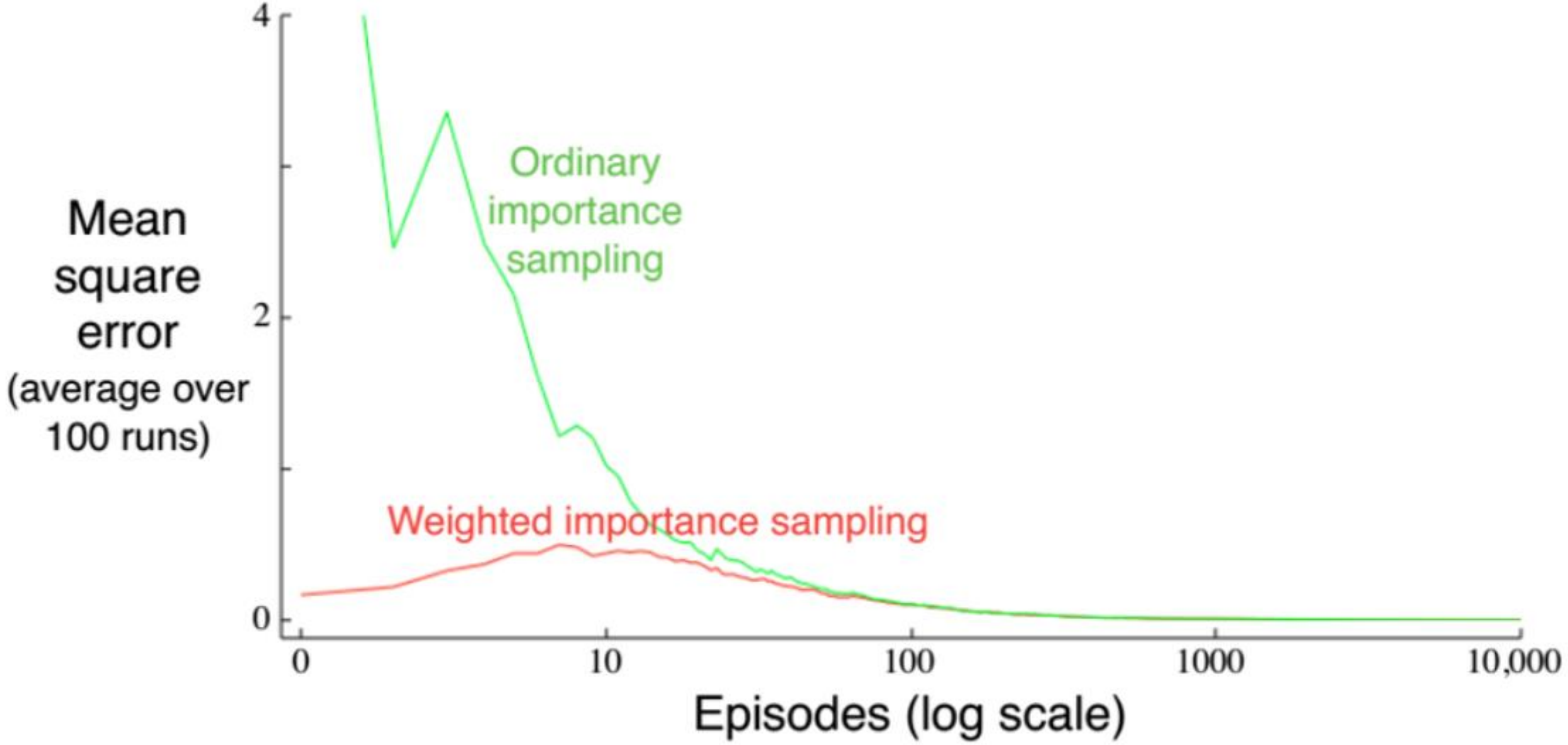
$$V(s) = \frac{\sum_{n \in N(S)} \rho_n R_n}{N(s)}$$

- **Weighted importance sampling**
  - Wyznacz średnią ważoną korzystając z ρ:

$$V(s) = \frac{\sum_{n \in N(S)} \rho_n R_n}{\sum_{n \in N(S)} \rho_n}$$

- Gdzie $N(s)$ to licznik odwiedzin stanu.

Importance sampling



Źródło: Richard S. Sutton and Andrew G. Barto, *Reinforcement learning, an introduction,* second edition

Monte Carlo Off Policy

1. Zainicjuj algorytm wybierając dowolne początkowe wartości funkcji wartości, np. $Q_0(s,a) = 0\ \forall s,a$, wektor odwiedzin part stan i akcja: $N(s,a) = 0\ \forall s,a$ i dowolną strategię π.

2. W każdej iteracji k:
   - Wygeneruj epizod na podstawie strategii μ: $\mathrm{s}_0, \mathrm{a}_0, \mathrm{r}_1, \dots, s_{T-1}, a_{T-1}, r_T$.
   - Przyjmij wartość skumulowanej przyszłej nagrody $R = 0$
   - Przyjmij wagę $\mathrm{W} = 1$
   - Dla każdego $\mathrm{t} = \mathrm{T}-1, \mathrm{T}-2, \dots, 1, 0$ gdy $\mathrm{W} \neq 0$:
     - Przypisz nową wartość $R = \beta R + r_{t+1}$
     - Jeżeli para $\mathrm{s_t}, \mathrm{a_t}$ nie występuje w $s_0, a_0, r_1, \dots, s_{t-1}, a_{t-1}$ (**jest pierwszym wystąpieniem**):
       - Uaktualnij licznik odwiedzin pary $\mathrm{s_t}, \mathrm{a_t}$:
         $$N(s_t, a_t) = N(s_t, a_t) + W$$
       - Uaktualnij funkcję wartości akcji:
         $$Q(s_t, a_t) = Q(s_t, a_t) + \frac{W}{N(s,a)}\left(R - Q(s_t, a_t)\right)$$
       - Popraw zaproponowaną strategię zachowując się zachłannie:
         $$\pi(a|s) \leftarrow \underset{a \in A}{\operatorname{argmax}}\, Q(s,a)$$
       - Jeżeli $a_t \neq \pi(s_t)$ przerwij pętlę (przejdź do kolejnego epizodu).
       - $W = \frac{W}{\mu(a_t|s_t)}$

3. Gdy $n \to \infty$ to $\pi \approx \pi_*$