Temporal Difference Learning

Temporal Difference Learning

- Równania Bellmana można rozwiązać analitycznie.
- Złożoność obliczeniowa sięga $\mathrm{O}(\mathrm{n}^3)$ gdzie n oznacza liczbę stanów.
- W przypadku rozwiązywania dużych problemów istnieje wiele metod iteracyjnych:
  - Exhaustive search
  - Programowanie dynamiczne
  - Metody Monte Carlo
  - Temporal Difference Learning

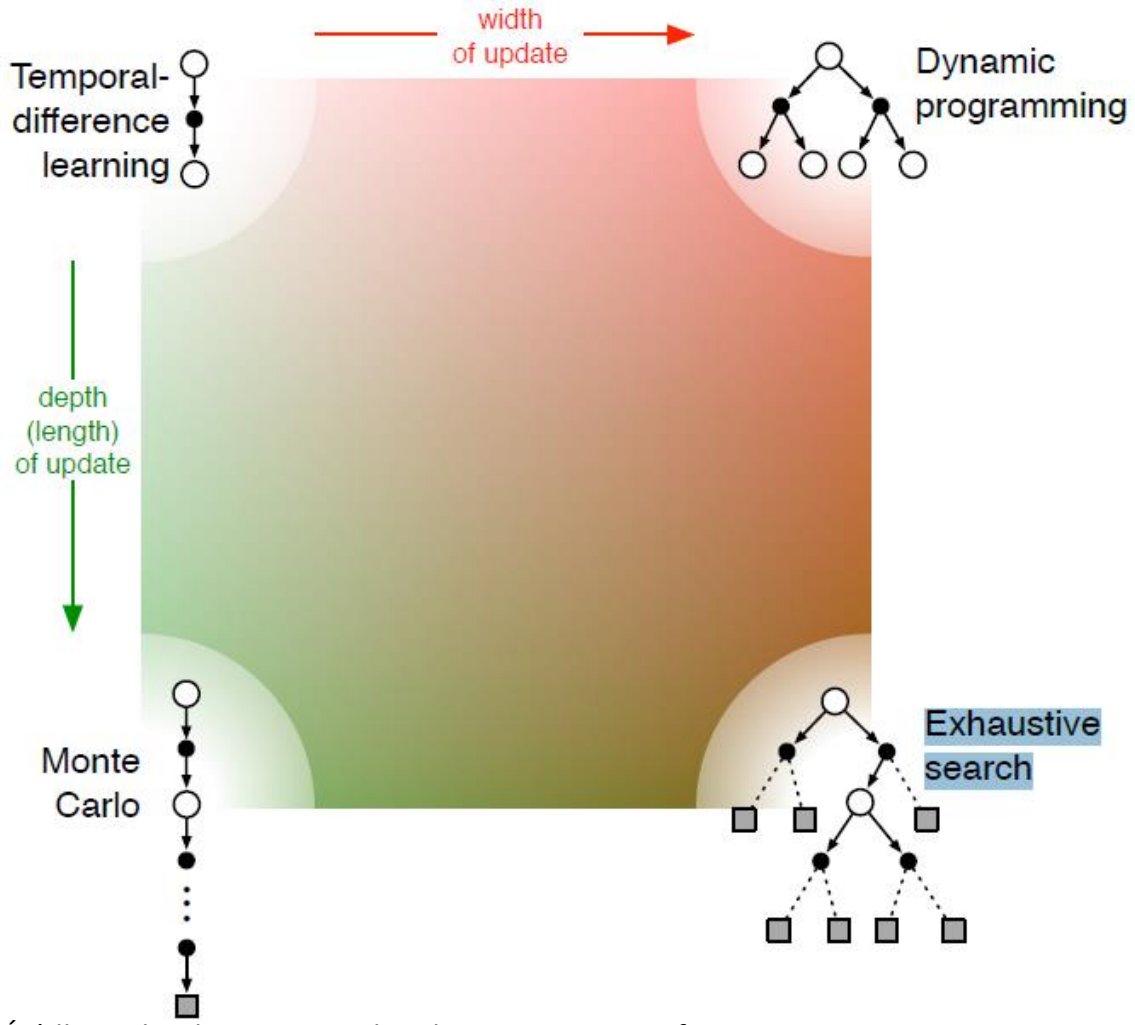
Temporal Difference Learning

- Temporal difference learning (co możemy przetłumaczyć na uczenie oparte na różnicach czasowych) jest grupą algorytmów, które w pewnym sensie łączy ze sobą sposób działania metod Monte Carlo i podejścia związanego z dynamicznym programowaniem.

Temporal Difference Learning

- Temporal difference learning (co możemy przetłumaczyć na uczenie operte na różnicach czasowych) jest grupą algorytmów, które w pewnym sensie łączy ze sobą sposób działania metod Monte Carlo i podejścia związanego z dynamicznym programowaniem.
- Metody TD polegają na uczeniu się zarówno na podstawie **doświadczenia**, jak i **oczekiwań**.

Temporal Difference Learning



Źródło: Richard S. Sutton and Andrew G. Barto, *Reinforcement learning, an introduction,* second edition

Temporal Difference Learning

- Najprostszy algorytm ($TD(0)$):

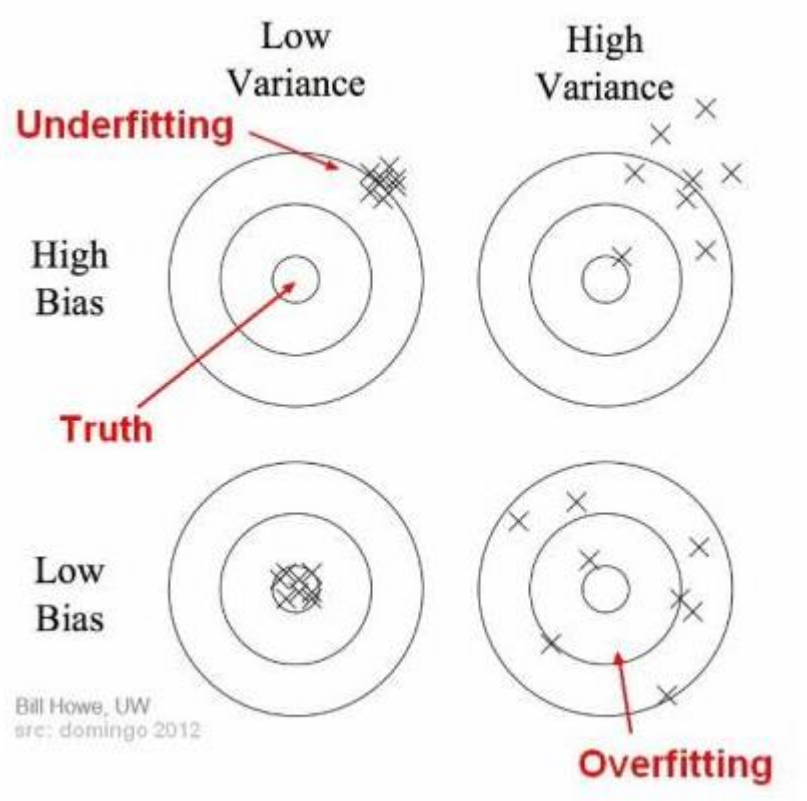
$$V_\tau(s_t) = V_{\tau-1}(s_t) + \alpha\left(r_{t+1} + \beta V_{\tau-1}(s_{t+1}) - V_{\tau-1}(s_t)\right)$$

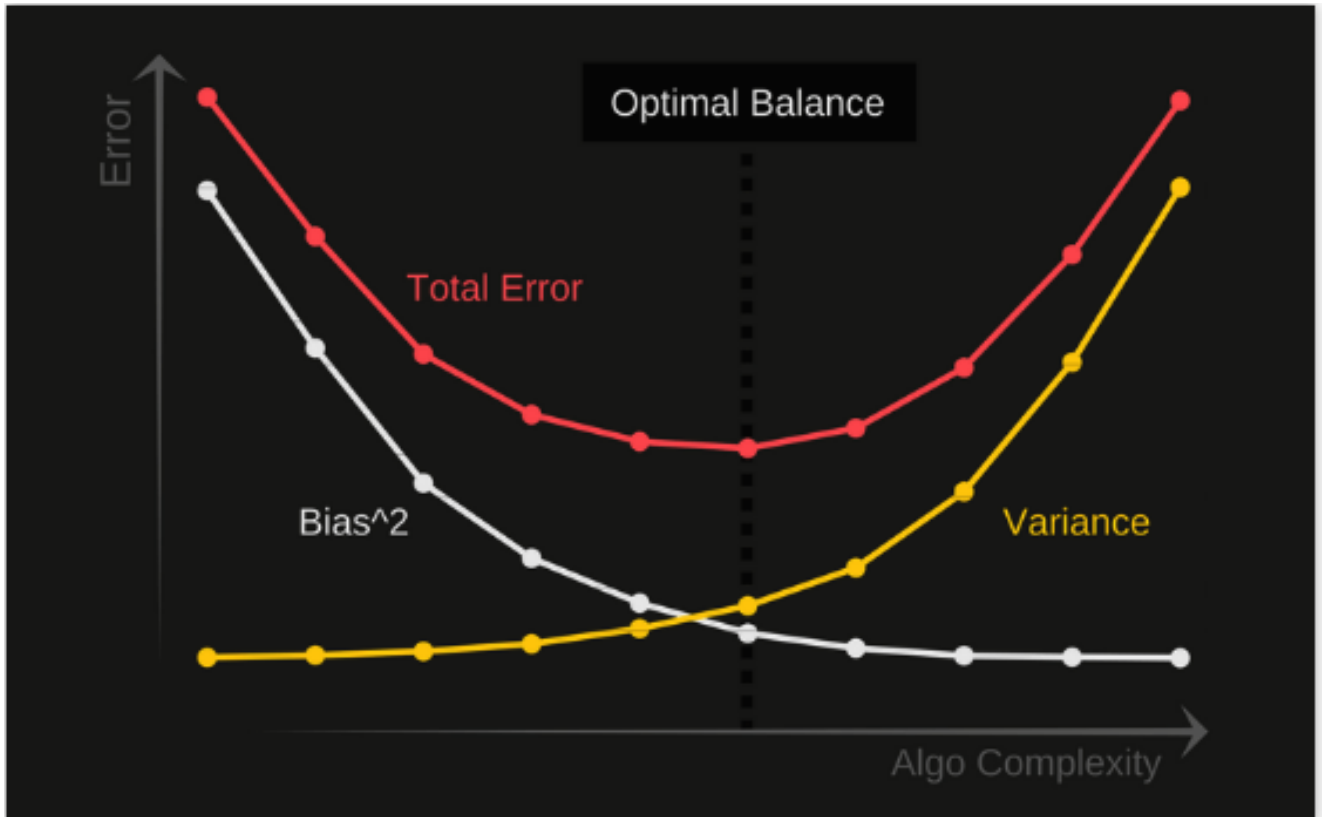
TD vs. MC

Temporal difference learning:	**Metody Monte Carlo**:
• Uczy się w trakcie trwania epizodu. • Oznacza to, że metoda może się uczyć nawet w przypadku problemów z nieskończonym horyzontem czasowym	• Uaktualnianie dzieje się po skończeniu epizodu.
• Jest obciążonym estymatorem, posiada jednak niską wariancję .	• Ma bardzo wysoką wariancję, zerowe obciążenie.

• Dużo wrażliwszy na stan początkowy.
• Zbiega do estymatora największej wiarygodności (MLE) procesu decyzyjnego Markowa opisującego problem:
  • Estymata $\left(S, A, \hat{P}, \hat{R}, \beta\right)$ najlepiej dopasowana do doświadczenia zbieranego w trakcie uczenia się
• Efektywnie wykorzystuje własność Markowa.
	• Niewrażliwy na stan początkowy,
	• Zbiega do rozwiązania z najmniejszym błędem średniokwadratowym:
	  • Dopasowuje się do obserwowanych w trakcie epizodów nagród: $\mathrm{MSE} = \sum_{k=1}^{n} \sum_{t=1}^{\mathrm{T}_k} \left(R_t^k - V(S_t^k)\right)^2$
	• Nie opiera się na własności Markowa, dzięki czemu możliwe jest rozwiązywanie problemów nie będących procesami decyzyjnymi Markowa.

Bias-Variance Tradeoff



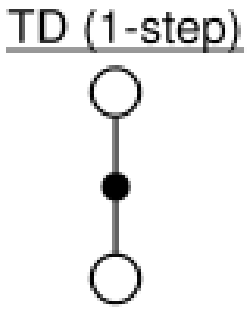


Źródło: https://towardsdatascience.com/understanding-the-bias-variance-tradeoff-165e6942b229

Temporal Difference Learning

- Zdefiniowaliśmy algorytm TD dla najprostszego przypadku, gdy agent rozpatruje jedynie jeden okres w przód ($TD(0)$):

$$V_\tau(s_t) = V_{\tau-1}(s_t) + \alpha\left(r_{t+1} + \beta V_{\tau-1}(s_{t+1}) - V_{\tau-1}(s_t)\right)$$



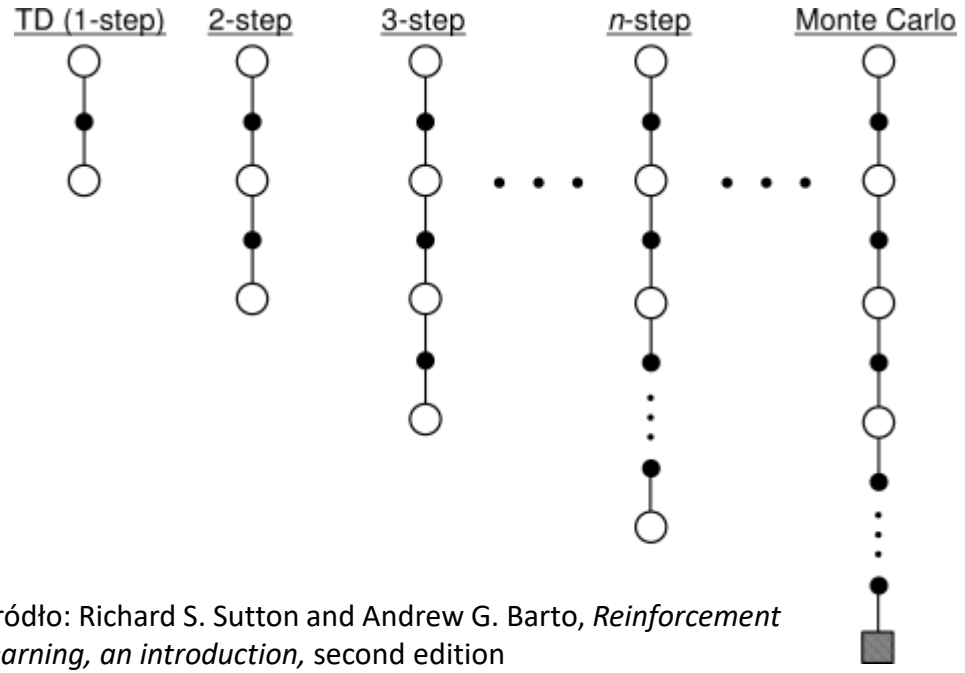
Źródło: Richard S. Sutton and Andrew G. Barto, *Reinforcement learning, an introduction,* second edition

Temporal Difference Learning

- Zdefiniowaliśmy algorytm TD dla najprostszego przypadku, gdy agent rozpatruje jedynie jeden okres w przód ($TD(0)$):

$$V_\tau(s_t) = V_{\tau-1}(s_t) + \alpha\left(r_{t+1} + \beta V_{\tau-1}(s_{t+1}) - V_{\tau-1}(s_t)\right)$$

- Co jeśli interesowałoby nas patrzenie n kroków przód?



Źródło: Richard S. Sutton and Andrew G. Barto, *Reinforcement learning, an introduction,* second edition

Temporal Difference Learning

$$
\begin{aligned}
n = 1: &\qquad R_t^{(1)} = r_{t+1} + \beta V_{\tau-1}(s_{t+1}) \\
n = 2: &\qquad R_t^{(2)} = r_{t+1} + \beta r_{t+2} + \beta^2 V_{\tau-1}(s_{t+2}) \\
&\quad \vdots \qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \\
n = \infty: &\qquad R_t^{(\infty)} = r_{t+1} + \beta r_{t+2} + \beta^2 r_{t+3} + \cdots + \beta^{T-1} r_T
\end{aligned}
$$

- $TD(n)$:

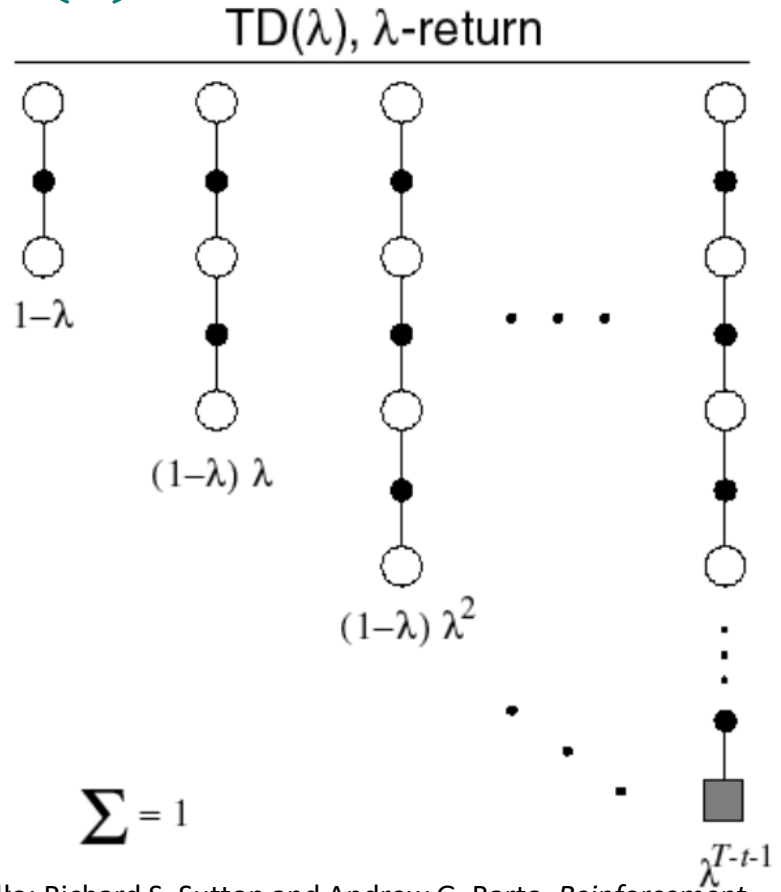
$$V_\tau(s_t) = V_{\tau-1}(s_t) + \alpha\left(R_t^{(n)} - V_{\tau-1}(s_t)\right)$$

Temporal Difference Learning

- Wiemy już, że możemy kontrolować długość doświadczenia z którego korzysta agent.
- Możemy też ważyć różne łańcuchy doświadczenia aby dostać efektywniejszą estymację funkcji wartości.

Temporal Difference Learning

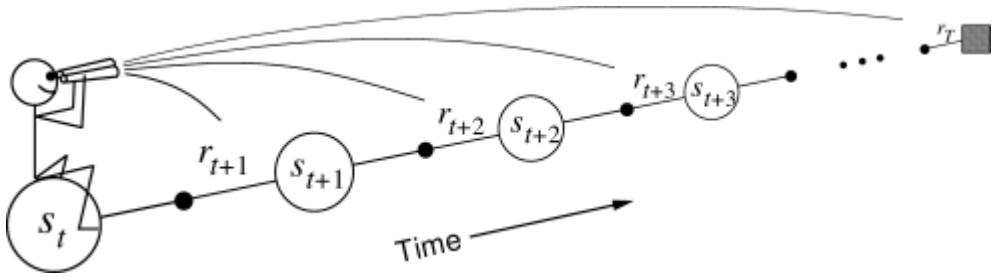
- Możemy też ważyć różne łańcuchy doświadczenia aby dostać efektywniejszą estymację funkcji wartości ($TD(\lambda)$):
- $R_t^{\lambda} = (1 - \lambda) \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^{n-1} R_t^{(n)}$
- $V_{\tau}(s_t) = V_{\tau-1}(s_t) + \alpha \left(R_t^{\lambda} - V_{\tau-1}(s_t) \right)$
- $\lambda = 0 \rightarrow TD(0)$
- $\lambda = 1 \rightarrow MC$



Źródło: Richard S. Sutton and Andrew G. Barto, *Reinforcement learning, an introduction,* second edition

Temporal Difference Learning

- **Forward view**

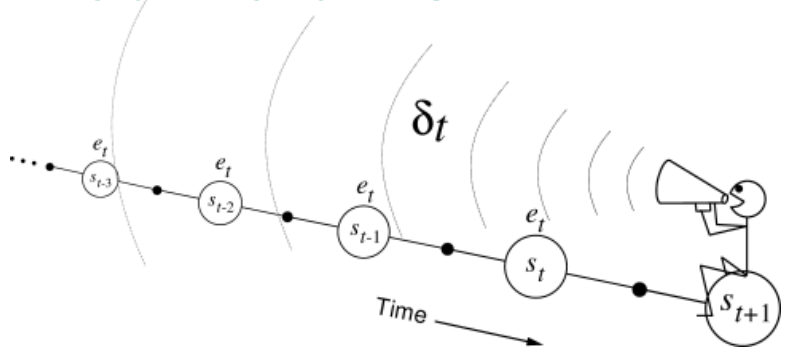


Źródło: Richard S. Sutton and Andrew G. Barto, *Reinforcement learning, an introduction,* second edition

- Uaktualnij funkcję wartości idąc w przód.
- Tak jak metody Monte Carlo może być stosowane jedynie pod koniec epizodu.

Temporal Difference Learning

- **Backward view**

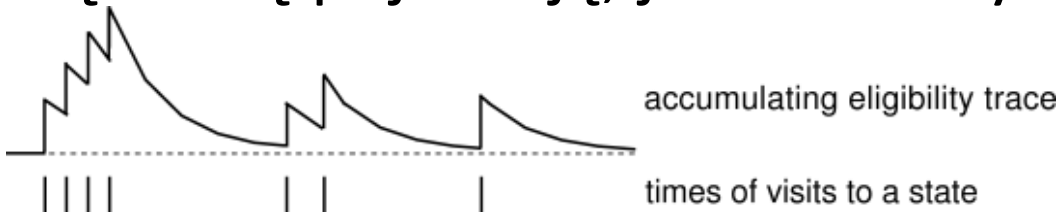


Źródło: Richard S. Sutton and Andrew G. Barto, *Reinforcement learning, an introduction,* second edition

- Uaktualnij funkcję wartości zaczynając od końca.
- Dzięki temu wartości funkcji $V(s)$ mogą być uaktualniane w każdym kroku t.
- Jak jednak ważyć przeszłe stany?

Temporal Difference Learning

- **Backward view**
- Można to zrobić za pomocą mechanizmu śladów wybieralności (*Eligibility traces*)
- Dzięki niemu jesteśmy w stanie oceniać stany ze względu na to jak często się pojawiają, jak i to kiedy ostatni raz w nich byliśmy:



Źródło: Richard S. Sutton and Andrew G. Barto, *Reinforcement learning, an introduction,* second edition

- Dzięki temu w każdym kroku t możemy uaktualnić ślad dla stanu s:

$$e_t(s) = \begin{cases} \gamma\lambda e_{t-1}(s) & \text{if } s \neq s_t; \\ \gamma\lambda e_{t-1}(s) + 1 & \text{if } s = s_t, \end{cases}$$

Źródło: Richard S. Sutton and Andrew G. Barto, *Reinforcement learning, an introduction,* second edition

Temporal Difference Learning

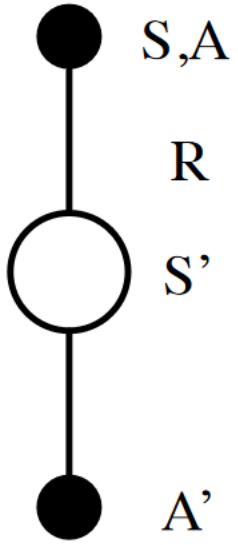
- **Backward view**
- Znając wartość $e_t(s)$ w prosty sposób możemy uaktualnić $V(s_t)$:

$$V_\tau(s_t) = V_{\tau-1}(s_t) + \alpha e_t(s)\big(R_t - V_{\tau-1}(s_t)\big)$$

Temporal Difference Learning

- **On-policy**
  - SARSA
- **Off-policy**
  - Q- learning

SARSA



$$Q(S,A) \leftarrow Q(S,A) + \alpha\left(R + \gamma Q(S',A') - Q(S,A)\right)$$

Źródło: http://www0.cs.ucl.ac.uk/staff/d.silver/web/Teaching_files/control.pdf

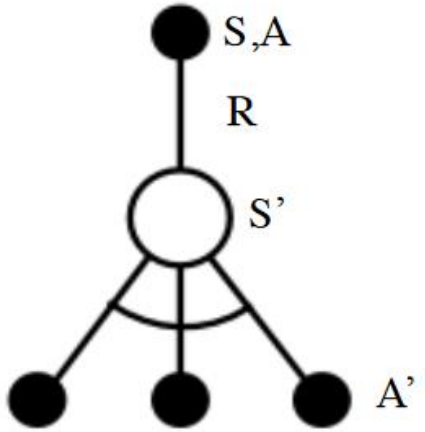
SARSA

1. Zainicjuj algorytm wybierając dowolne początkowe wartości funkcji wartości, np. $Q_0(s,a) = 0\ \forall s$,a i $0 < \epsilon < 1$.
2. W każdej iteracji k:
   - Wyznacz stan początkowy S i akcję A za pomocą strategii wyprowadzonej z Q (np. ϵ-zachłannej).
   - Dla każdego S, A należącego do epizodu:
     - Podejmij akcję A i zaobserwuj nagrodę R i stan S'.
     - Wybierz A' za pomocą strategii wyprowadzonej z Q (np. ϵ-zachłannej).
     - Uaktualnij wartość funkcji $Q_k(S,A)$:
       $$Q_k(S,A) = Q_{k-1}(S,A) + \alpha(R + \beta Q_{k-1}(S',A')\ - Q_{k-1}(S,A))$$
     - Przyjmij, że: $\mathrm{S} = S'$ i $\mathrm{A} = A'$; kontynuuj działanie aż osiągniesz stan terminalny.

SARSA

- Algorytm SARSA można uogólnić:
  - $\boldsymbol{SARSA(n)}$
  - $\boldsymbol{SARSA(\lambda)}$

Q-learning



$$Q(S,A) \leftarrow Q(S,A) + \alpha \left(R + \gamma \max_{a'} Q(S',a') - Q(S,A) \right)$$

Źródło: http://www0.cs.ucl.ac.uk/staff/d.silver/web/Teaching_files/control.pdf

Q-learning

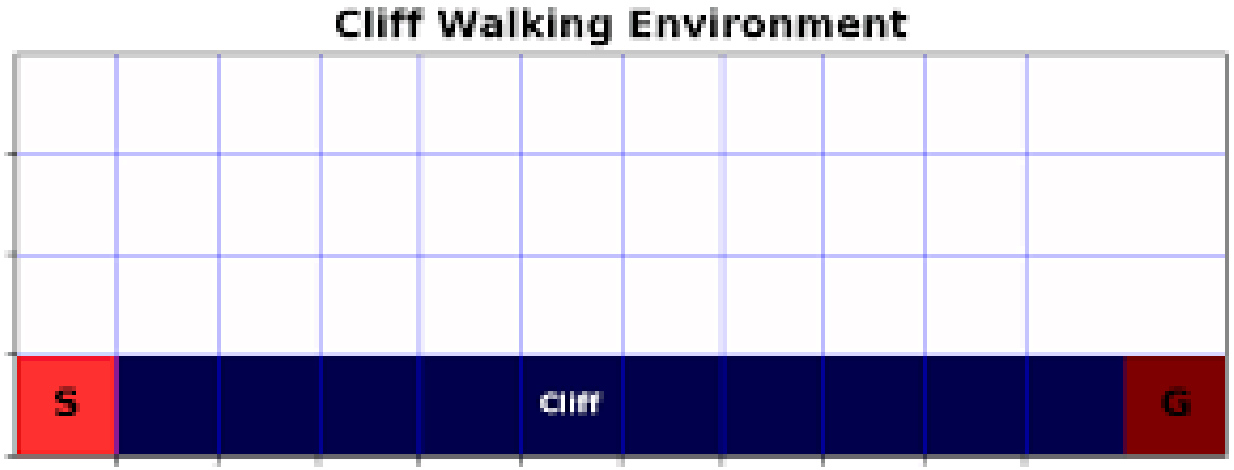
1. Zainicjuj algorytm wybierając dowolne początkowe wartości funkcji wartości, np. $Q_0(s,a) = 0\ \forall s$,a i $0 < \epsilon < 1$.
2. W każdej iteracji k:
   - Wyznacz stan początkowy S
   - Dla każdego S należącego do epizodu:
     - Wyznacz akcję A za pomocą strategii wyprowadzonej z Q (np. ϵ-zachłannej).
     - Podejmij akcję A i zaobserwuj nagrodę R i stan S'.
     - Uaktualnij wartość funkcji $Q(S,A)$:
       $$Q_k(S,A) = Q_{k-1}(S,A) + \alpha(R + \beta \max_a Q_{k-1}(S',a)\ - Q_{k-1}(S,A))$$
     - Przyjmij, że: $S = S'$; kontynuuj działanie aż osiągniesz stan terminalny.

Q-learning

- Możliwe modyfikacje:
  - **Watkin' s** $\mathbf{Q}(\boldsymbol{\lambda})$
  - ***Opposition*–based** $\mathbf{Q}(\boldsymbol{\lambda})$

Przykład

Cliff Learning



Źródło: https://yun-long.github.io/2017/11/RL_CW_TD/

- Celem agenta jest przejść z punktu S do Punktu G.
- Agent może iść po białych polach musi uniknąć spadnięcia z klifu (pola granatowe).
- Tym razem świat jest w pełni deterministyczny.

Warunki zbieżności

- Algorytm zbiega do rozwiązania optymalnego $Q_*(s,a)$ gdy:
- *Greedy in the Limit with Infinite Exploration* (GLIE):
  - Wszystkie pary s, a są odwiedzone nieskończoną liczbę razy:

$$\lim_{k\to\infty} N_k(s,a) = \infty$$

  - Strategia zbiega do strategii zachłannej:

$$\lim_{k\to\infty} \pi_k(a|s) = \mathrm{I}(a_* = \operatorname*{argmax}_{a\in A} Q_k(s,a))$$

    - np. gdy ustalimy, że $\epsilon = \frac{1}{k}$
- Stopa uczenia się α spełnia warunek Robbinsa-Monro:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k = \infty$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k^2 < \infty$$

Współczynnik eksploracji ϵ

- W przypadku uczenia bezmodelowego (metody Monte Carlo, uczenie różnicowe) chcemy zachować balans pomiędzy **eksploracją** a **eksploatacją**.
- Przyjęcie stałej wartości współczynnika eksploracji ϵ jest dużym uproszczeniem z dwóch podstawowych powodów:
  - W początkowych fazach procesu uczenia chcemy żeby agent eksplorował możliwie jak najwięcej w celu zdobycia możliwie jak najpełniejszej informacji na temat otaczającego go świata.
  - Ale później, gdy jego strategia zaczyna zbiegać do strategii optymalnej, chcemy żeby jego zachowania były możliwie jak najbliższe optymalnej strategii – dzięki temu będzie on maksymalizował swoją użyteczność w każdym kolejnym epizodzie.
- Dlatego zazwyczaj przyjmujemy, że ϵ maleje z czasem.

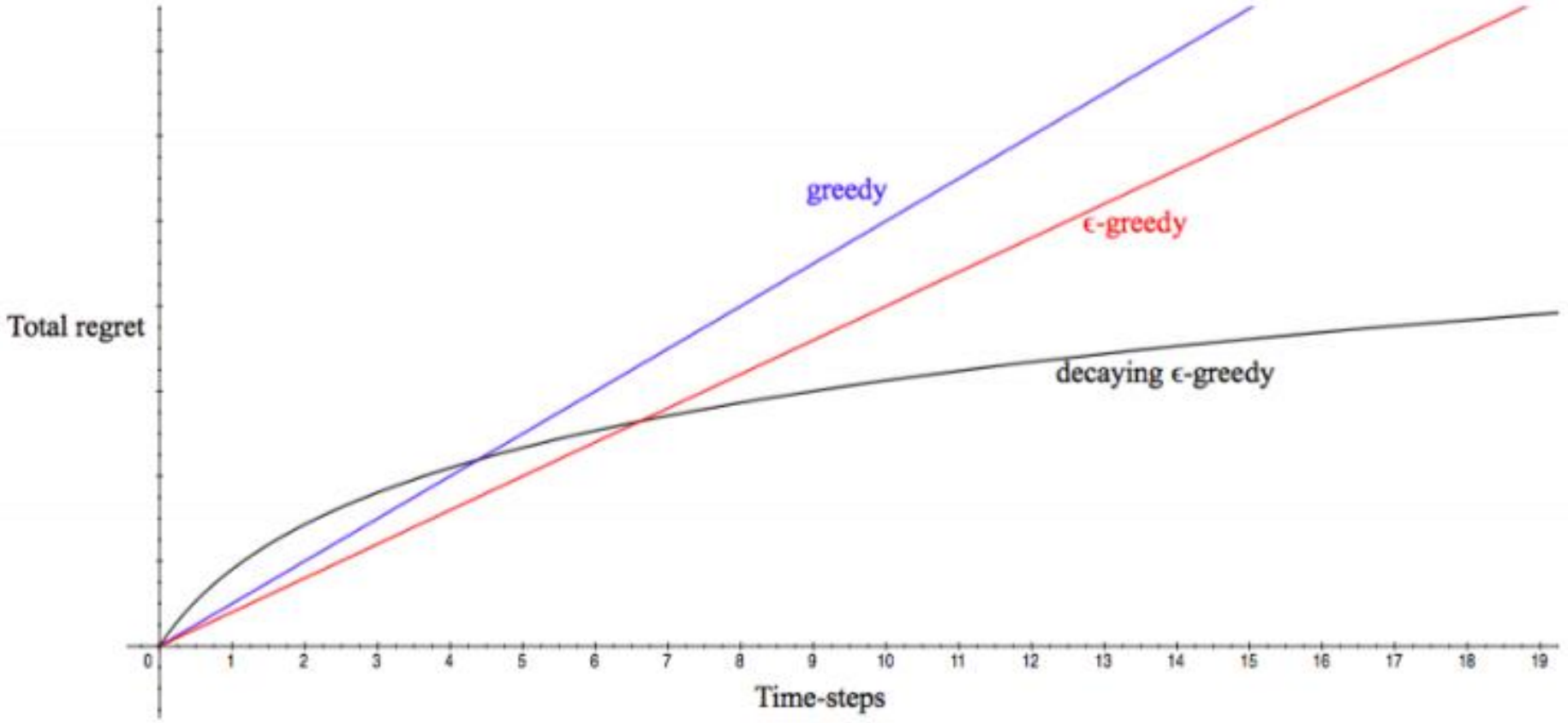
Współczynnik eksploracji ϵ

- Aby lepiej to zrozumieć zdefiniujmy pojęcie **żalu:**

$$Reg_N = NE[R(A^*)] - \sum_{k=1}^{N} R_k(A_k)$$

gdzie A^* oznacza zbiór optymalnych akcji, A_k zbiór akcji podjętych w k-tym epizodzie a $R(\cdot)$ skumulowaną nagrodę z danego epizodu.

Współczynnik eksploracji ϵ



Źródło: https://towardsdatascience.com/exploration-in-reinforcement-learning-e59ec7eeaa75

Współczynnik eksploracji ϵ

- Jak w takim razie kontrolować proces eksploracji?
  - $\epsilon = \frac{1}{k}$ - poprawny teoretycznie, w praktyce problematyczny
  - ϵ malejący liniowo – spada wolniej niż $\epsilon = \frac{1}{k}$, łatwiej go kontrolować
  - Dodać proces wypalania – agent przez pierwsze n iteracji zachowuje się całkowicie losowo, dopiero później zaczyna podejmować decyzję zgodnie ze strategią ϵ-zachłanną:

$$\epsilon = \begin{cases} 1 \; gdy \; k < n \\ \frac{1}{k} \; gdy \; k \geq n \end{cases}$$

  - Zamiast definiować ϵ zastosować **górną granicę ufności** *(upper confidence bound)*.

Upper Confidence Bound

- **Górną granicę ufności** *(upper confidence bound, UBC)*, dla epizodu t, stanu s i akcji a definiujemy jako:

$$U_t(s,a) = \sqrt{\frac{2\ln t}{N_t(s,a)}}$$

gdzie $N_t(s,a)$ jest licznikiem odwiedzin pary s, a.

- Przy tak zdefiniowanym $U_t(s,a)$ agent wybiera akcję zachłannie maksymalizując:

$$a^* = \underset{a \in A}{\operatorname{argmax}}(Q_t(s,a) + U_t\,(s,a))$$