

Temporal Difference Learning

Temporal Difference Learning

- Równania Bellmana można rozwiązać analitycznie.
- Złożoność obliczeniowa sięga $O(n^3)$ gdzie n oznacza liczbę stanów.
- W przypadku rozwiązywania dużych problemów istnieje wiele metod iteracyjnych:
 - Exhaustive search
 - Programowanie dynamiczne
 - Metody Monte Carlo
 - Temporal Difference Learning

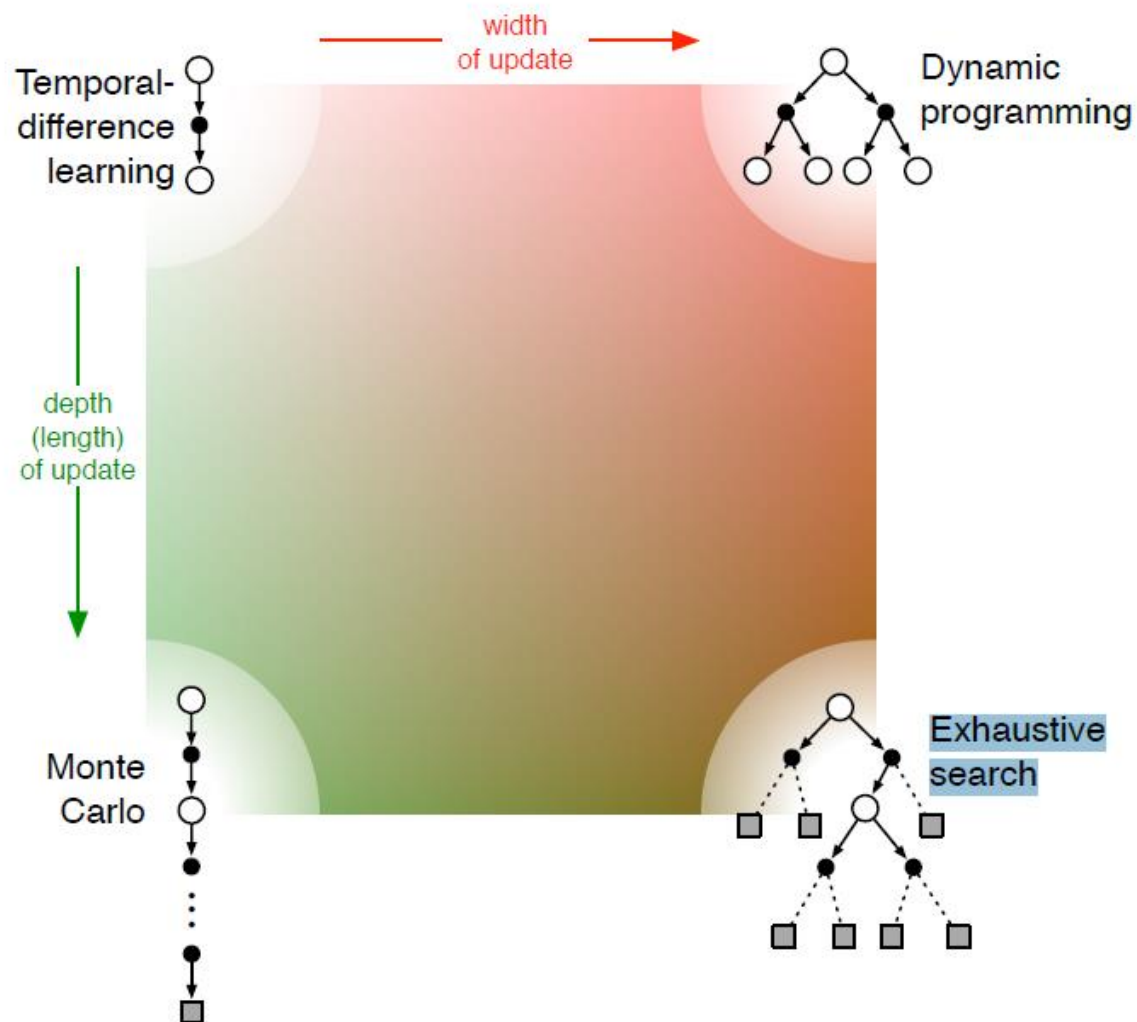
Temporal Difference Learning

- Temporal difference learning (co możemy przetłumaczyć na uczenie oparte na różnicach czasowych) jest grupą algorytmów, które w pewnym sensie łączy ze sobą sposób działania metod Monte Carlo i podejścia związanego z dynamicznym programowaniem.

Temporal Difference Learning

- Temporal difference learning (co możemy przetłumaczyć na uczenie oparte na różnicach czasowych) jest grupą algorytmów, które w pewnym sensie łączy ze sobą sposób działania metod Monte Carlo i podejścia związanego z dynamicznym programowaniem.
- Metody TD polegają na uczeniu się zarówno na podstawie **doświadczenia**, jak i **oczekiwań**.

Temporal Difference Learning



Źródło: Richard S. Sutton and Andrew G. Barto, *Reinforcement learning, an introduction*, second edition

Temporal Difference Learning

- Najprostszy algorytm ($TD(0)$):

$$V_{\tau}(s_t) = V_{\tau-1}(s_t) + \alpha(r_{t+1} + \beta V_{\tau-1}(s_{t+1}) - V_{\tau-1}(s_t))$$

TD vs. MC

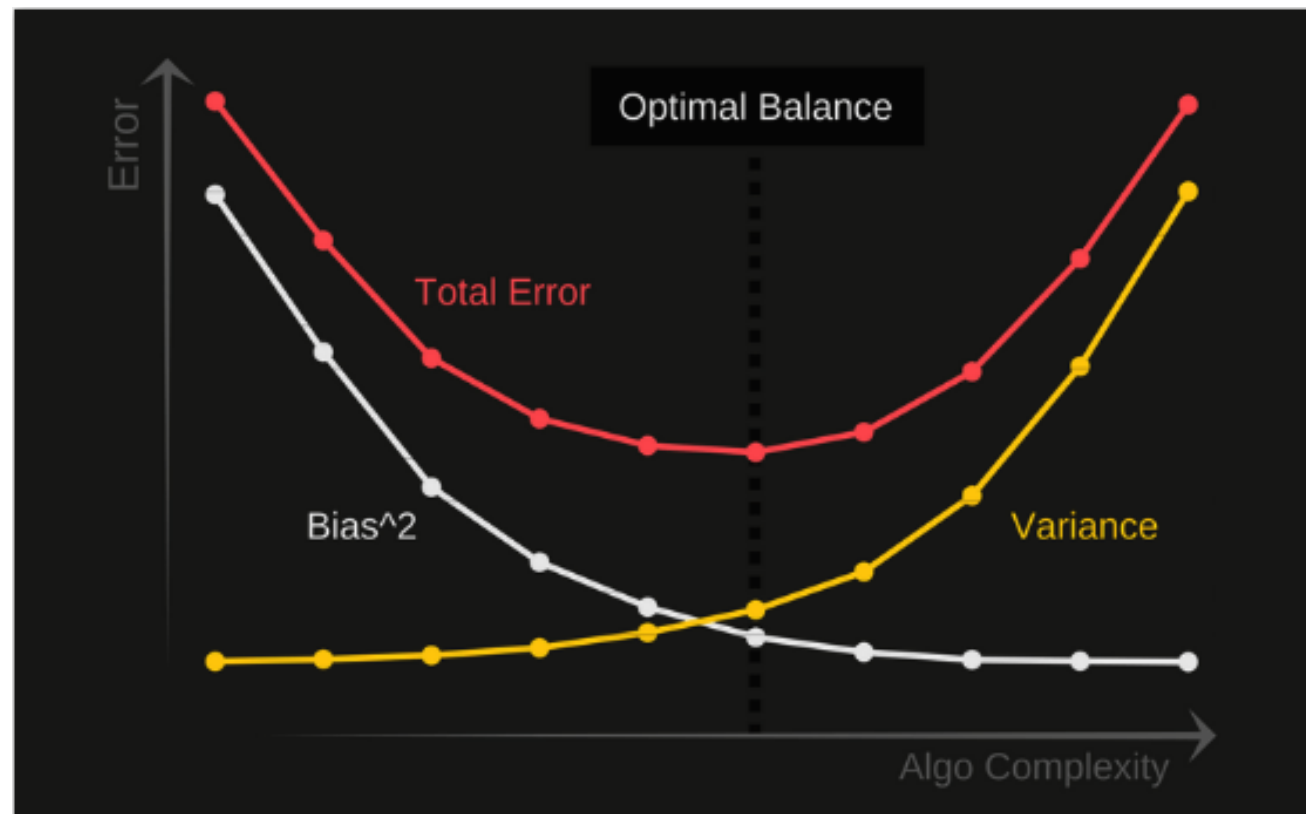
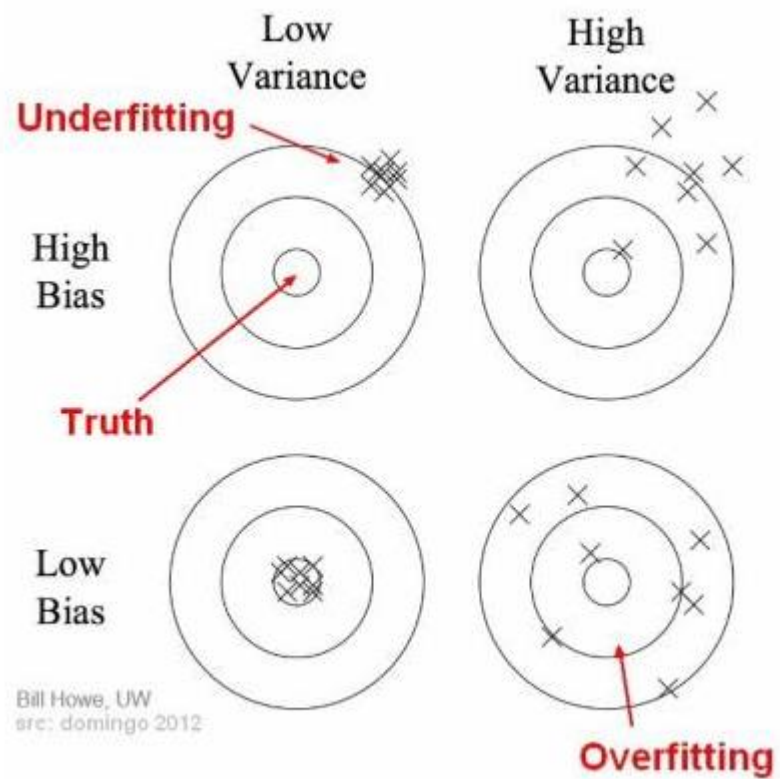
Temporal difference learning:

- Uczy się w trakcie trwania epizodu.
 - Oznacza to, że metoda może się uczyć nawet w przypadku problemów z nieskończonym horyzontem czasowym
- Jest obciążonym estymatorem, posiada jednak niską wariancję .
- Dużo wrażliwszy na stan początkowy.
- Zbiega do estymatora największej wiarygodności (MLE) procesu decyzyjnego Markowa opisującego problem:
 - Estymata $(S, A, \hat{P}, \hat{R}, \beta)$ najlepiej dopasowana do doświadczenia zbieranego w trakcie uczenia się
- Efektywnie wykorzystuje własność Markowa.

Metody Monte Carlo:

- Uaktualnianie dzieje się po skończeniu epizodu.
- Ma bardzo wysoką wariancję, zerowe obciążenie.
- Niewrażliwy na stan początkowy,
- Zbiega do rozwiązania z najmniejszym błędem średniokwadratowym:
 - Dopasowuje się do obserwowanych w trakcie epizodów nagród:
$$\text{MSE} = \sum_{k=1}^n \sum_{t=1}^{T_k} (R_t^k - V(S_t^k))^2$$
- Nie opiera się na własności Markowa, dzięki czemu możliwe jest rozwiązywanie problemów nie będących procesami decyzyjnymi Markowa.

Bias-Variance Tradeoff



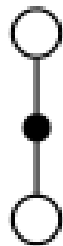
Źródło: <https://towardsdatascience.com/understanding-the-bias-variance-tradeoff-165e6942b229>

Temporal Difference Learning

- Zdefiniowaliśmy algorytm TD dla najprostszego przypadku, gdy agent rozpatruje jedynie jeden okres w przód ($TD(0)$):

$$V_{\tau}(s_t) = V_{\tau-1}(s_t) + \alpha(r_{t+1} + \beta V_{\tau-1}(s_{t+1}) - V_{\tau-1}(s_t))$$

TD (1-step)



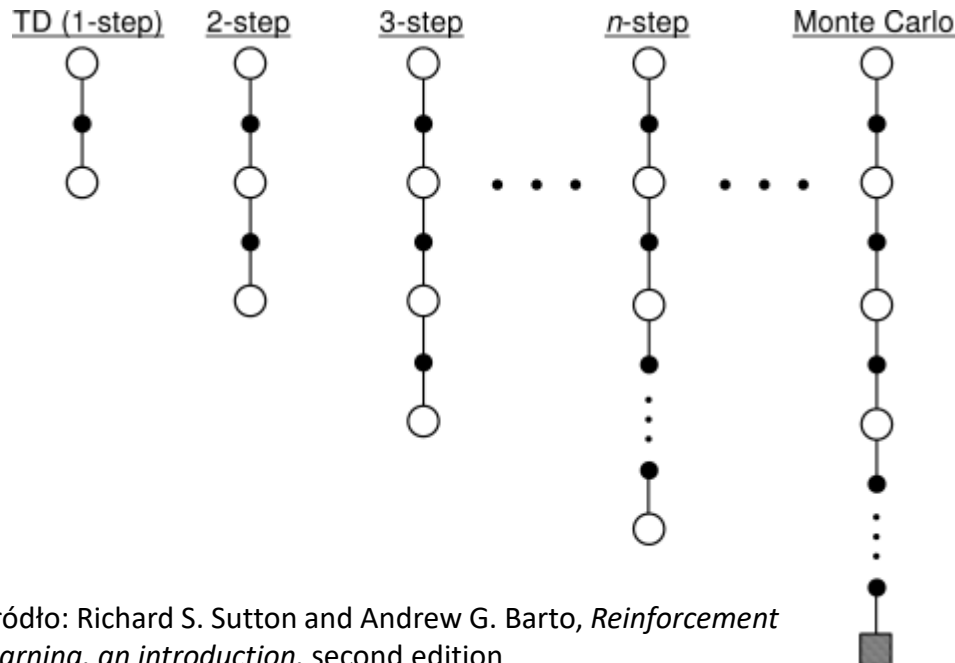
Źródło: Richard S. Sutton and Andrew G. Barto, *Reinforcement learning, an introduction*, second edition

Temporal Difference Learning

- Zdefiniowaliśmy algorytm TD dla najprostszego przypadku, gdy agent rozpatruje jedynie jeden okres w przód ($TD(0)$):

$$V_{\tau}(s_t) = V_{\tau-1}(s_t) + \alpha(r_{t+1} + \beta V_{\tau-1}(s_{t+1}) - V_{\tau-1}(s_t))$$

- Co jeśli interesowałoby nas patrzenie n kroków przód?



Temporal Difference Learning

$$\begin{aligned} n = 1: & \quad R_t^{(1)} = r_{t+1} + \beta V_{\tau-1}(s_{t+1}) \\ n = 2: & \quad R_t^{(2)} = r_{t+1} + \beta r_{t+2} + \beta^2 V_{\tau-1}(s_{t+2}) \\ & \quad \vdots \\ n = \infty: & \quad R_t^{(\infty)} = r_{t+1} + \beta r_{t+2} + \beta^2 r_{t+3} + \cdots + \beta^{T-1} r_T \end{aligned}$$

- $TD(n)$:

$$V_{\tau}(s_t) = V_{\tau-1}(s_t) + \alpha \left(R_t^{(n)} - V_{\tau-1}(s_t) \right)$$

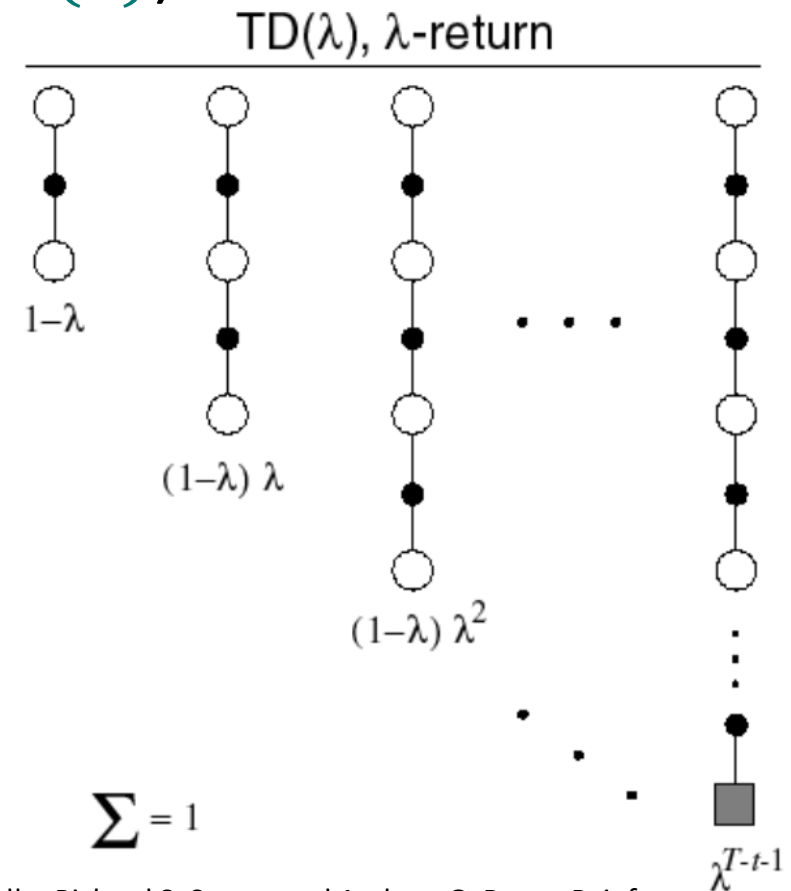
Temporal Difference Learning

- Wiemy już, że możemy kontrolować długość doświadczenia z którego korzysta agent.
- Możemy też ważyć różne łańcuchy doświadczenia aby dostać efektywniejszą estymację funkcji wartości.

Temporal Difference Learning

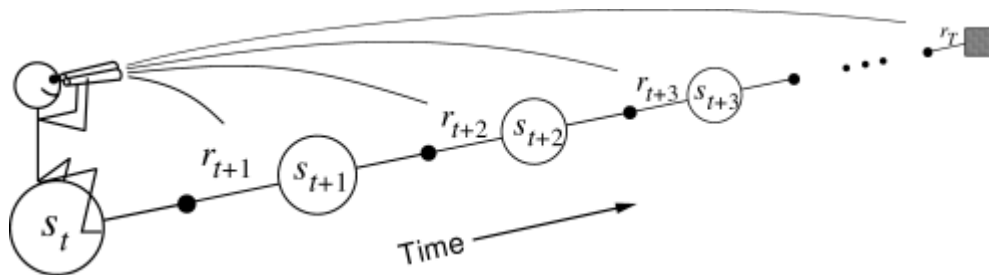
- Możemy też ważyć różne łańcuchy doświadczenia aby dostać efektywniejszą estymację funkcji wartości ($TD(\lambda)$):

- $R_t^\lambda = (1 - \lambda) \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^{n-1} R_t^{(n)}$
- $V_\tau(s_t) = V_{\tau-1}(s_t) + \alpha \left(R_t^\lambda - V_{\tau-1}(s_t) \right)$
- $\lambda = 0 \rightarrow TD(0)$
- $\lambda = 1 \rightarrow MC$



Temporal Difference Learning

- **Forward view**

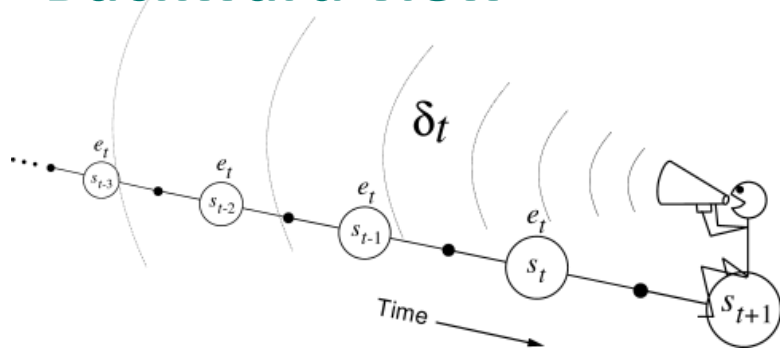


Źródło: Richard S. Sutton and Andrew G. Barto, *Reinforcement learning, an introduction*, second edition

- Uaktualnij funkcję wartości idąc w przód.
- Tak jak metody Monte Carlo może być stosowane jedynie pod koniec epizodu.

Temporal Difference Learning

- **Backward view**

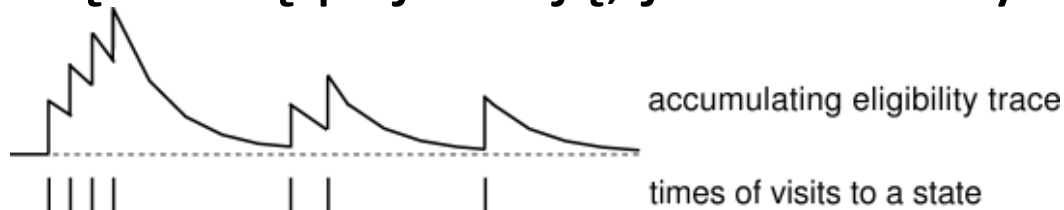


Źródło: Richard S. Sutton and Andrew G. Barto, *Reinforcement learning, an introduction*, second edition

- Uaktualnij funkcję wartości zaczynając od końca.
- Dzięki temu wartości funkcji $V(s)$ mogą być uaktualniane w każdym kroku t .
- Jak jednak ważyć przyszłe stany?

Temporal Difference Learning

- **Backward view**
- Można to zrobić za pomocą mechanizmu śladów wybieralności (*Eligibility traces*)
- Dzięki niemu jesteśmy w stanie oceniać stany ze względu na to jak często się pojawiają, jak i to kiedy ostatni raz w nich byliśmy:



Źródło: Richard S. Sutton and Andrew G. Barto, *Reinforcement learning, an introduction*, second edition

- Dzięki temu w każdym kroku t możemy uaktualnić ślad dla stanu s :

$$e_t(s) = \begin{cases} \gamma \lambda e_{t-1}(s) & \text{if } s \neq s_t; \\ \gamma \lambda e_{t-1}(s) + 1 & \text{if } s = s_t, \end{cases}$$

Źródło: Richard S. Sutton and Andrew G. Barto, *Reinforcement learning, an introduction*, second edition

Temporal Difference Learning

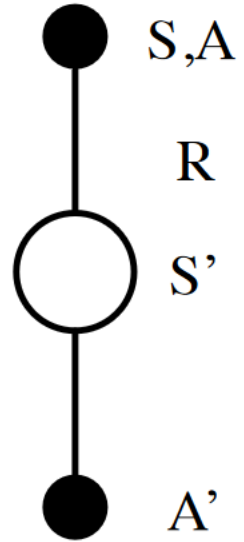
- **Backward view**
- Znając wartość $e_t(s)$ w prosty sposób możemy uaktualnić $V(s_t)$:

$$V_{\tau}(s_t) = V_{\tau-1}(s_t) + \alpha e_t(s)(R_t - V_{\tau-1}(s_t))$$

Temporal Difference Learning

- **On-policy**
 - SARSA
- **Off-policy**
 - Q- learning

SARSA



$$Q(S, A) \leftarrow Q(S, A) + \alpha (R + \gamma Q(S', A') - Q(S, A))$$

Źródło: http://www0.cs.ucl.ac.uk/staff/d.silver/web/Teaching_files/control.pdf

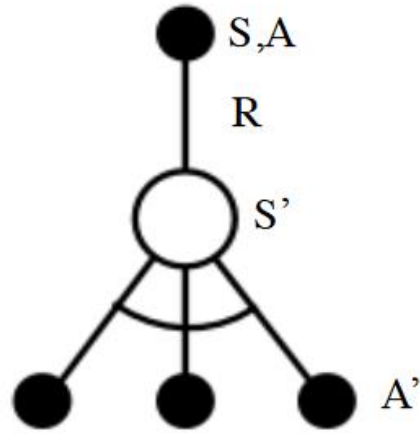
SARSA

1. Zainicjuj algorytm wybierając dowolne początkowe wartości funkcji wartości, np. $Q_0(s, a) = 0 \forall s, a$ i $0 < \epsilon < 1$.
2. W każdej iteracji k :
 - Wyznacz stan początkowy S i akcję A za pomocą strategii wyprowadzonej z Q (np. ϵ -zachłannej).
 - Dla każdego S, A należącego do epizodu:
 - Podejmij akcję A i zaobserwuj nagrodę R i stan S' .
 - Wybierz A' za pomocą strategii wyprowadzonej z Q (np. ϵ -zachłannej).
 - Uaktualnij wartość funkcji $Q_k(S, A)$:
$$Q_k(S, A) = Q_{k-1}(S, A) + \alpha(R + \beta Q_{k-1}(S', A') - Q_{k-1}(S, A))$$
 - Przyjmij, że: $S = S'$ i $A = A'$; kontynuuj działanie aż osiągniesz stan terminalny.

SARSA

- Algorytm SARSA można uogólnić:
 - ***SARSA(n)***
 - ***SARSA(λ)***

Q-learning



$$Q(S, A) \leftarrow Q(S, A) + \alpha \left(R + \gamma \max_{a'} Q(S', a') - Q(S, A) \right)$$

Źródło: http://www0.cs.ucl.ac.uk/staff/d.silver/web/Teaching_files/control.pdf

Q-learning

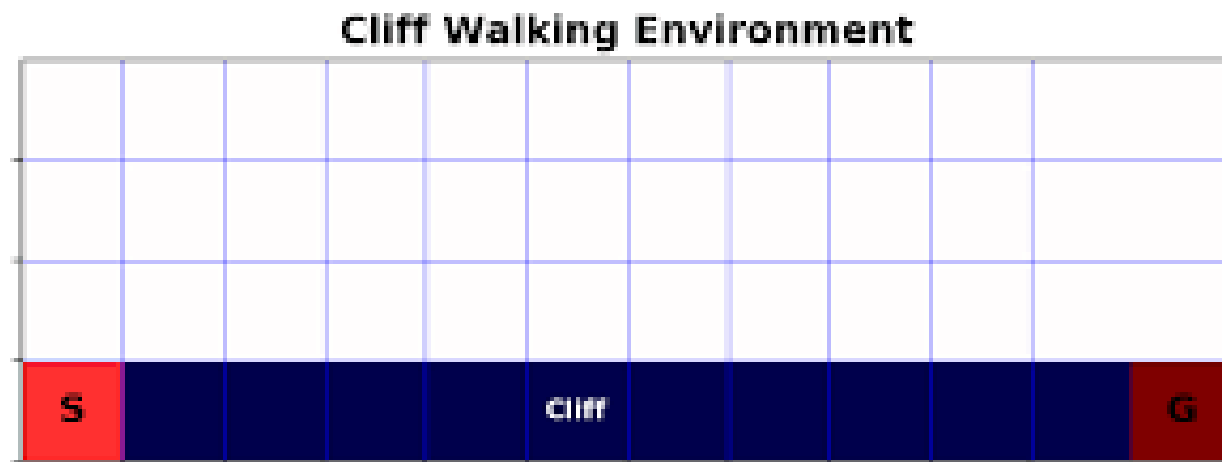
1. Zainicjuj algorytm wybierając dowolne początkowe wartości funkcji wartości, np. $Q_0(s, a) = 0 \forall s, a$ i $0 < \epsilon < 1$.
2. W każdej iteracji k :
 - Wyznacz stan początkowy S
 - Dla każdego S należącego do epizodu:
 - Wyznacz akcję A za pomocą strategii wyprowadzonej z Q (np. ϵ -zachłannej).
 - Podejmij akcję A i zaobserwuj nagrodę R i stan S' .
 - Uaktualnij wartość funkcji $Q(S, A)$:
$$Q_k(S, A) = Q_{k-1}(S, A) + \alpha(R + \beta \max_a Q_{k-1}(S', a) - Q_{k-1}(S, A))$$
 - Przyjmij, że: $S = S'$; kontynuuj działanie aż osiągniesz stan terminalny.

Q-learning

- Możliwe modyfikacje:
 - **Watkin's** $Q(\lambda)$
 - ***Opposition*-based** $Q(\lambda)$

Przykład

Cliff Learning



Źródło: https://yun-long.github.io/2017/11/RL_CW_TD/

- Celem agenta jest przejść z punktu **S** do Punktu **G**.
- Agent może iść po białych polach musi unikać spadnięcia z klifu (pola granatowe).
- Tym razem świat jest w pełni deterministyczny.

Warunki zbieżności

- Algorytm zbiega do rozwiązania optymalnego $Q_*(s, a)$ gdy:

- *Greedy in the Limit with Infinite Exploration (GLIE):*

- Wszystkie pary s, a są odwiedzone nieskończoną liczbę razy:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} N_k(s, a) = \infty$$

- Strategia zbiega do strategii zachłannej:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \pi_k(a|s) = I(a_* = \operatorname{argmax}_{a \in A} Q_k(s, a))$$

- np. gdy ustalimy, że $\epsilon = \frac{1}{k}$

- Stopa uczenia się α spełnia warunek Robbinsa-Monro:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k = \infty$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k^2 < \infty$$

Współczynnik eksploracji ϵ

- W przypadku uczenia bezmodelowego (metody Monte Carlo, uczenie różnicowe) chcemy zachować balans pomiędzy **eksploracją** a **eksploatacją**.
- Przyjęcie stałej wartości współczynnika eksploracji ϵ jest dużym uproszczeniem z dwóch podstawowych powodów:
 - W początkowych fazach procesu uczenia chcemy żeby agent eksplorował możliwie jak najwięcej w celu zdobycia możliwie jak najpełniejszej informacji na temat otaczającego go świata.
 - Ale później, gdy jego strategia zaczyna zbiegać do strategii optymalnej, chcemy żeby jego zachowania były możliwie jak najbliższe optymalnej strategii – dzięki temu będzie on maksymalizował swoją użyteczność w każdym kolejnym epizodzie.
- Dlatego zazwyczaj przyjmujemy, że ϵ maleje z czasem.

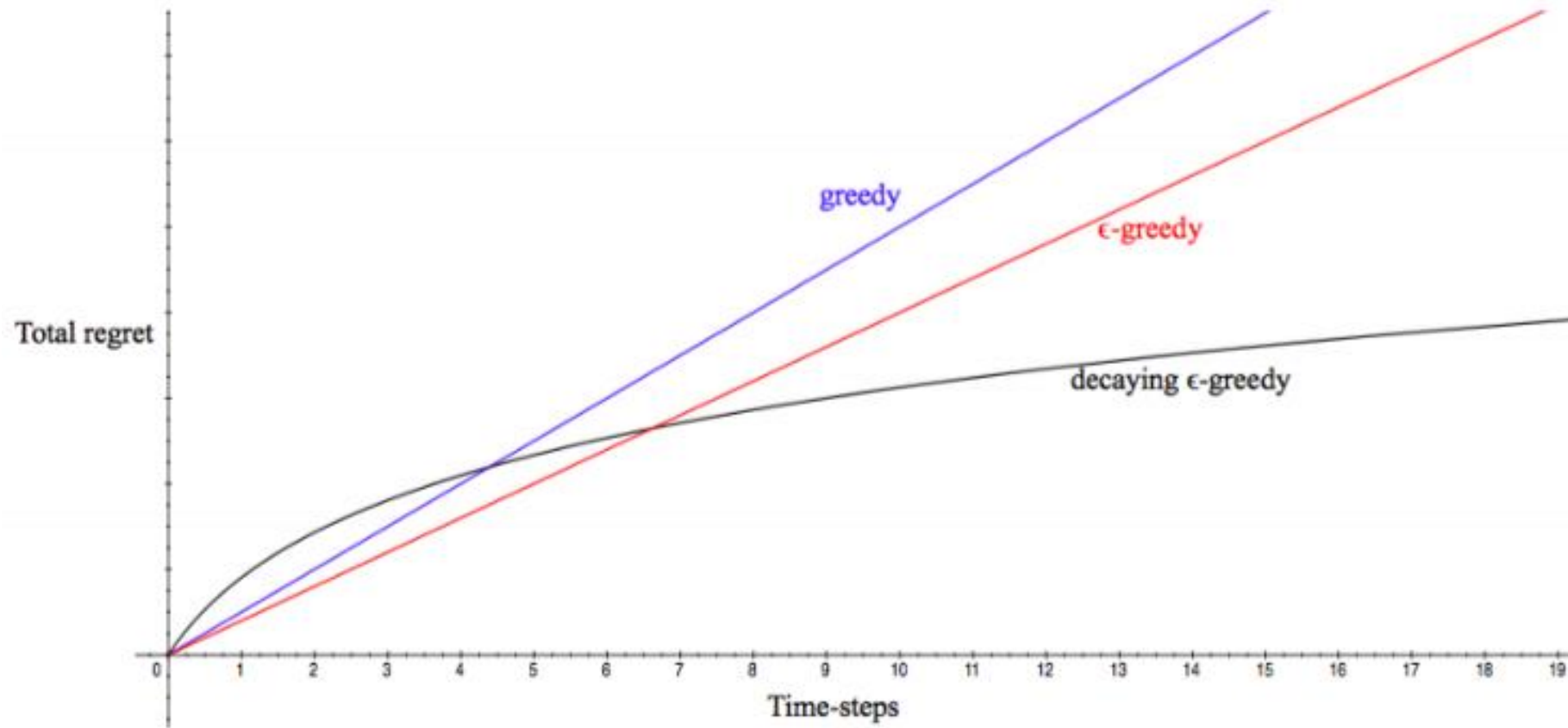
Współczynnik eksploracji ϵ

- Aby lepiej to zrozumieć zdefiniujmy pojęcie **żału**:

$$Reg_N = NE[R(A^*)] - \sum_{k=1}^N R_k(A_k)$$

gdzie A^* oznacza zbiór optymalnych akcji, A_k zbiór akcji podjętych w k -tym epizodzie a $R(\cdot)$ skumulowaną nagrodę z danego epizodu.

Współczynnik eksploracji ϵ



Źródło: <https://towardsdatascience.com/exploration-in-reinforcement-learning-e59ec7eeaa75>

Współczynnik eksploracji ϵ

- Jak w takim razie kontrolować proces eksploracji?
 - $\epsilon = \frac{1}{k}$ - poprawny teoretycznie, w praktyce problematyczny
 - ϵ malejący liniowo – spada wolniej niż $\epsilon = \frac{1}{k}$, łatwiej go kontrolować
 - Dodać proces wypalania – agent przez pierwsze n iteracji zachowuje się całkowicie losowo, dopiero później zaczyna podejmować decyzję zgodnie ze strategią ϵ -zachłanną:

$$\epsilon = \begin{cases} 1 & \text{gdy } k < n \\ \frac{1}{k} & \text{gdy } k \geq n \end{cases}$$

- Zamiast definiować ϵ zastosować **górną granicę ufności** (*upper confidence bound*).

Upper Confidence Bound

- **Górną granicę ufności** (*upper confidence bound, UBC*), dla epizodu t , stanu s i akcji a definiujemy jako:

$$U_t(s, a) = \sqrt{\frac{2 \ln t}{N_t(s, a)}}$$

gdzie $N_t(s, a)$ jest licznikiem odwiedzin pary s, a .

- Przy tak zdefiniowanym $U_t(s, a)$ agent wybiera akcję zachłannie maksymalizując:

$$a^* = \operatorname{argmax}_{a \in A} (Q_t(s, a) + U_t(s, a))$$