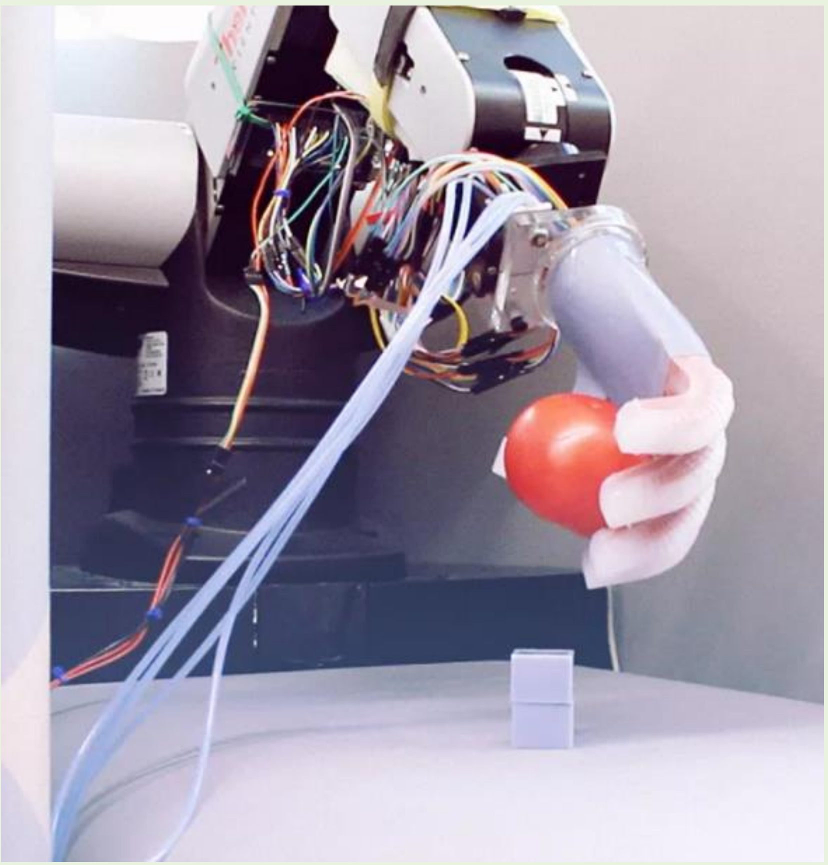
第四章

矩阵分解

引导问题

$$\boldsymbol{h}_i = (x_i, y_i, z_i)$$



$$A\boldsymbol{h}_i = \boldsymbol{p}_i$$

旋转变换？

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_i \\ v_i \\ w_i \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{p}_i = (u_i, v_i, w_i)$$

提纲

- **1. QR(正交三角)分解**
- 2. 奇异值分解
- 3. 极分解
- 4. Cholesky分解
- 5. 谱分解
- 6. CS分解
- 7. 其它分解

正交三角分解　QR分解(实矩阵)

$$\boxed{A = QR}$$

$A = QR$

- A: n阶可逆实矩阵
- Q: n阶正交矩阵
- R: n阶可逆上三角实矩阵
- 若要求R的对角线元素均为正数，则QR分解唯一.

$\|\beta_1\|$　(α_2, η_1)　(α_3, η_1)　η_1

$\|\beta_2\|$　(α_3, η_2)

$\ddots$

α_n, η_{n-1}

$\|\beta_n\|$

用Gram-Schmidt正交化方法证明(求解方法)

把矩阵A按列分块$A=[\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n]$.

把a_i写成η_i的线性组合

$\beta_1=\alpha_1 \quad \eta_1=\dfrac{\beta_1}{\|\beta_1\|}$

$\alpha_1=\|\beta_1\|\eta_1$

$\beta_2=\alpha_2-(\alpha_2,\eta_1)\eta_1 \quad \eta_2=\dfrac{\beta_2}{\|\beta_2\|}$

$\alpha_2=(\alpha_2,\eta_1)\eta_1+\|\beta_2\|\eta_2$

$\beta_3=\alpha_3-(\alpha_3,\eta_1)\eta_1-(\alpha_3,\eta_2)\eta_2 \quad \eta_3=\dfrac{\beta_3}{\|\beta_3\|}$

…

$\alpha_3=(\alpha_3,\eta_1)\eta_1+(\alpha_3,\eta_2)\eta_2+\|\beta_3\|\eta_3$

$\beta_n=\alpha_n-\sum_{j=1}^{n-1}(\alpha_n,\eta_j)\eta_j \quad \eta_n=\dfrac{\beta_n}{\|\beta_n\|}$

$\alpha_n=\sum_{j=1}^{n-1}(\alpha_n,\eta_j)\eta_j+\|\beta_n\|\eta_n$

a_i表示为η_i的线性组合为:

$\alpha_1=\|\beta_1\|\eta_1$

$\alpha_2=(\alpha_2,\eta_1)\eta_1+\|\beta_2\|\eta_2$

$\alpha_3=(\alpha_3,\eta_1)\eta_1+(\alpha_3,\eta_2)\eta_2+\|\beta_3\|\eta_3$

…………

$\|\beta_1\|$

$\alpha_n=\sum_{j=1}^{n-1}(\alpha_n,\eta_j)\eta_j+\|\beta_n\|\eta_n$

结论：用GramSchmidt方法把可逆阵*A*的列向量组进行正交标准化本质上等价于对该可逆阵*A*进行*QR*分解

改写成矩阵形式

正线上三角矩阵R

$$A=[\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n]=\boxed{[\eta_1,\eta_2,\ldots,\eta_n]}\boxed{\begin{bmatrix}\|\beta_1\| & (\alpha_2,\eta_1) & (\alpha_3,\eta_1) & \cdots & (\alpha_n,\eta_1)\\ 0 & \|\beta_2\| & (\alpha_3,\eta_2) & \cdots & (\alpha_n,\eta_2)\\ 0 & 0 & \|\beta_3\| & \cdots & (\alpha_n,\eta_3)\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \|\beta_n\|\end{bmatrix}}$$

正交矩阵Q

北京理工大学 BEIJING INSTITUTE OF TECHNOLOGY

例： 对矩阵$A=\begin{bmatrix}1 & 1 & 2\\ -2 & 3 & -4\\ 2 & 4 & 1\end{bmatrix}$进行$QR$分解.

解: 令$A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$

$$\beta_1=\alpha_1=\begin{bmatrix}1\\-2\\2\end{bmatrix},\quad \eta_1=\frac{1}{3}\begin{bmatrix}1\\-2\\2\end{bmatrix}$$

$\|\beta_1\|=3$ $\quad(\alpha_2,\eta_1)=1$

$$\beta_2=\alpha_2-(\alpha_2,\eta_1)\eta_1=\frac{1}{3}\begin{bmatrix}2\\11\\10\end{bmatrix},$$

$\|\beta_2\|=5$

$$\eta_2=\frac{1}{15}\begin{bmatrix}2\\11\\10\end{bmatrix},\quad (\alpha_3,\eta_1)=4,\quad (\alpha_3,\eta_2)=-2$$

$[\eta_1\ \eta_2\ \eta_3\ \cdots\ \eta_n]$

$$\beta_3=\alpha_3-(\alpha_3,\eta_1)\eta_1-(\alpha_3,\eta_2)\eta_2=\frac{1}{15}\begin{bmatrix}14\\2\\-5\end{bmatrix},$$

$\|\beta_3\|=1$

$\eta_3=\beta_3$

$$Q=[\eta_1,\ \eta_2,\ \eta_3]=\frac{1}{15}\begin{bmatrix}5 & 2 & 14\\ -10 & 11 & 2\\ 10 & 10 & -5\end{bmatrix}$$

$$R=\begin{bmatrix}3 & 1 & 4\\ 0 & 5 & -2\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

$m\times n$列满秩矩阵正交三角分解　QR分解(实矩阵)

$$A_{m\times n}=Q_m\begin{bmatrix}R\\O\end{bmatrix}_{m\times n}$$

- A: $m\times n$阶列满秩实矩阵
- Q: m阶实正交矩阵
- R: n阶可逆上三角实矩阵
- O: $(m-n)\times n$阶零矩阵
- 若要求R的对角线元素均为正数，则上式分解中Q的前n列以及R是唯一的.

$m\times n$列满秩矩阵正交三角分解　QR分解(实矩阵)

$$\boxed{A_{m\times n} = Q_{m\times n} R_n}$$

- ◆ A: $m\times n$阶列满秩实矩阵
- ◆ Q: $m\times n$阶次正交矩阵.
- ◆ R: n阶可逆上三角实矩阵
- ◆ 若要求R的对角线元素均为正数，则上述分解式是唯一的.

A是$m\times n$列满秩实矩阵：QR分解的结论以及例子

$$A=\begin{bmatrix}1 & 2\\1 & 1\\1 & 2\\1 & 1\end{bmatrix}$$

$$Q=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & -1\\1 & -1 & -1 & -1\\1 & 1 & -1 & 1\\1 & -1 & 1 & 1\end{bmatrix},$$

正交阵

$$R=\begin{bmatrix}\boxed{\begin{matrix}2 & 3\\0 & 1\end{matrix}}\\ \begin{matrix}0 & 0\\0 & 0\end{matrix}\end{bmatrix}$$

上三角

$A=QR$

R对角线元素均为正,

此时Q前两列唯一, 但第三四列不唯一.

A是$m\times n$列满秩实矩阵：QR分解的结论以及例子

$$A=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 1 & 1\\ 1 & 2\\ 1 & 1\end{bmatrix}$$

$$Q_1=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\\ 1 & 1\\ 1 & -1\end{bmatrix}$$

次正交阵

$$R_1=\begin{bmatrix}2 & 3\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

上三角

$$\boxed{A=Q_1R_1}$$

$\boxed{Q_1,\ R_1\text{均唯一.}}$

正交三角分解　*UR*分解(复矩阵)

$$\boxed{A = UR}$$

- A: n阶可逆复矩阵
- U: n阶酉矩阵
- R: n阶可逆上三角矩阵
- 若要求R的对角线元素均为正数，则UR分解唯一.

$m \times n$列满秩矩阵正交三角分解　　UR分解(复矩阵)

$$A_{m\times n} = U_m \begin{bmatrix} R \\ O \end{bmatrix}_{m\times n}$$

- A：$m\times n$阶列满秩复矩阵
- U：m阶酉矩阵
- R：n阶可逆上三角矩阵
- O：$(m-n)\times n$阶零矩阵
- 若要求R的对角线元素均为正数，则上式分解中U的前n列以及R是唯一的.

$m\times n$列满秩矩阵正交三角分解　UR分解(复矩阵)

$$\boxed{A_{m\times n}=U_{m\times n}R_n}$$

- A：$m\times n$阶列满秩复矩阵
- U：$m\times n$阶次酉矩阵
- R：n阶可逆上三角复矩阵
- 若要求R的对角线元素均为正数，则上式分解式是唯一的.

$$\boxed{A = QR}$$

- A：n阶可逆实矩阵
- Q：n阶实正交矩阵
- R：n阶可逆上三角矩阵
- 若要求R的对角线元素均为正数，则QR分解唯一.

$$\boxed{Q^T A = R}$$

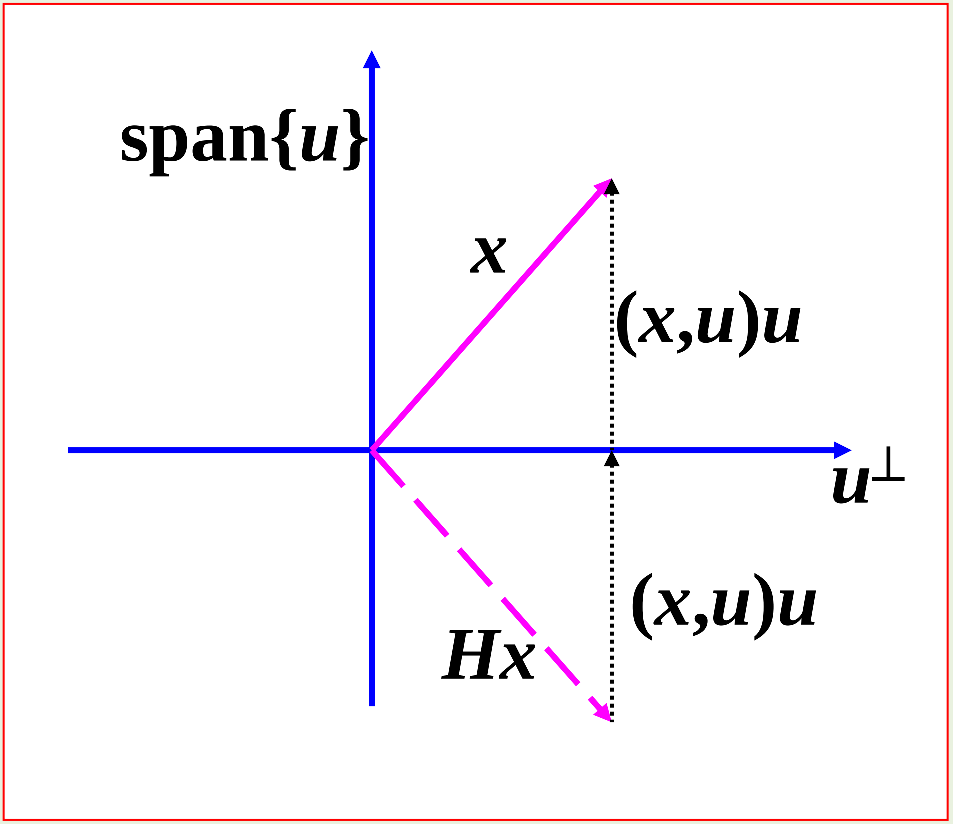
设$u\in R^n$是单位向量, Householder反射矩阵H

$H=E-2uu^T$

$u=$

$$H=E-2uu^T$$

u是$x-Hx$的单位化



$Hu=-u$ (反射)

$\forall v\in R^n,(u,v)=0,Hv=v$

$H^T=H$ (对称)

$H^2=E$ (对合)

$\forall x\in R^n$, 有

$Hx=x-2(x,u)u$

定理：设n维实向量$\alpha, \beta\ (\alpha \neq \beta)$ 具有相同的长度, 则一定存在Householder变换H, 使得

$$H\alpha=\beta$$

取 $u=\dfrac{\alpha-\beta}{\|\alpha-\beta\|}$,

$$H=E-2uu^T$$

则 $H\alpha=\beta$

设A是三阶可逆实矩阵, 用Householder变换作QR分解

$$H_1\begin{bmatrix} \boxed{\begin{matrix} * \\ * \\ * \end{matrix}} & \begin{matrix} * \\ * \\ * \end{matrix} & \begin{matrix} * \\ * \\ * \end{matrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} * & * & * \\ 0 & * & * \\ 0 & * & * \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & H_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} * & * & * \\ 0 & \boxed{\begin{matrix} * \\ * \end{matrix}} & \begin{matrix} * \\ * \end{matrix} \\ 0 & & \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} * & * & * \\ 0 & * & * \\ 0 & 0 & * \end{bmatrix} = R$$

$$Q = \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & H_2 \end{bmatrix} H_1\right)^T \qquad A = QR$$

【例】：用Holderholder反射变换对矩阵$A=\begin{bmatrix}1 & 1 & 2\\ -2 & 3 & -4\\ 2 & 4 & 1\end{bmatrix}$

进行QR分解.

解：先把A的第一个列向量反射至x_1轴

$$\alpha_1=(1,-2,2)^T,\quad \beta_1=(3,0,0)^T$$

取

$$u_1=\frac{\alpha_1-\beta_1}{\|\alpha_1-\beta_1\|}=\frac{1}{\sqrt{3}}(-1,-1,1)^T$$

$$H_1=E-2u_1u_1^T=\frac{1}{3}\begin{bmatrix}1 & -2 & 2\\ -2 & 1 & 2\\ 2 & 2 & 1\end{bmatrix}$$

$$H_1A=\begin{bmatrix}3 & 1 & 4\\ 0 & 3 & -2\\ 0 & 4 & -1\end{bmatrix}$$

例：用Holderholder反射变换对矩阵

$A=\begin{bmatrix}1 & 1 & 2\\ -2 & 3 & -4\\ 2 & 4 & 1\end{bmatrix}$进行$QR$分解.

$$H_1A=\begin{bmatrix}3 & 1 & 4\\ 0 & 3 & -2\\ 0 & 4 & -1\end{bmatrix}$$

再令：$\alpha_2=(3,4)^T$，$\beta_2=(5,0)^T$,

$$u_2=\frac{\alpha_2-\beta_2}{\|\alpha_2-\beta_2\|}=\frac{1}{\sqrt{5}}(-1,2)^T \qquad H_2=E-2u_2u_2^T=\frac{1}{5}\begin{bmatrix}3 & 4\\ 4 & -3\end{bmatrix}$$

$$H_2\begin{bmatrix}3 & -2\\ 4 & -1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5 & -2\\ 0 & -1\end{bmatrix}$$

$$\boxed{R=\begin{bmatrix}3 & 1 & 4\\ 0 & 5 & -2\\ 0 & 0 & -1\end{bmatrix}}$$

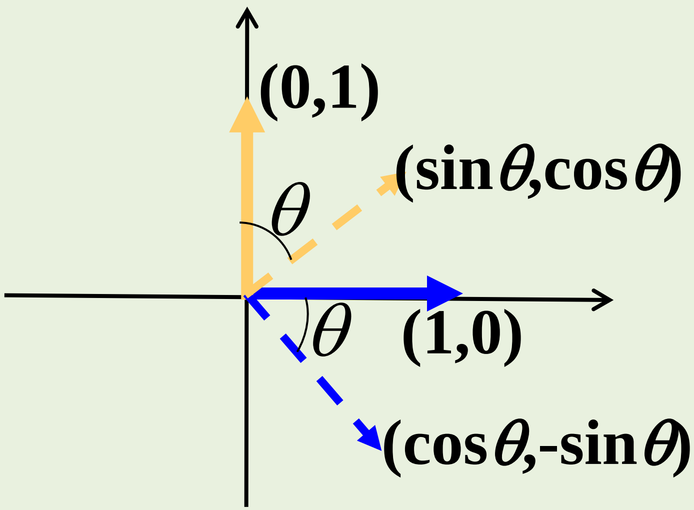
$$Q^T=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & H_2\end{bmatrix}H_1=\begin{bmatrix}\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{2}{3}\\ \frac{2}{15} & \frac{11}{15} & \frac{2}{3}\\ -\frac{14}{15} & -\frac{2}{15} & \frac{1}{3}\end{bmatrix}$$

$$\boxed{Q=\begin{bmatrix}1/3 & 2/15 & -14/15\\ -2/3 & 11/15 & -2/15\\ 2/3 & 2/3 & 1/3\end{bmatrix}}$$

北京理工大学 BEIJING INSTITUTE OF TECHNOLOGY

Givens矩阵（Givens初等旋转变换）

绕原点顺时针旋转θ角度



$$A=\begin{bmatrix}\cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix}$$

平面Givens旋转变换

$$\begin{bmatrix}c & s \\ -s & c\end{bmatrix},\quad c^2+s^2=1$$

XOZ平面Givens旋转变换

$$\begin{bmatrix} c & 0 & s \\ 0 & 1 & 0 \\ -s & 0 & c \end{bmatrix}$$

x_2, x_4平面的Givens旋转变换

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c & 0 & s \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -s & 0 & c \end{bmatrix}$$

设 $x=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$, $r=\sqrt{x_1^2+x_2^2}$

选取 $\boxed{c=\dfrac{x_1}{r},\quad s=\dfrac{x_2}{r}}$ 则

$$\begin{bmatrix} c & s \\ -s & c \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} r \\ 0 \end{bmatrix}$$

选取合适的Givens变换可以把平面上任一向量旋转至x_1轴正半轴.

北京理工大学 BEIJING INSTITUTE OF TECHNOLOGY

高维向量可通过多个Givens变换把它变换至x_1轴正半轴

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c_1 & s_1 \\ 0 & 0 & -s_1 & c_1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} * \\ * \\ \boxed{*} \\ \boxed{*} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} * \\ * \\ * \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c_2 & s_2 & 0 \\ 0 & -s_2 & c_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} * \\ \boxed{*} \\ \boxed{*} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} * \\ * \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} c_3 & s_3 & 0 & 0 \\ -s_3 & c_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \boxed{*} \\ \boxed{*} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} * \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

经三次Givens变换把任一R^4向量变换至x_1轴正半轴

设A是三阶可逆实矩阵, 用Givens变换QR分解过程

$$G_1A=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&c_1&s_1\\0&-s_1&c_1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}*&*&*\\ \boxed{*}&*&*\\ \boxed{*}&*&*\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}*&*&*\\ *&*&*\\ 0&*&*\end{bmatrix}$$

$$G_2(G_1A)=\begin{bmatrix}c_2&s_2&0\\-s_2&c_2&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boxed{*}&*&*\\ \boxed{*}&*&*\\ 0&*&*\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}*&*&*\\ 0&*&*\\ 0&*&*\end{bmatrix}$$

$\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}\sqrt{2}&&\\&-1&1\\&-1&-1\end{bmatrix}$

$$G_3(G_2G_1)A=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&c_3&s_3\\0&-s_3&c_3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}*&*&*\\ 0&\boxed{*}&*\\ 0&\boxed{*}&*\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}*&*&*\\ 0&*&*\\ 0&0&*\end{bmatrix}=R$$

$c=\frac{\sqrt{2}}{3\sqrt{2}}$ $s=\frac{4}{3\sqrt{2}}$

$\begin{matrix}\sqrt{2}&\sqrt{2}&2\sqrt{2}\\4&1&5\\0&-7&-3\end{matrix}$

$$Q=(G_3G_2G_1)^T$$

$c=\frac{\sqrt{2}}{2}$ $\frac{-2}{2\sqrt{2}}$ $s=\frac{2}{2\sqrt{2}}$

例： 用Givens旋转变换对矩阵$A=\begin{bmatrix}1 & 1 & 2\\ -2 & 3 & -4\\ 2 & 4 & 1\end{bmatrix}$进行$QR$分解.

$$G_1=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2}\\ 0 & -1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2}\end{bmatrix},\quad G_1A=\begin{bmatrix}1 & 1 & 2\\ 2\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 5/\sqrt{2}\\ 0 & -7/\sqrt{2} & 3/\sqrt{2}\end{bmatrix}$$

$$G_2=\begin{bmatrix}1/3 & 2\sqrt{2}/3 & 0\\ -2\sqrt{2}/3 & 1/3 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix},\quad G_2G_1A=\begin{bmatrix}3 & 1 & 4\\ 0 & -1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2}\\ 0 & -7/\sqrt{2} & 3/\sqrt{2}\end{bmatrix}$$

$$G_3=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & -1/\sqrt{50} & -7/\sqrt{50}\\ 0 & 7/\sqrt{50} & -1/\sqrt{50}\end{bmatrix},\quad G_3G_2G_1A=\begin{bmatrix}3 & 1 & 4\\ 0 & 5 & -2\\ 0 & 0 & -1\end{bmatrix}$$

$\frac{1}{2}+\frac{49}{2}$

$\frac{50}{2}$

$$Q^T = G_3 G_2 G_1 = \begin{bmatrix} 1/3 & -2/3 & 2/3 \\ 2/15 & 11/15 & 2/3 \\ -14/15 & -2/15 & 1/3 \end{bmatrix}$$

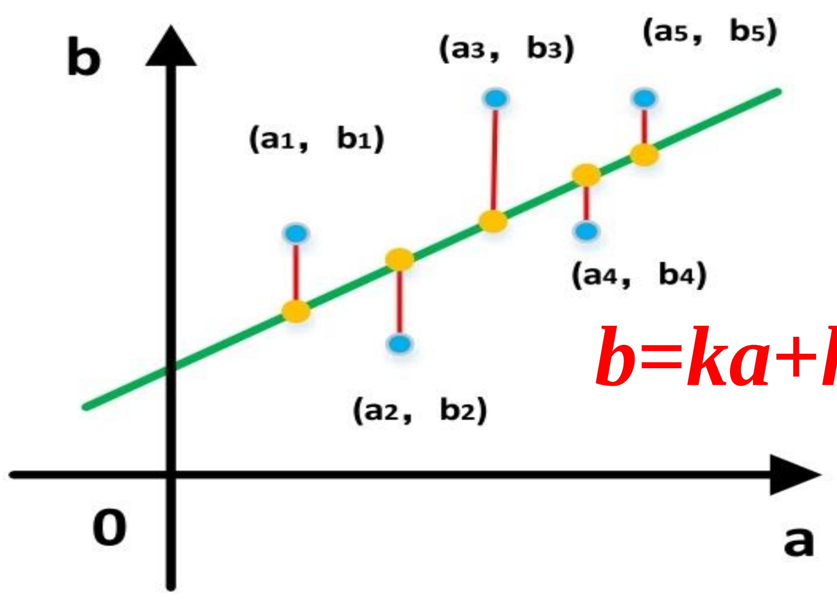
$$Q = \begin{bmatrix} 1/3 & 2/15 & -14/15 \\ -2/3 & 11/15 & -2/15 \\ 2/3 & 2/3 & 1/3 \end{bmatrix}, \qquad R = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 0 & 5 & -2 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

QR分解的应用

求解线性最小二乘问题

【例】：求解最小二乘问题min||*b*-*Ax*||

$$A_{m\times n}x_n=b_m \quad m>n$$



$$b=ka+h$$

$$A=\begin{bmatrix} a_1 & 1 \\ a_2 & 1 \\ a_3 & 1 \\ a_4 & 1 \\ a_5 & 1 \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{b}=\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \\ b_5 \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{x}=\begin{bmatrix} k \\ h \end{bmatrix}$$

QR分解的应用

【例】：求解最小二乘问题$\min\|b-Ax\|$

对A进行QR分解 ⟨=⟩ $=\min\|Q_1^T b - R_1 x\|$

$$\|b-Ax\|=\|b-QRx\|=\|Q^T(b-QRx)\|=\|Q^Tb-Rx\|$$

$$=\left\|\begin{bmatrix} Q_1^T \\ Q_2^T \end{bmatrix} b-\begin{bmatrix} R_1 \\ 0 \end{bmatrix} x)\right\|=\left\|\begin{bmatrix} Q_1^T b - R_1 x \\ Q_2^T b \end{bmatrix}\right\|$$

$\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ – 2x2 2x1 [ ]

2x5

2x1

$$A=\begin{bmatrix} a_1 & 1 \\ a_2 & 1 \\ a_3 & 1 \\ a_4 & 1 \\ a_5 & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} q_{11} & q_{12} & q_{13} & q_{14} & q_{15} \\ q_{21} & q_{22} & q_{23} & q_{24} & q_{25} \\ q_{31} & q_{32} & q_{33} & q_{34} & q_{35} \\ q_{41} & q_{42} & q_{43} & q_{44} & q_{45} \\ q_{51} & q_{52} & q_{53} & q_{54} & q_{55} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} \\ 0 & r_{22} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Q_1 Q_2 R_1 0

提纲

- 1. QR分解
- 2. 奇异值分解
- 3. 极分解
- 4. Cholesky分解
- 5. 谱分解
- 6. CS分解
- 7. 其它分解

$$\overset{m\times n}{A} = U\Sigma V^T = U\begin{bmatrix} \Sigma_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} V^T$$

A: $m\times n$实矩阵

U: m 阶正交矩阵

Σ: $m\times n$矩阵，唯一

V: n阶正交矩阵

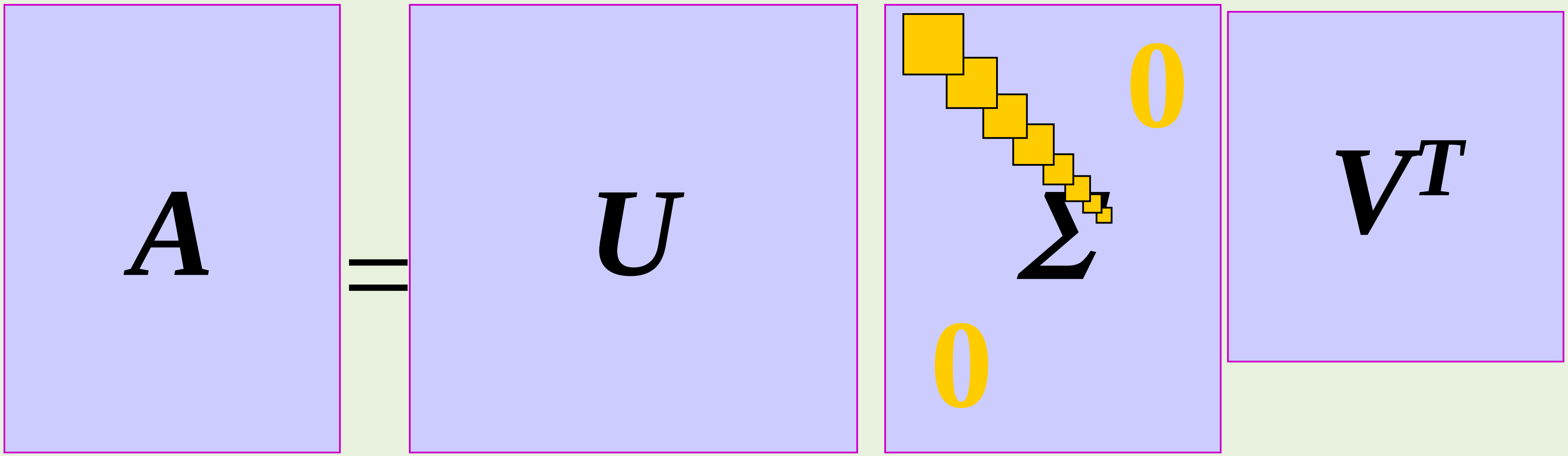
r: $r=\mathrm{rank}(A)$

$$\Sigma_r = \mathrm{diag}(\sigma_1, \sigma_2, \cdots, \sigma_r)$$

$$\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \cdots \geq \sigma_r > 0$$

$\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_r$称为$A$的非零奇异值, Σ对角线上的其它元素称为A的零奇异值.

奇异值分解(实矩阵)　标准型



$m\times n$　　$m\times m$　　$m\times n$　　$n\times n$

$$\boxed{A = U\Sigma V^T}$$

$$A = U\Sigma V^T = U\begin{bmatrix} \Sigma_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} V^T$$

把U, V分块

$U = [U_1, U_2]$, U_1, U_2分别由U的前r列和后$(m-r)$列构成

$V = [V_1, V_2]$, V_1, V_2分别由V的前r列和后$(n-r)$列构成

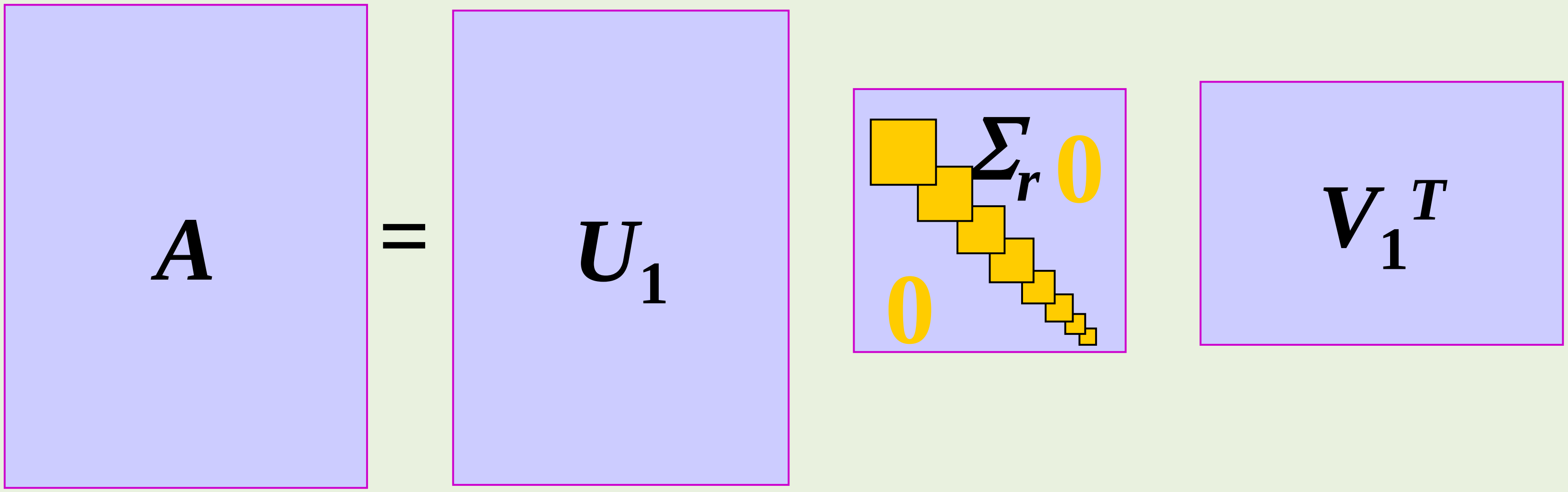
$$A = U\begin{bmatrix} \Sigma_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} V^T = [U_1, U_2]\begin{bmatrix} \Sigma_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} V_1^T \\ V_2^T \end{bmatrix}$$ r行×n

m×r

$$= [U_1\Sigma_r, 0]\begin{bmatrix} V_1^T \\ V_2^T \end{bmatrix} = U_1\Sigma_r V_1^T$$

北京理工大学 BEIJING INSTITUTE OF TECHNOLOGY

奇异值分解(实矩阵) 苗条型



$m\times n$ $\quad m\times r$ $\quad r\times r$ $\quad r\times n$

$$\boxed{A=U\Sigma V^T=U_1\Sigma_r V_1^T} \qquad r=\mathrm{rank}(A)$$

U_1: U的前r列构成的次正交矩阵

Σ_r: 对角线元素由r个非零奇异值构成的r阶对角矩阵

V_1: V的前r列构成的次正交矩阵

$$A = U\Sigma V^T = U_1 \Sigma_r V_1^T$$

U, V按列分块

$$U = [u_1, \cdots, u_r, \cdots], \quad V = [v_1, \cdots, v_r, \cdots]$$

$$A = \underset{m\times r}{[u_1, \cdots, u_r]}\underset{r\times r}{\Sigma_r}\overset{r\times n}{\begin{bmatrix} v_1^T \\ \vdots \\ v_r^T \end{bmatrix}} = [\sigma_1 u_1, \cdots, \sigma_r u_r]\begin{bmatrix} v_1^T \\ \vdots \\ v_r^T \end{bmatrix}$$

$$= \sigma_1 u_1 v_1^T + \sigma_2 u_2 v_2^T + \cdots + \sigma_r u_r v_r^T$$

奇异值分解(实矩阵)展开式型

$$\boxed{A=\sigma_1 u_1 v_1^T+\sigma_2 u_2 v_2^T+\cdots+\sigma_r u_r v_r^T}$$

$r=\mathrm{rank}(A)$

A: $m\times n$实矩阵

$u_1, u_2, \ldots, u_r$: r个m维标准正交向量

$\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_r$: r个非零奇异值

$v_1, v_2, \ldots, v_r$: r个n维标准正交向量

U, V按列分块

$$U=[u_1,\cdots,u_m],\quad V=[v_1,\cdots,v_n]$$

由$AV=U\Sigma$，得

$$[Av_1,\cdots,Av_r,Av_{r+1},\cdots,Av_n]=\left[u_1,\cdots,u_r,u_{r+1},\cdots,u_m\right]\Sigma$$

$$=[\sigma_1 u_1,\cdots,\sigma_r u_r,\underbrace{0,\cdots,0}_{n-r\text{个}0}]$$

$$\Updownarrow$$

$$\boxed{\begin{cases} Av_i=\sigma_i u_i, & i=1:r \\ Av_i=0, & i=r+1:n \end{cases}}$$

v_i称为A的相应于σ_i的<u>右奇异向量</u>

u_i称为A的相应于σ_i的<u>左奇异向量</u>

奇异值分解(实矩阵) 线性映射型

$$
\begin{array}{ccc}
 & A & \\
v_1 & \longrightarrow & \sigma_1 u_1 \\
v_2 & \longrightarrow & \sigma_2 u_2 \\
\vdots & & \vdots \\
v_r & \longrightarrow & \sigma_r u_r \\
v_{r+1} & \longrightarrow & 0 \\
\vdots & & \vdots \\
v_n & \longrightarrow & 0
\end{array}
$$

$$R(A) = \operatorname{span}\{u_1, u_2, \cdots, u_r\},$$

$$N(A) = \operatorname{span}\{v_{r+1}, v_{r+2}, \cdots, v_n\}.$$

$\{u_1, u_2, \ldots, u_r\}$是$A$的列空间$R(A)$的一组标准正交基

$\{v_{r+1}, v_{r+2}, \ldots, v_n\}$是$A$的零空间$N(A)$的一组标准正交基

$$A = U\Sigma V^T \Rightarrow A^T = V\Sigma^T U^T$$

由$A^T U = V\Sigma^T$，得

$$\begin{cases} A^T u_i = \sigma_i v_i, & i = 1:r \\ A^T u_i = 0, & i = r+1:m \end{cases}$$

$$R(A^T) = \text{span}\{v_1, v_2, \cdots, v_r\},$$

$$N(A^T) = \text{span}\{u_{r+1}, u_{r+2}, \cdots, u_m\}.$$

$\{v_1, v_2, \ldots, v_r\}$是$A$的行空间$R(A^T)$的一组标准正交基

$\{u_{r+1}, u_{r+2}, \ldots, u_m\}$是$A^T$的零空间$N(A^T)$的一组标准正交基

如何求奇异值分解

$$A = U\Sigma V^T \Rightarrow A^T = V\Sigma^T U^T$$

$$A^T A = (V\Sigma^T U^T)(U\Sigma V^T) = V\Sigma^T \Sigma V^T$$

即

$$V^T(A^T A)V = \Sigma^T \Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & \sigma_r^2 & & \\ & & & 0 & \\ & & & & \ddots \end{bmatrix}_{n\times n}$$

故$\sigma_1^2, \sigma_2^2, \ldots, \sigma_r^2, 0, \ldots, 0$是$A^T A$的$n$个特征值

$v_1, v_2, \ldots, v_r, \quad v_{r+1}, \ldots, v_n$是相应的标准正交特征向量

北京理工大学 BEIJING INSTITUTE OF TECHNOLOGY

$$A = U\Sigma V^T \Rightarrow A^T = V\Sigma^T U^T$$

$$AA^T = (U\Sigma V^T)(V\Sigma^T U^T) = U\Sigma\Sigma^T U^T$$

即

$$U^T(AA^T)U = \Sigma\Sigma^T = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & \sigma_r^2 & & \\ & & & 0 & \\ & & & & \ddots \end{bmatrix}_{m\times m}$$

故$\sigma_1^2, \sigma_2^2, \ldots, \sigma_r^2, 0, \ldots, 0$是$AA^T$的$m$个特征值

$u_1, u_2, \ldots, u_r,\ \ u_{r+1}, \ldots, u_m$是相应的标准正交特征向量

结论：

- AA^T, A^TA的非零特征值相同，
- $\mathrm{rank}(A^TA)=\mathrm{rank}(AA^T)=\mathrm{rank}(A)=r$
- A的奇异值分解中的U, Σ, V与AA^T以及A^TA的关系。

把该关系式作为求解奇异值分解的出发点.

具体求奇异值分解中的U, Σ, V的方法

$$A = U\Sigma V^T$$

$\sigma_1^2, \sigma_2^2, \cdots, \sigma_r^2, \underbrace{0, \cdots, 0}_{n-r\text{个}}$是$A^T A$的$n$个特征值，

$v_1, v_2, \cdots, v_r, v_{r+1}, \cdots, v_n$是相应的两两正交的单位向量.

求A^TA的n个两两正交的单位特征向量,

以这些向量为列构造出来的正交矩阵就是V, U

Σ的对角线非零元就是$\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_r$,

奇异值分解中的V, Σ求得, 如何求U呢?

由关系式 $\begin{cases} Av_i = \sigma_i u_i, & i = 1:r \\ Av_i = 0, & i = r+1:n \end{cases}$

确定U的前r个列向量, 后$(m-r)$个列向量通过正交扩张来得到.

北京理工大学 BEIJING INSTITUTE OF TECHNOLOGY

例: 设$A=\begin{bmatrix}0&1\\-1&0\\0&2\\1&0\end{bmatrix}$,求$A$的奇异值分解.

解: $A^TA=\begin{bmatrix}2&0\\0&5\end{bmatrix}$

$\sigma_1^2=5,\ \sigma_2^2=2,$

$\sigma_1^2=5$对应的单位特征向量$\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$

$\sigma_2^2=2$对应的单位特征向量$\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$

得$V=\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix}$, $\Sigma=\begin{bmatrix}\sqrt{5}&0\\0&\sqrt{2}\\0&0\\0&0\end{bmatrix}$

$$AV=\begin{bmatrix}1&0\\0&-1\\2&0\\0&1\end{bmatrix}=\begin{array}{c}\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{5}}&0\\0&-\frac{1}{\sqrt{2}}\\\frac{2}{\sqrt{5}}&0\\0&\frac{1}{\sqrt{2}}\end{bmatrix}\\ \begin{matrix}u_1&u_2\end{matrix}\end{array}\begin{bmatrix}\sqrt{5}&0\\0&\sqrt{2}\end{bmatrix}$$

把u_1, u_2扩充为R^4的一组标准正交基, 由此得到U

$$U=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{5}}&0&-\frac{2}{\sqrt{5}}&0\\0&-\frac{1}{\sqrt{2}}&0&\frac{1}{\sqrt{2}}\\\frac{2}{\sqrt{5}}&0&\frac{1}{\sqrt{5}}&0\\0&\frac{1}{\sqrt{2}}&0&-\frac{1}{\sqrt{2}}\end{bmatrix}$$

正规矩阵奇异值与特征值的关系

设A为n阶正规矩阵，它的特征值与奇异值分别为

$$\{\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n\}$$

$$\{\sigma_1, \sigma_2, \cdots, \sigma_n\}$$

将特征值按长度大小排序为

$$|\lambda_1| \geq |\lambda_2| \geq \cdots \geq |\lambda_n|$$

则

$$\boxed{\sigma_k = |\lambda_k|, \quad (k = 1:n)}$$

奇异值分解 (复矩阵)

$$A = U\Sigma V^H = U\begin{bmatrix} \Sigma_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} V^H$$

A: $m\times n$复矩阵

U: m 阶酉矩阵

Σ: $m\times n$矩阵，唯一

V: n阶酉矩阵

r: $r=\mathrm{rank}(A)$

$$\Sigma_r = \mathrm{diag}(\sigma_1, \sigma_2, \cdots, \sigma_r)$$

$$\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \cdots \geq \sigma_r > 0$$

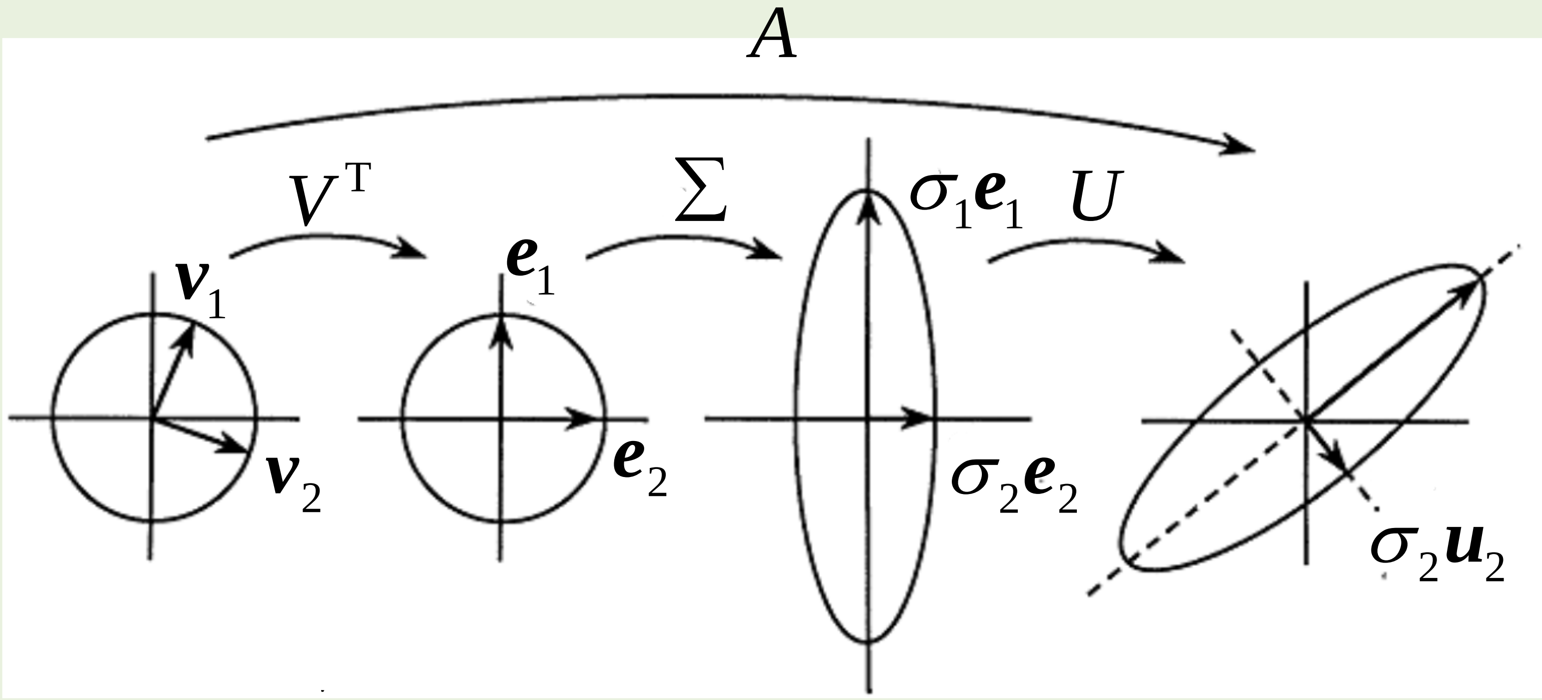
$\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_r$称为$A$的非零奇异值,

Σ对角线上的其它元素称为A的零奇异值.

北京理工大学 BEIJING INSTITUTE OF TECHNOLOGY

几何意义：将正交的向量组变换到另外正交的向量组（尺度可伸缩）

$$A = U\Sigma V^T = U\begin{bmatrix} \Sigma_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} V^T$$



$$\begin{bmatrix}1&1\\1&0\\0&1\end{bmatrix}=\begin{array}{c}\begin{bmatrix}2/\sqrt{6}&0&-1/\sqrt{3}\\1/\sqrt{6}&-1/\sqrt{2}&1/\sqrt{3}\\1/\sqrt{6}&1/\sqrt{2}&1/\sqrt{3}\end{bmatrix}\\ \begin{matrix}\mathbf{u}_1\qquad&\qquad\mathbf{u}_2\qquad&\qquad\mathbf{u}_3\end{matrix}\end{array}\begin{bmatrix}\sqrt{3}&0\\0&1\\0&0\end{bmatrix}\begin{array}{c}\begin{bmatrix}1/\sqrt{2}&-1/\sqrt{2}\\1/\sqrt{2}&1/\sqrt{2}\end{bmatrix}^T\\ \begin{matrix}\mathbf{v}_1\qquad&\qquad\mathbf{v}_2\end{matrix}\end{array}$$

$$v_1 \xrightarrow{\ A\ } \sqrt{3}u_1,$$

$$v_2 \xrightarrow{\ A\ } u_2,$$

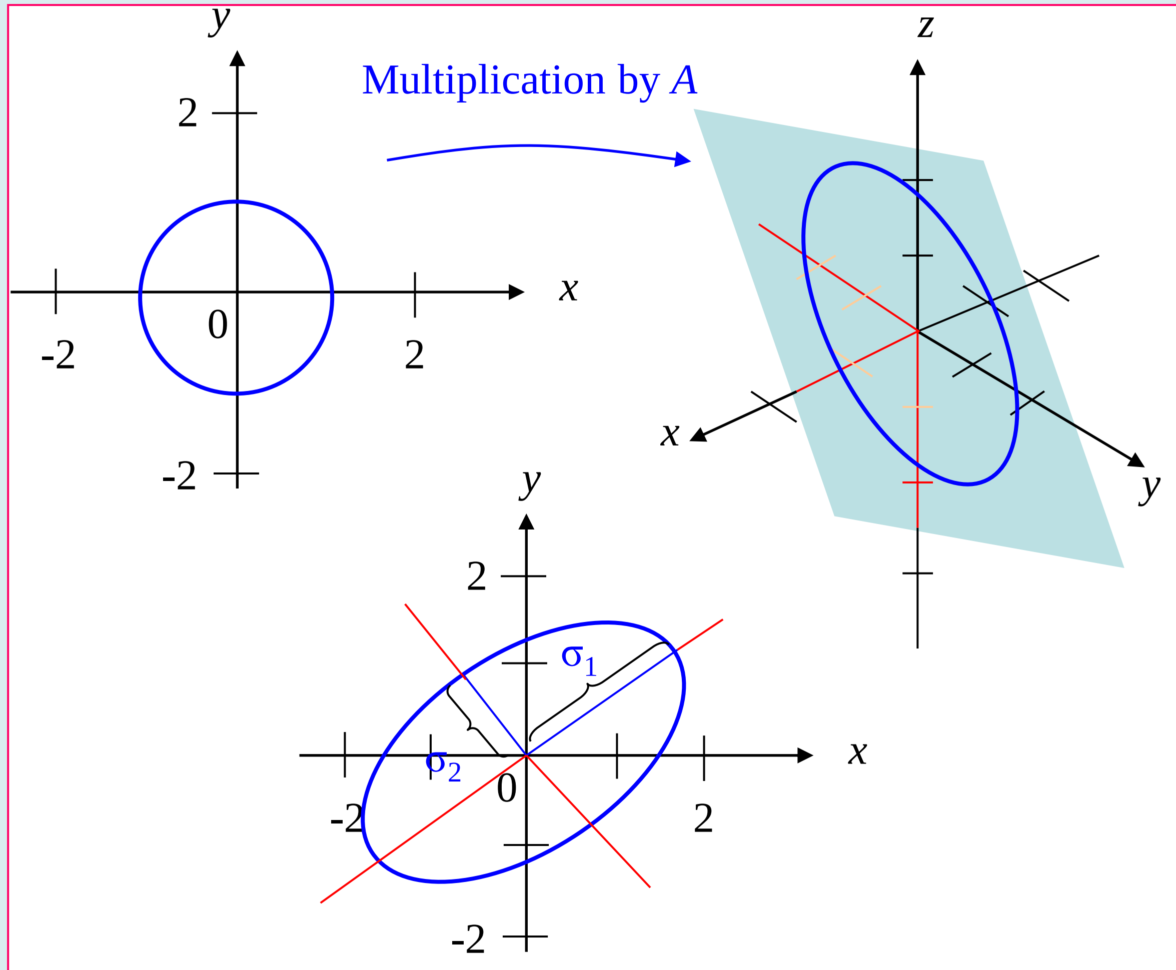
$$v = x_1v_1 + x_2v_2$$

单位圆周$(x_1^2 + x_2^2 = 1)$

$$\downarrow A$$

$$Av = \sqrt{3}x_1u_1 + x_2u_2$$

椭圆柱面$\dfrac{y_1^2}{3} + y_2^2 = 1$



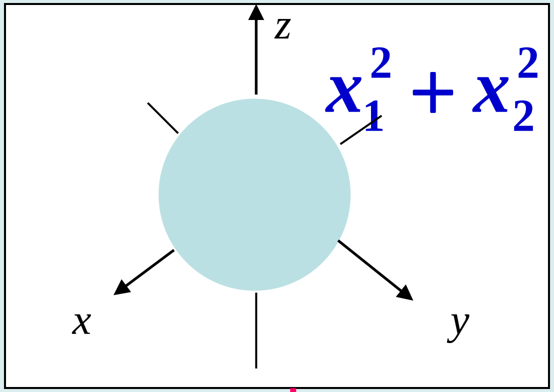
$$\begin{bmatrix}1&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}=\begin{array}{c}\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}\\ \mathbf{u}_1\ \mathbf{u}_2\end{array}\begin{bmatrix}\sqrt{2}&0&0\\0&1&0\end{bmatrix}\begin{array}{c}\begin{bmatrix}1/\sqrt{2}&0&-1/\sqrt{2}\\1/\sqrt{2}&0&1/\sqrt{2}\\0&1&0\end{bmatrix}^T\\ \mathbf{v}_1\qquad\ \mathbf{v}_2\qquad\ \mathbf{v}_3\end{array}$$

$$v_1\xrightarrow{A}\sqrt{2}u_1,$$

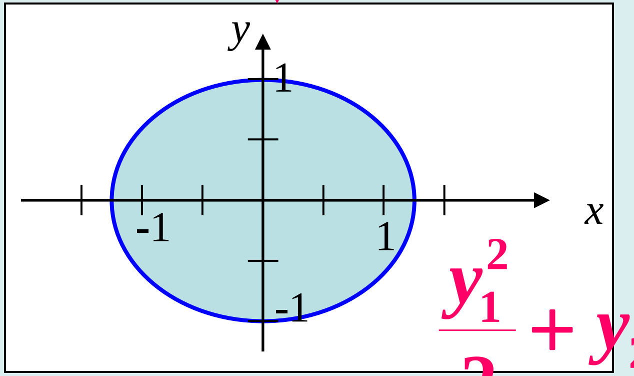
$$v_2\xrightarrow{A}u_2,$$

$$Av_3=0.$$

$$x_1^2+x_2^2+x_3^2=1$$



A



$$\frac{y_1^2}{2}+y_2^2\le 1$$

$v=x_1v_1+x_2v_2+x_3v_3$

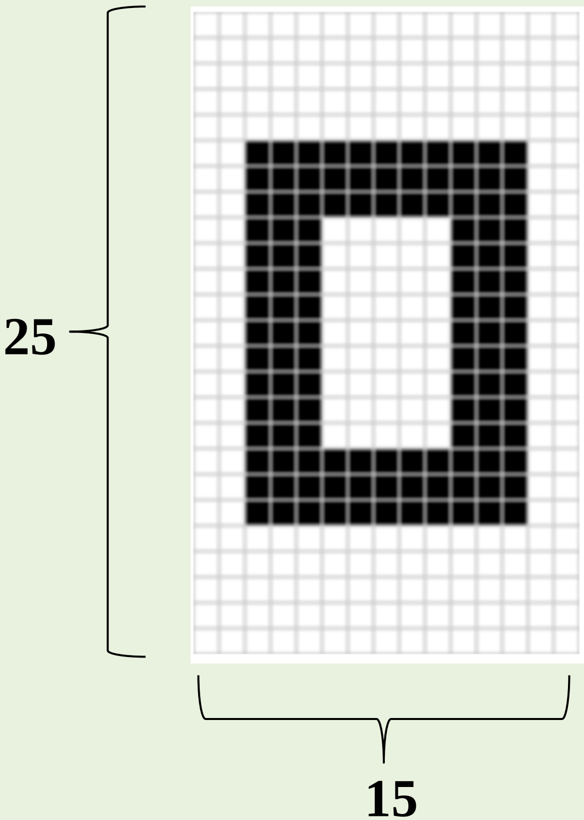
单位球面$(x_1^2+x_2^2+x_3^2=1)$

$\downarrow A$

$Av=\sqrt{2}x_1u_1+x_2u_2$

代表图形：$\dfrac{y_1^2}{2}+y_2^2\le 1$

图像压缩中的应用



输入图像375个像素

$$
A=\begin{bmatrix}
1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1\\
1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1\\
1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1\\
1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1\\
1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1\\
1&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&1\\
1&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&1\\
1&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&1\\
1&1&0&0&0&1&1&1&1&1&0&0&0&1&1\\
1&1&0&0&0&1&1&1&1&1&0&0&0&1&1\\
1&1&0&0&0&1&1&1&1&1&0&0&0&1&1\\
1&1&0&0&0&1&1&1&1&1&0&0&0&1&1\\
1&1&0&0&0&1&1&1&1&1&0&0&0&1&1\\
1&1&0&0&0&1&1&1&1&1&0&0&0&1&1\\
1&1&0&0&0&1&1&1&1&1&0&0&0&1&1\\
1&1&0&0&0&1&1&1&1&1&0&0&0&1&1\\
1&1&0&0&0&1&1&1&1&1&0&0&0&1&1\\
1&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&1\\
1&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&1\\
1&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&1\\
1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1\\
1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1\\
1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1\\
1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1\\
1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1
\end{bmatrix}
$$

矩阵表示

奇异值分解

$$A_{25\times15} = U_{25\times25}\Sigma_{25\times15}V^{\mathrm{T}}_{15\times15}$$

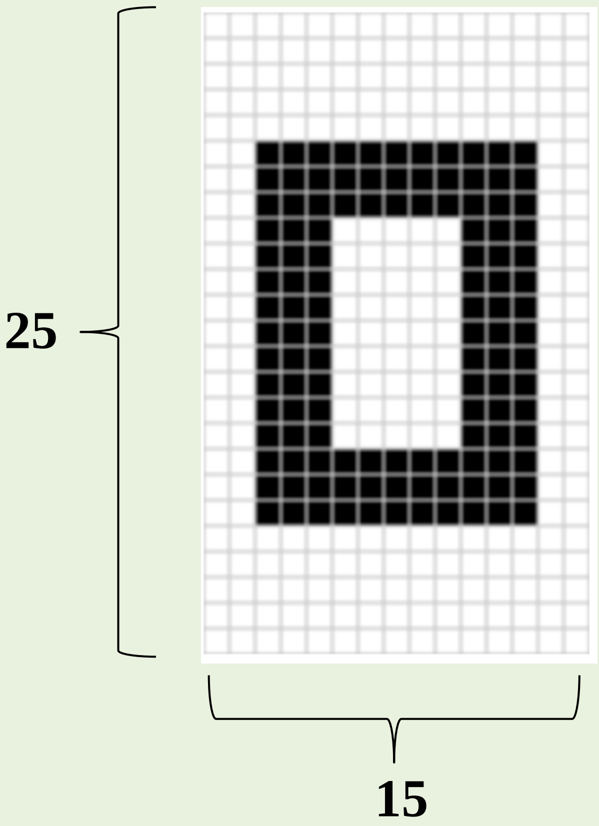
$$\begin{cases}\sigma_1 = 14.72 \\ \sigma_2 = 5.22 \\ \sigma_3 = 3.31\end{cases}$$

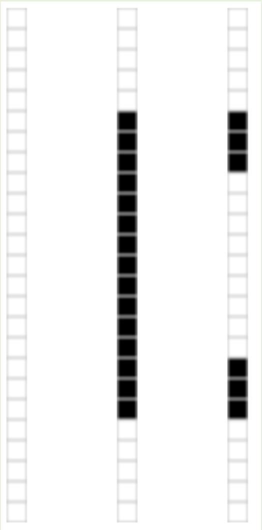
$$A = \boldsymbol{u}_1\sigma_1\boldsymbol{v}_1^{\mathrm{T}} + \boldsymbol{u}_2\sigma_2\boldsymbol{v}_2^{\mathrm{T}} + \boldsymbol{u}_3\sigma_3\boldsymbol{v}_3^{\mathrm{T}}$$

25×3+ 15×3+3=123

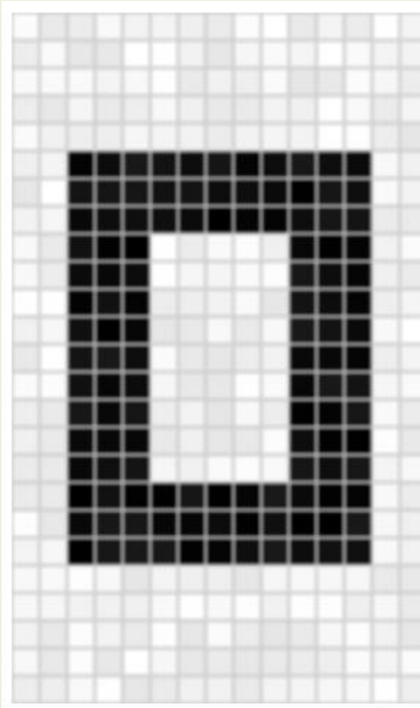
$$A = \begin{bmatrix}
1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1\\
1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1\\
1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1\\
1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1\\
1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1\\
1&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&1\\
1&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&1\\
1&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&1\\
1&1&0&0&0&1&1&1&1&1&0&0&0&1&1\\
1&1&0&0&0&1&1&1&1&1&0&0&0&1&1\\
1&1&0&0&0&1&1&1&1&1&0&0&0&1&1\\
1&1&0&0&0&1&1&1&1&1&0&0&0&1&1\\
1&1&0&0&0&1&1&1&1&1&0&0&0&1&1\\
1&1&0&0&0&1&1&1&1&1&0&0&0&1&1\\
1&1&0&0&0&1&1&1&1&1&0&0&0&1&1\\
1&1&0&0&0&1&1&1&1&1&0&0&0&1&1\\
1&1&0&0&0&1&1&1&1&1&0&0&0&1&1\\
1&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&1\\
1&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&1\\
1&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&1\\
1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1\\
1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1\\
1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1\\
1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1\\
1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1
\end{bmatrix}$$

矩阵表示


25
15



图像去噪



输入图像

奇异值分解

$$A_{25\times15} = U_{25\times25}\Sigma_{25\times15}V_{15\times15}^{\mathrm{T}}$$

$$\begin{cases}\sigma_1 = 14.15\\ \sigma_2 = 4.67\\ \sigma_3 = 3.00\\ \sigma_4 = 0.21\end{cases} \qquad \begin{cases}\sigma_5 = 0.19\\ \dots\\ \sigma_{15} = 0.05\end{cases}$$

$$A = \boldsymbol{u}_1\sigma_1\boldsymbol{v}_1^{\mathrm{T}} + \boldsymbol{u}_2\sigma_2\boldsymbol{v}_2^{\mathrm{T}} + \boldsymbol{u}_3\sigma_3\boldsymbol{v}_3^{\mathrm{T}}$$

$$\cancel{+\boldsymbol{u}_4\sigma_4\boldsymbol{v}_4^{\mathrm{T}} + \dots}$$

提纲

- 1. QR分解
- 2. 奇异值分解
- **3. 极分解**
- 4. Cholesky分解
- 5. 谱分解
- 6. CS分解
- 7. 其它分解

复数的极分解

$$z = \rho e^{i\theta}$$

可逆矩阵的极分解

$$A=PU=UQ$$

- A: n阶可逆阵
- P、Q: n阶Hermite正定阵
- U: n阶酉矩阵
- P, Q，U唯一

可逆矩阵的极分解

$$A = PU$$

如何确定极分解中的U, P?

$$A^H = U^H P^H = U^H P$$

$$AA^H = PUU^H P = P^2,$$

AA^H是Hermite正定阵, 存在唯一的Hermite正定阵P满足上式.

$$P = \sqrt{AA^H}, \qquad P\text{唯一}$$

$$U = P^{-1}A. \qquad U\text{唯一}$$

U为什么是酉矩阵?

可逆矩阵的极分解

$$A = PU$$

$$AA^H = P^2$$

$$U = P^{-1}A.$$

$$UU^H = (P^{-1}A)(P^{-1}A)^H = P^{-1}AA^H(P^{-1})^H$$
$$= P^{-1}P^2P^{-1} = I$$

U为什么是酉矩阵?

$$A = UU^H PU = UQ,$$

$$Q = U^H PU,\quad \text{正定矩阵}$$

$$P^2 = AA^H,\ Q^2 = A^H A.$$

不可逆矩阵的极分解

$$A = PU = UQ$$

- A: n阶复矩阵
- P, Q: n阶Hermite半正定阵
- U: n阶酉矩阵
- P, Q唯一，U不唯一.

$P^2 = AA^H$, $Q^2 = A^H A$. P, Q唯一

此时P不一定可逆, 如何确定U?

不可逆矩阵的极分解

$$A = PU = UQ$$

对A做奇异值分解, 存在n阶酉阵U_1, V使得

$$A = U_1 \Sigma V^H = (U_1 \Sigma U_1^H) U_1 V^H = PU$$
$$A = U_1 \Sigma V^H = U_1 V_1^H (V_1 \Sigma V^H) = UQ$$

其中

$P = U_1 \Sigma U_1^H$，　半正定

$Q = V \Sigma V^H$，　半正定

$U = U_1 V^H$，　酉矩阵

定理： 设A为n阶矩阵，则A是正规矩阵$\Leftrightarrow$存在n阶酉矩阵U与半正定的H-阵P，满足

$$A=UP=PU，且AA^H=P^2=A^HA$$

方阵极分解的几何意义

描述变换$Y=AX$的拉伸和扭曲

$\begin{bmatrix} \frac{3}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{5}{2} \end{bmatrix}$有特征值3，单位特征向量$\begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}$；特征值1，单位特征向量$\begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}$

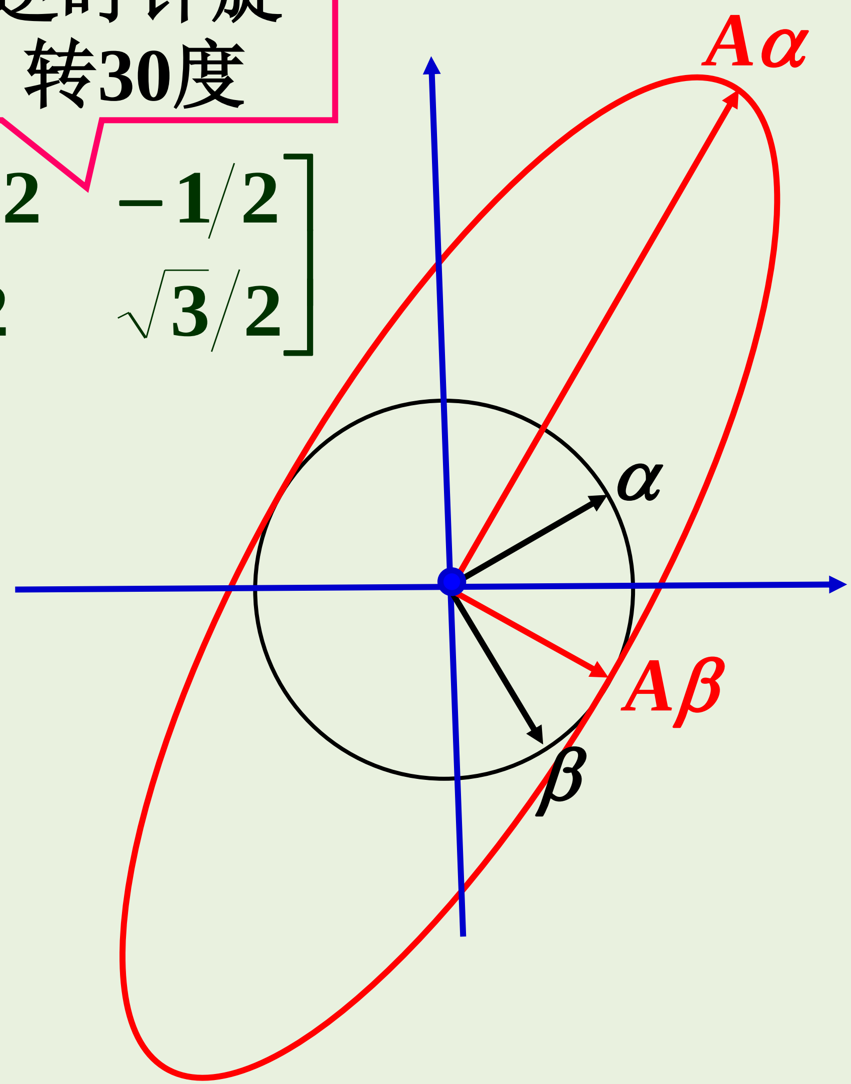
$\underline{Y}=A\underline{X}$的几何特性.

逆时针旋转30度

解 $A = PU = \begin{bmatrix} 3/2 & \sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & 5/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{3}/2 & -1/2 \\ 1/2 & \sqrt{3}/2 \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} 1/2 \\ \sqrt{3}/2 \end{bmatrix}$方向拉伸至3倍

$\begin{bmatrix} -\sqrt{3}/2 \\ 1/2 \end{bmatrix}$方向长度不变



用途

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_i \\ v_i \\ w_i \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{Ah_i = p_i}$$

$$\boldsymbol{A = QP}$$

$$\min \|X - A\|_F^2$$

满足 $XX^T = I$

极分解得到的酉矩阵是和原矩阵“最接近”的正交矩阵。

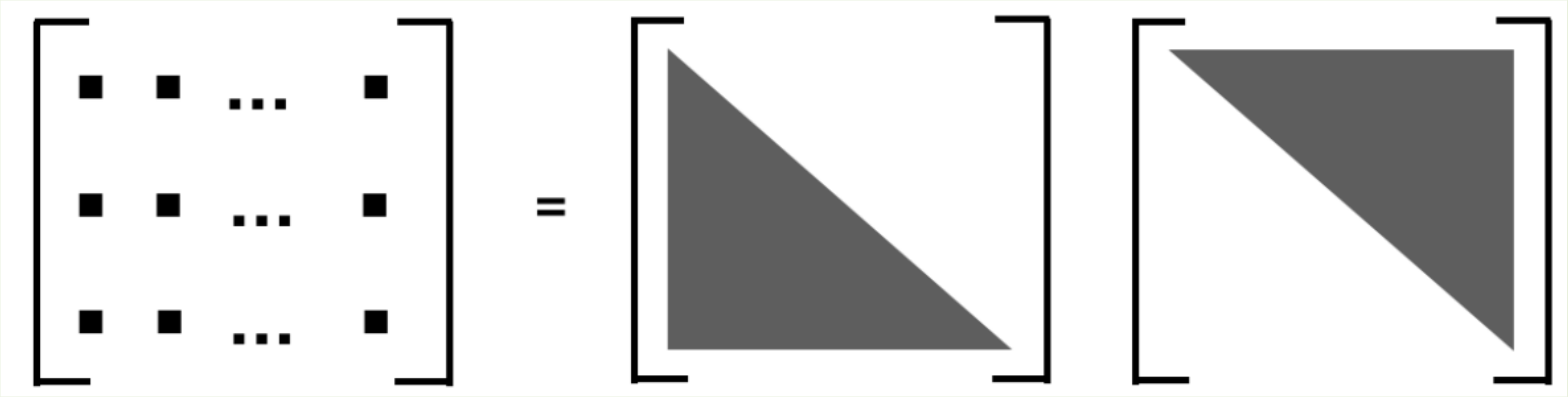
提纲

- 1. QR分解
- 2. 奇异值分解
- 3. 极分解
- **4. Cholesky分解**
- 5. 谱分解
- 6. CS分解
- 7. 其它分解

正定矩阵的Cholesky分解

$$A=LL^T$$

- ***A***: 正定阵
- ***L***：下三角矩阵



用途

求解带有对称正定系数矩阵*A*的线性问题

$$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$$

$$LL^{\mathrm{T}} = A$$

$$LL^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} L^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y} \\ L\boldsymbol{y} = \boldsymbol{b} \end{cases}$$

北京理工大学 BEIJING INSTITUTE OF TECHNOLOGY

提纲

- 1. QR分解
- 2. 奇异值分解
- 3. 极分解
- 4. Cholesky分解
- **5. 谱分解**
- 6. CS分解
- 7. 其它分解

正规矩阵的谱分解

设A为n阶正规矩阵, 则A可酉对角化

- A存在n个两两正交的单位特征向量,
- A的特征子空间两两正交,
- A的所有特征子空间的和空间为C^n.

设A为n阶正规矩阵, $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r$是$A$的所有相异的特征值

相应的特征子空间为$V_{\lambda_1}, V_{\lambda_2}, \ldots, V_{\lambda_r}$

记$P_k(k=1,2,\ldots,r)$是C^n到特征子空间V_{λ_k}的正交投影矩阵

则

$$E = P_1 + P_2 + \ldots + P_r$$

A的单位分解

$$A = \lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2 + \ldots + \lambda_r P_r$$

A的谱分解

如何求C^n到λ_k的特征子空间的正交投影矩阵P_k?

设$\alpha_{k1},\alpha_{k2},\cdots,\alpha_{kn_k}$是$V_{\lambda_k}$的一组标准正交基，记
$U_k=\left[\alpha_{k1},\alpha_{k2},\cdots,\alpha_{kn_k}\right]$，则

$$\boxed{P_k=U_kU_k^H}$$

求出了正交投影矩阵$P_k(k=1:r)$, 就得到A的谱分解表达式

$$A=\lambda_1P_1+\lambda_2P_2+\cdots+\lambda_rP_r$$

正规矩阵谱分解步骤

(1) 求出矩阵A的全部互异特征值$\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r$

(2) 求特征值λ_k ($k=1,2,\ldots,r$)所对应的特征子空间的一组标准正交基 $\alpha_{k1}, \alpha_{k2}, \cdots, \alpha_{kn_k}$,

记 $U_k = \left[\alpha_{k1}, \alpha_{k2}, \cdots, \alpha_{kn_k}\right]$,

$$P_k = U_k U_k^H$$

(3) A的谱分解表达式为

$$A = \lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2 + \cdots + \lambda_r P_r$$

定理 设A为一个n 阶矩阵, 有r个互异的特征值 $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r$, λ_k的代数重数为n_k, 则A为正规矩阵$\Leftrightarrow$存在r个n阶矩阵$P_1, P_2, \ldots, P_r$满足

$$A=\sum_{k=1}^{r}\lambda_k P_k, \qquad P_k=P_k^H=P_k^2,$$

$$P_jP_k=0, (j\neq k) \qquad \sum_{k=1}^{r}P_k=I,$$

$$\operatorname{rank}(P_k)=n_k$$

满足上述性质的矩阵P_k $(k=1,2,\ldots,r)$ 是唯一的.

例 求正规矩阵A的谱分解表达式.

$$\boxed{A = -3P_1 + P_2}$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\frac{1}{4}\begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

解：求矩阵A的特征值与单位正交特征向量 $\|$

特征值： $\lambda_1 = -3$, $\lambda_2 = 1$(三重)

$$P_2 = E - P_1$$

单位特征向量 $\alpha_1 \quad \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$

$$P_1 = \alpha_1\alpha_1^H = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

例 求正规矩阵A的谱分解表达式.

$$\boxed{A = 3P_1 - 6P_2}$$

$$A = \begin{bmatrix} -2 & -4i & 2i \\ 4i & -2 & -2 \\ -2i & -2 & -5 \end{bmatrix}$$

$$\frac{1}{9}\begin{bmatrix} 5 & 4i & -2i \\ -4i & 5 & 2 \\ 2i & 2 & 8 \end{bmatrix}$$

解：求矩阵A的特征值与单位正交特征向量

$$||$$

特征值: $\lambda_1 = 3, \quad \lambda_2 = -6$(二重)

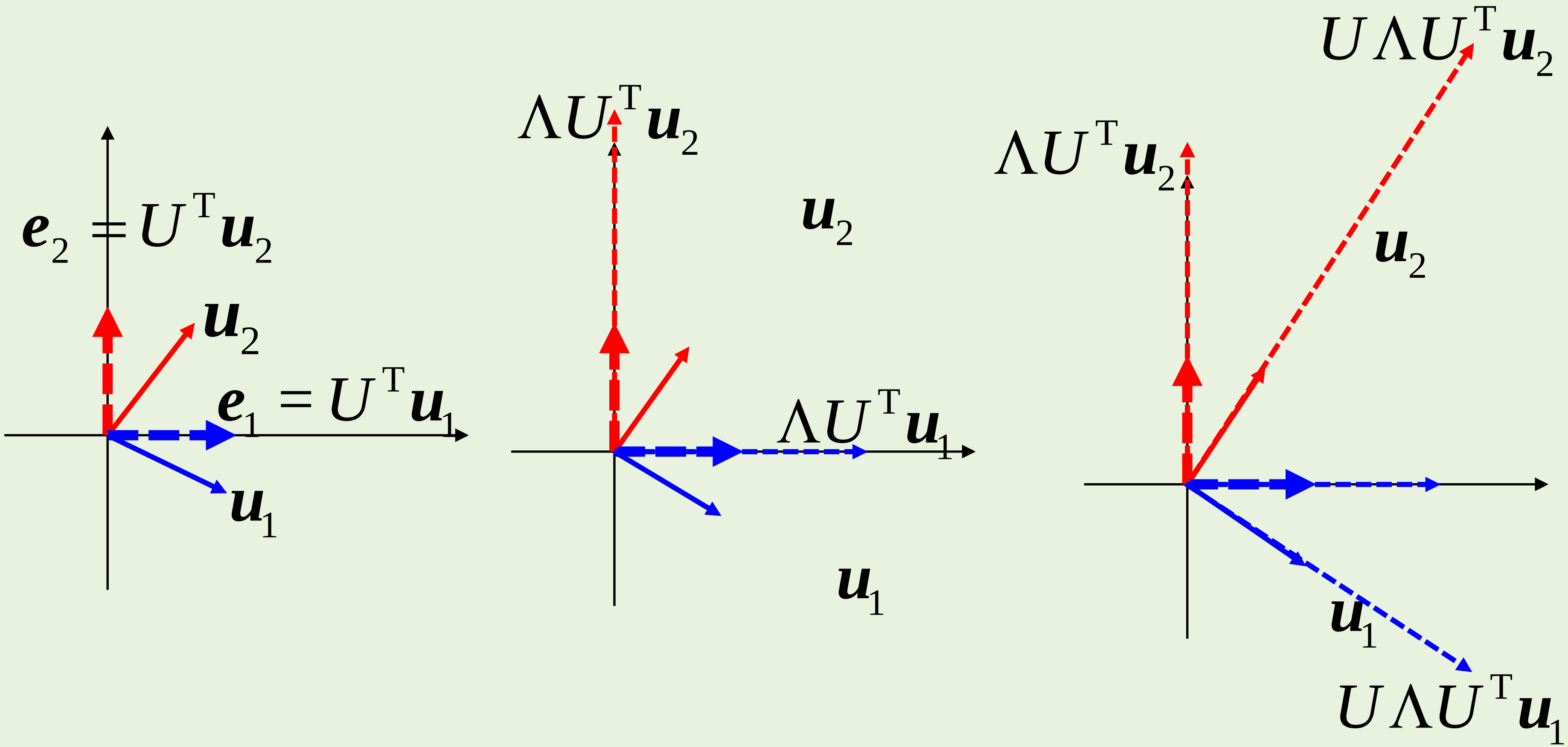
$$P_2 = E - P_1$$

单位特征向量 α_1 $\frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2i \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$

$$P_1 = \alpha_1 \alpha_1^H = \frac{1}{9}\begin{bmatrix} 4 & -4i & 2i \\ 4i & 4 & -2 \\ -2i & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

几何意义

$$A = U\Lambda U^{\mathrm{T}} = [\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2]\begin{bmatrix}\lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{u}_1^{\mathrm{T}} \\ \boldsymbol{u}_2^{\mathrm{T}}\end{bmatrix}$$



提纲

- 1. QR分解
- 2. 奇异值分解
- 3. 极分解
- 4. Cholesky分解
- 5. 谱分解
- **6. CS分解**
- 7. 其它分解

CS分解

$$U=\begin{bmatrix} U_{11} & U_{12} \\ U_{21} & U_{22} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} V_1 & 0 \\ 0 & V_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} C & S & 0 \\ -S & C & 0 \\ 0 & 0 & I_{q-p} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} W_1 & 0 \\ 0 & W_2 \end{bmatrix}$$

U：n阶酉矩阵, p阶矩阵U_{11}, q阶矩阵U_{22},$1<p\le q<n,p+q=n$

V_1、W_1：p阶酉矩阵

V_2、W_2：q阶酉矩阵

C：$\mathrm{diag}(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_p)$， $\sigma_1 \ge \sigma_2 \ge \ldots \ge \sigma_p$

S：$\mathrm{diag}(\sqrt{1-\sigma_1^2}, \sqrt{1-\sigma_2^2}, \ldots, \sqrt{1-\sigma_p^2})$,

提纲

- 1. QR分解
- 2. 奇异值分解
- 3. 极分解
- 4. Cholesky分解
- 5. 谱分解
- 6. CS分解
- 7. 其它分解

矩阵的满秩分解

$$A_{m\times n} = B_{m\times r}C_{r\times n}$$

$$\boxed{m\times n} = \boxed{m\times r}\ \boxed{r\times n}$$

- A是 $m\times n$矩阵且rank(A)=r
- B是$m\times r$列满秩矩阵rank(B)=r
- C是$r\times n$ 行满秩矩阵rank(C)=r

如何求矩阵A的满秩分解？

- 只用初等行变换就可以.
- 初等<u>行</u>变换不改变矩阵<u>列</u>向量的线性关系.

$$[\alpha_1,\alpha_2,3\alpha_1-\alpha_2] \xrightarrow{\text{初等行变换}} [\beta_1,\beta_2,3\beta_1-\beta_2]$$

$$=[\alpha_1,\alpha_2]\begin{bmatrix}1 & 0 & 3\\ 0 & 1 & -1\end{bmatrix} \qquad =[\beta_1,\beta_2]\begin{bmatrix}1 & 0 & 3\\ 0 & 1 & -1\end{bmatrix}$$

$$[\alpha_1,2\alpha_1+\alpha_3,\alpha_3] \xrightarrow{\text{初等行变换}} [\beta_1,2\beta_1+\beta_3,\beta_3]$$

$$=[\alpha_1,\alpha_3]\begin{bmatrix}1 & 2 & 0\\ 0 & 1 & 1\end{bmatrix} \qquad =[\beta_1,\beta_3]\begin{bmatrix}1 & 2 & 0\\ 0 & 1 & 1\end{bmatrix}$$

矩 阵 的 满 秩 分 解

$$
\begin{array}{c}
\begin{bmatrix} 1 & 1 & 4 & -3 \\ 2 & 2 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 5 & -4 \end{bmatrix} \\
\alpha_1 \quad \alpha_1 \quad \alpha_3 \quad \alpha_1-\alpha_3
\end{array}
\xrightarrow{\text{初等行变换}}
\begin{array}{c}
\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
\beta_1 \quad \beta_1 \quad \beta_3 \quad \beta_1-\beta_3
\end{array}
$$

$$
= \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \qquad = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}
$$

满秩分解求法:

1.行初等变换为"简化阶梯"矩阵,

2.选取“主元” 所在的列对应的列向量构成列满秩矩阵*B*,

3.将简化阶梯型矩阵全为零的行去掉构成行满秩矩阵*C*.

例：求矩阵A的满秩分解$A=BC$，B列满秩, C行满秩.

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 1 & 3 & 3 \\ 2 & 4 & 3 & 1 & 4 & 5 \\ 4 & 8 & 6 & 2 & 8 & 10 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{rref(A)}} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

则

$$B=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{bmatrix}, \qquad C=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

例：求矩阵A的满秩分解$A=BC$，B列满秩, C行满秩.

$$A=\begin{bmatrix}1&2&1&0&1&2\\1&2&2&1&3&3\\2&4&3&1&4&5\\4&8&6&2&8&10\end{bmatrix}\xrightarrow{\text{rref(A)}}\begin{bmatrix}1&2&0&-1&-1&1\\0&0&1&1&2&1\\0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{rref(A)}}\begin{bmatrix}1&2&1&0&1&2\\0&0&1&1&2&1\\0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0\end{bmatrix}$$

则

$$B'=\begin{bmatrix}1&0\\1&1\\2&1\\4&2\end{bmatrix},$$

$$C'=\begin{bmatrix}1&2&1&0&1&2\\0&0&1&1&2&1\end{bmatrix}$$

例：求矩阵A的满秩分解$A=BC$，B列满秩，C行满秩.

$$A=\begin{bmatrix}0&0&1&2&3\\0&0&2&4&6\end{bmatrix}$$

解：

$$A\xrightarrow{\text{rref}(A)}\begin{bmatrix}0&0&1&2&3\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}$$

则

$$B=\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix},\qquad C=\begin{bmatrix}0&0&1&2&3\end{bmatrix}$$

$$A\xrightarrow{\text{rref}(A)}\begin{bmatrix}0&0&\frac{1}{2}&1&\frac{3}{2}\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}$$

$$B=\begin{bmatrix}2\\4\end{bmatrix},\qquad C=\begin{bmatrix}0&0&\frac{1}{2}&1&\frac{3}{2}\end{bmatrix}$$

北京理工大学 BEIJING INSTITUTE OF TECHNOLOGY

由上述例子可看出矩阵的满秩分解形式并不唯一。

定理：如果$A=BC=B_1C_1$ 均为矩阵A的满秩分解, 则

(1) 存在r(=rank(A)) 阶可逆矩阵θ, 满足$B=B_1\theta$, $C=\theta^{-1}C_1$.

(2) $C^H(CC^H)^{-1}(B^HB)^{-1}B^H=C_1^H(C_1C_1^H)^{-1}(B_1^HB_1)^{-1}B_1^H$

A的加号逆的求解公式

(1)证明要点: (a)$A=BC$表明A的列向量组可由B的列向量组线性表出, (b) B的列向量线性无关

结论: B的列向量构成A列向量空间的基, 同理B_1的列向量构成A列向量空间的基, 由此即可得到(1)。

满秩分解的应用：设$A=BC$是A的满秩分解，则

$$Ax=0\Leftrightarrow Cx=0$$

三角分解

- 设方阵$A \in M_n$。如果存在下三角矩阵$L \in M_n$和上三角矩阵$R \in M_n$，使得

$$A = LR$$

则称**A**可以做三角分解。

$$A = \begin{bmatrix} l_{11} & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & 0 \\ l_{n1} & \cdots & l_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_{11} & \cdots & r_{1n} \\ 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & r_{nn} \end{bmatrix}$$

几何意义

高斯消元法求解线性方程组的矩阵表示

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \Rightarrow A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$$

增广矩阵 $(A|\boldsymbol{b}) \xrightarrow{\text{初等行变换}}$ 上三角矩阵 $(U|\boldsymbol{c})$

$\xrightarrow{\text{回代}} U\boldsymbol{x} = \boldsymbol{c}$ 的解 $\Leftrightarrow A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ 的解

- **【定理】** 设$A \in M_n$，且A的秩为n，那么A可以做三角分解$\Leftrightarrow A$的$k(k=1,2,\ldots,n)$阶顺序主子式不为0

$$A=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

不可三角分解

Doolittle分解

下三角矩阵*L*的对角元素都为1。

$$A = LR = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \vdots & 1 & 0 \\ l_{n1} & \cdots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_{11} & \cdots & r_{1n} \\ 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & r_{nn} \end{bmatrix}$$

北京理工大学 BEIJING INSTITUTE OF TECHNOLOGY

Crout分解：

- 上三角矩阵R的对角元素都为1。

$$A = LR = \begin{bmatrix} l_{11} & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & 0 \\ l_{n1} & \cdots & l_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \cdots & r_{1n} \\ 0 & 1 & \vdots \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$