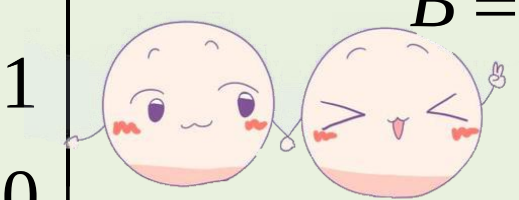
第二章

矩阵标准型

引导问题

$$A=\begin{bmatrix}0&1&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{bmatrix}$$

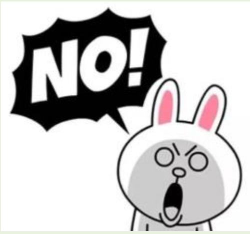


$$B=\begin{bmatrix}0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}$$

特征值{0}，det(*A*)=0

特征值{0}，det(*A*)=0

$$AA=\begin{bmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}$$



$$BB=\begin{bmatrix}0&0&1&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}$$

提纲

- 1. 矩阵相似
- 2. Jordan标准型
- 3. 极小多项式

特征值与特征向量

对方阵A，如果有数λ和非零向量v满足

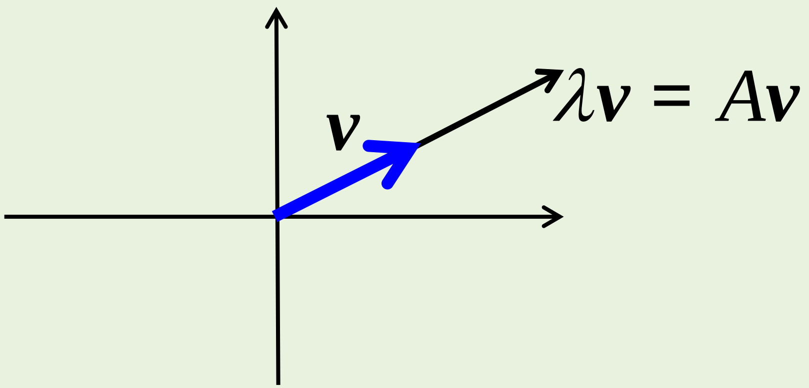
$$Av=\lambda v$$

那么λ就称为A的一个特征值，

v称为A的一个与λ相伴的特征向量。

几何意义

把向量变为同维数向量的时候，只发生了伸缩



【定义】：设$A \in M_n$

- 矩阵$\lambda E-A$称为A的特征矩阵
- 行列式$|\lambda E-A|$称为A的特征多项式
- n次代数方程$|\lambda E-A|=0$称为 A的特征方程 $\sigma(A)$
- A的特征方程的根称为 A 的特征根(或特征值)
- 矩阵A的所有特征根的全体称为A的谱，记为$\sigma(A)$
- $(\lambda E-A)X=0$称为矩阵A的特征方程组

相似

【定义】：

设给定方阵A，$B \in M_n$，如果存在一个非奇异矩阵$S \in M_n$，使得

$$B=S^{-1}AS$$

那么A相似于B，记作$A \sim B$

变换$A \to S^{-1}AS$ 称为由相似矩阵S给出的相似变换

S是把A变成B的相似变换矩阵

矩阵A通过相似变换矩阵S变成B

相似代数意义

相似矩阵A和B是**同一个线性变换**在两个不同基下的表示矩阵。

$$B=S^{-1}AS$$

S是基变换矩阵(过渡矩阵)

同一个线性变换在不同基下的矩阵是相似矩阵

设向量组$\alpha_1, \alpha_2,\ldots, \alpha_n$（旧的）

与向量组$\beta_1, \beta_2,\ldots, \beta_n$（新的）

是n维线性空间V的两组基底，

它们之间的关系为

n阶方阵

$$P=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

叫旧基底到新基底的过渡矩阵

$$\beta_i=a_{1i}\alpha_1+a_{2i}\alpha_2+\ldots+a_{ni}\alpha_n=[\alpha_1, \alpha_2,\ldots, \alpha_n]\begin{bmatrix} a_{1i} \\ a_{2i} \\ \vdots \\ a_{ni} \end{bmatrix} \quad (i=1,2,\ldots,n)$$

矩阵化表示为

定理：过渡矩阵P是可逆的

基变换公式

$$[\beta_1, \beta_2,\ldots, \beta_n]=[\alpha_1, \alpha_2,\ldots, \alpha_n]\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

$$=[\alpha_1, \alpha_2,\ldots, \alpha_n]P$$

北京理工大学 BEIJING INSTITUTE OF TECHNOLOGY

坐标变换公式

定理： 设V^n中的元素α，

在基$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$下的坐标为$(x_1, x_2, \ldots, x_n)^T$，

在基$\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$下的坐标为$(x_1', x_2', \ldots, x_n')^T$，

若两个基之间的变换公式为

$$(\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n) = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)P$$

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ \\ \\ \end{pmatrix} = P^{-1}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

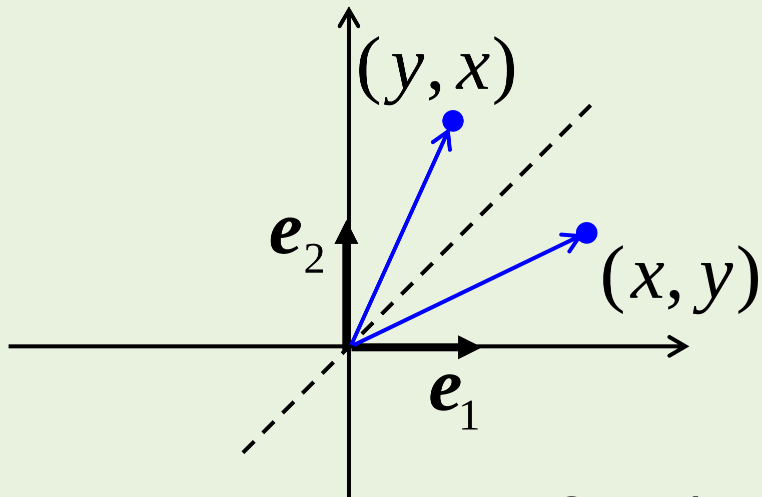
则有坐标变换公式

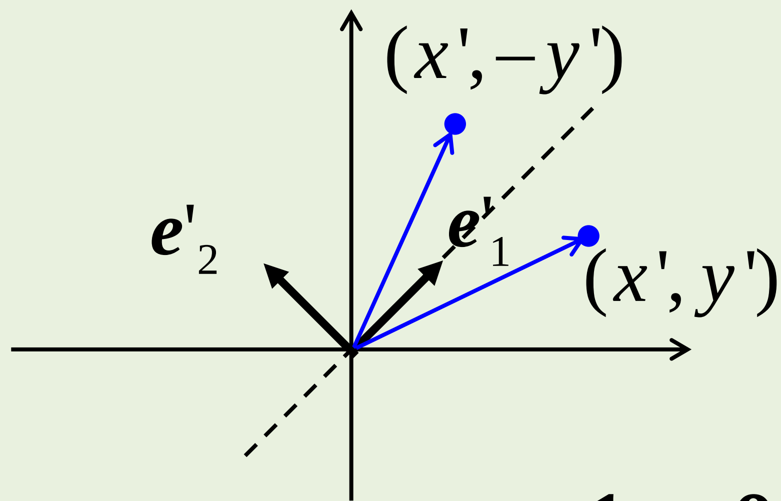
$$(\beta_1, \beta_2 \cdots \beta_n) = (\alpha_1, \alpha_2 \cdots \alpha_n)P$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = P\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ \vdots \\ x_n' \end{pmatrix}, \quad 或 \quad \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ \vdots \\ x_n' \end{pmatrix} = P^{-1}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

相似几何意义：

【例】：在线性空间$\mathbf{R}^2$中关于y=x直线的镜像线性变换





取基e_1和e_2　　$A=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

取基e'_1和e'_2　　$B=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$

$$[e'_1, e'_2]=[e_1, e_2]\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}$$

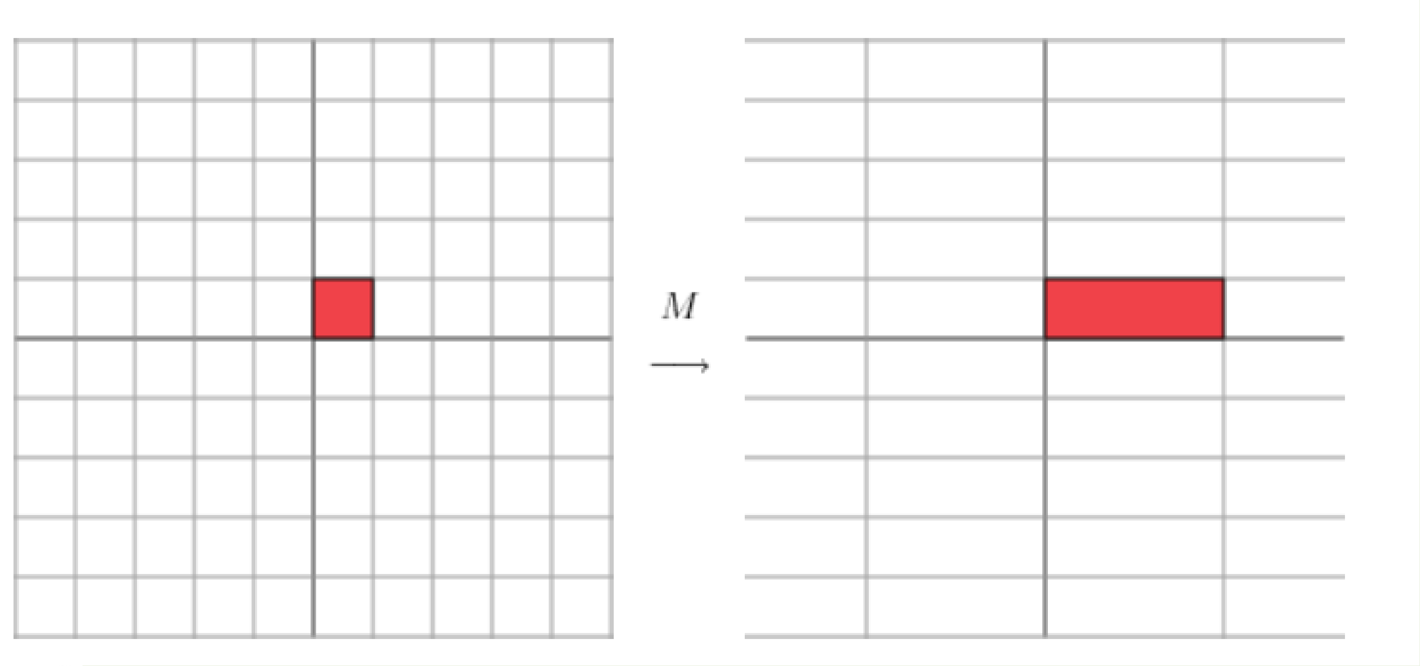
$B=U^{-1}AU$

相似变换矩阵U

相似几何意义：

- 简单线性变换

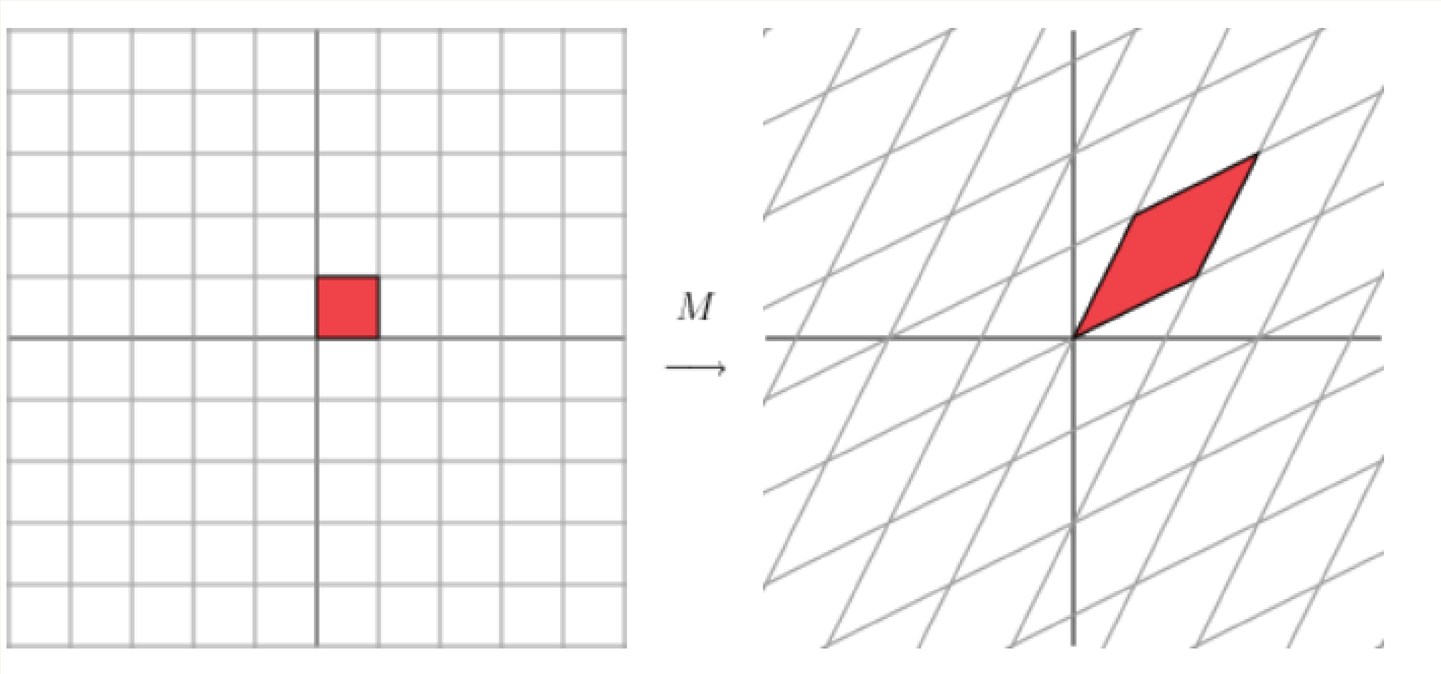
$$A=\begin{bmatrix}3 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix} \Rightarrow A\boldsymbol{w}=\begin{bmatrix}3 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3x\\ y\end{pmatrix}$$



相似几何意义：

- 复杂线性变换

$$A=\begin{bmatrix}2&1\\1&2\end{bmatrix} \Rightarrow A\boldsymbol{w}=\begin{bmatrix}2&1\\1&2\end{bmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2x+y\\x+2y\end{pmatrix}$$

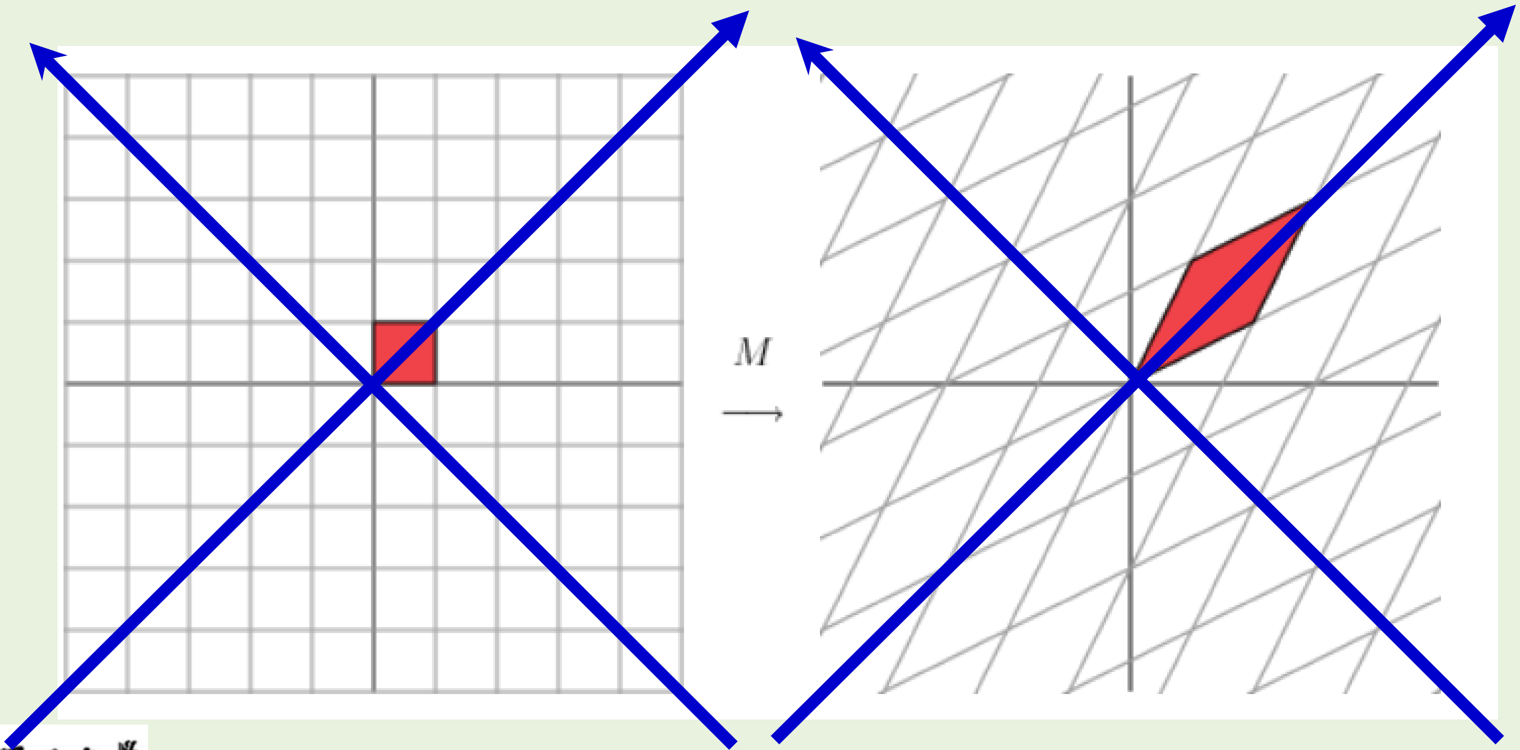


相似几何意义：

$$B = U^{-1}AU = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- 复杂线性变换

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow A\boldsymbol{w} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x+y \\ x+2y \end{pmatrix}$$



相似矩阵的性质：

设给定方阵 A，B，$C \in M_n$，

1. $A \sim A$（自反性）

2. $A \sim B$，则$B \sim A$(对称性)

3. $A \sim B$，$B \sim C$，则$A \sim C$ (传递性)

矩阵可按照相似划分等价类

相似矩阵的性质：

设给定方阵 A，$B \in M_n$，以及$A \sim B$相似，那么

① 如果B是对角矩阵，那么它的主对角线上的元素就是A的特征值

② $B=0$当且仅当$A=0$

③ $B=I$当且仅当$A=I$

相似矩阵的性质

相同的特征多项式

- 相同的特征值
- 相同的行列式值
- 相同的秩
- 相同的迹
- 相同的谱

线性变换的特征多项式、秩、谱

对角化：

矩阵A和一个对角矩阵相似

【定理】： n阶矩阵可对角化的充要条件是有n个线性无关的特征向量。

$\Rightarrow$:

n阶方阵A相似于对角阵，即存在可逆矩阵P，使得

$$P^{-1}AP=\begin{bmatrix}\lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n\end{bmatrix} \qquad AP=P\begin{bmatrix}\lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n\end{bmatrix}$$

令$P=[X_1, X_2,\ldots, X_n]$

$$A[X_1, X_2,\ldots, X_n]=[X_1, X_2,\ldots, X_n]\begin{bmatrix}\lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n\end{bmatrix}$$

$AX_i= \lambda_i X_i$

矩阵P可逆，$X_1, X_2,\ldots, X_n$线性无关的特征向量

【定理】： n阶矩阵可对角化的充要条件是有n个线性无关的特征向量。

$\Leftarrow$:

n阶方阵A有n个线性无关的特征向量$X_1, X_2, \ldots, X_n$，相应的特征值为$\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$，$AX_i = \lambda_i X_i$

$$A[X_1, X_2, \ldots, X_n] = [X_1, X_2, \ldots, X_n]\begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{bmatrix}$$

令$P=[X_1, X_2, \ldots, X_n]$，$P$可逆

$$AP = P\begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{bmatrix} \qquad P^{-1}AP = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{bmatrix}$$

同时可对角化问题

【定理】：设 $A, B \in M_n$ 均可以对角化，则A, B同时对角化 $\Leftrightarrow$ $AB=BA$.

A, B同时对角化指的是存在可逆阵P，使得

$P^{-1}AP$，$P^{-1}BP$同时为对角矩阵.

对角化用途

【例】：已知矩阵$A=\begin{bmatrix}1 & -2 & 2\\ -2 & -2 & 4\\ 2 & 4 & -2\end{bmatrix}$，求$A^{100}$。

【解】：矩阵A可进行如下相似对角化$P^{-1}AP=\Lambda$

$$|\lambda I-A|=\begin{vmatrix}\lambda-1 & 2 & -2\\ 2 & \lambda+2 & -4\\ -2 & -4 & \lambda+2\end{vmatrix}\overset{R_3+R_2}{=}\begin{vmatrix}\lambda-1 & 2 & -2\\ 2 & \lambda+2 & -4\\ 0 & \lambda-2 & \lambda-2\end{vmatrix}$$

$$\overset{C_3-C_2}{=}\begin{vmatrix}\lambda-1 & 2 & -4\\ 2 & \lambda+2 & -\lambda-6\\ 0 & \lambda-2 & 0\end{vmatrix}$$

$$=(\lambda-2)((\lambda-1)(\lambda+6)-8)\ =(\lambda-2)(\lambda+7)(\lambda-2)$$

对角化用途

【例】：已知矩阵$A=\begin{bmatrix}1 & -2 & 2\\ -2 & -2 & 4\\ 2 & 4 & -2\end{bmatrix}$，求$A^{100}$。

【解】：矩阵A可进行如下相似对角化$P^{-1}AP=\Lambda$

矩阵A的特征值$\lambda_1=\lambda_2=2$，$\lambda_3=-7$

$$(-7I-A)=\begin{bmatrix}-8 & 2 & -2\\ 2 & -5 & -4\\ -2 & -4 & -5\end{bmatrix}\xrightarrow{R_1\leftrightarrow R_2}\begin{bmatrix}2 & -5 & -4\\ -8 & 2 & -2\\ -2 & -4 & -5\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[R_3+R_1]{R_2+4R_1}\begin{bmatrix}2 & -5 & -4\\ 0 & -18 & -18\\ 0 & -9 & -9\end{bmatrix}\xrightarrow[-R_3/9]{-R_2/18}\begin{bmatrix}2 & -5 & -4\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 1\end{bmatrix}$$

北京理工大学 BEIJING INSTITUTE OF TECHNOLOGY

对角化用途

【例】：已知矩阵$A=\begin{bmatrix}1 & -2 & 2\\ -2 & -2 & 4\\ 2 & 4 & -2\end{bmatrix}$，求$A^{100}$。

【解】：矩阵A可进行如下相似对角化$P^{-1}AP=\Lambda$

矩阵A的特征值$\lambda_1=\lambda_2=2$，$\lambda_3=-7$

$$\begin{bmatrix}2 & -5 & -4\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 1\end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix}2 & -5 & -4\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix}2 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

特征值$\lambda_3=-7$对应的特征向量为 $\begin{bmatrix}1\\ 2\\ -2\end{bmatrix}$

北京理工大学 BEIJING INSTITUTE OF TECHNOLOGY

对角化用途

【例】：已知矩阵$A=\begin{bmatrix}1 & -2 & 2\\ -2 & -2 & 4\\ 2 & 4 & -2\end{bmatrix}$，求$A^{100}$。

【解】：矩阵A可进行如下相似对角化$P^{-1}AP=\Lambda$

矩阵A的特征值$\lambda_1=\lambda_2=2$，$\lambda_3=-7$ $\begin{bmatrix}1\\ 2\\ -2\end{bmatrix}$

$$\Lambda=\begin{bmatrix}-7 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{bmatrix}$$

$$(2I-A)=\begin{bmatrix}1 & 2 & -2\\ 2 & 4 & -4\\ -2 & -4 & 4\end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix}1 & 2 & -2\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

矩阵A的特征值$\lambda_3=2$对应的特征向量为$\begin{bmatrix}-2\\ 1\\ 0\end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix}2\\ 0\\ 1\end{bmatrix}$

相似变换矩阵为

$$P=\begin{bmatrix}1 & -2 & 2\\ 2 & 1 & 0\\ -2 & 0 & 1\end{bmatrix}\quad P^{-1}=\frac{1}{9}\begin{bmatrix}1 & 2 & -2\\ -2 & 5 & 4\\ 2 & 4 & 5\end{bmatrix}$$

对角化用途

【例】：已知矩阵$A=\begin{bmatrix}1 & -2 & 2\\ -2 & -2 & 4\\ 2 & 4 & -2\end{bmatrix}$，求$A^{100}$。

【解】：矩阵A可进行如下相似对角化$P^{-1}AP=\Lambda$

$$A^{100}=(P\Lambda P^{-1})^{100}=P\Lambda^{100}P^{-1}$$

$$=\begin{bmatrix}1 & -2 & 2\\ 2 & 1 & 0\\ -2 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}(-7)^{100} & 0 & 0\\ 0 & 2^{100} & 0\\ 0 & 0 & 2^{100}\end{bmatrix}\frac{1}{9}\begin{bmatrix}1 & 2 & -2\\ -2 & 5 & 4\\ 2 & 4 & 5\end{bmatrix}$$

$$=\frac{1}{9}\begin{pmatrix}2^{103}+(-7)^{100} & -2^{101}+2\cdot(-7)^{100} & 2^{101}-2\cdot(-7)^{100}\\ -2^{100}+2\cdot(-7)^{100} & 5\cdot 2^{100}+4\cdot(-7)^{100} & 2^{102}-4\cdot(-7)^{100}\\ 2^{101}-2\cdot(-7)^{100} & 2^{102}-4\cdot(-7)^{100} & 5\cdot 2^{100}+4\cdot(-7)^{100}\end{pmatrix}$$

北京理工大学 BEIJING INSTITUTE OF TECHNOLOGY

提纲

- 1. 矩阵相似
- **2. Jordan标准型**
- 3. 极小多项式

Jordan块

【定义】： 称n_i阶矩阵

$$J_i=\begin{bmatrix} a_i & 1 & & & \\ & a_i & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & 1 \\ & & & & a_i \end{bmatrix}_{n_i\times n_i}$$

为 n_i阶Jordan 块。

Jordan 块的乘幂

例:已知$J=\begin{bmatrix} a & 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 & 0 \\ 0 & 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & 0 & a \end{bmatrix}$,求$J^n$.

解: 令$D=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

$$J^n=\begin{bmatrix} a^n & na^{n-1} & C_n^2a^{n-2} & C_n^3a^{n-3} \\ 0 & a^n & na^{n-1} & C_n^2a^{n-2} \\ 0 & 0 & a^n & na^{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & a^n \end{bmatrix}$$

则$J=aE+D$

$J^n=(aE+D)^n=a^nE+na^{n-1}D+C_n^2a^{n-2}D^2+C_n^3a^{n-3}D^3+ \ldots + D^n$

$D^2=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ $D^3=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ $D^4= D^5=\ldots=0$

北京理工大学 BEIJING INSTITUTE OF TECHNOLOGY

Jordan标准型矩阵

定义：设$J_i(1\le i \le s)$为对角线元素为a_i的n_i阶Jordan 块，称分块对角形矩阵

$$J=\begin{bmatrix} J_1 & & & \\ & J_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_s \end{bmatrix}=J_1\oplus J_2\oplus \dots\oplus J_s$$

为 **Jordan 标准型矩阵（ Jordan 矩阵）**。

Jordan标准型定理

【定理】：给定$A\in M_n$，则存在一个非奇异的$S\in M_n$，正整数q以及n_1，n_2，…，n_q，其中$n_1+n_2+\dots+n_q=n$以及数a_1，a_2，…，a_q，使得

$$A=S\begin{bmatrix} J_{n_1}(a_1) & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & J_{n_q}(a_q) \end{bmatrix}S^{-1}$$

即$J=\begin{bmatrix} J_{n_1}(a_1) & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & J_{n_q}(a_q) \end{bmatrix}=S^{-1}AS\sim A$

定理解析

- 每个矩阵A都与一个本质上唯一的Jordan矩阵相似
- Jordan块的个数q就是A的线性无关的特征向量的最大个数
- Jordan标准型的对角元素a_1， a_2， …， a_q就是A的特征值
- 矩阵A可以对角化，当且仅当$q=n$，即所有Jordan块都是1×1

每个Jordan块阶数的确定

对角线元素为a阶数为n的Jordan块

$$J_n=\begin{bmatrix} a & 1 & & & \\ & a & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & 1 \\ & & & & a \end{bmatrix}_{n\times n}$$

$$aI-J=\begin{bmatrix} 0 & 1 & & & \\ & 0 & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & 1 \\ & & & & 0 \end{bmatrix}_{n\times n}$$

$$\mathrm{r}\left(\begin{bmatrix} A & \\ & B \end{bmatrix}\right)=\mathrm{r}(A)+\mathrm{r}(B)$$

$\mathrm{r}(aI-J)=n-1$

$\mathrm{r}((aI-J)^2)=n-2$

$\mathrm{r}((aI-J)^3)=n-3$

……

$\mathrm{r}((aI-J)^{n-1})=1$

$\mathrm{r}((aI-J)^i)=0\ ,i\geq n$

$$J_9=\left[\begin{array}{ccc|cc|cc|c|c} a & 1 & & & & & & & \\ & a & 1 & & & & & & \\ & & a & & & & & & \\ \hline & & & a & 1 & & & & \\ & & & & a & & & & \\ \hline & & & & & a & 1 & & \\ & & & & & & a & & \\ \hline & & & & & & & a & \\ \hline & & & & & & & & a \end{array}\right]$$

rank$(aI-J)=4$

rank$(aI-J)^2=1$

rank$(aI-J)^3=0$

1阶的Jordan块9-3×1-2×2=2个

2阶的Jordan块4-2×1=2个

3阶的Jordan块1个

最高阶是3阶的Jordan块

Jordan块总数=阶数-rank$(aI-J)$=5

$$J=\begin{bmatrix} J_{n_1}^{\lambda_1} & & & & \\ & J_{n_2}^{\lambda_2} & & & \\ & & J_{n_3}^{\lambda_3} & & \\ & & & J_{n_4}^{\lambda_4} & \\ & & & & J_{n_5}^{\lambda_5} \end{bmatrix}$$

$n_1+n_2+n_3+n_4+n_5=n$

$\lambda_i \neq \lambda_j$

$$J_{n_1}^{\lambda_1}=\begin{bmatrix} \lambda_1 & 1 & & & & & \\ & \lambda_1 & 1 & & & & \\ & & \lambda_1 & & & & \\ & & & \lambda_1 & 1 & & \\ & & & & \lambda_1 & & \\ & & & & & \lambda_1 & \\ & & & & & & \lambda_1 \end{bmatrix}$$

$\mathrm{rank}(\lambda_1 I-J)= 3+n_2+n_3+n_4+n_5$ 1阶λ_1的Jordan块n_1-3-2

$\mathrm{rank}(\lambda_1 I-J)^2=1+n_2+n_3+n_4+n_5$ 2阶λ_1的Jordan块3-2=1个

$\mathrm{rank}(\lambda_1 I-J)^3= n_2+n_3+n_4+n_5$ 3阶λ_1的Jordan块1个

$\mathrm{rank}(\lambda_1 I-J)^i= n_2+n_3+n_4+n_5 ,i\geq 3$

λ_1的最高阶Jordan块是3阶

Jordan标准型求解

(1)先求出该矩阵的特征多项式及其特征值

(2)其 Jordan 标准形的主对角线上都是A的特征值，并且特征值λ_i 在主对角线上出现的次数等于λ_i作为特征根的代数重数n_i。

几何　几何 何

(3)对于每个特征值λ_i，求出以它为主对角元的Jordan块的数目$N(\lambda_i)=n-\text{rank}(\lambda_i I-A)$，即$\lambda_i$的几何重复度。

(4)求出以λ_i为主对角元的每阶Jordan块的数目

计算$\text{rank}(\lambda_i I-A)^k=n-n_i$的最小$k$，则以$\lambda_i$为主对角元的Jordan块最高阶为$k$。

$\text{rank}(\lambda_i I-A)^k=n-n_i$

根据$\text{rank}(\lambda_i I-A)^i$ $(i=1,2,k-1)$的值求出各阶Jordan块的数目

【例】:求出矩阵$A=\begin{bmatrix}2 & 3 & 2\\ 1 & 8 & 2\\ -2 & -14 & -3\end{bmatrix}$的 Jordan 标准形。

解：先写出A的特征多项式求其特征值

$$|(\lambda I\text{-}A)|=\begin{vmatrix}\lambda-2 & -3 & -2\\ -1 & \lambda-8 & -2\\ 2 & 14 & \lambda+3\end{vmatrix}=(\lambda\text{-}1)(\lambda\text{-}3)^2$$

对于特征值 $\lambda_2=3$，求rank$(3I\text{-}A)$

$$3I\text{-}A=\begin{bmatrix}1 & -3 & -2\\ -1 & -5 & -2\\ 2 & 14 & 6\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1 & -3 & -2\\ 0 & 2 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

rank$(3I\text{-}A)=2$,
特征值3对应的Jordan只有1个

故 A的标准形为:

$$J=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 3 & 1\\ 0 & 0 & 3\end{bmatrix}$$

或$J=\begin{bmatrix}3 & 1 & 0\\ 0 & 3 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$

设n阶方阵 A 的 Jordan 标准形为J，

则存在可逆矩阵P使得

$$P^{-1}AP = J$$

称 P为相似变换矩阵。

如何求相似变换矩阵？

我们通过具体的例题说明求相似变换矩阵的方法。

例:求方阵$A=\begin{bmatrix}3&0&8\\3&-1&6\\-2&0&-5\end{bmatrix}$的 Jordan 标准形及其相似变换矩阵$P$。

解: 首先求其 Jordan 标准形:

$$\lambda E\text{-}A=\begin{bmatrix}\lambda-3&0&-8\\-3&\lambda+1&-6\\2&0&\lambda+5\end{bmatrix}=(\lambda+1)^3$$

故A的特征值λ=-1

$$-I\text{-}A=\begin{bmatrix}-4&0&-8\\-3&0&-6\\2&0&4\end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix}-4&0&0\\-3&0&0\\2&0&0\end{bmatrix}$$

rank(-I-A)=1, Jordan块有2个

A的 Jordan 标准型为

$$J=\begin{bmatrix}-1&0&0\\0&-1&1\\0&0&-1\end{bmatrix}$$

或$J=\begin{bmatrix}-1&1&0\\0&-1&0\\0&0&-1\end{bmatrix}$

$$A=\begin{bmatrix}3 & 0 & 8\\ 3 & -1 & 6\\ -2 & 0 & -5\end{bmatrix}$$

$$J=\begin{bmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 1\\ 0 & 0 & -1\end{bmatrix}$$

再求相似变换矩阵：

设相似变换矩阵为P,则$P^{-1}AP=J,AP=PJ$

P按列分块记为$P=[X_1, X_2, X_3]$

$AP=A[X_1, X_2, X_3] =[AX_1, AX_2, AX_3]$

$$PJ=[X_1, X_2, X_3]\begin{bmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 1\\ 0 & 0 & -1\end{bmatrix}=[-X_1, -X_2, X_2- X_3]$$

从而可得方程组: $AX_1 =-X_1, AX_2 =-X_2, AX_3 = X_2- X_3$

整理以后得三个线性方程组

$$\boxed{\begin{aligned}(-E-A)X_1 &=0\\ (-E-A)X_2 &=0\end{aligned}}$$

基础解系：$\alpha_1=(0,1,0)^T, \alpha_2=(-2,0,1)^T$

$(-E-A)X_3 =-X_2$

不能简单地取

$X_1=\alpha_1$，$X_2=\alpha_2$

X_2选取不当，会使第三个非齐次线性方程组无解。

$$A=\begin{bmatrix}3&0&8\\3&-1&6\\-2&0&-5\end{bmatrix}$$

$$J=\begin{bmatrix}-1&0&0\\0&-1&1\\0&0&-1\end{bmatrix}$$

$$\alpha_1=\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix},\alpha_2=\begin{bmatrix}-2\\0\\1\end{bmatrix}$$

α_1,α_2的任意线性组合都是

方程$(-E-A)X_2=0$的解， $2k_1+3k_2=0$

取$X_2=k_1\alpha_1+k_2\alpha_2$使得$(-E-A)X_3=-X_2$有解，

$$(-E-A,-X_2)=\begin{bmatrix}-4&0&-8&2k_2\\-3&0&-6&-k_1\\2&0&4&-k_2\end{bmatrix}$$

$$\to\begin{bmatrix}2&0&4&-k_2\\0&0&0&2k_1+3k_2\\0&0&0&0\end{bmatrix}$$ $2k_1+3k_2=0$方程有解

令$k_1=3$，$k_2=-2$，$X_2=3\alpha_1-2\alpha_2=[4,3,-2]^T$

$(-E-A)X_3=-X_2$的通解为$(1,0,0)^T+l_1(0,1,0)+l_2(-2,0,1)$

取$X_3=[1,0,0]^T$

$X_1=[0,1,0]^T$

所求的相似变换矩阵$P=[X_1, X_2, X_3]=\begin{bmatrix}0&4&1\\1&3&0\\0&-2&0\end{bmatrix}$

一般地，设A为n阶复方阵，则存在n 阶可逆矩阵P，

使得$P^{-1}AP=\begin{bmatrix} J_1 & & & \\ & J_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_t \end{bmatrix}$

其中J_i为Jordan块

记$P=[P_1, P_2, \ldots, P_t]$, $P_i \in C_{n\times ni}$

那么有

$A[P_1, P_2, \ldots, P_t]= [P_1J_1, P_2J_2, \ldots, P_tJ_t]$

$AP_i =P_iJ_i$　P_i仅与λ_i有关

记$P_i =[X_{i1}, X_{i2}, \ldots, X_{ini}]$

又可得$AX_{i1}=\lambda_iX_{i1}$

$AX_{i2}=X_{i1} +\lambda_iX_{i2}$

$\ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots$

$AX_{ini} =X_{ini-1} +\lambda_iX_{ini}$

X_{i1}是矩阵A的对应于特征值λ_i的特征向量，

X_{i1}的选取应该保证特征向量X_{i2} 可以求出，

X_{i2}的选取应该保证特征向量X_{i3}可以求出，

依此类推，

求得$X_{i1}, X_{i2}, \ldots, X_{ini}$.

北京理工大学 BEIJING INSTITUTE OF TECHNOLOGY

注意:

(1)每一个Jordan块对应着一个特征向量;

(2)每个特征值对应的Jordan块个数等于特征值的几何重度。

(3)每个特征值对应的Jordan块阶数之和等于特征值的代数重度。

提纲

- 1. 矩阵相似
- 2. Jordan标准型
- 3. 极小多项式

矩阵多项式

设$f(x)$是x的多项式，

$$f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x+a_0$$

那么对于矩阵$A\in M_n$，

$$f(A)=a_nA^n+a_{n-1}A^{n-1}+\ldots+a_1A+a_0I$$

称为矩阵A的多项式。

零化多项式

设 $A \in M_n$，$p(x)$是多项式，如果有

$$p(A)=0$$

那么多项式$p(x)$称为A的零化多项式 (使A零化)。

零化多项式

【例】：矩阵A的特征多项式是该矩阵的零化多项式

$$p(x)=\det(xI-A)$$

Hamilton-Cayley定理

极小多项式

极小多项式：使A零化的最小次数的首1多项式，记为 $q_A(x)$。

【定理】：设给定$A \in M_n$，则存在唯一一个最小次数的首一多项式 $q_A(x)$使A零化。
如果$p(x)$是任何一个使$p(A)=0$成立的首1多项式，那么$q_A(x)$整除$p(x)$，
即对某个首1多项式$h(x)$有：$p(x)=h(x)\, q_A(x)$。

性质

【定理】：

设$A \in M_n$是一个给定的矩阵，其不同的特征值是λ_1，λ_2，…，λ_d，则A的极小多项式是

$$q_A(x)=\prod_{i=1}^{d}(x-\lambda_i)^{r_i}$$

其中r_i是A的特征值λ_i对应的最大Jordan块的阶。

相似矩阵有相同的极小多项式。

$q_A(x) \mid A^k$　　$q_A(x) = A^i$　　$i=1,\cdots k-1$

【例】:求出矩阵$A=\begin{bmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 1 & 8 & 2 \\ -2 & -14 & -3 \end{bmatrix}$的 极小多项式。

解: A的标准型为:

$$J=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

A的极小多项式为$q_A(x)=(x-1)(x-3)^2$

【例】:求出矩阵$A=\begin{bmatrix}3 & 0 & 8\\ 3 & -1 & 6\\ -2 & 0 & -5\end{bmatrix}$的 极小多项式。

解： A的标准型为:

$$J=\begin{bmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 1\\ 0 & 0 & -1\end{bmatrix}$$

A的极小多项式为$q_A(x)=(x+1)^2$

性质

【推论】：

设$A\in M_n$有不同的特征值λ_1，λ_2，…，λ_d，

令$q_A(x)=(x-\lambda_1)(x-\lambda_2)\dots(x-\lambda_d)$

那么，A可对角化当且仅当$q(A)=0$。