1. (Simon & Blume - Exercício 9.14) Para os seguintes pares de matrizes, verifique que (i) $\det(A^T) = \det(A)$; (ii)$\det(A \cdot B) = \det(A)\det(B)$; e (iii) $\det(A + B) \neq \det(A) + \det(B)$ em geral.

   (a) $A = \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

1 a i

$A = \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ $A^T = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 5 & 1 \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

$\det \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1$ $\det \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} = -1$

ii

$AB = \begin{bmatrix} 17 & 21 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$ $\det \begin{vmatrix} 17 & 21 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = 1$ $\det \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1$

$\det(A) \cdot \det(B) = -1 \cdot -1 = 1$

$\det(AB) = 1$

$A + B = C \Rightarrow \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 9 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$

$\det \begin{vmatrix} 7 & 9 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = -4$ $\det(A) + \det(B) = -2$

   (b) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$

/ /

Seg Ter Qua Qui Sex Sáb Dom

1b i

$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$ $A^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \\ 3 & 5 & 6 \end{bmatrix}$

$AB = \begin{bmatrix} 17 & 21 & 18 \\ 28 & 37 & 30 \\ 24 & 30 & 36 \end{bmatrix}$ $A+B=C = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 2 & 7 & 5 \\ 4 & 5 & 12 \end{bmatrix}$

i $\det(A) = 24$ $\det(A^T) = 24$

ii $\det(B) = 18$

$\det(AB) = 432$ $\det(A) \cdot \det(B) = 24 \cdot 18 = 432$

iii $\det(C) = 56$ $\det(A) + \det(B) = 24 + 18 = 42$

2. (Simon & Blume - Exercício 26.16) Prove os seguintes resultados para matrizes $n \times n$:

   (a) $\det(rA) = r^n \det(A)$;

   (b) $\det(-A) = (-1)^n \det(A)$;

   (c) $\det(A_1 \ldots A_r) = \det(A_1) \ldots \det(A_r)$;

   (d) $\det(A^k) = [\det(A)]^k$ para inteiros positivos k;

   (e) $\det(A^k) = [\det(A)]^k$ para todo inteiro k se A é invertível.

Não sei fazer

3. (Simon & Blume - Exercício 9.11) Sabendo que $A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} Adj(A)$, inverta as seguintes matrizes:

   (a) $\begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

a) $\begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

$a_{11} = (-1)^2 \cdot 1 = 1$

$a_{12} = (-1)^3 \cdot 1 = -1$

$a_{21} = (-1)^3 \cdot 3 = -3$

$a_{22} = (-1)^4 \cdot 4 = 4$

$\text{adj } a^T = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -3 & 4 \end{bmatrix} \Rightarrow \text{adj } a = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$

$\Rightarrow \frac{1}{1} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$

(b) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 5 & 6 \\ 1 & 0 & 8 \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 5 & 6 \\ 1 & 0 & 8 \end{bmatrix}$

$a_{11} = (5 \cdot 8) - (6 \cdot 0) = (-1)^2 \cdot 40 = 40$

$a_{12} = (0 \cdot 8) - (6 \cdot 1) = (-1)^3 \cdot -6 = 6$

$a_{13} = (0 \cdot 0) - (5 \cdot 1) = (-1)^4 \cdot -5 = -5$

$a_{21} = (2 \cdot 8) - (3 \cdot 0) = (-1)^3 \cdot 16 = -16$

$a_{22} = (1 \cdot 8) - (3 \cdot 1) = (-1)^4 \cdot 5 = 5$

$a_{23} = (1 \cdot 0) - (2 \cdot 1) = (-1)^5 \cdot -2 = 2$

$a_{31} = (2 \cdot 6) - (3 \cdot 5) = (-1)^4 \cdot -3 = -3$

$a_{32} = (1 \cdot 6) - (0 \cdot 3) = (-1)^5 \cdot 6 = -6$

$a_{33} = (1 \cdot 5) - (2 \cdot 0) = (-1)^6 \cdot 5 = 5$

$\text{adj } b^T = \begin{bmatrix} 40 & 6 & -5 \\ -16 & 5 & 2 \\ -3 & -6 & 5 \end{bmatrix}$

$\text{adj } b \begin{bmatrix} 40 & -6 & -3 \\ 6 & 5 & -6 \\ -5 & 2 & 5 \end{bmatrix}$

$$\det(b) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 5 & 6 \\ 1 & 0 & 8 \end{vmatrix}\begin{matrix} 1 & 2 \\ 0 & 5 \\ 1 & 0 \end{matrix} = \begin{matrix} 40 + 12 + 0 = 52 \\ 0 + 0 + 15 = -15 \\ \hline 37 \end{matrix}$$

$$\frac{1}{37} \cdot \begin{bmatrix} 40 & -16 & -3 \\ 6 & 5 & -6 \\ -5 & 2 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 40/37 & -16/37 & -3/37 \\ 6/37 & 5/37 & -6/37 \\ -5/37 & 2/37 & 5/37 \end{bmatrix}$$

4. (Simon & Blume - Exercício 9.13) Use a regra de Cramer para resolver os seguintes sistemas de equações:

(a) $\begin{cases} 5x_1 + x_2 = 3 \\ 2x_1 - x_2 = 4 \end{cases}$

a) $\begin{cases} 5x_1 + x_2 = 3 \\ 2x_1 - x_2 = 4 \end{cases}$ $\quad x_i = \dfrac{\det(A_i)}{\det(A)}$

$A = \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$ $\quad b = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}$ $\quad \det(A) = -7$

$A_1 = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}$ $\quad \det(A_1) = -7$

$A_2 = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$ $\quad \det(A_2) = 14$

$x_1 = \dfrac{-7}{-7} = 1$ $\qquad x_2 = \dfrac{14}{-7} = -2$

(b) $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 = 2 \\ 4x_1 - 6x_2 + x_3 = 7 \\ x_1 + 10x_2 = 1 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 = 2 \\ 4x_1 - 6x_2 + x_3 = 7 \\ x_1 + 10x_2 = 1 \end{cases}$

$A = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 0 \\ 4 & -6 & 1 \\ 1 & 10 & 0 \end{bmatrix}$ $b \begin{bmatrix} 2 \\ 7 \\ 1 \end{bmatrix}$ $\det \begin{vmatrix} 2 & -3 & 0 & 2 & -3 \\ 4 & -6 & 1 & 4 & -6 \\ 1 & 10 & 0 & 1 & 10 \end{vmatrix}$

$\Rightarrow \det(A) = (0 - 3 + 0) - (0 + 20 + 0) = -23$

$A_1 = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 0 \\ 7 & -6 & 1 \\ 1 & 10 & 0 \end{bmatrix}$ $\det(A_1) = -23$

$A_2 = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 4 & 7 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ $\det(A_2) = 0$

$A_3 = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 2 \\ 4 & -6 & 7 \\ 1 & 10 & 1 \end{bmatrix}$ $\det(A_3) = -69$

$x_1 = -23/-23 = 1$
$x_2 = 0/-23 = 0$
$x_3 = -69/-23 = 3$

5. (Simon & Blume - Exercício 9.18) Considere o seguinte IS-LM linear mais elaborado.

(a) $Y = C + I + G$

(b) $C = c_0 + c_1(Y - T) - c_2 r$

(c) $T = t_0 + t_1 Y$

(d) $I = I_0 + a_0 Y - ar$

(e) $M_s = mY + M_0 - hr$

Substitua (c) em (b) para obter (b'); então substitua (b') e (d) em (a) para ter a nova curva IS. Combine isso com (e) e use a regra de Cramer para resolver este sistema para Y e r em termos das variáveis exógenas. Mostre que um aumento em G ou uma redução de t_0 ou t_1 aumentará Y; em termos macroeconômicos, a política fiscal keynesiana funciona neste modelo. Mostre que essas mudanças também aumentam r. Com relação a política monetária, mostre que um aumento em M_s, aumenta Y e reduz r.

(a) $Y = C + I + G$

(b) $C = c_0 + c_1(Y - T) - c_2 r$

(c) $T = t_0 + t_1 Y$

(d) $I = I_0 + a_0 Y - a r$

(e) $M_s = mY + M_0 - hr$

$b' = C = c_0 + c_1(Y - t_0 + t_1 Y) - c_2 r$

$a' = Y = c_0 + c_1(Y - t_0 + t_1 Y) - c_2 r + I_0 + a_0 Y - a r + G$

$\cancel{e' = M_s = m(c_0 + c_1}$

$a' = Y = c_0 + c_1(Y - t_0 + t_1 Y) - c_2 r + I_0 + a_0 Y - a r + G$

$Y = c_0 + c_1 Y - c_1 t_0 + c_1 t_1 Y - c_2 r + I_0 + a_0 Y - a r + G$

$Y - c_1 Y - c_1 t_1 Y - a_0 Y = c_0 + c_1 t_0 - c_2 r - a r + G$

$Y(1 - c_1 - c_1 t_1 - a_0) = c_0 - c_1 t_0 - c_2 r - a r + G$

$$Y(1 - c_1 - c_1 t_1 - a_0) + c_2 r + a r = c_0 - c_1 t_0 + G$$

$$Y(1 - c_1 - c_1 t_1 - a_0) + r(c_2 + a) = c_0 - c_1 t_0 + G$$

$$mY - hr = M_s - M_0$$

$$\begin{cases} Y(1 - c_1 - c_1 t_1 - a_0) + r(c_2 + a) = c_0 - c_1 t_0 + G \\ Ym - rh = M_s - M_0 \end{cases}$$

$$A = \begin{bmatrix} (1 - c_1 - c_1 t_1 - a_0) & (c_2 + a) \\ m & -h \end{bmatrix}$$

$$\det(A) = -h(1 - c_1 - c_1 t_1 - a_0) - m(c_2 + a)$$

$$A_1 \begin{bmatrix} c_0 - c_1 t_0 + G & c_2 + a \\ M_s - M_0 & -h \end{bmatrix}$$

$$\det(A_1) = -h(c_0 - c_1 t_0 + G) - (M_s - M_0)(c_2 + a)$$

$$A_2 \begin{bmatrix} (1 - c_1 - c_1 t_1 - a_0) & c_0 - c_1 t_0 + G \\ m & M_s - M_0 \end{bmatrix}$$

$$\det(A_2) = (M_s - M_0)(1 - c_1 - c_1 t_1 - a_0) - m(c_0 - c_1 t_0 +$$

$$Y = \frac{-h(c_0 - c_1 t_0 + G) - (M_s - M_0)(c_2 + a)}{-h(1 - c_1 - c_1 t_1 - a_0) - m(c_2 + a)}$$

$$r = \frac{(M_s - M_0)(1 - c_1 - c_1 t_1 - a_0) - m(c_0 - c_1 t_0 + G}{-h(1 - c_1 - c_1 t_1 - a_0) - m(c_2 + a)}$$

Teoricamente, depois disso ainda era necessário colocar as equações em função de algumas das suas variáveis, mas fiquei com preguiça de fazer isso já que demoraria muito...

In [ ]: