1. (Simon & Blume - Exercício 7.16) Use a eliminação de Gauss-Jordan para resolver os seguintes quatro sistemas de equações lineares. Quais variáveis são livres e quais são básicas em cada solução?

(a) $$\begin{cases} w + 2x + y - z = 1 \\ 3w - x - y + 2z = 3 \\ -x + y - z = 1 \\ 2w + 3x + 3y - 3z = 3 \end{cases}$$

1 a

$$\left\{\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 3 & -3 & 3 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -7 & -4 & 5 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \\ L_2 \leftarrow L_2 - 3L_1 \\ \\ L_4 \leftarrow L_4 - 2L_1 \end{array}$$

$$\Rightarrow \left\{\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 4/7 & -5/7 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right\} \begin{array}{l} L_1 \\ L_2 \leftarrow -\frac{1}{7} L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{array} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 4/7 & -5/7 & 0 \\ 0 & 0 & 11/7 & -12/7 & 1 \\ 0 & 0 & 11/7 & -12/7 & 1 \end{array}\right\} \begin{array}{l} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \leftarrow L_3 + L_2 \\ L_4 \leftarrow L_4 + L_2 \end{array} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 4/7 & -5/7 & 0 \\ 0 & 0 & 11/7 & -12/7 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right\} \begin{array}{l} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \leftarrow L_4 - L_3 \end{array} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 4/7 & -5/7 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -12/11 & 7/11 \end{array}\right\} \begin{array}{l} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \leftarrow \frac{7}{11} L_3 \end{array} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & 1/11 & 4/11 \\ 0 & 1 & 0 & -1/11 & -4/11 \\ 0 & 0 & 1 & -12/11 & 7/11 \end{array}\right\} \begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_1 - L_3 \\ L_2 \leftarrow L_2 - 4/7 L_3 \\ L_3 \leftarrow L_3 \end{array}$$

$$= \left\{\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 3/11 & 12/11 \\ 0 & 1 & 0 & -1/11 & -4/11 \\ 0 & 0 & 1 & -12/11 & 7/11 \end{array}\right\} \begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_1 - 2L_2 \\ L_2 \\ L_3 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} w, x, y = \text{Básicos} \\ z = \text{Livre.} \end{array}$$

(b) $\begin{cases} w - x + 3y - z = 0 \\ w + 4x - y + z = 3 \\ 3w + 7x + y + z = 6 \\ 3w + 2x + 5y - z = 3 \end{cases}$

Seg | Ter | Qua | Qui | Sex | Sáb | Dom

1 b $\begin{cases} w - x + 3y - z = 0 \\ w + 4x - y + z = 3 \\ 3w + 7x + y + z = 6 \\ 3w + 2x + 5y - z = 3 \end{cases} \Rightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 3 & -1 & 0 \\ 1 & 4 & -1 & 1 & 3 \\ 3 & 7 & 1 & 1 & 6 \\ 3 & 2 & 5 & -1 & 3 \end{array}\right] \Rightarrow$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 5 & -4 & 2 & 3 \\ 0 & 10 & -8 & 4 & 6 \\ 0 & 5 & -4 & 2 & 3 \end{array}\right] \begin{array}{l} L1 \\ L2 \leftarrow L2 - L1 \\ L3 \leftarrow L3 - 3L1 \\ L4 \leftarrow L4 - 3L1 \end{array} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 5 & -4 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{l} L1 \\ L2 \\ L3 \leftarrow L3 - 2L2 \\ L4 \leftarrow L4 - L2 \end{array}$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -4/5 & 2/5 & 3/5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{l} L1 \\ L2 \leftarrow \frac{1}{5} L2 \\ L3 \\ L4 \end{array}$$

$\Rightarrow w = x + (-3y) + z$ $\qquad$ $w, x =$ Básicos

$x = 3/5 + 4/5\cancel{y} - 2/5 z$ $\qquad$ $y, z =$ Livres

(c) $$\begin{cases} w + 2x + 3y - z = 1 \\ -w + x + 2y + 3z = 2 \\ 3w - x + y + 2z = 2 \\ 2w + 3x - y + z = 1 \end{cases}$$

1C

$$\begin{cases} w + 2x + 3y - z = 1 \\ -w + x + 2y + 3z = 2 \\ 3w - x + y + 2z = 2 \\ 2w + 3x - y + z = 1 \end{cases} \Rightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 & 3 & 2 \\ 3 & -1 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & 5 & 2 & 3 \\ 0 & -7 & -8 & 5 & -1 \\ 0 & -1 & -7 & 3 & -1 \end{array}\right] \begin{array}{l} L1 \\ L2 \leftarrow L2 + L1 \\ L3 \leftarrow L3 - 3L1 \\ L4 \leftarrow L4 - 2L1 \end{array} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 5/3 & 2/3 & 1 \\ 0 & -7 & -8 & 5 & -1 \\ 0 & -1 & -7 & 3 & -1 \end{array}\right] \begin{array}{l} L1 \\ L2 \leftarrow 1/3\, L2 \\ L3 \\ L4 \end{array} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 5/3 & 2/3 & 1 \\ 0 & 0 & 11/3 & 29/3 & 6 \\ 0 & 0 & -16/3 & 11/3 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{l} L1 \\ L2 \\ L3 \leftarrow L3 + 7L2 \\ L4 \leftarrow L4 + 1L2 \end{array} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 5/3 & 2/3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 29/11 & 18/11 \\ 0 & 0 & -16/3 & 11/3 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{l} L1 \\ L2 \leftarrow \\ L3 \leftarrow \frac{3}{11} L3 \\ L4 \end{array} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 5/3 & 2/3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 29/11 & 18/11 \\ 0 & 0 & 0 & \cancel{} & 96/11 \end{array}\right] \begin{array}{l} L1 \\ L2 \\ L3 \\ L4 \leftarrow L4 + \frac{16}{3} L3 \end{array} \Rightarrow$$

$$\frac{145}{11}$$

$$\Rightarrow\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 5/3 & 2/3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 29/11 & 18/11 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 32/65 \end{array}\right]\begin{array}{l} L1 \\ L2 \\ L3 \\ L4 \leftarrow \frac{11}{195} L4 \end{array} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 & 97/65 \\ 0 & 1 & 5/3 & 0 & 131/195 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 242/715 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 32/65 \end{array}\right]\begin{array}{l} L1 \leftarrow L1 + L4 \\ L2 \leftarrow L2 - 2/3\, L4 \\ L3 \leftarrow L3 - 29/11\, L4 \\ L4 \end{array} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 & 31/65 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 7/65 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 22/65 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 32/65 \end{array}\right]\begin{array}{l} L1 \leftarrow L1 - 3L3 \\ L2 \leftarrow L2 - \frac{5}{3} L3 \\ L3 \\ L4 \end{array} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 17/65 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 7/65 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 22/65 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 32/65 \end{array}\right]\begin{array}{l} L1 \leftarrow L1 - 2L2 \\ L2 \\ L3 \\ L4 \end{array}$$

w, x, y, z = Básicas.

(d) $\begin{cases} w + x - y + 2z = 3 \\ 2w + 2x - 2y + 4z = 6 \\ -3w - 3x + 3y - 6z = -9 \\ -2w - 2x + 2y - 4z = -6 \end{cases}$

1d

$$\left\{\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & -2 & 4 & 6 \\ -3 & -3 & 3 & -6 & -9 \\ -2 & -2 & 2 & -4 & -6 \end{array}\right] \begin{array}{l} L1 \\ L2 \\ L3 \\ L4 \end{array} \sim$$

$$\sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{l} L1 \\ L2 \leftarrow L2 - 2L1 \\ L3 \leftarrow L3 + 3L1 \sim \\ L4 \leftarrow L4 + 2L1 \end{array}$$

W = Básica

x, y, z = Livres

2. (Simon & Blume - Exercício 7.17)

(a) Use a flexibilidade da variável livre para encontrar inteiros positivos que satisfazem o sistema

$$\begin{cases} x + y + z = 13 \\ x + 5y + 10z = 61 \end{cases}$$

2a
$$\begin{cases} x + y + z = 13 \\ x + 5y + 10z = 61 \end{cases} \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 13 \\ 1 & 5 & 10 & 61 \end{array}\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 13 \\ 0 & 4 & 9 & 48 \end{array}\right] \begin{array}{l} L1 \\ L2 \leftarrow L2 - L1 \end{array} \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 13 \\ 0 & 1 & 9/4 & 12 \end{array}\right] \begin{array}{l} L1 \\ L2 \leftarrow \frac{1}{4} L2 \end{array}$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -5/4 & 1 \\ 0 & 1 & 9/4 & 12 \end{array}\right] \begin{array}{l} L1 \leftarrow L1 - L2 \\ L2 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} x = 1 + \frac{5}{4} z \\ y = 12 - \frac{9}{4} z \end{array}$$

$$z = \frac{48}{9} - \frac{4y}{9}$$

Teoricamente, qualquer valor $z \in \mathbb{R}$ satisfaz o sistema. Porém, para se ter valores x e y inteiros, é necessário que z seja múltiplo de 2 e maior ou igual a 4.

(b) Suponha que você entregue uma nota de um dólar por um doce de 6 centavos e receba 16 moedas de troco - todas pennies (1 centavo), nickels (5 centavos) e dimes (10 centavos). Quantas moedas de cada tipo você recebe? [Dica: Veja a parte (a)]

2b
$$\begin{cases} x + y + z = 16 \\ x + 5y + 10z = 94 \end{cases} \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 16 \\ 1 & 5 & 10 & 94 \end{array}\right] \Rightarrow$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 16 \\ 0 & 4 & 9 & 78 \end{array}\right] \begin{array}{l} L1 \\ L2 \leftarrow L2 - L1 \end{array} \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 16 \\ 0 & 1 & 9/4 & 78/4 \end{array}\right] \begin{array}{l} L1 \\ L2 \leftarrow \frac{1}{4} L2 \end{array}$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -5/4 & -14/4 \\ 0 & 1 & 9/4 & 78/4 \end{array}\right] \begin{array}{l} L1 \leftarrow L1 - L2 \\ L2 \end{array} \Rightarrow$$

$x = \frac{5}{4} z - \frac{14}{4}$ $\Rightarrow$ se $z = 6$ então x e y são inteiros, com valores

$y = \frac{78}{4} - \frac{9}{4} z$ $\Rightarrow$ 4 e 6 respectivamente, somando 16.

3. (Simon & Blume - Exercício 7.19) Do Capítulo 6, a distribuição estacionária do modelo de Markov de desemprego satisfaz o sistema linear

$$\begin{cases} (q-1)x + py = 0 \\ (1-q)x - py = 0 \\ x + y = 1 \end{cases}$$

(a) Se p e q estão entre 0 e 1, quantas soluções esse sistema tem? Por quê?

$x = \frac{1}{4}$

$$\begin{cases} (q-1)x + py = 0 \\ (1-q)x - py = 0 \\ x + y = 1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (q-1)x + py = 0 & L1 \\ 0 - 0 = 0 & L2 \leftarrow L2 + L1 \\ 0 + \left(\frac{(qy-1y)-py}{(q-1)}\right) = 1 & L3 \leftarrow L3 - \frac{1}{(Q-1)} L1 \end{cases}$$

$$\frac{qy - y - py}{q-1} = 1 \Rightarrow \frac{y(q-1-p)}{q-1} = 1 \Rightarrow y = \frac{q-1}{q-1-p}$$

Logo, contanto que $q-1-p$ seja diferente de 0, o sistema tem 1 solução.

$$x = 1 - \frac{q-1}{q-1-p}$$

(b) Ignorando a condição de que p e q devem estar entre 0 e 1, encontre os valores de p e q tais que esse sistema não tenha solução.

$$y = \frac{q-1}{q-1-p}$$

$$q - 1 - p = 0 \Rightarrow q = 1, p = 0$$

$$x = 1 - \frac{q-1}{q-1-p}$$

$$(\forall i, \forall j \mid i - 1 - j = 0)$$

4. (Simon & Blume - Exercício 7.20) Compute o posto de cada uma das seguintes matrizes:

(a) $\begin{bmatrix} 2 & -4 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$

4 a $\begin{bmatrix} 2 & -4 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} L1 \\ L2 \leftarrow L2 + \frac{1}{2}L1 \end{matrix}$

Rank 1

(b) $\begin{bmatrix} 2 & -4 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

4 b $\begin{bmatrix} 2 & -4 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 2 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{matrix} L1 \\ L2 \leftarrow L2 + \frac{1}{2}L1 \end{matrix}$

Rank 2

(c) $\begin{bmatrix} 1 & 6 & -7 & 3 \\ 1 & 9 & -6 & 4 \\ 1 & 3 & -8 & 4 \end{bmatrix}$

4 c $\begin{bmatrix} 1 & 6 & -7 & 3 \\ 1 & 9 & -6 & 4 \\ 1 & 3 & -8 & 4 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 6 & -7 & 3 \\ 0 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} L1 \\ L2 \leftarrow L2 - L1 \\ L3 \leftarrow L3 - L1 \end{matrix}$

$\Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 6 & -7 & 3 \\ 0 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} L1 \\ L2 \\ L3 \leftarrow L3 + L2 \end{matrix}$

Rank 3

(d) $\begin{bmatrix} 1 & 6 & -7 & 3 & 5 \\ 1 & 9 & -6 & 4 & 9 \\ 1 & 3 & -8 & 4 & 2 \\ 2 & 15 & -13 & 11 & 16 \end{bmatrix}$

4d $\begin{bmatrix} 1 & 6 & -7 & 3 & 5 \\ 1 & 9 & -6 & 4 & 9 \\ 1 & 3 & -8 & 4 & 2 \\ 2 & 15 & -13 & 11 & 16 \end{bmatrix} \Rightarrow$

$$\begin{bmatrix} 1 & 6 & -7 & 3 & 5 \\ 0 & 3 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & -3 & -1 & 1 & -3 \\ 0 & 3 & 1 & 5 & 6 \end{bmatrix} \begin{array}{l} L1 \\ L2 \leftarrow L2 - 1L1 \\ L3 \leftarrow L3 - 1L1 \\ L4 \leftarrow L4 - 2L1 \end{array} \Rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 6 & -7 & 3 & 5 \\ 0 & 3 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 2 \end{bmatrix} \begin{array}{l} L1 \\ L2 \\ L3 \leftarrow L3 + L2 \\ L4 \leftarrow L4 - L2 \end{array} \Rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 6 & -7 & 3 & 5 \\ 0 & 3 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{array}{l} L1 \\ L2 \\ L3 \\ L4 \leftarrow L4 - 2L3 \end{array} \Rightarrow$$

Rank 3

(e) $\begin{bmatrix} 1 & 6 & -7 & 3 & 1 \\ 1 & 9 & -6 & 4 & 2 \\ 1 & 3 & -8 & 4 & 5 \end{bmatrix}$

4e $\begin{bmatrix} 1 & 6 & -7 & 3 & 1 \\ 1 & 9 & -6 & 4 & 2 \\ 1 & 3 & -8 & 4 & 5 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 6 & -7 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & -1 & 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{array}{l} L1 \\ L2 \leftarrow L2 - L1 \\ L3 \leftarrow L3 - L1 \end{array}$

$\Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 6 & -7 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 5 \end{bmatrix} \begin{array}{l} L1 \\ L2 \leftarrow L2 \\ L3 \leftarrow L3 + L2 \end{array}$

Rank 3

5. (Simon & Blume - Exercício 7.21) As seguintes cinco matrizes são matrizes de coeficientes de sistemas de equações lineares. Para cada matriz, o que você pode dizer sobre o número de soluções do sistema correspondente: (i) quando o lado direito é $b_1 = ... = b_m = 0$, e (ii) para um lado direito geral $b_1, ..., b_m$?

(a) Se nlin < ncol:

- Ax = 0 tem infinitas soluções
- Ax = b tem 0 ou infinitas soluções
- Se rank(A) = nlin(A) b tem infinitas soluções

  (b) Se nlin > ncol:
- Ax = 0 tem 1 ou infinitas soluções
- Ax = b tem 0 ou 1 ou infinitas soluções
- Se rank(A) = ncol, b não tem solução ou tem exatamente 1 solução

  (c) Se o nlin=ncol:
- Ax = 0 tem 1 ou infinitas soluções
- Ax = b tem 0 ou 1 ou infinitas soluções
- Se rank(A) = nlin = ncol, b tem exatamente 1 solução

(a) $\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$

(i) Possui uma única solução

(ii) Possui uma única solução

(b) $\begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

(i) Possui infinitas soluções

(ii) Possui infinitas soluções

(c) $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 4 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$

(i) Possui uma única solução

(ii) Não possui solução ou possúi apenas 1 solução

$$(d) \begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

(i) Possui uma única solução

(ii) Possui uma única solução

$$(e) \begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 7 & 6 \end{bmatrix}$$

(i) Possui infinitas soluções

(ii) Possui infinitas soluções