Sistemi Lineari

Def: Un sistema di equazioni è un insieme di due o più equazioni tali che le soluzioni che troviamo sono soluzioni per ciascuna delle equazioni presenti
Si indica con una parentesi graffa

$$\begin{cases} eq\ 1 \\ eq\ 2 \\ eq\ 3 \end{cases}.$$

Esempio:

$$\begin{cases} 2x + y = 3 \\ 3x + 2y = 7 \end{cases}$$

Le soluzioni della prima devono essere soluzioni anche della seconda

Se $x = 5$ e $y = -7$ è soluzione della prima
Ma $x=5$, $y=7$ NON è sol. della seconda; quindi NON è soluzione del sistema.

Come lo risolvo? (Cioè come faccio a trovare le soluzioni)

Ricavo la y dalla prima e la metto nella seconda $\rightsquigarrow$ $\begin{cases} y = \underline{3-2x} \\ 3x + 2(3-2x) = 7 \end{cases}$

Ora la II ha solo un'incognita e so risolverla:

$$3x + 6 - 6x = 7 \rightsquigarrow \underline{x = -1}$$

Per ricavare y, sostituisco la x alla prima $y = 3 - 2(-1) = 5$

Soluzione: $P = (-1;5) \rightsquigarrow x=-1,\ y=5$

Def: Un sistema si dice
(1) **Determinato** se ha un numero finito > 0 di soluzioni
(2) **Indeterminato** se ha infinite soluzioni
(3) **Impossibile** se non ha soluzioni

Esempi:

$$\begin{cases} 2x+y=3 \\ 3x+2y=7 \end{cases}$$

Determinato

$P = (-1, 5)$

$$\begin{cases} 2x+y=0 \\ 2x+y=1 \end{cases}$$

Impossibile (se due valori sono soluzione della prima, NON possono essere sol. della II)

$$\begin{cases} 2x+y=0 \\ 4x+2y=0 \end{cases}$$

Indeterminato (oss. Matteo: Sembra che una debba essere multipla dell'altra)

Def: Il **grado di un sistema** (se ogni equazione è polinomiale) è il prodotto dei gradi delle singole equazioni

Esempio:

$$\begin{cases} x^2+y^2=1 \\ x=3 \end{cases}$$

Grado: $2 \cdot 1 = 2$

lo risolvo:

$$\begin{cases} 9+y^2=1 \\ x=3 \end{cases} \leadsto \begin{cases} y^2=-8 \\ x=3 \end{cases}$$

Nessuna soluzione
Impossibile

Esempio:

$$\begin{cases} x^3+y^2=2 \\ x=1 \\ y^2=1 \end{cases}$$

Grado: $3 \cdot 1 \cdot 2 = 6$

$$\begin{cases} x=1 \\ 1+y^2=2 \\ y^2=1 \end{cases} \quad \begin{cases} x=1 \\ y^2=1 \\ y^2=1 \end{cases}$$

$P = (1, 1)$

$Q = (1; -1)$

$y^2-1=0$
$(y-1)(y+1)=0$

Def: Un sistema è detto **Sistema lineare** se ha grado 1

Spoiler: Per quest'anno "faremo per lo più" sistemi lineari.

Metodi Risolutivi dei sistemi Lineari:

(1) Sostituzione:

- Ricavo una incognita da una delle equazioni
  (È furbo ricavare le incognite con coeff. uguale a ±1)

$$\begin{cases} 2x-3y=-12 \\ x+4y=5 \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{cases} x=5-4y \\ 2x-3y=-12 \end{cases}$$

- Sostituisco l'incognita trovata in tutte le altre. Ottengo un sistema con una incognita in meno e una equazione in meno

$$\Downarrow$$

$$\begin{cases} x=5-4y \\ 2(5-4y)-3y=-12 \end{cases}$$

- Itero fintanto che non rimane una sola equazione in una incognita

$$\begin{cases} x=5-4y \\ 10-8y-3y=-12 \end{cases}$$

- Risolvo tale equazione e il risultato lo sostituisco a tutte le equazioni presenti trovando così, se esiste, la soluzione del sistema

$$\begin{cases} x=5-4y \\ -11y=-22 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y=2 \\ x=5-4\cdot 2=-3 \end{cases}$$

$$P=(-3;2)$$