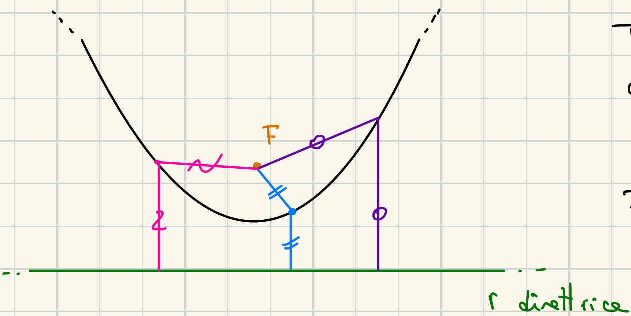
Settimana: 12

Materia: Matematica
Classe: 3D
Data: 2/12/2025

Argomenti:

Def: Una parabola è un luogo geometrico di punti equidistanti da una retta r detta Direttrice e un punto F detto fuoco



Troviamo l'equazione generale della parabola a partire dalla definizione.

Fissiamo la direttrice come una retta ORIZZONTALE, le parabole che vedremo saranno sempre ◡ ◠

direttrice: $y=k \rightsquigarrow y-k=0$ — k lo conosco

Fuoco: $F=(x_F, y_F)$ $\rightsquigarrow y_F \neq k$ perché $F \notin$ direttrice

$$\frac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

Sia $P=(x,y) \in \gamma$ γ parabola.

Se $P \in \gamma$, deve valere che $dist(P;F) = dist(P,r)$

$$\sqrt{(x_F-x)^2+(y_F-y)^2} = \frac{|0+1\cdot y+(-k)|}{\sqrt{0^2+1^2}}$$

Faccio conti e trovo scritture carine (elevo al ^{2}, è tutto positivo)

$$x_F^2-2xx_F+x^2+y_F^2-2yy_F+\cancel{y^2} = \cancel{y^2}+k^2-2yk$$

Si porta la y da una parte

$$2y(y_F-k) = x^2 - 2xx_F + x_F^2 + y_F^2 - k^2$$ Divido per coeff y.

Tutto ok per C.E.

$$y = \frac{1}{2(y_F-k)}x^2 + \left(-\frac{x_F}{y_F-k}\right)x + \frac{x_F^2+y_F^2-k^2}{2(y_F-k)}$$

Dò dei nomi: $\frac{1}{2(y_F-k)} = a$ $\qquad \frac{x_F^2+y_F^2-k^2}{2(y_F-k)} = c$

$$-\frac{x_F}{y_F-k} = b$$

Ho scoperto che la parabola è definita dall'equazione

$$\boxed{y = ax^2+bx+c \qquad a,b,c \in \mathbb{R} \qquad a \neq 0}$$

Facciamo ora il procedimento inverso; data la parabola troviamo fuoco e direttrice. Ho a, b, c; valgono le formule di sopra e ricavo x_F, y_F, k

$$\begin{cases} a = \frac{1}{2(y_F-k)} \\ b = -\frac{x_F}{y_F-k} \\ c = \frac{x_F^2+y_F^2-k^2}{2(y_F-k)} \end{cases}$$

$$\frac{b}{a} = \frac{-\frac{x_F}{(y_F-k)}}{\frac{1}{2(y_F-k)}} = -2x_F$$

$$\Rightarrow \boxed{x_F = -\frac{b}{2a}}$$

La metto nella III e poi uso la I

$$\begin{cases} a = \dfrac{1}{2(y_F - k)} \\ c = \left(\dfrac{b^2}{4a^2} + y_F^2 - k^2\right) \cdot \dfrac{1}{2(y_F - k)} \end{cases}$$

$$\dfrac{1}{2(y_F - k)} = a$$

$$\begin{cases} a = \dfrac{1}{2(y_F - k)} \\ c = a\left(\dfrac{b^2}{4a^2} + y_F^2 - k^2\right) \end{cases}$$

$$\begin{cases} y_F = \dfrac{1}{2a} + k \\ c = \cancel{a}\left(\dfrac{b^2}{4a^{\cancel{2}}} + \dfrac{1}{4a^{\cancel{2}}} + \cancel{k^2} + \dfrac{k}{\cancel{a}} - \cancel{k^2}\right) \end{cases} \rightsquigarrow \boxed{y_F = \dfrac{1-\Delta}{4a}}$$

$$4ac = b^2 + 1 + 4ak \rightsquigarrow 4ak = 4ac - b^2 - 1$$

$$\rightsquigarrow k = \frac{4ac - b^2 - 1}{4a} = \boxed{-\frac{\Delta + 1}{4a}}$$