Settimana: 14

Materia: Matematica

Classe: 5C

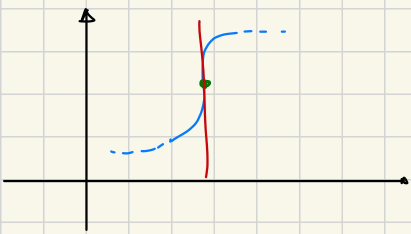
Data: 10/1/26

Argomenti

Punti di non derivabilità

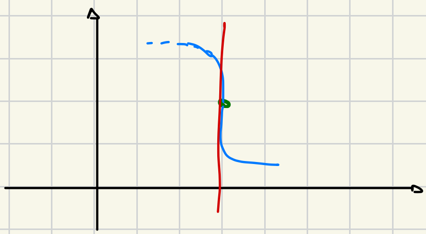
Remind. Si ha un pto di non derivabilità se la derivata sinistra e destra non coincidono oppure sono $\pm\infty$

(1) Flesso a tangente verticale



$$f'_-(x_0) = +\infty$$

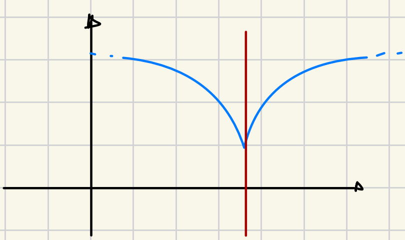
$$f'_+(x_0) = +\infty$$



$$f'_-(x_0) = -\infty$$

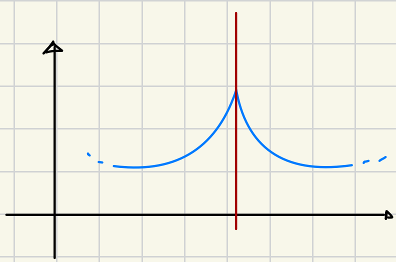
$$f'_-(x_0) = -\infty$$

(2) Cuspidi



$$f'_-(x_0) = -\infty$$

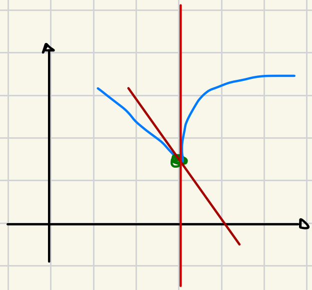
$$f'_+(x_0) = +\infty$$



$$f'_-(x_0) = +\infty$$

$$f'_+(x_0) = -\infty$$

(3) Punti angolosi



$$\left.\begin{array}{l} f'_-(x_0) = \ell \\ f'_+(x_0) = m \end{array}\right\} \text{finiti, ma diversi}$$

Possono essere invertiti

$$f'_-(x_0) = \ell \text{ finito}$$
$$f'_+(x_0) = \pm\infty$$

Pag 1708 n 23

$f(x) = \sqrt[3]{x^2} + 2x$ Studio la derivabilità.

$$f'(x) = \left[x^{\frac{2}{3}} + 2x\right]' = \frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}} + 2 = \frac{2}{3\sqrt[3]{x}} + 2$$

Ē la derivata in tutti i pti tranne $x = 0$

Per capire cosa accade in $x=0$ calcolo con la definizione la derivata destra e sinistra in $x=0$.

$$f'_+(0) \overset{Def}{=} \lim_{h\to 0^+} \frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{f(h)-f(0)}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0^+} \frac{\sqrt[3]{h^2} + 2h - 0}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{\cancel{\sqrt[3]{h^2}}\left(1 + 2\sqrt[3]{h}\right)}{\cancel{\sqrt[3]{h^2}} \cdot \sqrt[3]{h}} = +\infty$$

$$f'_-(0) \overset{Def}{=} \lim_{h\to 0^-} \frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \dots = \lim_{h\to 0^-} \frac{\left(1+2\sqrt[3]{h}\right)}{\sqrt[3]{h}} = -\infty$$

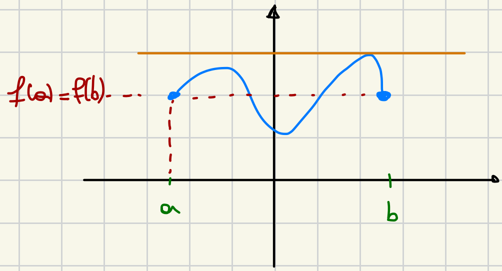
$\rightsquigarrow$ C'ē una cuspide

Teoremi del calcolo differenziale

Teorema di Rolle: Data $f:[a;b] \longrightarrow \mathbb{R}$ tale che

(1) f è continua in $[a;b]$
(2) f è derivabile in $(a;b)$
(3) $f(a) = f(b)$

Allora $\exists c \in [a;b]$ t.c. $f'(c) = 0$

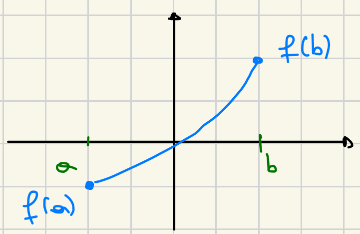


Oss: Geometricamente sto dicendo che se valgono quelle Hp c'è un punto della curva che ha una tangente orizzontale

⇝ No dim (Slide 5A)

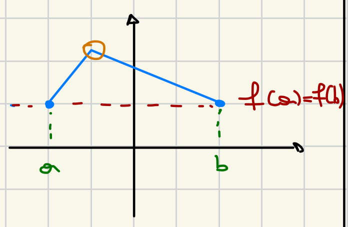
Oss: Le Hp sono tutte e tre necessarie, cioè se ne togliamo l'implicazione potrebbe NON essere vera.

Vale (1), (2)
Non Vale (3)



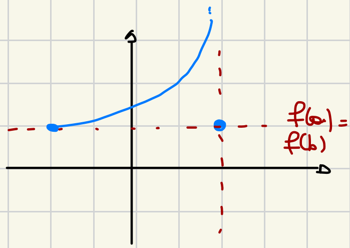
No tg orizzontale

Vale (1)(3)
Non Vale (2)



Il punto cerchiato NON è derivabile e sarebbe il punto c del Teorema

Vale (2)(3)
Non Vale (1)

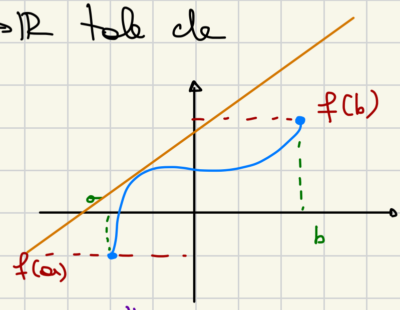


Non c'è punto con tangente orizzontale

Teorema di Lagrange: Data $f:[a;b] \longrightarrow \mathbb{R}$ tale che

(1) f è continua in $[a;b]$
(2) f è derivabile in $(a;b)$

Allora $\exists c \in (a;b)$ t.c. $f'(c) = \boxed{\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}}$



↳ Inclinazione retta che congiunge $(a, f(a))$, $(b; f(b))$

Oss: Geometricamente mi sta dicendo che esiste un punto nel grafico in cui la tangente è parallela alla retta che congiunge i punti $(a; f(a))$, $(b; f(b))$.

⇝ No dim (slide 5A)

Oss: Le Hip sono tutte necessarie. I controesempi sono esattamente uguali a quelli di Rolle.

n 100 pag 1713

$f(x) = 1 + |x|$ $\quad f: [-2; 2] \longrightarrow \mathbb{R}$ $\quad$ Verifica le Hip di Rolle?

Caso a: Se $x \geq 0$

$f(x) = 1 + x$

Caso b: Se $x \leq 0$

$f(x) = 1 - x$

$$f(x) = \begin{cases} 1 - x & -2 \leq x \leq 0 \\ 1 + x & 0 \leq x \leq 2 \end{cases}$$

(1) Continuità

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} 1 - x = 1$$
$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} 1 + x = 1$$

Uguali $\Rightarrow$ f_z continua in 0

(2) Derivabilità:

$$f'(x) = \begin{cases} -1 & -2 < x < 0 \\ 1 & 0 < x < 2 \end{cases}$$

Derivabile in $(-2;2)$ con $x \neq 0$

Dobbiamo quindi verificare a mano se esiste $f'(0)$. Per farlo si fanno derivata sx e destra e si confrontano.

$$f'_-(0) = \lim_{h \to 0^-} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \to 0^-} \frac{\cancel{1} - h - \cancel{1}}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0^-} (-1) = -1$$

$$f'_+(0) = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{\cancel{1} + h - \cancel{1}}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0^+} 1 = 1$$

$f'_-(0) \neq f'_+(0) \Rightarrow$ Punto Angoloso $\Rightarrow$ Non derivabile $\Rightarrow$ No Rolle.