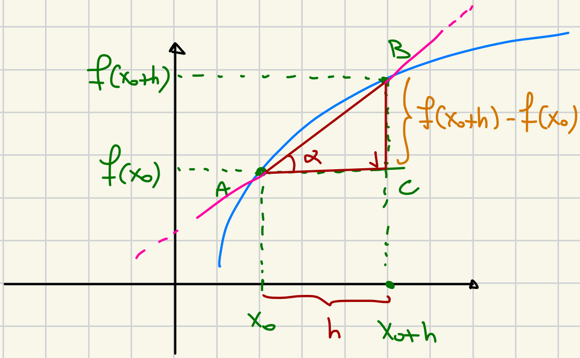
Settimana: 9

Materia: Matematica
Classe: 5C
Data: 10/11/25

Derivate

Def. Data $f: (a,b) \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, sia $x_0 \in (a,b)$ e sia $A = (x_0, f(x_0))$. Consideriamo poi il punto $B = (x_0+h\,;\, f(x_0+h))$.



Il RAPPORTO INCREMENTALE in x_0 (di ampiezza h) è

$$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{(x_0+h)-x_0} = \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

In effetti il rapporto incrementale è $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$

Oss.: $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \dfrac{\cancel{AB}\cdot \sin\alpha}{\cancel{AB}\cdot\cos\alpha} = \operatorname{tg}\alpha$

Quindi il rapp. incrementale è la tg dell'angolo che si forma.

Discorso: Voglio far collassare il punto B verso il punto A in modo che la retta secante AB diventi al limite la tangente alla curva.

Def.: Sia $f: (a,b) \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ funzione $x_0 \in (a,b)$ diremo che f è derivabile in x_0 se esiste finito il limite

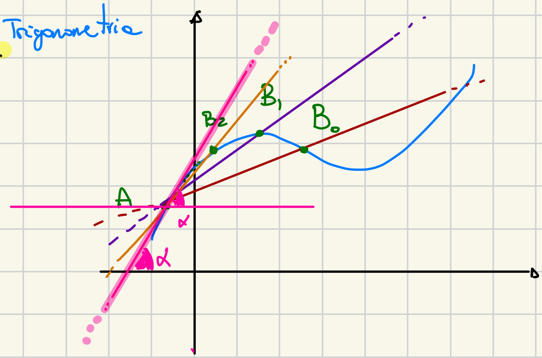
$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

faccio collassare B su A

Se tale limite esiste finito lo indicheremo con

$f'(x_0)$ — f primo in x_0 | $Df(x_0)$ — De f in x_0 | $\frac{df}{dx}(x_0)$ — de f su de x in x_0 | $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0)$ — de f su de x in x_0

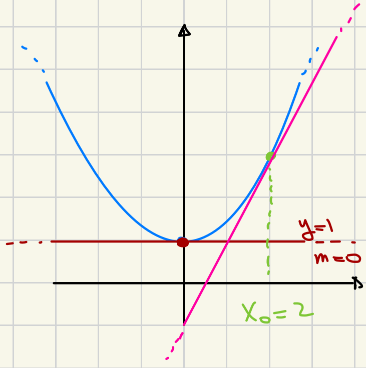
Oss: La derivata è il valore della tangente dell'angolo α (Trigonometria) dove α è l'angolo che la tangente alla curva (Geometria) forma con il verso pos. dell'asse x



Dovreste sapere che $tg\,\alpha$ non è altro che m coeff. angolare della retta

Dunque la derivata di una funzione in un punto non è altro che il coeff. angolare della retta tangente al grafico in quel punto

Esempio: $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\quad f(x) = x^2+1$



$x_0 = 0$

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} =$$

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(0+h)-f(0)}{h} =$$

$$\lim_{h\to 0} \frac{h^2+\cancel{1}-\cancel{1}}{\cancel{h}} = \lim_{h\to 0} h = 0$$

Calcola anche, se esiste, $f'(2)$ come esercizio.

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \overset{x_0=2}{=} \lim_{h\to 0}\frac{f(2+h)-f(2)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{(\cancel{4}+h^2+4h+\cancel{1})-(\cancel{4}+\cancel{1})}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}(h+4) = 4$$

Coeff. angolare della retta tg al grafico in $x_0=2$ è 4.

Teorema (Esercizio): Sia $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ e sia $x_0\in(a,b)$.
Supponiamo che f sia derivabile in x_0 con derivata $f'(x_0)$.
Allora la retta tangente al grafico di f nel punto x_0 è:

$$[y-f(x_0)] = f'(x_0)\,[x-x_0]$$

Dim.: In passato avete visto che se m è il coeff. angolare di una retta e la retta passa per $A=(x_A,y_A)$ tale retta ha equazione

$$(y-y_A) = m(x-x_A)$$

Nel nostro caso la retta ha $m=f'(x_0)$ per def
e la retta passa per $A=(x_0,f(x_0))$ perché A sta nel grafico.
Usando la formula sopra si ha la tesi.

$\square$

Back to esempio: $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ $\quad f(x)=x^2+1$

(1) Retta tg al grafico in $x_0=0$
Per la formula

$$[y-f(x_0)] = f'(x_0)\;(x-x_0)$$

$$[y-\overbrace{f(0)}^{=1}] = \overbrace{f'(0)}^{=0}\;(x-0)$$

$$y-1=0 \rightsquigarrow \boxed{y=1}$$

(2) Retta tg al grafico in $x_0=2$
Per la formula

$$[y-f(2)] = f'(2)\cdot(x-2)$$

$$y-5 = 4(x-2)$$

$$\boxed{y = \underline{4x-3}}$$

Domanda: C'è un modo di fare la derivata di tutta la funzione insieme?

Def: Sia $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ derivabile in ogni pto $x_0\in(a,b)$. Definiamo la funzione derivata

$$f':(a,b)\longrightarrow\mathbb{R}$$

Tale che $f'(x)$ è la derivata della funzione nel punto x.

Esempio: $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ $\quad f(x) = x^2+1$

Per calcolare la funzione derivata, faccio il limite del rapporto increm. in un pto generico x.

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{[(x+h)^2+1]-(x^2+1)}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{[\cancel{x^2}+h^2+2xh\cancel{+1}]-(\cancel{x^2}\cancel{+1})}{h} = \lim_{h\to 0}(h+2x) = 2x$$

Dunque la funzione derivata è $f'(x) = 2x$ (si fanno tutte le deriv. insieme)

Derivate delle funzioni elementari (mattoncini per costruire)

(1) $f(x) = k$ costante	$f'(x) = 0$
(2) $f(x) = x^n \quad n\geq 1, n\in\mathbb{N}$	$f'(x) = n\cdot x^{n-1}$
(3) $f(x) = \sin x$	$f'(x) = \cos x$
(4) $f(x) = \cos x$	$f'(x) = -\sin x$
(5) $f(x) = e^x$	$f'(x) = e^x$
(6) $f(x) = a^x \quad a>0, a\neq 1$	$f'(x) = a^x \ln a$
(7) $f(x) = \ln x$	$f'(x) = 1/x$
(8) $f(x) = \log_a x \quad a>0, a\neq 1$	$f'(x) = \frac{1}{x}\cdot \log_a e$
(2bis) $f(x) = x^\alpha, \quad \alpha\neq 0, \alpha\in\mathbb{R}$	$f'(x) = \alpha\cdot x^{\alpha-1}$

Pag 1623 n 62

$f(x) = \frac{x+1}{x}$ $\rightsquigarrow$ calcolare con la def. $f'(x)$

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{h+x+1}{h+x} - \frac{x+1}{x}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\cancel{hx}+\cancel{x^2}+\cancel{x}-\cancel{hx}-h-\cancel{x^2}-\cancel{x}}{hx(h+x)}$$

$$= \lim_{h\to 0} -\frac{\cancel{h}}{\cancel{h}x(h+x)} = -\frac{1}{x^2}$$

n 70 $\quad f(x) = x\cos x$

$\cos x\cosh - \sin x \sin h$

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)\cos(x+h) - x\cos x}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{x\cos x\cosh - x\sin x \sin h + h\cos x\cosh - h\sin x \sin h - x\cos x}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \underbrace{\frac{x\cos x(\cosh - 1)}{h}}_{0} - x\sin x \underbrace{\frac{\sin h}{h}}_{1} + \frac{\cancel{h}}{\cancel{h}}\underbrace{\cos x\cosh}_{\cos x} - \frac{\cancel{h}}{\cancel{h}}\underbrace{\sin x\sin h}_{0}$$

$$= -x\sin x + \cos x$$

Regole di Derivazione (Dim successive)

(1) $D(f \pm g) = Df \pm Dg$

(2) $D(f \cdot g) = (Df)g + f\cdot(Dg)$ $\qquad$ (2bis) $D(k \cdot f) = k \cdot Df$ $\quad$ k costante

(3) $D\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{(Df)\cdot g - f(Dg)}{g^2}$

(4) $[D(f\circ g)](x) = Df(g(x)) \cdot Dg(x)$ $\quad$ Hard

Esercizi:

$f(x) = x\cdot\cos x$

$$Df(x) = [D(x)]\cdot\cos x + x D(\cos x)$$

$$= 1\cdot\cos x + x(-\sin x)$$

$$= \cos x - x\sin x$$

Pag 1629 159

$$f(x) = x^{5} + 6x$$

$$f'(x) = 5x^{4} + 6$$

160

$$f(x) = -3x^2 + 3$$

$$f'(x) = (-3)\cdot 2x = -6x$$

164

$$f(x) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2$$

$$f'(x) = x^2 + x$$

182:

$$f(x) = \sqrt[4]{x^3} + 3x - 2 = x^{\frac{3}{4}} + 3x - 2$$

$$f'(x) = \frac{3}{4}x^{\frac{3}{4}-1} + 3 = \frac{3}{4}x^{-1/4} + 3 = \frac{3}{4\sqrt[4]{x}} + 3$$

199:

$$f(x) = (\ln x - 3)\cdot \ln x$$

$$f'(x) = [D(\ln x - 3)]\cdot \ln x + (\ln x - 3)\cdot D(\ln x)$$

$$= \frac{1}{x}\cdot \ln x + (\ln x - 3)\frac{1}{x} = \frac{2\ln x}{x} - \frac{3}{x} = \frac{2\ln x - 3}{x}$$

207

$$f(x) = 2\sqrt{2}\,x^2 \ln x - \sqrt{2}\,x^2$$

$$f'(x) = 2\sqrt{2}\left[2x\cdot \ln x + x^2\cdot\frac{1}{x}\right] - \sqrt{2}\cdot 2x$$

$$= 4\sqrt{2}\,x\ln x + \cancel{2\sqrt{2}\,x} - \cancel{2\sqrt{2}\,x} = 4\sqrt{2}\,x\ln x$$

Pag 1632 n 214

$$f(x) = x\cdot e^x\cdot \ln x$$

$$(fg)' = f'g + fg'$$

$$D(fg) = Df\cdot g + f\cdot Dg$$

$$f'(x) = D(x \cdot e^x) \cdot \ln x + x \cdot e^x D(\ln x)$$

$$= [1 \cdot e^x + x \cdot e^x] \cdot \ln x + \cancel{x} e^x \cdot \frac{1}{\cancel{x}}$$

$$= e^x (\ln x + x \ln x + 1)$$

218: $f(x) = \underbrace{x \sin x}\, \underbrace{\cos x}$

$$f'(x) = D(x \sin x) \cdot \cos x + x \sin x\, D(\cos x)$$

$$= [1 \cdot \sin x + x \cos x] \cos x + x \sin x \cdot (-\sin x)$$

$$= \sin x \cos x + x \cos^2 x - x \sin^2 x$$

275 $h(x) = e^{x^2 - 3x}$

$$h'(x) = e^{x^2-3x} \cdot (2x - 3)$$

$$D(f(g(x))) = Df(g(x)) \cdot Dg(x)$$

$f(x) = e^x$ $g(x) = x^2 - 3x$

$$f(g(x)) = f(x^2 - 3x) = e^{x^2 - 3x}$$

$f'(x) = e^x$ $g'(x) = 2x - 3$

279 $f(x) = \ln(x^2 - 1) + 5$

Derivata

$$f'(x) = \frac{1}{x^2 - 1} \cdot 2x$$

Tip: Per riconoscere una fz composta si vede una funzione elementare con argomento che è una fz

"Derivata della più esterna, valutata in quella più interna" · "Derivata di quella interna"

287: $f(x) = 5 \cdot \sin(x^4)$ interna

2bis

$$f'(x) = 5 \cdot \cos(x^4) \cdot 4x^3 = 20 x^3 \cos(x^4)$$

292: $f(x) = \sqrt{2x} + \sqrt{e^{2x}+1} = (2x)^{\frac{1}{2}} + (e^{2x}+1)^{\frac{1}{2}}$ $(e^{2x})' + 1'$

$$f'(x) = \frac{1}{2}(2x)^{\frac{1}{2}-1} \cdot 2 + \frac{1}{2}(e^{2x}+1)^{\frac{1}{2}-1} \cdot [e^{2x}+1]'$$

Derivata di interno

$$= (2x)^{-\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}(e^{2x}+1)^{-\frac{1}{2}} [e^{2x} \cdot 2 + 0]$$

$$= (2x)^{-\frac{1}{2}} + e^{2x}(e^{2x}+1)^{-\frac{1}{2}}$$

293: $f(x) = \ln(2\ln x)$

$$f'(x) = \frac{1}{2\ln x} \cdot \frac{2}{x} = \frac{1}{x\ln x}$$

1

Macchi 11

Matilde 19

Sara 21

Sofia 2