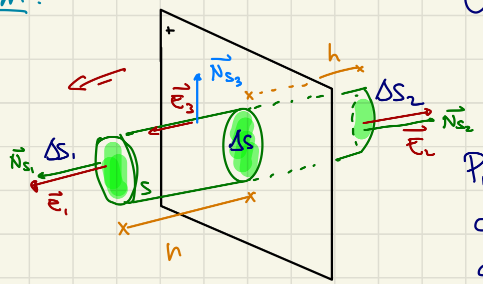
Proposizione: Il campo elettrico generato da un piano infinito di densità uniforme σ è costante ovunque nello spazio, perpendicolare al piano e vale

$$E = \frac{|\sigma|}{2\varepsilon_0}$$

Dim:



Utilizzo il Teorema Egregium.

$$\Phi_S(\vec{E}) = \frac{Q_{TOT}}{\varepsilon_0}$$

Prendo in considerazione una superficie chiusa (vedi disegno). È un cilindro chiuso con base ΔS e perpendicolare al piano. Da entrambe le parti lo faccio sporgere di h

Calcolo con la definizione il flusso del campo elettrico.

$$\Phi_S(\vec{E}) = \underbrace{\sum_{i=1}^{n} \vec{E}_i \cdot \vec{N}_{\Delta S_i}}$$

$$= \vec{E}_1 \cdot \vec{N}_{\Delta S_1} + \vec{E}_2 \cdot \vec{N}_{\Delta S_2} + \dots + \vec{E}_n \vec{N}_{\Delta S_n}$$

$$= \vec{E}_1 \cdot \underbrace{\vec{N}_{\Delta S_1}}_{\text{Base 1}} + \vec{E}_2 \cdot \underbrace{\vec{N}_{\Delta S_2}}_{\text{Base 2}} + \vec{E}_3 \cdot \underbrace{\vec{N}_{\Delta S_3}}_{\text{Sup laterale}}$$

$$= E_1 \cdot \Delta S_1 + E_2 \cdot \Delta S_2 + E_3 \cdot \Delta S_3 \cdot \cos 90°$$

$$= E_1 \cdot \Delta S_1 + E_2 \cdot \Delta S_2$$

$\Phi_S(\vec{E}) = (E_1 + E_2)\,\Delta S$ poiché $\Delta S_1 = \Delta S_2 = \Delta S$ base del cilindro

Oss: Dato che le superfici sono entrambe le superfici sono a distanza h, e che il campo elettrico per ora dipende solo dalla distanza dal piano deve valere che $E_1 = E_2$. Chiamo $E = E_1 = E_2$

Di conseguenza:

$$\Phi_S(\vec{E}) = \frac{Q_{TOT}}{\varepsilon_0}$$ Carica interna al cilindro

Sostituisco i dati nella formula verde

$$\frac{Q_{TOT}}{\varepsilon_0} = 2E \cdot \Delta S$$

Quanta è la carica dentro al cilindro? Mi ricordo che vale

$\sigma \boxed{=} \frac{\Delta Q}{\Delta S}$ con ΔQ carica presente nella superficie ΔS e in questo caso $\Delta Q = Q_{TOT}$ poiché la carica è tutta sul piano

Sostituisco tutto e ottengo $Q_{TOT} = \Delta Q \boxed{=} \sigma \cdot \Delta S$

$$\frac{\sigma \cdot \cancel{\Delta S}}{\varepsilon_0} = 2E \cancel{\Delta S} \rightsquigarrow \boxed{E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}}$$

Oss importante: Nella formula il campo elettrico E non dipende da quanto è alto il cilindro. Dunque il campo elettrico è costante ovunque e NON dipende da quanto sono distante dal piano

□

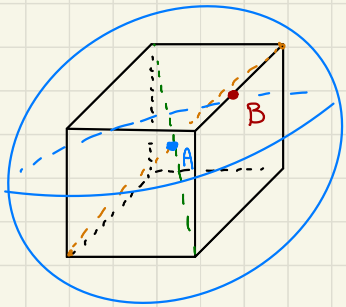
Cose ricordare per avere più chiara la dim

(1) Il teo Egregium è utile

(2) Fare superfici messe bene nello spazio è carino

(3) Calcolo il flusso in modi diversi e li metto uguali.

Es 59 pag 188



$L = 12\,cm$

$r_1 = 14\,cm$ con centro nel centro del cubo

$\Phi_{S_1^2}(\vec{E}) = 1{,}6 \cdot 10^4\ N \cdot \frac{m^2}{C}$

(1) $q = ?$

(2) $r_2 = 14\,cm$ con centro nel pto medio di uno spigolo

Per il teo Egregium $\Phi_{S^2}(\vec{E}) = \frac{Q_{TOT}}{\varepsilon_0} = \frac{nq}{\varepsilon_0}$ con n che è il numero di cariche interne alla sfera. Dalla geometria contiamo quante cariche sono dentro la sfera e faccio il conto.

Nel caso (1) le cariche si trovano tutte a $\frac{1}{2}\sqrt{\ell^2+\ell^2+\ell^2}$ da A, cioè a distanza $\frac{\sqrt{3}}{2}\ell$ da A. Dato che $\frac{\sqrt{3}}{2}\ell < 14\,cm \Rightarrow n_1 = 8$

Dunque $q = \frac{\Phi_{S_1^2}(\vec{E}) \cdot \varepsilon_0}{n_1} \simeq$

Nel caso (2) le cariche si trovano rispetto a B alle seguenti distanze

2 cariche a $\frac{\ell}{2}$

4 cariche a $\sqrt{\ell^2+\left(\frac{\ell}{2}\right)^2} = \frac{\ell}{2}\sqrt{5}$

2 cariche a $\sqrt{\ell^2+\ell^2+\left(\frac{\ell}{2}\right)^2} = \frac{\ell}{2}\sqrt{9} = \frac{3}{2}\ell$

Valutando se tali distanze sono maggiori o minori di r_2 si calcola n_2 e vale dunque

$$\Phi_{S_2^2}(\vec{E}) = \frac{n_2 q}{\varepsilon_0} = \frac{n_2}{\varepsilon_0}\,\frac{\varepsilon_0}{n_1}\,\Phi_{S_1^2}(\vec{E})$$

$$= \frac{n_2}{n_1} \cdot \Phi_{S_1^2}(\vec{E}) \simeq$$