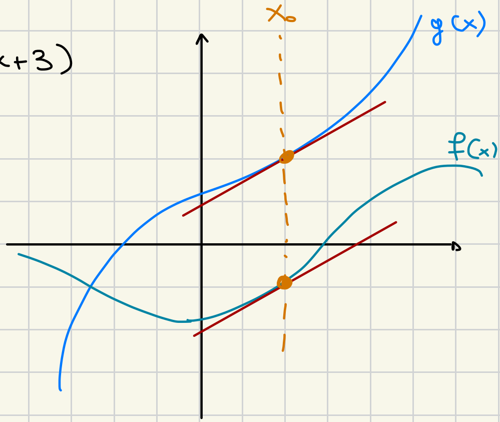
Settimana: 12

Materia: Matematica
Classe: 5C
Data: 9/12/25

Argomenti

Pag 1673 n 70

$f(x) = \frac{4x-4}{x}$ $g(x) = \ln(x+3)$



Trova punti con 1) Stesse ascisse
2) Tangenti parallele

Calcolo $f'(x)$ e $g'(x)$ e le metto uguali. Troverò l'ascisse in cui le due tangenti sono parallele

$$f'(x) = \frac{4 \cdot x - (4x-4)1}{x^2} = \frac{4}{x^2}$$

$$g'(x) = \frac{1}{x+3}$$

$f'(x) = g'(x) \rightsquigarrow \frac{4}{x^2} = \frac{1}{x+3}$ $4x+12 = x^2$ $x^2-4x-12=0$

$(x-6)(x+2)=0$

$\boxed{x = 6}$ $\boxed{x = -2}$

$A = (6; f(6)) = (6; \frac{10}{3})$ $C = (6; g(6)) = (6; \ln(9))$

$B = (-2; f(-2)) = (-2; +6)$ $D = (-2; g(-2)) = (-2; 0)$

Rappresentiamo le due funzioni e le tangenti

$$f(x) = \frac{4x-4}{x} = 4 - \frac{4}{x}$$

1) Dom f: $\{x \neq 0\}$ $\quad f: \mathbb{R}\setminus\{0\} \longrightarrow \mathbb{R}$

2) Int assi: $x=0$ No per Dom f

$y=0 \Rightarrow \frac{4}{x} = 4 \rightsquigarrow x=1$

$E=(1;0)$

3) Segno. $\frac{4x-4}{x} \geq 0$ $\quad$ N: $x \geq 1$ $\quad$ D: $x>0$ $\quad \boxed{x<0 \ \vee \ x\geq 1}$

4) Limiti: $\lim_{x\to\pm\infty} 4-\frac{4}{x} = 4$

$\lim_{x\to 0^+} 4-\frac{4}{x} = -\infty \qquad \lim_{x\to 0^-} 4-\frac{4}{x} = +\infty$

$$g(x) = \ln(x+3)$$

1) Dom(g): $x+3>0 \quad x>-3$

$g: (-3;+\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$

2) Int: $x=0 \quad y=\ln(3) \quad F=(0;\ln(3))$

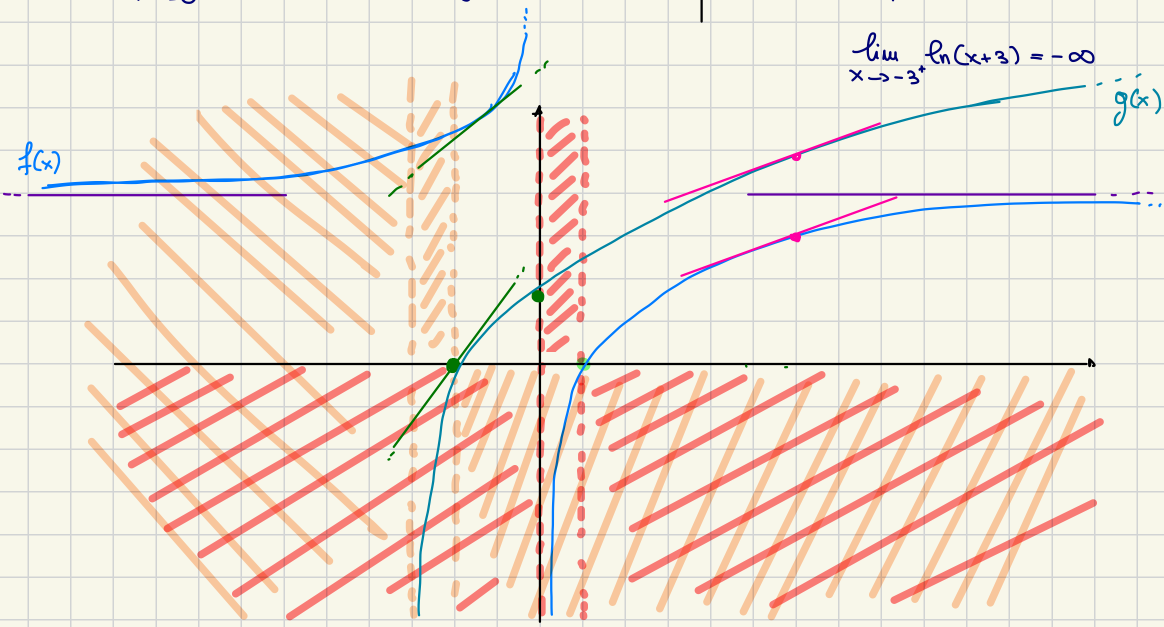
$y=0 \quad x=-2 \quad G=(-2;0)$

3) Segno: $\ln(x+3)\geq 0 \quad x+3\geq 1$

$\boxed{x\geq -2}$

4) limiti: $\lim_{x\to+\infty} \ln(x+3) = +\infty$

$\lim_{x\to -3^+} \ln(x+3) = -\infty$



Pag 1673 n 72

$f(x) = ax^3 + x^2 + bx + c$ Passa per $A=(0;2)$

$B=(1;-1)$

Nel pto B il coeff della tg è -4

$a, b, c = ?$

a, b, c numeri

$\hookrightarrow f'(x) = 3ax^2 + 2x + b$

$\hookrightarrow$ Ci metto 1 e fa -4

$$\begin{cases} 2 = 0+0+0+c & A \\ -1 = a+1+b+c & B \\ -4 = 3a+2+b \end{cases}$$

$$\begin{cases} c = 2 \\ a+b = -4 \\ 3a+b = -6 \end{cases}$$

$2a = -2 \quad a = -1 \quad \rightsquigarrow \quad b = -3$

$$\boxed{f(x) = -x^3 + x^2 - 3x + 2}$$

Pag 1678 n 91

$f(x) = \ln \dfrac{ax^2}{x^2+b}$

$f(1) = -\ln(3)$

$f'(2) = 1/3$

Ricava a, b e calcola $f''(1)$

$$\begin{cases} -\ln(3) = \ln\left(\dfrac{a}{1+b}\right) \\ \dfrac{1}{3} = \dfrac{\cancel{2}b}{\cancel{2}(4+b)} \end{cases}$$

$$f'(x) = \frac{1}{\frac{ax^2}{\cancel{x^2+b}}} \cdot \frac{2ax(x^2+b) - ax^2(2x)}{(x^2+b)^{\cancel{2}}}$$

$$f'(x) = \frac{\cancel{2ax^3} + 2\cancel{a}b\cancel{x} - \cancel{2ax^3}}{\cancel{a}x^{\cancel{2}}(x^2+b)}$$

se $a \neq 0$
$x \neq 0$

$$\boxed{f'(x) = \frac{2b}{x(x^2+b)}}$$

$$\begin{cases} \ln(3^{-1}) = \ln\left(\dfrac{a}{1+b}\right) \\ 4+b = 3b \end{cases} \rightsquigarrow \boxed{b = 2}$$

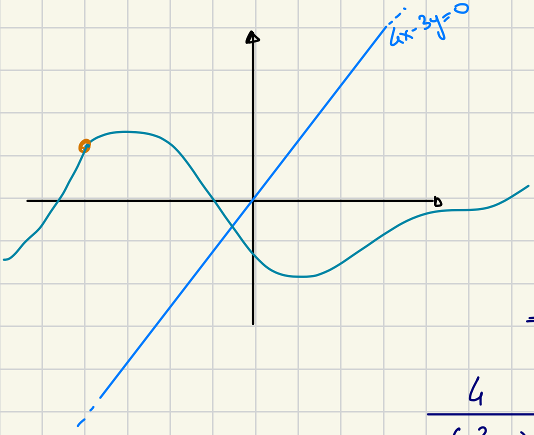
$$\frac{1}{3} = \frac{a}{3} \rightsquigarrow \boxed{a = 1}$$

$$\downarrow \quad b = 2$$

$$f(x) = \ln \frac{x^2}{x^2+2} \qquad f'(x) = \frac{4}{x(x^2+2)}$$

$$f''(x) = \frac{0 - 4[1(x^2+2) + x(2x)]}{[x(x^2+2)]^2} \qquad f''(1) = \frac{-4(3+2)}{[1(3)]^2} = -\frac{20}{9}$$

b) Trova $A \in$ Graf $(f(x))$ in cui la tg in A è parallela a $4x-3y=0$



Impongo che la tg, cioè la derivata, sia uguale al coeff. ang di $4x-3y=0$

$$y = \frac{4}{3}x$$

$\Rightarrow f'(x) = \frac{4}{3}$ e ricavo x

$$\frac{4}{x(x^2+2)} = \frac{4}{3} \rightsquigarrow x(x^2+2) = 3$$

$x^3+2x-3 = 0$ $\quad$ $x=1$ è soluzione

	1	0	2	−3
1		1	1	3
	1	1	3	0

$$(x-1)(2x^2+x+3) = 0$$

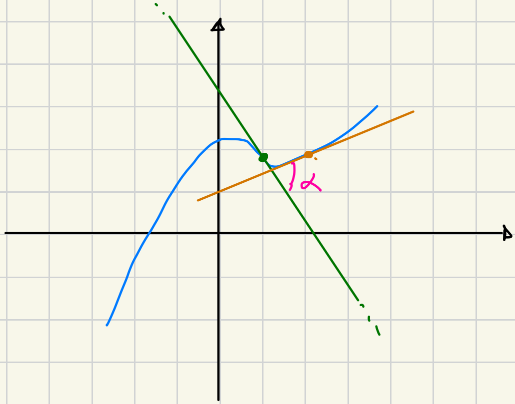
$\boxed{x=1}$ $\qquad x^2+x+3=0 \qquad \Delta = 1-12 = -11$ IMPOSSIBILE

Il punto che ha tg con coeff $\frac{4}{3}$ è $A = (1; f(1))$

$A = (1; -\ln(3))$

Sia B il punto di $f(x)$ con $x=2$

Trova $\operatorname{tg}\alpha$ con α angolo formato dalle rette tg alla funzione nei punti A e B



Formula per la tg dell'angolo formato da due rette.

Siano $y = m_1 x + q_1$, $y = m_2 x + q_2$ le due rette.

Vale che
$$\boxed{tg\,\alpha = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_2 m_1}}$$

Un coeff. angolare ce lo abbiamo: è $\frac{4}{3}$

Per l'altro è sufficiente calcolare $f'(2)$

$$f'(2) = \frac{4}{2(4+2)} = \frac{4}{2(6)} = \frac{1}{3}$$

$$tg\,\alpha = \frac{\frac{4}{3} - \frac{1}{3}}{1 + \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{3}} = \frac{1}{1 + \frac{4}{9}} = \frac{9}{13}$$

Es Matilde:
$$\lim_{x \to -1^+} - \frac{\ln(-5x-4)}{x^2+4x+3} \qquad\qquad \lim_{x \to 0} \frac{\ln(1+x)}{x}$$

Idea: Riporto
$$-5x - 4 = t + 1$$
$$-5x = t + 5 \qquad\qquad t \to 0$$
$$x = -\frac{t+5}{5} \qquad\qquad x \to -1$$

$$\lim_{t \to 0^+} - \frac{\ln(t+1)}{\left(-\frac{t+5}{5}\right)^2 + 4\left(-\frac{t+5}{5}\right) + 3} = \lim_{t \to 0^+} - \frac{[\ln(1+t)] \cdot 25}{t^2 + \cancel{25} - 10t - 20t - \cancel{100} + \cancel{75}}$$

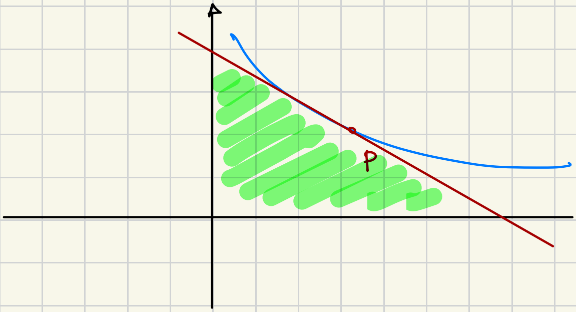
$$\lim_{t \to 0^+} - \frac{25 \ln(1+t)}{t(t-30)} = \frac{5}{6}$$

$\to 1$

Pag 1679 n 90

$$f(x) = \frac{ax^2+bx+c}{x^2}$$

1) Asint. oriz $x=2$
2) Passa per $P=(1;-1)$
3) la retta tg in P forma con gli assi cartes. un triangolo di Area $\frac{9}{4}$



1) $\lim_{x\to+\infty} \frac{ax^2+bx+c}{x^2} = 2$

$\lim_{x\to+\infty} \frac{\cancel{x^2}\left(a+\frac{b}{x}+\frac{c}{x^2}\right)}{\cancel{x^2}} = 2$

$\Rightarrow \boxed{a=2}$

$$f(x) = \frac{2x^2+bx+c}{x^2}$$

2) $-1 = \frac{2+b+c}{1} \Rightarrow \boxed{b+c=-3}$ $\longrightarrow$ $\boxed{b=-c-3}$

3) $f'(x) = \frac{(4x+b)(x^2)-(2x^2+bx+c)2x}{x^4}$

$f'(1) = \frac{(4+b)-(2+b+c)\cdot 2}{1^4} = -b-2c$

Retta $\quad y+1 = (-b-2c)(x-1)$

$y=0 \rightsquigarrow \quad 1-b-2c = x(-b-2c)$

$\boxed{x = \frac{1-b-2c}{-b-2c}} = \frac{1+c+3-2c}{c+3-2c} = \frac{4-c}{3-c}$

$x=0 \rightsquigarrow \boxed{y=+b+2c-1} = c-4$

Area $\boxed{\left|\frac{c-4}{c-3}\right| \cdot \frac{|c-4|}{\cancel{2}} = \frac{9}{\cancel{4}2}}$

$2(c-4)^2 = 9|c-3|$

$c \geq 3$

$2c^2 + 32 - 16c = 9c - 27$

$2c^2 - 25c + 59 = 0$

$\Delta = 625 - 472 = 128 + 25 = 153$

$0 \leq c \leq 3$

$2c^2 + 32 - 16c = -9c + 27$

$2c^2 - 7c + 5 = 0$

$\Delta = 49 - 40 = 9$

$c_1/c_2 = \dfrac{7 \pm 3}{4} \begin{cases} 10/4 \\ 1 \end{cases}$

Teorema: Sia $f:(a,b) \to \mathbb{R}$ funzione e supponiamo che f sia derivabile in x_0. Allora f è continua in x_0

(f derivabile in $x_0 \Rightarrow f$ continua in x_0)

Dim: So che esiste finito $f'(x_0) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$

Voglio dimostrare che $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$

Scriviamo la seguente uguaglianza:

$$f(x_0+h) = f(x_0) + \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} \cdot h$$

Passo al limite

$$\lim_{h \to 0} f(x_0+h) = \lim_{h \to 0} f(x_0) + \lim_{h \to 0} \underbrace{\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}}_{\to f'(x_0)} \cdot \underbrace{h}_{\to 0}$$

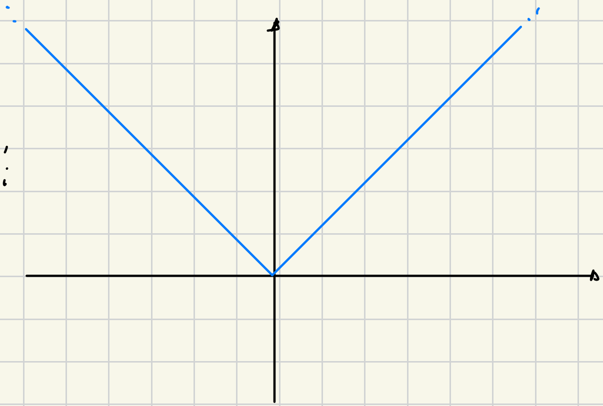
$$\lim_{h \to 0} f(x_0+h) = f(x_0) + 0$$

(Cambio di variabile $x_0 + h = x$ $\quad h \to 0$, $x \to x_0$)

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$ che è la def. di continuità

Warning: Il viceversa è FALSO! Considerare, per esempio, la funzione

$f(x) = |x|$



La funzione è continua in $x=0$, ma NON è derivabile! Infatti:

$$f'_-(0) = \lim_{h \to 0^-} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0^-} \frac{|h|}{h} = -1$$

$$f'_+(0) = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{|h|}{h} = +1$$

Dato che $f'_-(0) \neq f'_+(0)$