Settimana: 2

Materia: Matematica
Classe: 5C
Data: 22/09/25

Argomenti: Esercizi in classe. Richiami e spiegazioni di "Immagine". Funzione a tratti, controimmagine di un punto. Esempi. Esercizi fz trigo. fz inj, su, bij.

Pag 1370 n. 255

$$f(x) = e^{\frac{1}{x}} - 1$$

- $\mathrm{Dom}(f) = \{x \neq 0\}$

- Esempio: $3 \in \mathrm{Im}\, f$? Devo risolvere $3 = e^{\frac{1}{x}} - 1$

  Se trovo x $\boxed{t.c.}$ (tale che) $3 = e^{\frac{1}{x}} - 1$ $\boxed{\Rightarrow}$ (Allora) $3 \boxed{\in} \mathrm{Im}\, f$ (Appartiene); Altrimenti 3 NON sta in $\mathrm{Im}\, f$

  $$3 = e^{\frac{1}{x}} - 1 \Rightarrow 4 = e^{\frac{1}{x}} \rightsquigarrow \text{passo al log naturale}$$

  $$\ln 4 = \ln\left(e^{\frac{1}{x}}\right) = \frac{1}{x} \rightsquigarrow \boxed{x = \frac{1}{\ln(4)}}$$

  Dato che ho trovato la soluzione, $3 \in \mathrm{Im}\, f$

- In generale, quando $y \in \mathrm{Im}\, f$?

  Devo trovare x in modo che $y = e^{\frac{1}{x}} - 1$.

  Operativamente devo ricavare la x in funzione della y e vedere quando le cose hanno senso

  Facciamolo: $y = e^{\frac{1}{x}} - 1 \rightsquigarrow y + 1 = e^{\frac{1}{x}} \rightsquigarrow$ Passo al log

  $$\ln(y+1) = \frac{1}{x} \rightsquigarrow \boxed{x = \frac{1}{\ln(y+1)}}$$

L'immagine corrisponde alla possibilità di fare l'operazione sopra, cioè corrisponde alle C.E. su y.

$$\mathrm{Im}(f): \begin{cases} y+1>0 \\ \ln(y+1) \neq 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} y>-1 \\ y \neq 0 \end{cases}$$

$$\boxed{\mathrm{Im}(f) = \{ y>-1 \,,\, y \neq 0 \}}$$

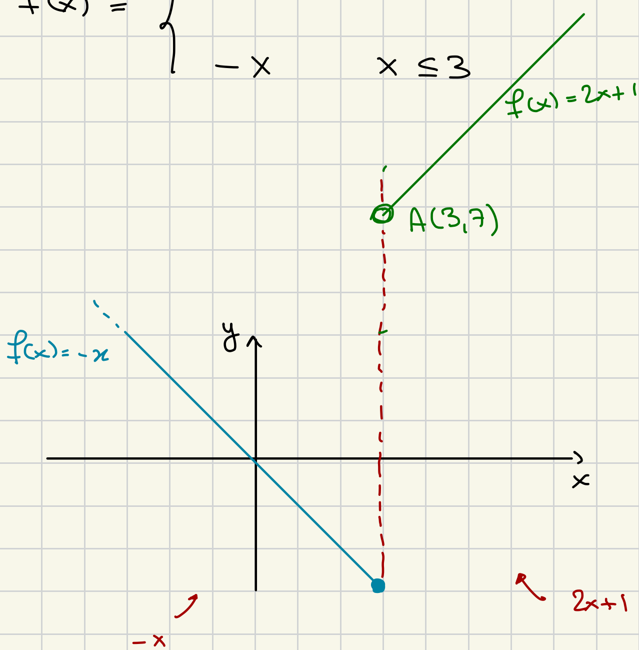
Def: Una funzione è detta a tratti se fa cose diverse in zone diverse del dominio. Si scrive

$$f(x) = \begin{cases} f_1(x) & \text{se } x \in A_1 \\ f_2(x) & \text{se } x \in A_2 \\ \vdots \end{cases} \qquad A_i \boxed{\subseteq} \mathrm{Dom}(f)$$

contenuto tra insiemi

Esempio:

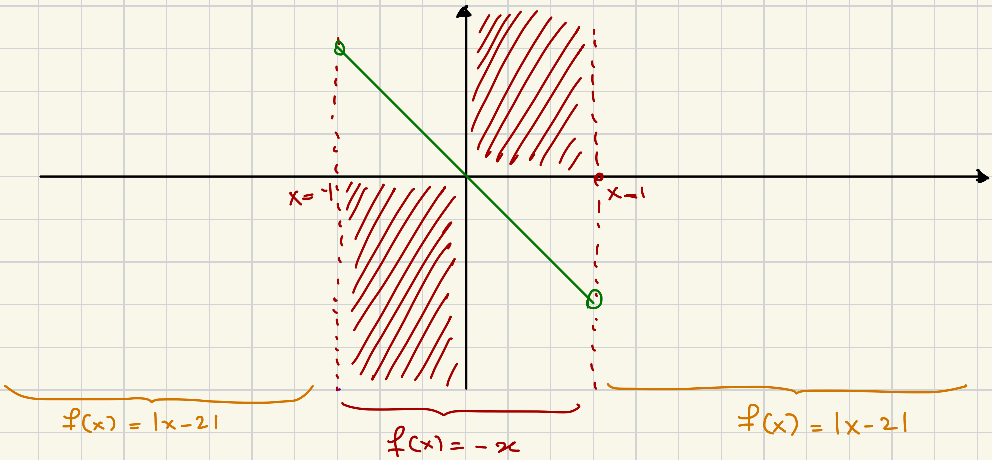
$$f(x) = \begin{cases} 2x+1 & x>3 \\ -x & x \leq 3 \end{cases} \qquad f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$



Consiglio: Rivedere come si disegna le rette con Simone

347:

$$f(x) = \begin{cases} -x & \text{se } |x|<1 \rightsquigarrow -1<x<1 \\ |x-2| & \text{se } |x|\geq 1 \rightsquigarrow x\leq -1 \lor x\geq 1 \end{cases}$$



$f_1 : \{-1<x<1\} \longrightarrow \mathbb{R}$

$f_1(x) = -x$

(1) <u>Dom(f_1)</u> $= \{-1<x<1\}$

(2) <u>Im(f)</u>: $y=-x$ e si ricava la x in funzione della y:

$$\boxed{x=-y}$$

Non ci sono C.E. ⇒ Im(f) non ha restrizioni nel dominio

Dato che la scrittura di y è "uguale" a quella di x

Im(f) $= \{-1<y<1\}$

→ Eredita le C.E. di Dom(f)

(3) <u>Segno</u>: $f(x)\geq 0$ $\quad -x\geq 0$ $\quad \boxed{x\leq 0}$

$f_2 : \{x\leq -1 \lor x\geq 1\} \longrightarrow \mathbb{R}$

$f_2(x) = |x-2|$

⇝ Terminare per casa

Vi dice dove cancellare sotto

(b) Calcola $f(-1) = |-1-2| = |-3| = 3$
$f(3) = |3-2| = 1$
$f(\frac{1}{2}) = -\frac{1}{2}$

Basta stare attenti al tratto in cui sono.

Def: Data $f: A \longrightarrow B$ e $b \in B$, la controimmagine di b tramite f è

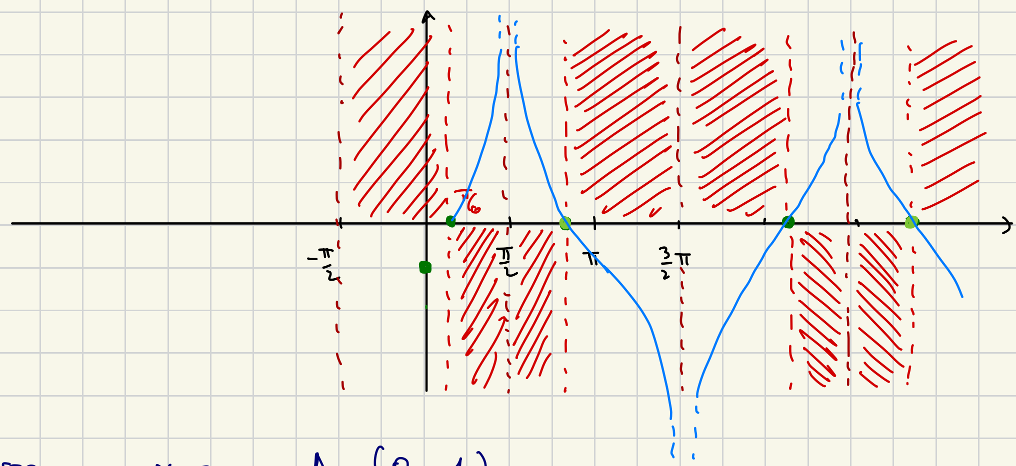
$$f^{-1}(b) = \{a \in A \mid f(a) = b\}$$

Sono tutte le cose di A che vanno a finire in b.

n. 288

$$s(x) = \frac{2\sin x - 1}{\cos^2 x}$$

1) Dom(s): $\cos^2 x \neq 0 \rightsquigarrow x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$



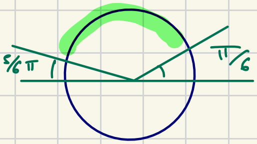
2) Asse y: $x=0$ $A = (0, -1)$

Asse x: $y=0$ $\frac{2\sin x - 1}{\cancel{\cos^2 x}} = 0$ $\sin x = \frac{1}{2}$

$\boxed{x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi}$

$\boxed{x = \frac{5}{6}\pi + 2k\pi}$

3) $\frac{2\sin x-1}{\cos^2 x} \geq 0$ N: $2\sin x \geq 1$ $\quad \sin x \geq \frac{1}{2}$



$$\boxed{\frac{\pi}{6}+2k\pi \leq x \leq \frac{5}{6}\pi+2k\pi}$$

D. $\cos^2 x > 0$ Sempre vero, è un □ (nel C.E.)

Sol segno: $\boxed{\frac{\pi}{6}+2k\pi \leq x \leq \frac{5}{6}+2k\pi}$ ⇝ Cancello di sotto in queste zone

Def: Una fz $f: A \to B$ si dice

(1) Iniettiva se ogni elemento di B è raggiunto da al più un elemento di A In formule

$$\boxed{f(a_1)=f(a_2) \implies a_1=a_2}$$

(2) Suriettiva se ogni elemento di B è raggiunto da almeno un elemento di A. In formule.

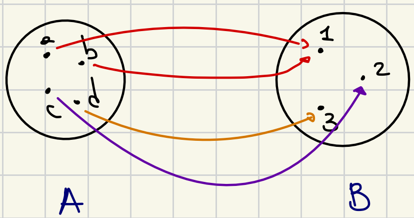
$$\boxed{\begin{array}{l} \triangleright \ Im(f)=B \\ \triangleright \ \forall b \in B, \ \exists a \in A \ t.c. \ f(a)=b \end{array}}$$

⇝ Modi equivalenti

(3) Biunivoca o biettiva se è sia iniettiva sia suriettiva.

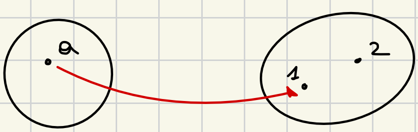
Esempi.

(1)



- Non iniettiva perché 1 è raggiunto da 2 cose
- È suriettiva
- Non è biettiva

(2)



- È iniettiva, NON è suriettiva
- NON è biunivoca

Esempio: $f(x) = \ln(x+1)$. È iniettiva?

Uso la definizione di iniettività: f è iniettiva se

$$f(x_1) = f(x_2) \implies x_1 = x_2 \qquad \forall x_1, x_2 \in Dom(f)$$

Parto da questa, faccio conti e, se arrivo a $\rightarrow$, allora la funzione è INIETTIVA

$$\ln(x_1+1) = \ln(x_2+1) \rightsquigarrow x_1 + \cancel{1} = x_2 + \cancel{1}$$

$$\rightsquigarrow x_1 = x_2$$

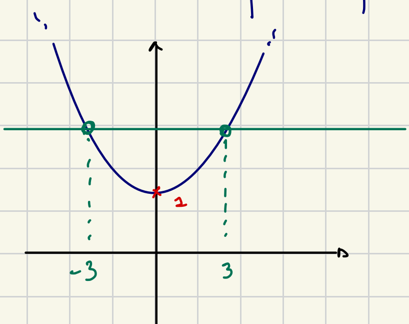
Dato che sono arrivato a $x_1 = x_2$, la fz è iniettiva

Esempio: $a(x) = x^2 + 1$. È iniettiva?

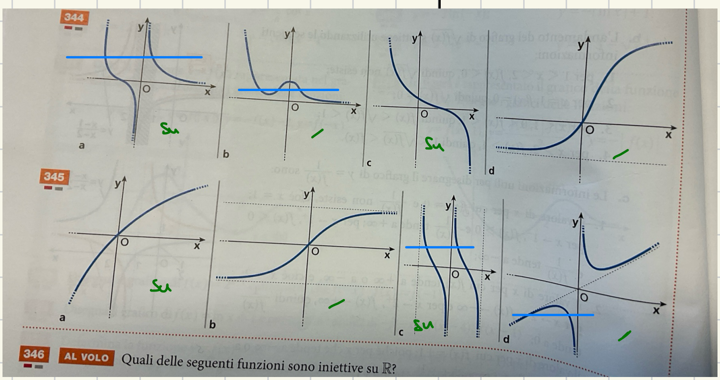
$$x_1^2 + \cancel{1} = x_2^2 + \cancel{1} \rightsquigarrow x_1^2 = x_2^2$$

, ma NON è iniettiva perché potrebbe essere $x_1 = 3$, $x_2 = -3$

Graficamente:



Si può vedere l'iniett. graficamente. Se esiste una retta orizzontale che interseca il grafico in più di 1 pto, Allora la fz NON è iniettiva



$\leftarrow$ Discussione iniettività da grafico.

Pag 1369 n. 243

$f(x) = e^{\frac{1}{x^2-a}}$ Dobbiamo imporre che $Dom(f) = \mathbb{R}$ trovando condizioni su a

$x^2 - a \neq 0$ Non voglio che sia risolubile, impongo $\Delta < 0$

$$\Delta = b^2 - 4ac = 0 + 4a < 0 \rightsquigarrow \boxed{a < 0}$$

n 247

$f(x) = \frac{a-5}{2^x - 2^{b-1}}$

(1) interseca asse y in $(0,1)$

(2) $Dom(f)$: $x \neq 3$

a, b ?

(1) $1 = \frac{a-5}{2^0 - 2^{b-1}}$

(2) $2^x - 2^{b-1} \neq 0$

$2^x \neq 2^{b-1}$ $\rightsquigarrow 3 = b-1$

$x \neq b-1$

$\begin{cases} 1 = \frac{a-5}{1-8} \\ b = 4 \end{cases}$ $\begin{cases} -7 = a-5 \\ b = 4 \end{cases}$ $\boxed{a = -2 \quad , \quad b = 4}$

248: $f(x) = \frac{a-x}{2\log_2 x - b}$

1) Attraversa asse x in ascisse 1 $\rightsquigarrow (1,0)$

2) $Dom(f)$: $\underbrace{x > 0 \quad \wedge \quad x \neq 2}$

(1) $0 = \frac{a-1}{2\log_2 1 - b}$

2) $Dom(f)$:

$2\log_2 x - b \neq 0$ $\log_2 x \neq \frac{b}{2} = \log_2 2^{b/2}$

$\underbrace{x > 0}$ $\underbrace{x \neq 2^{b/2}}$

$2^{b/2} = 2$

$$\begin{cases} a-1=0 \\ b/2=1 \end{cases} \qquad \begin{cases} a=1 \\ b=2 \end{cases} \qquad \boxed{a=1\,,\ b=2}$$

Fz suriettive graficamente

Contenuto

$$f: D \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

Se verticalmente c'è un pezzo di grafico che copre ogni zona del codominio, allora la fz. è suriettiva

Def: Data due funzioni $g: A \longrightarrow B$ e $f: \mathrm{Im}(g) \subseteq B \longrightarrow C$ definiamo la funzione composta

$$f \circ g : A \longrightarrow C \qquad (f \text{ composto } g)$$

che consiste nell'applicare prima g e poi f.

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "g"] \arrow[rr, bend right, "f \circ g"'] & B \arrow[r, "f"] & C \end{tikzcd}$$

Esempio: $f(x) = 3x+7$, $g(x) = x^2+2$

$$(f \circ g)(x) \overset{\text{Def}}{=} f(g(x)) = f(x^2+2) = 3(x^2+2)+7$$

$$= 3x^2+13$$

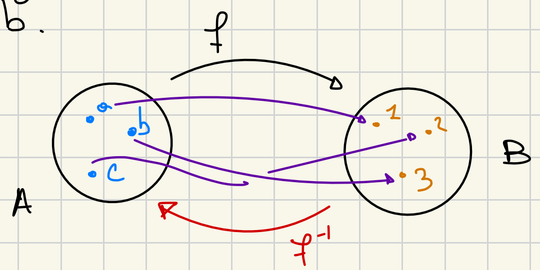
$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(3x+7) = (3x+7)^2 + 2$$
$$= 9x^2 + 42x + 51$$

Oss: La composizione NON è commutativa

Def. Sia $f: A \to B$ una funzione biunivoca. Definiamo la funzione inversa

$$f^{-1}: B \longrightarrow A$$

quella fz che associa a $b \in B$, l'elemento $a \in A$ t.c. $f(a) = b$.



Inj e Surj determinano una corrisp. 1 — 1. la funzione inversa torna indietro lungo le frecce

Oss/esercizio: f biunivoca, f^{-1} inversa

$$(f \circ f^{-1})(x) = f^{-1}(f(x)) = x$$

$$(f^{-1} \circ f)(x) = f^{-1}(f(x)) = x$$

Def: Sia $f: D \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, f è detta

- funzione pari: se $\forall x \in D$, $f(x) = f(-x)$ (se possibile)
- funzione dispari: se $\forall x \in D$, $f(x) = -f(-x)$

Esempi: $\triangleright$ $f(x) = \dfrac{x^2-1}{x^2+1}$ È pari?

$$f(x) = \frac{x^2-1}{x^2+1} \qquad f(-x) = \frac{(-x)^2-1}{(-x)^2+1} = \frac{x^2-1}{x^2+1}$$

⇝ Dunque la f_3 è pari

▹ $f(x) = \sin(x)$ è dispari?

$$f(x) = \sin x \qquad -f(-x) = -[\sin(-x)] = -[-\sin x] = \sin x$$

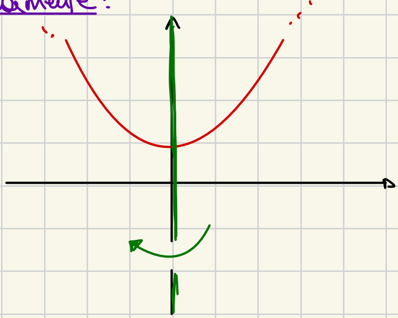
⇝ quindi $f(x) = \sin x$ è dispari

Oss: Se f è dispari, $0 \in Dom(f) \Rightarrow f(0) = 0$, cioè le funzioni dispari passano per l'origine

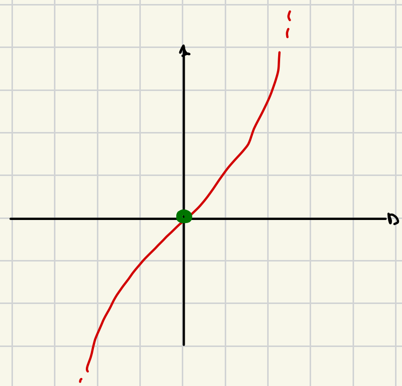
Dim: Se f è dispari allora $f(x) = -f(-x)$. Metto 0 al posto di x

$$f(0) = -f(0)$$
$$2 \cdot f(0) = 0$$
$$f(0) = 0$$

Graficamente:



PARI
Grafico simmetrico rispetto a asse y



DISPARI
Grafico simmetrico rispetto all'origine O