

Settimana: 19

Materia: Matematica  
Classe: 5A  
Data: 16/02/26

Cattedre

Eros	Linda	Greg
------	-------	------

Elio	Emme	Ang
------	------	-----

Rob	Giov	Sofie
-----	------	-------

Giorgia	Chiara	Lorenzo
---------	--------	---------

Over	Noemi	Valerio
------	-------	---------

Ducc.	Nicc.	Aurora
-------	-------	--------

Bego	Daniela
------	---------

Cec.	Mirco	Sof.
------	-------	------

Witt	Bol	Serena
------	-----	--------

Limiti:

Pag 1550 n 673

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (\sqrt{n+4} - 4) \frac{(\sqrt{n+4} + 4)}{(\sqrt{n+4} + 4)} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n+4 - 16}{\sqrt{n+4} + 4} =$$



$$= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n-12}{\sqrt{n+4} + 4} = +\infty$$

675:

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} e^{\frac{x+2}{x-1}} = \infty$$

507:  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{\ln(x+2)} = 1$

H:  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x+2}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+2}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x(1+\frac{2}{x})}{x} = 1$

493:  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x}{x+3} \right)^x = \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x}{x(1+\frac{3}{x})} \right)^x$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1^x}{(1+\frac{3}{x})^x} = \frac{1}{e^3} = e^{-3}$$

486:  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\log_2 x}{2^{2x} - 2^x - 2} = \frac{1}{10}$

548:  $\lim_{x \rightarrow 0^+} e^{-\frac{1}{x}} \cdot (e+2x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left( \frac{e+2x}{e} \right)^{\frac{1}{x}}$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{2}{e} x \right)^{\frac{1}{x}}$$

$$\frac{1}{x} = t \quad x \rightarrow 0 \quad t \rightarrow \infty$$

$$= \lim_{t \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{2}{e^t} \right)^t$$

$$\boxed{e^{\frac{2}{e}}}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{k}{x} \right)^x = e^k$$

## Integrali

Esempio ▷ Quel è la  $f(x)$  che se la derivo fa  $2x$ ?  $x^2$

$$\int 2x \, dx = x^2$$

$$\Rightarrow \int \sin x \, dx = -\cos x$$

$$\Rightarrow \int \frac{1}{1+x^2} \, dx = \arctg x$$

$$\Rightarrow \int \frac{1}{x} \, dx = \ln x$$

$$\Rightarrow \int \ln x \, dx = \dots$$

Def.: Una funzione  $F(x)$  è una Primitiva della funzione  $f(x)$  definita in  $[a; b]$  se  $F(x)$  è derivabile in  $[a; b]$  e vale

$$F'(x) = f(x)$$

Teorema: Se  $F(x)$  è una primitiva di  $f(x)$ , allora tutte e sole le primitive di  $f(x)$  sono del tipo  $F(x) + c$  con  $c$  numero reale

$$\begin{aligned} \text{Esempio: } (x^2 + 5)^1 &= 2x \\ (x^2 + 7)^1 &= 2x \end{aligned}$$

Più correttamente di prima scriveremo

$$\int 2x \, dx = x^2 + c$$

numero reale

Dim.: Conseguenza del Teo Lagrange, vedere corollario 2.

Def. Date  $f: (a; b) \rightarrow \mathbb{R}$ , l'integrale indefinito di  $f$  sono tutte le primitive di  $f(x)$ . Dunque sono l'insieme

$$\{F(x) + c \mid F(x) \text{ primitive}, c \in \mathbb{R}\}.$$

Scriveremo

$$\int f(x) dx$$

Si Legge: integrale di  $f(x)$  in  $dx$

Ve lo dirò  
agli integrali definiti.

Notazione:

$$\int f(x) dx$$

Variebile di integrazione

Funzione integrande

Una funzione che ammette una primitiva si dice integreibile

Oss. Non tutto è integreibile: Per esempio la funzione di Dirichlet non è integreibile

$$D: [0; 1] \rightarrow \mathbb{R}$$

$$D(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{se } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$



Teorema: Se una funzione  $f: [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$  è continua, allora ammette primitive in  $[a; b]$  (cioè è integrabile)

↳ In soluzioni: Se dentro l'integrale c'è una funzione continua riuscirete a risolvere l'integrale (magari con difficoltà)

Integrali immediati:

$$\int x^3 dx = \frac{1}{4}x^4 + C$$

$$\int \cos x dx = \sin x + C$$

$$\int e^x dx = e^x + C$$

$$\int e^{2x} dx = \frac{1}{2}e^{2x} + C$$

$$\int \frac{2x}{x^2+1} dx = \ln(x^2+1) + C$$

$$\int x^n dx = \frac{1}{n+1} x^{n+1} + C \quad n \neq -1$$

c'è un  
valore assoluto

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C$$

$$\int \cos x dx = \sin x + C$$

$$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \operatorname{tg} x + C$$

$$\int \sin x dx = -\cos x + C$$

$$\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\operatorname{cotg} x + C$$

$$\int e^x dx = e^x + C$$

$$\int \frac{1}{1+x^2} dx = \operatorname{arctg} x + C$$

$$\int \frac{1}{1-x^2} dx = \operatorname{arctg} x + C$$

Pag 1800 n 384

$$f(x) = \frac{x^2 - 4x - 5}{(x-1)^2}$$

Dom  $f$ :  $x \neq 1$

Asse  $x$   $f(x) = 0$   $\frac{x^2 - 4x - 5}{(x-1)^2} = 0$   $(x-5)(x+1) = 0$

$$A = (5; 0) \quad , \quad B = (-1; 0)$$

Asse  $y$   $x = 0 \Rightarrow \frac{-5}{1} = -5$   $C = (0; -5)$

Segno:  $\frac{x^2 - 4x - 5}{(x-1)^2} \geq 0$   $N \geq 0 \Rightarrow x \leq -1 \vee x \geq 5$   
 $D > 0 \Rightarrow x \neq 1$

Sol:  $x \leq -1 \vee x \geq 5, x \neq 1$

Limiti:  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - 4x - 5}{(x-1)^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2(1 - \frac{4}{x} - \frac{5}{x^2})}{x^2(1 - \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2})} = 1$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 - 4x - 5}{(x-1)^2} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2 - 4x - 5}{(x-1)^2} = -\infty$$

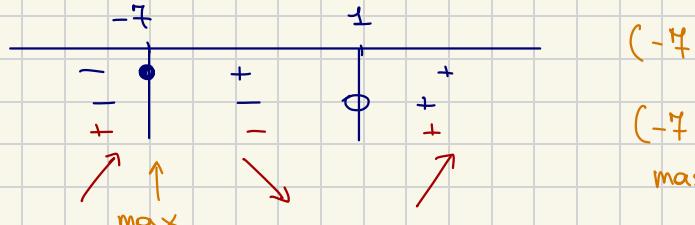
$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2 - 4x - 5}{(x-1)^2} = -\infty \quad ] \text{Asintoto verticale}$$

Derivato:  $\left[ \frac{x^2 - 4x - 5}{(x-1)^2} \right]' = \frac{(2x-4)(x-1)^2 - (x^2 - 4x - 5) \cdot 2(x-1)}{(x-1)^4}$

$$= \frac{2x^2 - 2x - 4x + 4 - 2x^2 + 8x + 10}{(x-1)^3}$$

$$f'(x) = \frac{2x+14}{(x-1)^3} \geq 0 \quad N \geq 0 \quad D > 0 \quad 2x+14 \geq 0 \quad x \geq -7$$

$$(x-1)^3 > 0 \quad x > 1$$



$$(-7, f(-7)) =$$

$$(-7; \frac{9}{8})$$

massimo

Derivate II

$$f''(x) = \frac{2(x-1)^3 - (2x+14)3(x-1)^2}{(x-1)^8} =$$

$$= \frac{2x-2 - 6x - 42}{(x-1)^4} = \frac{-4x-44}{(x-1)^4} \geq 0$$

$$N \geq 0$$

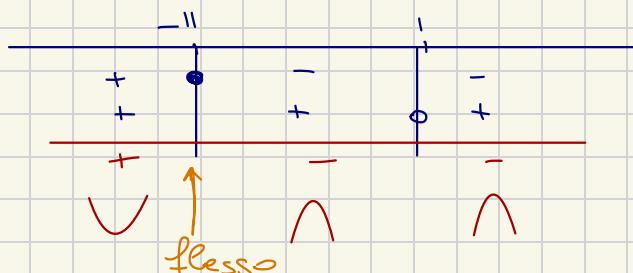
$$-4x-44 \geq 0$$

$$\Rightarrow x \leq -11$$

$$D > 0$$

$$(x-1)^4 > 0$$

$$\Rightarrow x \neq 1$$



$$F =$$

$$(M; f(-11))$$

$$(-11; \frac{10}{9})$$

