Settimana: 8

Materia: Matematica
Classe: 5C
Data: 3/11 /25

Correz. pti compito

$$f(x) = \frac{x^2+p}{(x+q)^2}$$

1) f passa per $(1;0)$
2) $x=-2$ è asintoto

$$0 = \frac{1^2+p}{(1+q)^2} \rightsquigarrow 1+p=0 \rightsquigarrow \boxed{p=-1}$$

$$\lim_{x\to -2} \frac{x^2-1}{(x+q)^2} = \infty$$

$\rightsquigarrow$ Per fare ∞, Den $\to 0$ $\Rightarrow$ $-2+q=0$ $\boxed{q=2}$

Pari: $f(x) = f(-x)$

$$f(x) = \frac{x^2-1}{(x+2)^2}$$

$$f(x) = \frac{x^2-1}{x^2+4x+4}$$

$$f(-x) = \frac{(-x)^2-1}{(-x+2)^2} = \frac{x^2-1}{x^2-4x+4}$$

Non è pari

Dovete specificare di più!

$$\lim_{x\to -2} \frac{x^2-1}{(x+2)^2}(e^{x+2}-1)\sin(x+2) =$$

(Sost: $x+2=t$, $x\to -2$, $t\to 0$)

$$\lim_{t\to 0} \frac{(t-2)^2-1}{} \frac{(e^t-1)}{t} \frac{\sin t}{t} = 3$$

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{x^2-1}{(x+2)^2} \cdot \ln(x+1) = \infty$$

$\frac{x^2-1}{(x+2)^2} \to 1$, $\ln(x+1) \to +\infty$

Teoremi sulle funzioni continue

Teorema (continuità della f inversa): Sia $f: D_1 \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow D_2 \subseteq \mathbb{R}$ (D_1 intervallo) Bigettiva e continua in tutto D_1. Allora la funzione inversa

$$f^{-1}: D_2 \longrightarrow D_1$$

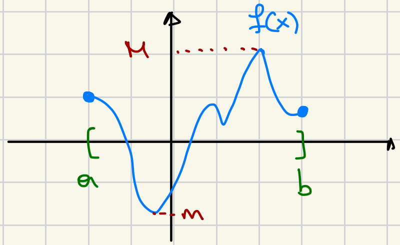
è ancora continua

Remind: $f: D \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $\mathrm{Max}(f)$ = valore più alto raggiunto dalla funzione
$\min(f)$ = valore più basso raggiunto dalla funzione

$$\mathrm{Max}(f) = \mathrm{Max}(\mathrm{Im}\, f)$$
$$\min(f) = \min(\mathrm{Im}\, f)$$

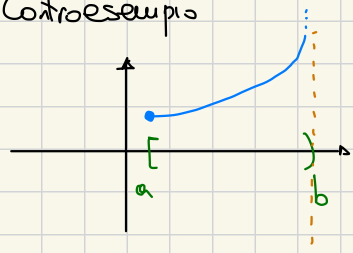
Non è detto che esistano!

Teorema di Weierstrass: (Vaiestrass ← Pronuncia):
Sia $f: [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ una funzione continua. Allora f ammette sia massimo che minimo.



M è il Massimo
m è il minimo.

Oss importanti:
(1) L'ipotesi che l'intervallo sia chiuso (da entrambi i lati) è necessaria
Controesempio

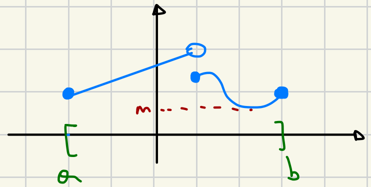


In questo esempio un estremo NON è incluso e la funzione in questo caso NON ammette massimo

(2) L'ipotesi che f sia continua è Necessaria

Controesempio

La funzione NON ha massimo, la palla bianca è solamente un sup



Pag 1557 n 808

$f(x) = \dfrac{x}{x^2+x-2}$ $\qquad f: D \subseteq [0;3] \longrightarrow \mathbb{R}$

Ha massimo e/o minimo in $[0;3]$?

Prova a Verificare le Hip di Weierstrass

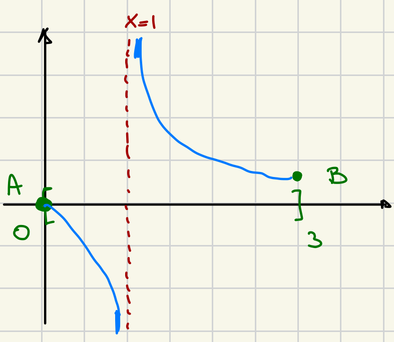
(1) Il dominio è un intervallo chiuso?

Dom(f): $x^2+x-2 \neq 0$ $\quad \leadsto$ Dom(f) $= [0;1) \cup (1;3]$

$(x+2)(x-1) \neq 0$

$\underbrace{x \neq -2}_{\text{non sta in } [0,3]} \vee \underbrace{x \neq 1}_{\text{Problema!}}$

Dato che Dom(f) NON è intervallo chiuso, Non posso applicare W.



$f(0) = 0 \qquad f(3) = \frac{3}{10}$

$\lim_{x \to 1^-} \frac{x}{(x-1)(x+2)} = -\infty$

$\lim_{x \to 1^+} \frac{x}{(x-1)(x+2)} = +\infty$

n 809

$$f(x) = \frac{x}{-x^2+3x} \qquad f: D \subseteq [1;2] \longrightarrow \mathbb{R}$$

(1) Dom f:

$$-x^2+3x \neq 0$$
$$x(-x+3) = 0$$
$$x \neq 0 \lor x \neq 3$$

Fuori dall'intervallo che ci dice il problema

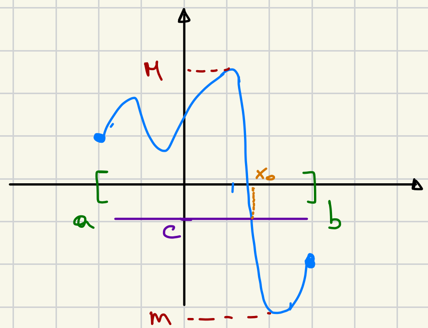
(2) Continuità: ovvia (no problemi o funzioni a tratti)

⇝ Posso applicare TdW e la fz ammetterà max e min.

Teorema dei valori intermedi: Sia $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ continua.
Siano m e M il minimo e il max di f (Esistono per TdW).
Allora

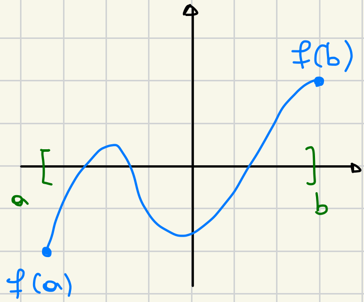
$$\forall c \in [m; M], \quad \exists x_0 \in [a,b] \text{ t.c. } f(x_0) = c$$

Ovvero ogni numero tra il minimo e il massimo è raggiunto da qualcosa



Fisso un'altezza $c \in [m;M]$, traccio la retta $y = c$ e tale retta interseca il grafico della funzione

Teorema degli zeri: Sia $f:[a;b] \longrightarrow \mathbb{R}$ funzione continua. Supponiamo che $f(a) \cdot f(b) < 0$ (in altre parole i numeri $f(a)$ e $f(b)$ sono di segno opposto, cioè uno pos e uno neg). Allora $\exists x_0 \in [a;b]$ t.c. $f(x_0) = 0$; cioè la funzione ha almeno uno zero.



Dim: Per il TdW, esistono m e M minimo e Massimo.

Dato che $f(a) \cdot f(b) < 0$, allora il minimo deve essere negativo e il massimo deve essere positivo.

Per il teorema dei valori intermedi,

$\forall c \in [m; M]$, $\exists x_0$ t.c. $f(x_0) = c$

Dato $m < 0$ e $M > 0$, allora posso scegliere $c = 0$

Di conseguenza

$$\exists x_0 \text{ t.c. } f(x_0) = 0$$

cioè x_0 è uno zero di f.

□

Pag 1558 n 824

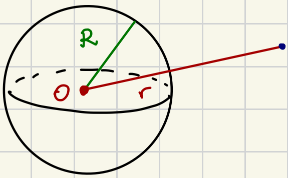
$f:[0;\frac{\pi}{2}] \longrightarrow \mathbb{R}$ $\qquad f(x) = -1 + x + \sin x$ $\qquad$ Ha qualche zero in $[0;\frac{\pi}{2}]$?

1) La funzione è continua in $[0;\frac{\pi}{2}]$: Si no prob di dominio o di raccordo

2) $f(0) = -1 + 0 + 0 = -1$
$f(\frac{\pi}{2}) = -1 + \frac{\pi}{2} + 1 = \frac{\pi}{2}$
$\Rightarrow$ La funzione ha almeno uno 0 per il Teorema degli zeri.

Pag 1586 n 111 $\qquad$ 12 7 21 5 20

$V(r)$, caricata pos.



$$V(r) = \begin{cases} 200 & 0 \le r \le R \\ \dfrac{20}{r} & r > R \end{cases} \qquad \text{in Volt}$$

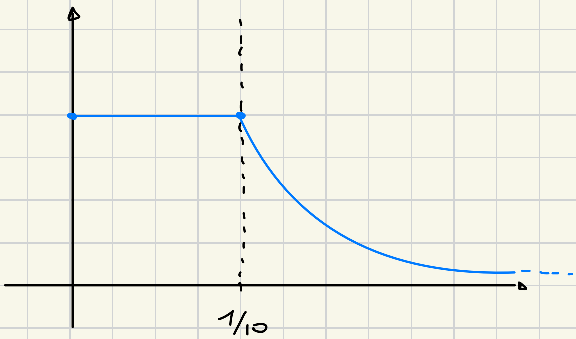
1) Trova Q sapendo che $V(r) = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{Q}{r}$ se $r > R$

Pongo uguaglianza tra formule $\dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \dfrac{1}{\cancel{r}} = \dfrac{20}{\cancel{r}}$

$\rightsquigarrow Q = 20 \cdot 4\pi\varepsilon_0$
$= (20 \cdot 4 \cdot 3{,}14 \cdot 8{,}85 \cdot 10^{-12})\,C \approx 2{,}2 \cdot 10^{-9}\,C$

2) Sapendo che $V(r)$ è continua, trovare R.

$\lim_{r \to R^-} V(r) = \lim_{r \to R^+} V(r) \rightsquigarrow 200 = \dfrac{20}{R} \rightsquigarrow \boxed{R = \frac{1}{10}}$



$$V(r) = \begin{cases} 200 & 0 \le r \le \frac{1}{10} \\ \frac{20}{r} & r > \frac{1}{10} \end{cases}$$

(4) $\lim_{r \to \infty} \dfrac{20}{r} = 0$

(3) Se $V(r) = 3{,}2$, quant'è r?

Uso la formula per $r > \frac{1}{10}$ $\rightsquigarrow \dfrac{20}{r} = 3{,}2$

$$r = \frac{20}{3{,}2} = \frac{\cancel{20}^{\,5}}{\cancel{32}_{\,\cancel{8}\,4}} \cdot \cancel{10}^{\,5} = \frac{25}{4} =$$

Pag 1587 n 113

$$\ln \eta = A + \frac{B}{T - T_\infty}$$

$A = 10$
$B = 5$
$T_\infty = 20$

(1)

$$\eta(T) = e^{A + \frac{B}{T - T_\infty}}$$

▷ $T_1 < T_2 \Longrightarrow \boxed{\eta(T_1) > \eta(T_2)}$

lo imposto e vedo se mi esce $T_1 < T_2$

$$\cancel{A} + \frac{\cancel{B}}{T_1 - T_\infty} > \cancel{A} + \frac{\cancel{B}}{T_2 - T_\infty}$$

$$T_1 - \cancel{T_\infty} < T_2 - \cancel{T_\infty}$$

fine

▷ $$\lim_{T \to T_\infty} \eta(T) = \lim_{T \to T_\infty} e^{A + \frac{B}{T - T_\infty}} = \infty$$

(2) ▷ Trovare $\inf(\eta)$ o il minimo (se esiste

Visto nel pto 1: la funzione decresce sempre; Per il pto più basso faccio il limite a ∞

$$\eta_0 = \inf(\eta) = \lim_{T \to \infty} e^{A + \frac{B}{T - T_\infty}} = e^{A} \rightsquigarrow e^{10}$$

▷ $\ln(\eta_0) = \ln(e^{10}) = 10.$