Formule per somma e sottrazione di angoli

Esempio: $\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1+1 = 2$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\right) = \sin(\pi) = 0$$

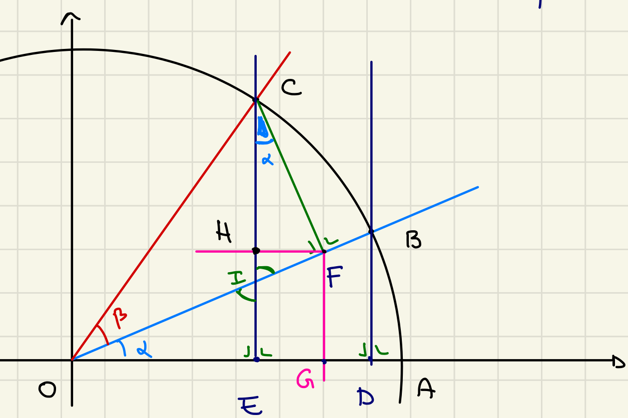
Scopriamo che $\sin(\alpha+\beta) \neq \sin(\alpha) + \sin(\beta)$

Teorema: Valgono le seguenti formule:

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin(\alpha)\cos(\beta) + \sin(\beta)\cos(\alpha)$$
$$\cos(\alpha+\beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) - \sin(\alpha)\sin(\beta)$$

$$\sin(\alpha-\beta) = \sin(\alpha)\cos(\beta) - \sin(\beta)\cos(\alpha)$$
$$\cos(\alpha-\beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) + \sin(\alpha)\sin(\beta)$$

Dim: Faccio la dim solo per angoli α, β t.c. $\alpha+\beta < \frac{\pi}{2}$



$DB = \sin(\alpha)$
$OD = \cos(\alpha)$
$OE = \cos(\alpha+\beta)$
$EC = \sin(\alpha+\beta)$

$CF \perp OB$ $\quad CF = \sin(\beta)$
$OF = \cos(\beta)$

Traccio le parallele agli assi passanti per F, trovando G e H come in figure.

Calcolo EH: $EH \cong FG$ e ora i triangoli $O\hat{F}G$ e $O\hat{B}D$ sono simili, poiché hanno 3 angoli congruenti.
Dunque hanno i lati in proporzione

$OF : OB = FG : BD$

$\cos\beta : 1 = FG : \sin\alpha \rightsquigarrow FG = \sin\alpha \cdot \cos\beta = EH$

$O\hat{I}E = \frac{\pi}{2} - \alpha = C\hat{I}F$ perché opposti al vertice

Di conseguenza $I\hat{C}F = \alpha$.

Adesso $CH = CF \cdot \cos\alpha \rightsquigarrow CH = \sin\beta \cdot \cos\alpha$

$$EC = EH + CH$$

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \sin\beta\cos\alpha$$

Per la formula del coseno si ha

$OE = OG - EG$

$OG \rightsquigarrow O\hat{G}F \sim O\hat{D}B$
$EG \rightsquigarrow HF$ form trigonometriche

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) - \sin(\alpha)\sin(\beta)$$

form sopra

$$\sin(\alpha-\beta) = \sin(\alpha + (-\beta)) \boxed{=}$$

$$= \sin(\alpha)\cos(-\beta) + \sin(-\beta)\cos(\alpha)$$

$$= \sin(\alpha)\cos(\beta) - \sin(\beta)\cos(\alpha)$$

Trovare l'ultima formula per casa

$\cos(\alpha - \beta) = \ldots$

$\square$

Formule di duplicazione: Valgono le seguenti formule

$$\sin(2\alpha) = 2\sin(\alpha)\cos(\alpha)$$

$$\cos(2\alpha) = \cos^2\alpha - \sin^2(\alpha) = 1 - \sin^2\alpha$$

$$= 2\cos^2\alpha - 1$$

Dim: Esercizio.