

Settimana: 17

Argomenti:

Materia: Matematica

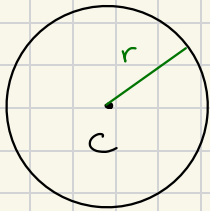
Classe: 3D

Data: 3/02/2026

Circonferenze sul piano cartesiano

Def. Una circonferenza è il luogo geometrico dei punti equidistanti da un punto C detto centro della circonferenza. La distanza tra uno di questi punti e il centro si chiama raggio.

Formule da sapere:



Lunghezza circonferenza: $2\pi r$

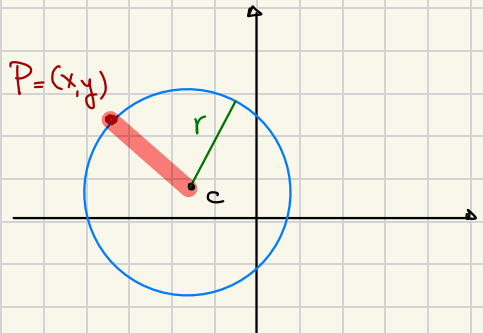
Area del cerchio: πr^2

Imponiamo adesso la def sul piano cartesiano

$C = (\alpha, \beta)$ coordinate centro

r raggio

$P = (x, y)$ è il punto generico della circonferenza



Impongo $\text{dist}(P, C) = r$

$$\sqrt{(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2} = r$$

e lo al quadrato:

$$(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 = r^2$$

→ Formula base (deriva da def) della circonferenza
RICORDARE!!

Vado avanti con i conti
e trovo altre forme

$$x^2 - 2\alpha x + \alpha^2 + y^2 - 2\beta y + \beta^2 - r^2 = 0$$

$$x^2 + y^2 \underbrace{- 2\alpha x}_{a} \underbrace{- 2\beta y}_{b} + \underbrace{\alpha^2 + \beta^2 - r^2}_{c} = 0$$

Assegno dei nomi

L'equazione generica della circonferenza diventa

$$x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$$

← Forma canonica
 $a, b, c \in \mathbb{R}$.

Tip: Per riconoscere che è circonferenza noto che ci sono x^2 e y^2 che hanno stesso coefficiente.

Relazione tra le forme canonica e centro C e raggio r

Abbiamo imposto

$$-2\alpha = a$$

$$-2\beta = b$$

$$\alpha^2 + \beta^2 - r^2 = c$$

Ricavo il centro $C = (\alpha; \beta)$ e r in funzione di a, b, c .

$$\alpha = -\frac{a}{2}$$

$$\beta = -\frac{b}{2}$$

$$\leadsto C = \left(-\frac{a}{2}; -\frac{b}{2}\right)$$

$$r^2 = \alpha^2 + \beta^2 - c = \frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{4} - c \leadsto$$

$$r = \sqrt{\frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{4} - c}$$

Esempi / Eserciziati:

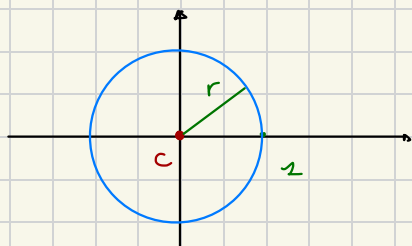
(1) $x^2 + y^2 = 1$ Trovare raggio e centro

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 - 1 &= 0 \\ x^2 + y^2 + ax + by + c &= 0 \end{aligned}$$

$$a=0 \quad b=0 \quad c=-1$$

$$C = \left(-\frac{a}{2}; -\frac{b}{2}\right) = (0; 0)$$

$$r^2 = 0 + 0 - (-1) = 1 \Rightarrow r = 1$$



Def. la circonferenza $x^2 + y^2 = 1$

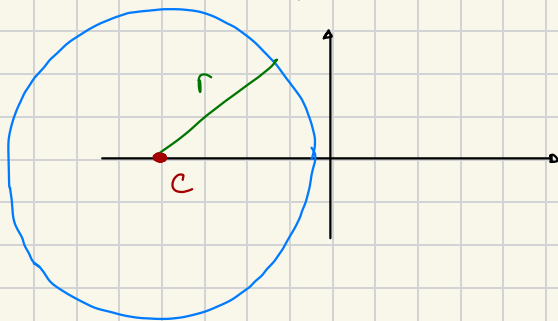
è detta circonferenza goniometrica

Esempio. $x^2 + y^2 + 8x + 2 = 0$ Trova r, C

$$C = (-4; 0)$$

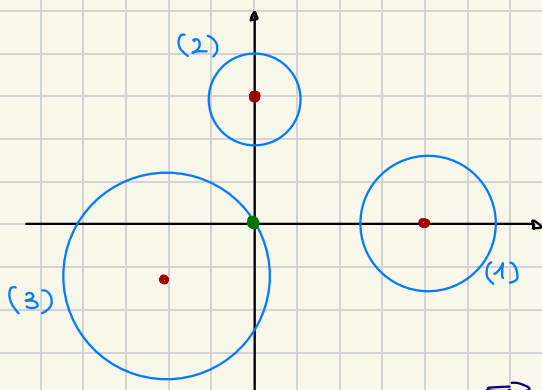
$$r^2 = (-4)^2 + (0)^2 - 2 = 14$$

$$a=8, b=0, c=2$$



Esempio. $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$

- Che condizioni devo imporre su a, b, c in modo che
- (1) la circonferenza abbia centro sull'asse $x \Rightarrow b=0$
 - (2) " " " sull'asse $y \Rightarrow a=0$
 - (3) " " passi per l'origine $\Rightarrow c=0$



$$(1) C = \left(-\frac{a}{2}; -\frac{b}{2}\right)$$

Centro su asse x : $-\frac{b}{2} = 0 \Rightarrow b = 0$

(2) Centro su asse y : $-\frac{a}{2} = 0 \Rightarrow a = 0$

(3) Impongo che $O = (0;0)$ è circconf.
 $\Rightarrow 0^2 + 0^2 + a \cdot 0 + b \cdot 0 + c = 0$
 $\Rightarrow c = 0$

Mini es: Trovare eq. delle circ con raggio 3 e centro $(1;2)$

$$(x-1)^2 + (y-2)^2 = 3^2$$

n. 474 pag 339

$$\begin{cases} y = x^2 - 2x + 4 \\ y = -x^2 + 2 \end{cases} \quad \text{Fascio}$$

$$y - x^2 + 2x - 4 + k(y + x^2 - 2) = 0$$

- Trova k in modo che

(1) Parabola passa per O . Sostituisco $O = (0;0)$ nel fascio e trovo k

$$-4 - 2k = 0 \Rightarrow k = -2$$

$$(2) x_V = \frac{1}{4} \quad V = \left(-\frac{b}{2a}; -\frac{\Delta}{4a}\right)$$

Dovrò mettere $-\frac{b}{2a} = \frac{1}{4}$

Per trovare b , a metto il fascio di parabole in forma "normale"

$$y - x^2 + 2x - 4 + k(y + x^2 - 2) = 0 \quad \leadsto \quad y = ax^2 + bx + c$$

$$\hookrightarrow y(k+1) = x^2(-k+1) + x(-2) + (2k+4)$$

$$y = \left(\frac{1-k}{1+k}\right)x^2 + \left(-\frac{2}{1+k}\right)x + \frac{2k+4}{1+k}$$

$$\left[\frac{2}{1+k} : 2\left(\frac{1-k}{1+k}\right) = \frac{1}{4} \right] \leadsto -\frac{b}{2a} = \frac{1}{4}$$

$$\frac{2}{1+k} \cdot \frac{1+k}{2(1-k)} = \frac{1}{4} \quad \leadsto \quad 1-k = 4 \quad \leadsto \quad \boxed{k = -3}$$

(c) k in modo che la parabola sia tg alla retta $y = -2x + 4$

Interseco e impongo $\Delta = 0$

$$\begin{cases} y = -2x + 4 \\ y = \left(\frac{1-k}{1+k}\right)x^2 + \left(-\frac{2}{1+k}\right)x + \frac{2k+4}{1+k} \end{cases}$$

$$-2x + 4 = \left(\frac{1-k}{1+k}\right)x^2 + \left(-\frac{2}{1+k}\right)x + \frac{2k+4}{1+k}$$

$$\left(\frac{1-k}{1+k}\right)x^2 + \left(-\frac{2}{1+k} + 2\right)x + \frac{2k+4}{1+k} - 4 = 0$$

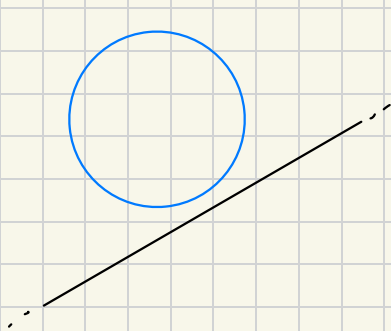
$$(1-k)x^2 + (-\cancel{2} + \cancel{2} + 2k)x + 2k + \cancel{4} - \cancel{4} - 4k = 0$$

$$(1-k)x^2 + 2kx - 2k = 0$$

$$\frac{\Delta}{4} = \left(\frac{b}{2}\right)^2 - ac = k^2 - (-2k)(1-k) = k^2 + 2k - 2k^2 = 0$$

$$2k - k^2 = 0 \rightsquigarrow k(2-k) = 0 \rightsquigarrow \begin{cases} k=0 \\ k=2 \end{cases}$$

Posizioni reciproche fra rette, circonferenze; circonfer. - parabole

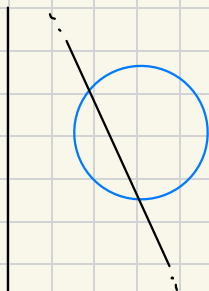


Si dicono **Esterne**

Sistema impossibile

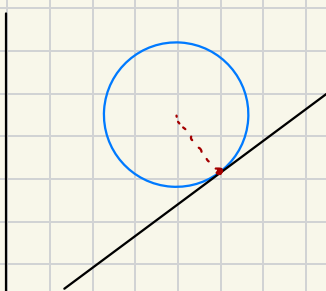
$$\begin{cases} x^2 + y^2 + ax + by + c = 0 \rightsquigarrow 2 \\ ax + by + c = 0 \rightsquigarrow 1 \end{cases}$$

Caso in cui sist. ha 0 sol



Si dicono **Secanti**

Il sistema ha due soluzioni



Si dicono **tangenti**

e il sistema ha esattamente 1 soluzione

Esempio: $C = (1; 0)$

$$r = 1$$

$$(x-1)^2 + (y-0)^2 = 1^2$$

$$\text{retta: } y = 2x + 1$$

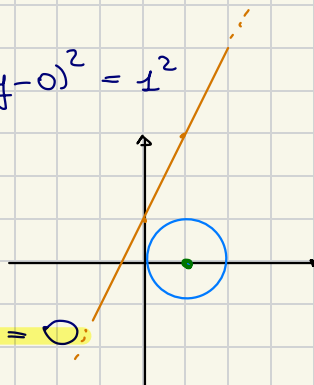
Vedo se sono tg, sec, esterne facendo il sistema

$$\begin{cases} x^2 - 2x + 1 + y^2 = 1 \\ y = 2x + 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 - 2x + (4x^2 + 4x + 1) = 0 \\ y = 2x + 1 \end{cases}$$

$$5x^2 + 2x + 1 = 0$$

$$\Delta = 4 - 20 = -16$$



No soluzioni: esterna

Esercizio: Circ. $x^2 + y^2 - 2x = 0$

Fascio di rette: $y = 2x + k$

Trova k in modo che le rette siano tangenti, esterne o secanti.

Impongo il sistema e impongo condizioni sul Δ .

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 2x = 0 \\ y = 2x + k \end{cases} \quad \begin{cases} x^2 + (4x^2 + 4kx + k^2) - 2x = 0 \\ y = 2x + k \end{cases}$$

$$5x^2 + 2(2k-1)x + k^2 = 0$$

$$\begin{aligned} \text{Tg: } & \Delta = 0 \\ \text{secanti: } & \Delta > 0 \\ \text{esterne: } & \Delta < 0 \end{aligned}$$

Impongo $\Delta \geq 0$ e poi, guardando la soluzione capisco la geometria

$$\begin{aligned} \frac{\Delta}{4} &\geq 0 & (2k-1)^2 - 5k^2 &\geq 0 \\ & & 4k^2 + 1 - 4k - 5k^2 &\geq 0 \\ & & -k^2 - 4k + 1 &\geq 0 \\ & & k^2 + 4k - 1 &\leq 0 \end{aligned}$$

$$\frac{\Delta}{4} = 2^2 + 1 = 5 \quad k_1/k_2 = -2 \pm \sqrt{5}$$

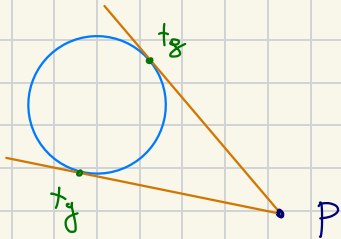
$$-2 - \sqrt{5} \leq k \leq -2 + \sqrt{5}$$

$$\begin{aligned} \text{Secanti} & \text{ se } -2 - \sqrt{5} < k < -2 + \sqrt{5} \\ \text{Tangenti} & \text{ se } k = -2 \pm \sqrt{5} \\ \text{Esterne} & \text{ se } k < -2 - \sqrt{5} \text{ , } k > -2 + \sqrt{5} \end{aligned}$$

Pag 338 n 176

$$x^2 + y^2 - 6x - 4y + 9 = 0 \quad P = (9; 0)$$

Trova rette tg a C circonferenza che passano per P



(1) Fascio di rette per P.

$$(y - 0) = m(x - 9)$$

$$y = mx - 9m \rightarrow$$

$$y = 0$$

$$m = 0$$

$$y = -\frac{3}{4}x + \frac{27}{4} \quad m = -\frac{3}{4}$$

(2) Interseco fascio e circ:
$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 6x - 4y + 9 = 0 \\ y = mx - 9m \end{cases}$$

$$x^2 + m^2x^2 + 81m^2 - 18m^2x - 6x - 4mx + 36m + 9 = 0$$

$$x^2(1+m^2) + x(-18m^2 - 4m - 6) + 81m^2 + 36m + 9 = 0$$

$$x^2(1+m^2) - 2x(9m^2 + 2m + 3) + 81m^2 + 36m + 9 = 0$$

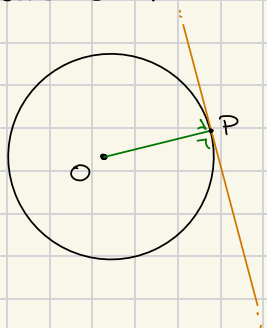
$$\left[\frac{\Delta}{4} = (9m^2 + 2m + 3)^2 - (81m^2 + 36m + 9)(1+m^2) = 0 \right] \text{ Cond. di tangenze}$$

$$81m^4 + 4m^2 + 9 + 36m^3 + 12m + 54m^2 - 81m^2 - 36m - 9 - 81m^4 - 36m^3 - 9m^2 = 0$$

$$-32m^2 - 24m = 0$$

$$8m(4m + 3) = 0 \rightarrow \begin{matrix} m = 0 \\ m = -\frac{3}{4} \end{matrix}$$

Teorema: Data una circonferenza C e una retta tangente alla circonferenza in un punto P , il raggio OP è perpendicolare alla retta



Dim: Per esercizio (fare un conto), ma NON necessaria

Esempi di utilizzo: La condizione di tangenza $\Delta=0$ può essere anche espressa in virtù del teorema sopra come

$$\boxed{\text{dist}(C; \text{retta}) = r}$$

↑
centro

Pag 398 n 177

C circonferenza di raggio 1 e centro $C = (0; 2)$

Rette che passano per $P = (2; 3)$

$$(x-0)^2 + (y-2)^2 = 1^2$$

↑
 x_0 y_0

(1) Fascio di rette per P : $(y-3) = m(x-2)$

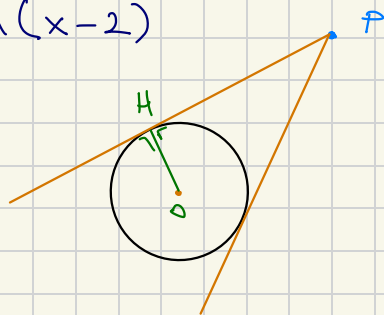
$$\boxed{m \times (-y) - 2m + 3 = 0}$$

↑ ↓ ↓
 a b c

(2) Imposto che OH sia uguale al raggio

$$OH = \text{dist}(O; \text{fascio}) = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} =$$

$$= \frac{|0 - 2 + (-2m + 3)|}{\sqrt{0^2 + (-1)^2}} = 1$$



$$|-2m+1| = 1 \quad \text{La risolvo:}$$

$$(A) \quad -2m+1 = 1 \quad \rightsquigarrow \quad \boxed{m=0}$$

$$(B) \quad -2m+1 = -1 \quad \rightsquigarrow \quad \boxed{m=1}$$

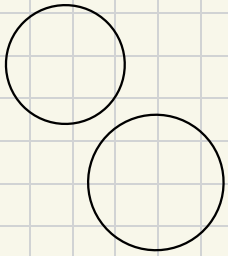
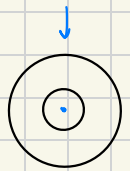
Intersezioni

Circ - Circ

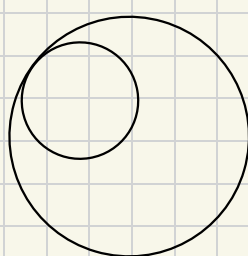
Circ - Parabola

↳ Pos. Reciproche (Fol's correction)

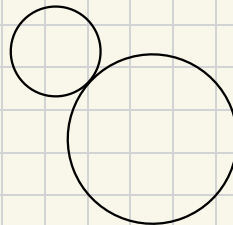
concentriche



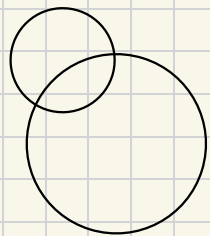
ESTERNE



TANGENTI
INTERAMENTE



TANGENTI
ESTERNAMENTE



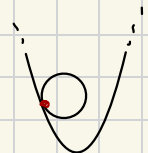
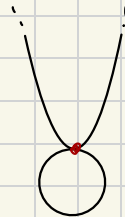
SECANTI

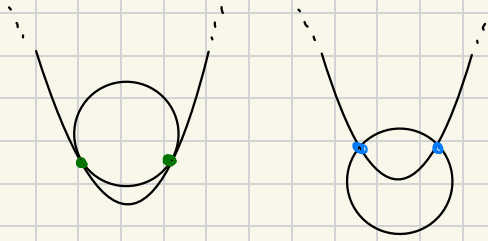
Oss: Si intersecano in al massimo 2 punti



Esterne: 0 pti di intersezione

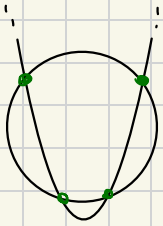
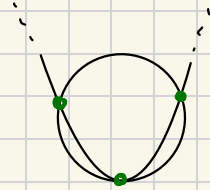
tangenti in 1 pto





Intersezione in 2 punti

Intersezione in 3 pts



Intersezione in 4 pts

Può sempre accadere con raggio fissato
e parabola fissata?