Settimana: 16

Materia: Matematica
Classe: 5C
Data: 3/02/26

Argomenti

Teorema: Sia $f: (a;b) \longrightarrow \mathbb{R}$ una funzione, $x_0 \in (a;b)$
f è derivabile in x_0, allora f è continua in x_0

$$\boxed{\text{Derivabile} \implies \text{Continua}}$$

Dim: f è derivabile in x_0 se esiste $\displaystyle\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ finito

È vero

f è continua in x_0 se $\displaystyle\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$ ← Voglio dimostrarlo

$$\boxed{f(x_0+h) = f(x_0) + \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \cdot h}$$

È solo una manip. furba per far comparire la derivata

Faccio il limite dell'uguaglianza sopra per $h \to 0$

$$\lim_{h\to 0} f(x_0+h) = \lim_{h\to 0} \left[\underbrace{f(x_0)}_{f(x_0)} + \underbrace{\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}}_{\text{numero}} \cdot \underbrace{h}_{0} \right]$$

$$\lim_{h\to 0} f(x_0+h) = f(x_0)$$

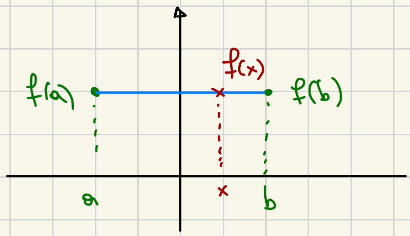
Sost: $x = x_0 + h$ Per scrivere il lim di sx in modo diverso
$h \to 0$ $\quad x \to x_0$

$$\boxed{\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)}$$ ← E questa è la continuità.

□

Conseguenze del Teorema di Lagrange

Prop 1: Sia $f:[a;b] \longrightarrow \mathbb{R}$ continua, derivabile in $(a;b)$ e tale che $f'(x)=0 \quad \forall x \in (a;b)$.
Allora la funzione f è costante in tutto $[a;b]$



Intuitivamente: la retta tangente è sempre orizzontale $\Rightarrow$ la funzione è una retta orizzontale $\Rightarrow$ la funzione è costante

Dim: Devo dimostrare che $\forall x \in [a;b]$ $f(x)$ fa sempre lo stesso num.
Si utilizza il teo di Lagrange:
Restringo la funzione f da $f:[a;x] \longrightarrow \mathbb{R}$
Applico il Teo di Lagrange: $\exists c \in (a;x)$ t.c.

$$f'(c) = \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

Ma la derivata $f'(c)=0 \Rightarrow f(x)=f(a)$
Dato che posso fare questo ragionamento $\forall x \in (a;b)$ la funzione è costante e vale ovunque $f(a)$.

$\square$

Esercizio (non trovo il num sul libro):

Dimostrare che la funzione f è costante e calcolare tale costante

$$f:(0;+\infty) \longrightarrow \mathbb{R} \qquad f(x) = \operatorname{arctg}(x) + \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{x}\right)$$

$x^{-1\,\prime} = -1 \cdot x^{-2} = -\frac{1}{x^2}$

Calcolo la derivata e vedo se fa 0:

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{1+\left(\frac{1}{x}\right)^2} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right)$$

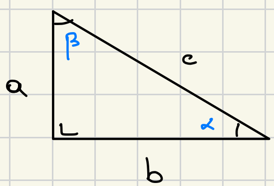
$$\frac{1}{1+\frac{1}{x^2}} = \frac{1}{\frac{x^2+1}{x^2}}$$

$$= \frac{1}{1+x^2} + \boxed{\frac{\cancel{x^2}}{1+x^2}} \left(-\frac{1}{\cancel{x^2}}\right) = 0$$

Dato che $f'(x) = 0$ la funzione è costante.
Per calcolarla basta mettere al posto della x un numero e fare il conto

$$f(1) = \text{arctg}(1) + \text{arctg}\left(\frac{1}{1}\right) = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$$

Altro modo:



$$\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$$

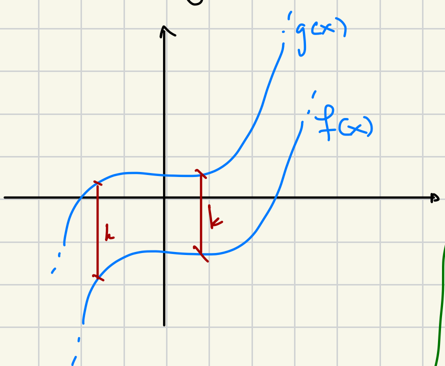
$$\text{tg}\,\alpha = \frac{a}{b} \qquad \text{tg}\,\beta = \frac{b}{a} \qquad \frac{a}{b} = x \quad \frac{b}{a} = \frac{1}{x}$$

$$\Updownarrow \qquad\qquad \Updownarrow$$

$$\alpha = \text{arctg}\, x \qquad \beta = \text{arctg}\,\frac{1}{x}$$

Prop 2: Siano $f, g : [a;b] \longrightarrow \mathbb{R}$ continue e derivabili in $(a;b)$.
Supponiamo che $f'(x) = g'(x)$ ovunque

Allora le due funzioni differiscono per una costante. In formule
$f(x) - g(x) = k$



Dim: Definisco la funzione

$$h(x) = f(x) - g(x)$$

$$h'(x) = f'(x) - g'(x) = 0$$

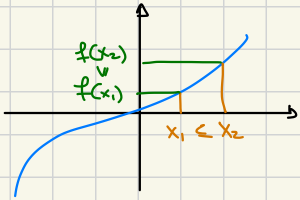
Per la prop 1, la funzione $h(x)$ è costante, cioè $h(x) = k$

$\Rightarrow$ Sostituendo sopra

$$f(x) - g(x) = k$$

□

Def: Sia $f:(a;b)\longrightarrow\mathbb{R}$ funzione. Diremo che f è crescente in $(a;b)$ se $\forall x_1, x_2$ vale che:

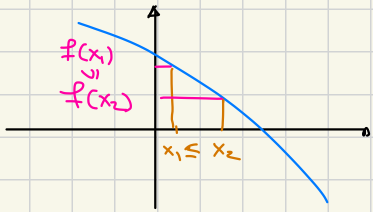


$$\text{Se } \underbrace{x_1 \le x_2}_{\text{Verso dx}} \Longrightarrow \underbrace{f(x_1) \le f(x_2)}_{\text{cresco}}$$

Diremo che è strettamente crescente se vale la disuguaglianza stretta

Diremo che f è Decrescente se $\forall x_1, x_2$ vale che

$$\underbrace{x_1 \le x_2}_{\text{Verso dx}} \Longrightarrow \underbrace{f(x_1) \ge f(x_2)}_{\text{decresco}}$$



Diremo strettamente decrescente se vale la disuguaglianza stretta

Se una funzione $f:(a,b)\longrightarrow\mathbb{R}$ verifica una delle quattro diciture si dice monotòna

Prop 3: Data $f:[a;b]\longrightarrow\mathbb{R}$ continua, derivabile in $(a;b)$

(1.a) Se $f'(x)>0$ $\forall x\in(a;b)$, allora $f(x)$ è strettamente crescente

(1.b) Se $f'(x)<0$ $\forall x\in(a;b)$, allora $f(x)$ è strettamente decrescente

→ Esercizio

(2.a) Se $f(x)$ è crescente, allora $f'(x)\ge 0$ $\forall x\in(a;b)$

(2.b) Se $f(x)$ è decrescente, allora $f'(x)\le 0$ $\forall x\in(a;b)$

→ Lemma 3 rapporti

Dim 1.a: Dobbiamo dimostrare che se $\overbrace{x_1 < x_2}^{\text{Hp.}} \Longrightarrow f(x_1) < f(x_2)$

Per il teorema di Lagrange $\exists c\in(x_1,x_2)$ t.c. $f'(c) = \dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$

Riscrivendolo ho $\underbrace{(x_2-x_1)}_{\text{Positivo}} \cdot \underbrace{f'(c)}_{\text{Positive per Hipotesi}} = f(x_2) - f(x_1)$

$$\Rightarrow f(x_2) - f(x_1) > 0 \Rightarrow f(x_2) > f(x_1)$$

□

Es 197 pag 1721

$f(x) = x^3 - 3x^2$

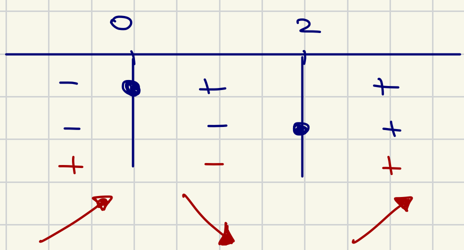
1) Dom $f = \mathbb{R}$
2) $x=0 \quad f(x)=0 \quad P=(0;0)$
   $y=0 \quad x^2(x-3) \quad A=(3;0)$
3) Segno. $x^2(x-3) \geq 0 \rightsquigarrow x \geq 3$
4) $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty \qquad \lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$

(5) Si calcola $f'(x)$ e si pone $f'(x) \geq 0$. Questo ci dirà se la funzione o decresce

$f'(x) = 3x^2 - 6x$

$f'(x) \geq 0 \qquad 3x(x-2) \geq 0$ e faccio graf segni

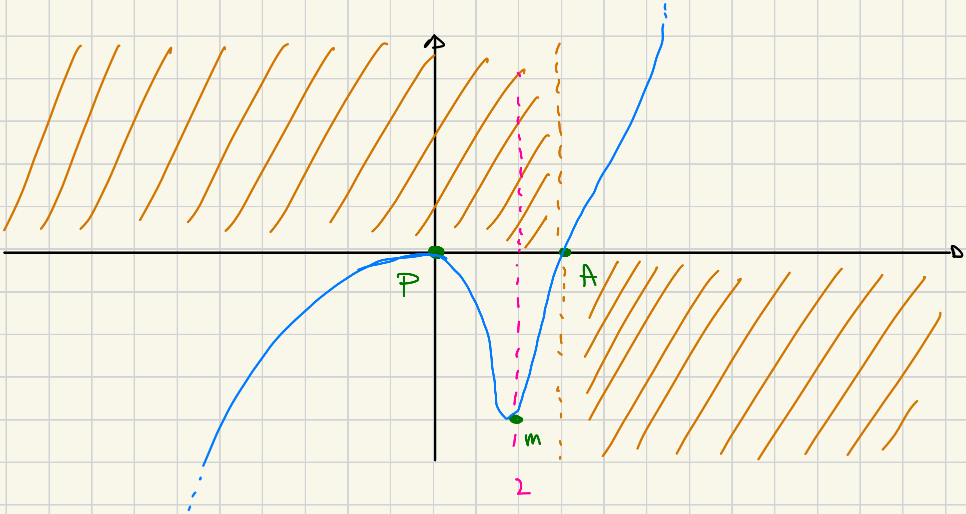
$x \geq 0 \quad , \quad x \geq 2$



Calcolo $f(2)$ che è il punto più basso

$f(2) = 8-12 = -4$

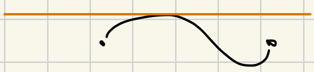
$m = (2;-4)$



Teorema di Cauchy

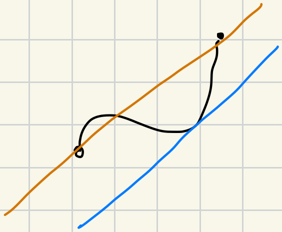
Siano $f, g: [a;b] \longrightarrow \mathbb{R}$ tali che

(1) f, g continue in $[a;b]$
(2) f, g derivabili in $(a;b)$
(3) $g'(x) \neq 0 \quad \forall x \in (a;b)$



allora esiste $c \in (a;b)$ in cui

$$\boxed{\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}}$$



Oss: Il rapporto tra come crescono le funzioni (parte di sx) può essere identificato dal rapporto delle derivate in un punto

Teorema di De L'Hospital

Date $f, g : [a;b] \longrightarrow \mathbb{R}$; $x_0 \in (a;b)$ Se valgono:

(1) f, g continue in x_0 e $f(x_0) = g(x_0) = 0$ (oppure $\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} g(x) = \infty$)

(2) f, g sono derivabili in $(a;b)$ eccetto in al più x_0

(3) $g'(x) \neq 0 \quad \forall x \in (a;b)$

(4) Esiste il limite $\lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$

Allora: $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ esiste e vale $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$

Esempio:

(1) $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} \overset{H}{=} 1$

$\lim_{x \to 0} \frac{\cos x}{1} = 1$

(2) $\lim_{x \to 0} \frac{x - \sin x}{x^3} = \frac{1}{6}$

smooth

H1 $\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{3x^2} = \frac{1}{6}$

H2 $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{6x} = \frac{1}{6}$

Pag 1734 n 435

$$\lim_{x\to+\infty} x^2 \cdot e^{-2x+1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{e^{2x-1}} = 0$$

(H) $$\lim_{x\to+\infty} \frac{2x}{e^{2x-1}\,2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{e^{2x-1}} = 0$$

(H) $$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{e^{2x-1}\cdot 2} = 0$$

Domanda Sera: $$f(x) = \frac{x^2 \cdot e^x}{\ln(x)}$$

$$f'(x) = \frac{(x^2 \cdot e^x)' \cdot \ln(x) - x^2 e^x (\ln(x))'}{[\ln(x)]^2}$$

438 $$\lim_{x\to 0^+} (x^2)^x = \lim_{x\to 0^+} x^{2x} = \lim_{x\to 0^+} e^{2x \ln(x)}$$

$$= \lim_{x\to 0^+} e^{\frac{\ln(x)}{\frac{1}{2x}}} = 1$$

H: $$\lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right)} = \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x}\cdot\left(-2x^2\right) = \lim_{x\to 0^+} (-2x) = 0$$

441 $$\lim_{x\to 3^+} (x-3)\ln\left(e^x - e^3\right) = \lim_{x\to 3^+} \frac{\ln(e^x - e^3)}{\frac{1}{x-3}} = 0$$

H: $$\lim_{x\to 3^+} \left(\frac{1}{e^x - e^3}\cdot e^x\right) \Big/ \left(-\frac{1}{(x-3)^2}\right) =$$

$$\lim_{x \to 3^+} \frac{e^x}{e^x - e^3} \left[-(x-3)^2\right] = 0$$ ✓

$$H: \lim_{x \to 3^+} \frac{e^x(-(x-3))^2 + e^x(-2(x-3))}{e^x} = 0$$

$\underline{464}$: $$\lim_{x \to -\infty} e^{2x}(2-x)^{\frac{1}{2}} = \lim_{x \to -\infty} \frac{(2-x)^{\frac{1}{2}}}{e^{-2x}} = 0$$

$$H: \lim_{x \to -\infty} \frac{\frac{1}{2}(2-x)^{-\frac{1}{2}}}{e^{-2x} \cdot (-2)} = \lim_{x \to -\infty} \frac{e^{2x}}{2(2-x)^{1/2}(-2)} = 0$$