

Settimana: 12

Materia: Matematica

Classe: 5A

Data: 1/12/25

Pong 1686 n 117

$g(x)$

$$g(0) = 0$$

$$g'(0) = 0$$

$$g''(0) = 0$$

$$g'''(0) = 1$$

$$g^{(4)}(0) = 1$$

$$g^{(5)}(0) = 1$$

Bonies Chiara

Hip:

$$g(x) = \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \frac{x^5}{120}$$

$$g'(x) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{4x^3}{24} + \frac{5}{120}x^4$$

$$g''(x) = x + \frac{12x^2}{24} + \frac{20}{20}x^3$$

$$g'''(x) = 1 + \frac{24x}{24} + \frac{60}{120}x^2$$

$$g^{(4)}(x) = 1 + x$$

$$g^{(5)}(x) = 1$$

n 121

$$g(x) = f(x) - f(2x)$$

$$g'(1) = 5$$

$$g'(2) = 4$$

Definisco $h(x) = f(x) - f(4x)$ Quanto fa $h'(1) = ?$

$$g'(x) = f'(x) - f'(2x) \cdot 2$$

$$h'(x) = f'(x) - f'(4x) \cdot 4$$

$$h'(1) = \boxed{f'(1)} - \boxed{4f'(4)}$$

$$= 5 + 2f'(2) - 2(f'(2) - 4)$$

$$= 5 + 2f'(2) - 2f'(2) + 14 = 19$$

$$5 = f'(1) - 2f'(2)$$

$$4 = f'(2) - 2f'(4)$$

$$\boxed{f'(1)} = 5 + 2f'(2)$$

$$\boxed{2f'(4)} = f'(2) - 4$$

n118

$$y = -4x + k$$

g

$$f(x) = x^3 - 4x^2 + 5$$

Trova k t.c. la retta è tangente alle curve.

$$f'(x) = 3x^2 - 8x$$

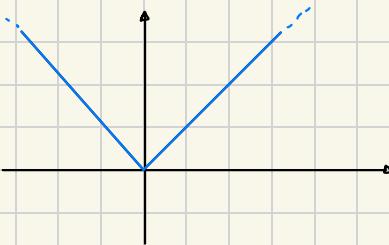
Derivata = coeff angolare retta

$$\boxed{f'(x) = -4}$$

$$-4 = 3x^2 - 8x$$

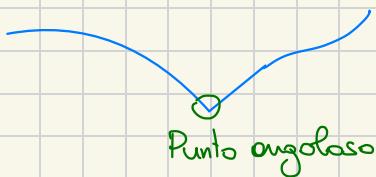
$$3x^2 - 8x + 4 = 0$$

Reminder: A volte le funzioni NON sono derivabili



$$f(x) = |x| \quad \text{Non è derivabile in } x=0$$

(1) Punto Angoloso (a)

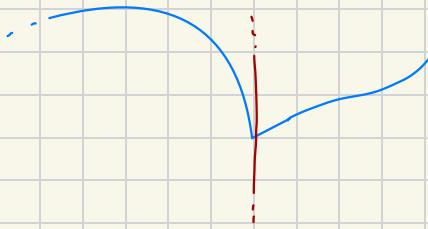


$$f'_-(x_0) = \ell$$

$$m \neq \ell$$

$$f'_+(x_0) = m$$

(b) Punto angoloso



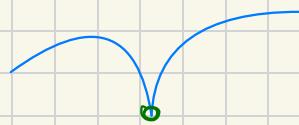
$$f'_-(x_0) = \pm \infty$$

$$f'_+(x_0) = \ell$$

2) Cuside (Cuore)

$$f'_-(x_0) = -\infty$$

$$f'_+(x_0) = +\infty$$



3) Flesso a tangente verticale

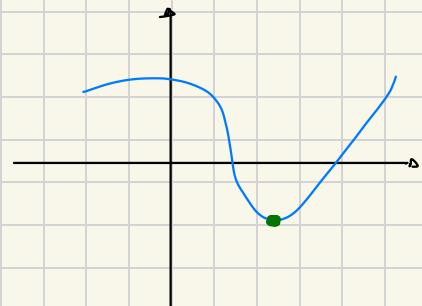
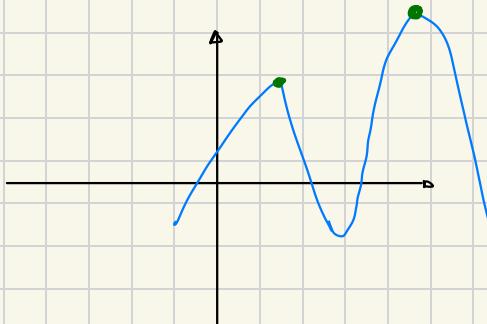


$$f'_-(x_0) = +\infty$$

$$f'_+(x_0) = +\infty$$

Def. Dato $f: (a; b) \rightarrow \mathbb{R}$, x_0 è detto punto di **massimo locale** se $\exists I(x_0) \subseteq (a; b)$ t.c. $f(x_0) \geq f(c)$ $\forall c \in I(x_0)$.

x_0 è detto di **minimo locale** se $\exists I(x_0) \subseteq (a; b)$ t.c. $f(x_0) \leq f(c)$ $\forall c \in I(x_0)$



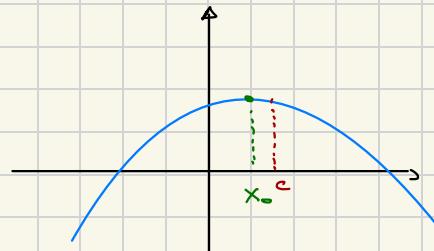
Teorema Luce Bruni (o teorema Fermat)

Sia $f: (a; b) \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione derivabile e sia x_0 un massimo locale. Allora $f'(x_0) = 0$

Dim. So che $\forall c \in I(x_0)$ $f(x_0) \geq f(c)$. Devo dimostrare che la derivata in x_0 è 0.

Posso scrivere $c = x_0 + h$

$$f(x_0) \geq f(c) = f(x_0 + h)$$



$$f(x_0) \geq \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} \cdot h + f(x_0)$$

Suppongo per assurdo che $f'(x_0) > 0$. Allora, per il teo di permanenze del segno delle f_g

$$g(h) = \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$$

$g(h) > 0$ in un intorno di 0. Ma allora ho:

$$f(x_0) \geq g(h) \cdot h + f(x_0)$$

$$g(h) \cdot h \leq 0$$

Ma questo è assurdo in quanto $g(h) > 0$ e $h > 0$

Esercizio: Sistemare il caso $f'(x_0) < 0$.

Conclusioni: Dato che $\begin{cases} f'(x_0) > 0 \\ f'(x_0) < 0 \end{cases} \begin{cases} \text{Danno} \\ \text{Assurdi} \end{cases} \Rightarrow f'(x_0) = 0$

□

Pag 1708 n 20

$$f(x) = -\sqrt[3]{x^2} = -x^{\frac{2}{3}}$$

$$(1) \text{ Faccio la derivata classica: } f'(x) = -\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}} = -\frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$$

(2) Trovo i problemi $x=0$

(3) Devo vedere "a mano" con la definizione la derivata in $x=0$

(4) fare derivate sx e dx in 0 e vedere cosa accade

$$f'_-(0) = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} =$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{-\sqrt[3]{h^2}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} -\frac{1}{h^{1/3}} = +\infty$$

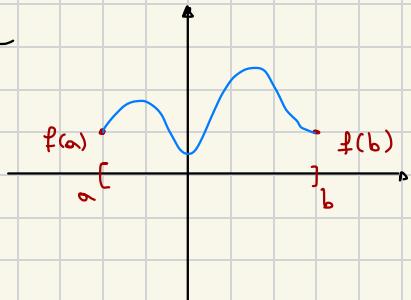
$$f'_+(0) = \lim_{h \rightarrow 0^+} -\frac{1}{h^{1/3}} = -\infty$$

\Rightarrow È cuspidale

Teorema di Rolle:

Sia $f: [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione

- 1) f è continua in $[a; b]$
- 2) f è derivabile in $(a; b)$
- 3) $f(a) = f(b)$

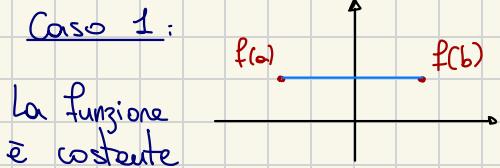


$\Rightarrow \exists c \in (a; b) \text{ t.c. } f'(c) = 0$

Oss: I punti con derivata 0 sono i massimi o i minimi

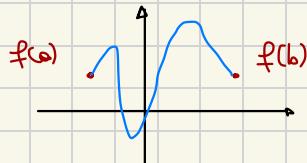
Dim.

Caso 1:



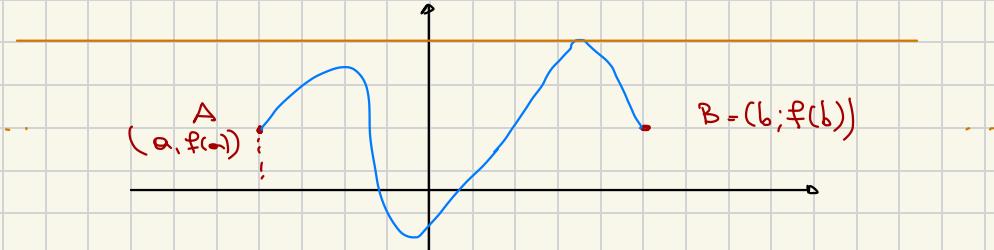
Dunque la derivata in ogni punto è 0 e ho vinto

Caso 2:
La funzione NON è costante



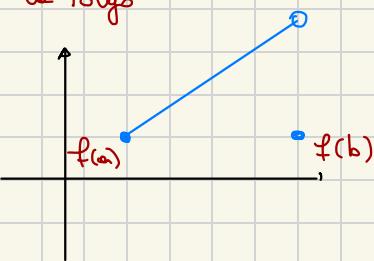
Per Teorema Weierstrass ammette max e min.
Per Teorema di Fermat, nei punti di max e min la derivata è 0

Idea geometrica. Il teorema di Rolle può essere pensato così:
 Faccio le rette che congiunge punto iniziale e finale e poi
 DEVE esistere una parallela a quelle rette tangente alla
 curva



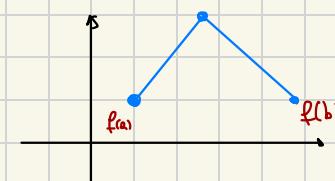
Controesempi al teorema di Rolle

1) f continua in $[a; b]$
le tolgo



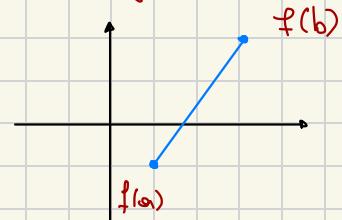
→ Non c'è ptb in
 cui la derivata è 0

2) f derivabile in
 (a, b)
le tolgo



→ Non c'è ptb in
 cui la derivata è 0

3) $f(a) = f(b)$
le tolgo



→ Non c'è ptb in
 cui la derivata è 0

Teorema di Lagrange (o teorema del valor medio)

Sia $f: [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ funzione t.c.

- 1) f continua in $[a; b]$
- 2) f derivabile in $(a; b)$

Allora esiste $c \in (a; b)$ t.c. $f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$

Geometricamente: è esattamente la stessa interpretazione di prima dove però la retta adesso può essere in qualsiasi modo.

Dim: Segue dal Teorema di Rolle in questo senso:

Definisco la funzione

$$g(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} x$$

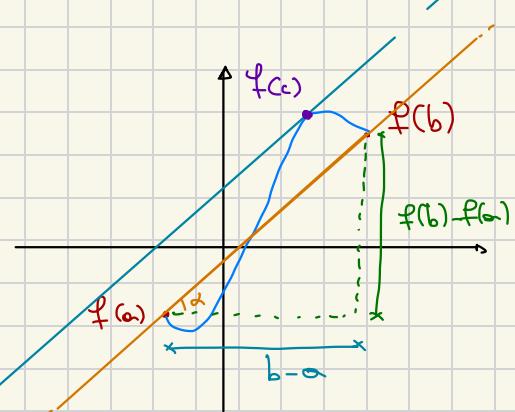
- 1) $g(x)$ è continua perché f è continua in $[a; b]$
- 2) $g(x)$ è derivabile poiché f è derivabile in $(a; b)$
- 3)

$$\begin{aligned} g(a) &= f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \cdot a = \\ &= \left[b f(a) - a f(a) - a f(b) + a f(a) \right] \cdot \frac{1}{b - a} \\ &= \left[b f(a) - a f(b) \right] \cdot \frac{1}{b - a} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g(b) &= f(b) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \cdot b \\ &= \left[b f(b) - a f(b) - b f(b) + b f(a) \right] \cdot \frac{1}{b - a} \\ &= \left[b f(a) - a f(b) \right] \cdot \frac{1}{b - a} \end{aligned}$$

Dato che $g(a) = g(b)$ vale Rolle, dunque $\exists c \in (a; b)$ t.c.

$$g'(c) = 0 \Rightarrow f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0 \Rightarrow f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$



□

Esercizio: Fare i controesempi al teorema di Lagrange

Conseguenze del teorema di Lagrange

Corollario 1: Sia $f: [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ continua e derivabile in $(a; b)$ e tale che $f'(x) = 0 \quad \forall x \in (a; b)$. Allora f è una funzione costante

Dim: Voglio che $f(x)$ sia sempre lo stesso valore. Considero la funzione definita in $[a; x]$, cioè restringo l'intervallo. Per Lagrange $\exists c \in [a; x]$ t.c.

$$\frac{f'(c)}{= 0} = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

per hip

$$\Rightarrow f(x) = f(a)$$

Dunque $f(x) = f(a) \quad \forall x \in [a; b]$ cioè f è costante

Coroll. 2: Siano $f, g: [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ continue, derivabili in $(a; b)$ tali che

$$f'(x) = g'(x) \quad \forall x \in [a; b]$$

$\Rightarrow f(x) - g(x)$ è costante

Dim: Per esercizio (Usare il corollario precedente)

Coroll. 3: Dato $f: [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ derivabile in $(a; b)$ vale che

(1) Se $f'(x) > 0 \quad \forall x \in (a; b) \Rightarrow f(x)$ è crescente

(2) Se $f'(x) < 0 \quad \forall x \in (a; b) \Rightarrow f(x)$ è decrescente

Dim: (1) f è crescente in $(a; b)$ se $\forall x_1, x_2 \in (a; b) \quad x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$

Usiamo il teorema di Lagrange per la restrizione di f all'intervallo $[x_1, x_2]$ con $x_1 < x_2$. Dunque $\exists c \in (x_1, x_2)$ t.c.

$$f'(c) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

cioè $\underbrace{(x_2 - x_1)}_{>0} \underbrace{f'(c)}_{>0} = f(x_2) - f(x_1)$
 Per Hip Derivata positiva

$$\Rightarrow f(x_2) - f(x_1) > 0 \rightarrow f(x_2) > f(x_1)$$

(2) Per Esercizio

→ Conseguenze del Lemme dei 3 rapporti

D

Teorema: Vale il viceversa delle conseguenze 3:

- (1) Se f è una funzione crescente in $(a; b)$, allora $f'(x) \geq 0 \quad \forall x \in (a; b)$
- (2) Stesso enunciato per f_g decrescente.

Dim: Non richiesto.

Pag 1737 n 36

$$f(x) = \ln \sqrt{3x+x^2} \quad \text{Fare studio di } f_g.$$

$$(1) \underline{\text{Dominio}}: 3x+x^2 > 0$$

$$x(x+3) > 0 \quad \Rightarrow$$

$$x < -3 \quad \vee \quad x > 0$$

$$f: \text{Dom}(f) \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(2) \underline{\text{Assi}}: x=0 \quad \text{IMP}$$

$$y=0 \quad \ln \sqrt{3x+x^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad \sqrt{3x+x^2} = 1 \quad x^2+3x=1$$

$$x^2+3x-1=0$$

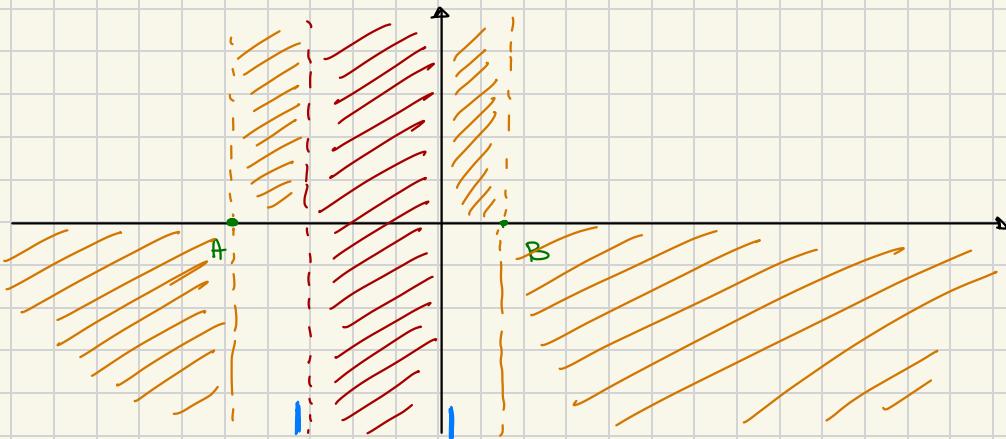
$$x_1/x_2 = \frac{-3 \pm \sqrt{13}}{2} \quad \left\langle \begin{array}{l} -\frac{3+\sqrt{13}}{2} \\ -\frac{3-\sqrt{13}}{2} \end{array} \right.$$

$$B = \left(\frac{-3+\sqrt{13}}{2}; 0 \right)$$

$$A = \left(\frac{-3-\sqrt{13}}{2}; 0 \right)$$

$$(3) \text{ Segno: } \ln \sqrt{3x+x^2} \geq 0 \quad \frac{1}{2} \ln (3x+x^2) \geq 0$$

$$3x+x^2 \geq 1 \quad \Leftrightarrow \quad x < \frac{-3-\sqrt{13}}{2} \quad \vee \quad x > \frac{-3+\sqrt{13}}{2}$$



$$(4) \lim_{x \rightarrow -3} \ln \sqrt{3x+x^2} = -\infty \quad \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \ln \sqrt{3x+x^2} = +\infty \quad \text{la funzione NON ha poi asint. obliqui (Da verificare)}$$

(5) DERIVATA PRIMA: Si calcola la derivata prima $f'(x)$ e

la si pone ≥ 0

► Quando la derivata è esattamente 0, quello sarà un punto stazionario. È una Def.. Potrebbe poi essere

1) Minimo

2) Massimo

3) Flesso (spiego più avanti cosa è)

► Le parti in cui $f'(x) > 0$ la funzione è crescente