Settimana: 8

Materia: Matematica
Classe: 5A
Data: / /25

a) $$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1+x}{1+2x}\right)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0} e^{\frac{1}{x}\ln\left(\frac{1+x}{1+2x}\right)} =$$

$$= \lim_{x\to 0} e^{\left[\underbrace{\frac{\ln(1+x)}{x}}_{\to 1} - \underbrace{\frac{\ln(1+2x)}{2x}}_{\to 1}\cdot 2\right]} = e^{1-2} = e^{-1} = \frac{1}{e}$$

c) $$\lim_{x\to 2}\frac{(x+2)(x^3-2x-4)}{x^3-8} = \lim_{x\to 2}\frac{\overset{4}{(x+2)}\cancel{(x-2)}\overset{8}{(x^2+x+2)}}{\underset{12\ 3}{(x^2+2x+4)}\cancel{(x-2)}} = \frac{8}{3}$$

	1	0	-2	-4
2		2	4	4
	1	2	2	0

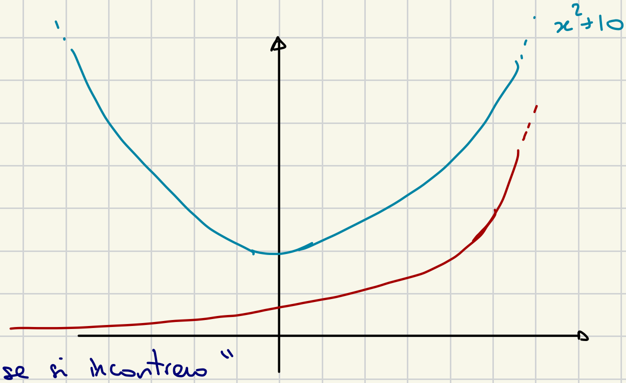
	1	0	0	-8
2		2	4	8
	1	2	4	0

Derivate (Finalmente)

Problema introduttivo

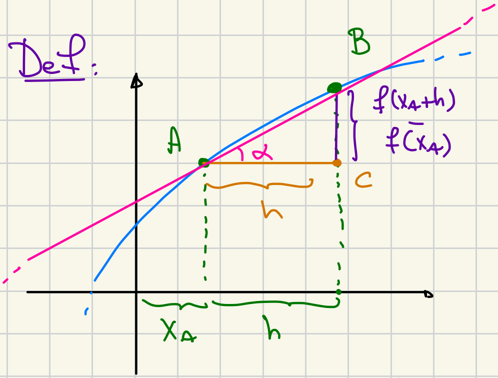
$f(x) = x^2 + 10$
$g(x) = e^x$

"Se so dire chi tra le due funzioni cresce più velocemente, so dire se si incontrano"



La derivata di una funzione in un punto è "in un certo senso" la misura della velocità con cui cresce una funzione.

Def:



Sia $f: [a;b] \longrightarrow \mathbb{R}$ una funzione
Siano $A \in Graf(f)$, $A = (x_A, f(x_A))$

e $B \in Graf(f)$, $B = (x_A+h; f(x_A+h))$

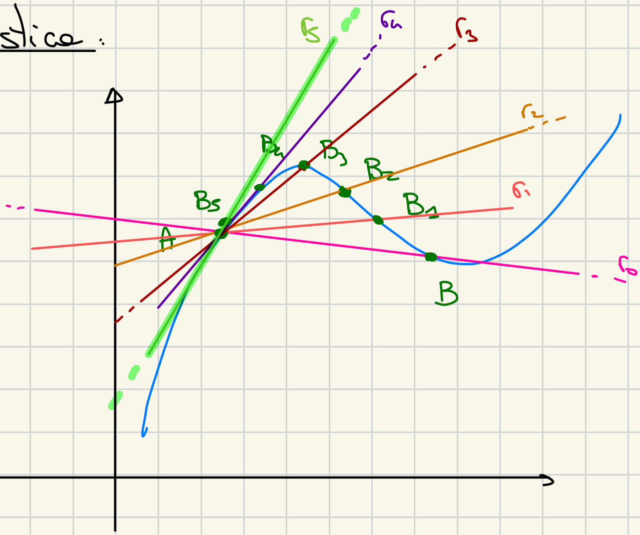
Definisco il rapporto incrementale di f nel punto x_A come

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_A+h) - f(x_A)}{(x_A+h) - x_A} = \frac{f(x_A+h) - f(x_A)}{h}$$

È il rapporto tra i cateti del triangolo ABC e vale

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_A+h) - f(x_A)}{h} = tg\,\alpha$$

Euristica:



Goal: Far andare il punto B fino al punto A in modo che il rapporto incrementale piano piano mi identifichi la retta tangente alla curva in A

Def: Sia $f:[a;b] \longrightarrow \mathbb{R}$; sia $x_0 \in (a;b)$, definiamo la derivata di f in x_0 come il limite

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

(Ovviamente se esiste finito)

Per indicare la derivata scriveremo:

$f'(x_0)$ / $\dfrac{df}{dx}(x_0)$ / $\underbrace{\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0)}$

f primo nel punto x_0

de f su de x in x_0

de f su de x in x_0. Per funzioni di più var.

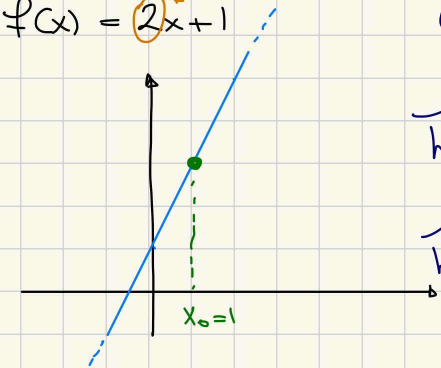
Oss 1) Graficamente parlando $(h \to 0)$ = (il punto B collassa su A)

2) Per quanto detto, la derivata in un punto è il valore della tangente dell'angolo della retta tangente al grafico in quel punto.

↳ Per le cose viste in III la derivata in un punto è quindi il coeff. angolare della retta tangente al grafico in quel punto.

Esempi: (1)

$f(x) = 2x+1$



Calcolo la derivata in $x_0=1$

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(1+h)-f(1)}{h} =$$

$$\lim_{h \to 0} \frac{[2(1+h)+1]-3}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{2\cancel{h}}{\cancel{h}} = 2$$

è proprio il coeff. angolare perché la tg coincide con la retta

(2) $f(x) = ax^2+bx+c$ ⇝ la tg nel punto x è $2\overset{2}{a}\overset{2}{x}+\overset{0}{b}$

<u>Caso particolare</u> : $f(x) = 2x^2+3$ Calcolo la derivata in $x_0 = 2$

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(2+h)-f(2)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{[2(2+h)^2+3]-[2(2)^2+3]}{h}$$

Coeff. angolare di retta tg a $f(x)$ in $x_0=2$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{[8+2h^2+8h+3]-11}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{2h^2+8h}{h} = \lim_{h \to 0} (2h+8) = 8$$

$$\boxed{f'(2) = 8}$$