Settimana: 8

Materia: Matematica
Classe: 5A
Data: / /25

a) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1+x}{1+2x}\right)^{\frac{1}{x}} = \lim\limits_{x\to 0} e^{\frac{1}{x}\ln\left(\frac{1+x}{1+2x}\right)} =$

$= \lim\limits_{x\to 0} e^{\left[\frac{\ln(1+x)}{x} - \frac{\ln(1+2x)}{2x}\cdot 2\right]}$ ($\frac{\ln(1+x)}{x} \to 1$, $\frac{\ln(1+2x)}{2x} \to 1$) $= e^{1-2} = e^{-1} = \frac{1}{e}$

c) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{(x+2)(x^3-2x-4)}{x^3-8} = \lim\limits_{x\to 2}\frac{\overset{4}{(x+2)}\,\cancel{(x-2)}\,\overset{8}{(x^2+x+2)}}{\underset{12 \; 3}{(x^2+2x+4)}\,\cancel{(x-2)}} = \frac{8}{3}$

	1	0	-2	-4
2		2	4	4
	1	2	2	0

	1	0	0	-8
2		2	4	8
	1	2	4	0

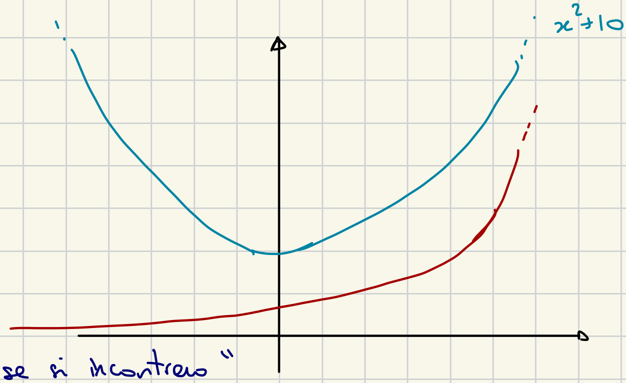
Derivate (Finalmente)

Problema introduttivo

$f(x) = x^2 + 10$

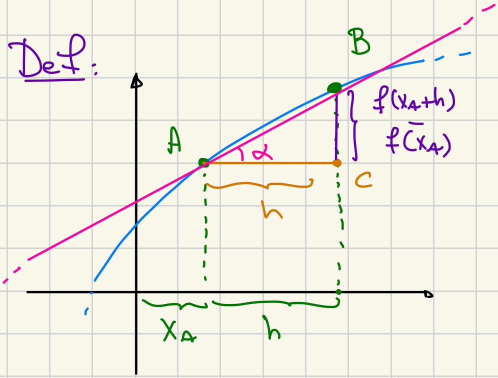
$g(x) = e^x$

"Se so dire chi tra le due funzioni cresce più velocemente, so dire se si incontrano"



La derivata di una funzione in un punto è "in un certo senso" la misura della velocità con cui cresce una funzione.

Def:



Sia $f: [a;b] \longrightarrow \mathbb{R}$ una funzione

Siano $A \in Graf(f)$, $A = (x_A, f(x_A))$

e $B \in Graf(f)$, $B = (x_A + h; f(x_A+h))$

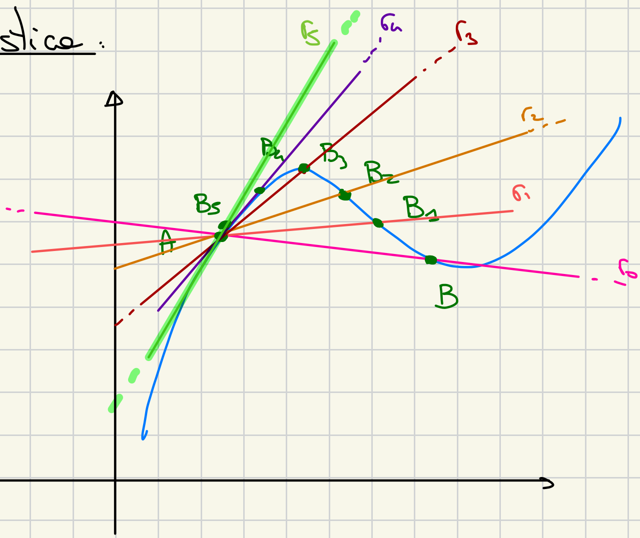
Definisco il rapporto incrementale di f nel punto x_A come

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_A+h) - f(x_A)}{(x_A+h) - x_A} = \frac{f(x_A+h) - f(x_A)}{h}$$

È il rapporto tra i cateti del triangolo ABC e vale

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_A+h) - f(x_A)}{h} = tg\,\alpha$$

Euristica:



Goal: Far andare il punto B fino al punto A in modo che il rapporto incrementale piano piano mi identifichi la retta tangente alla curva in A

Def: Sia $f: [a;b] \to \mathbb{R}$; sia $x_0 \in (a;b)$, definiamo la derivata di f in x_0 come il limite

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$$

(Ovviamente se esiste finito)

Per indicare la derivata scriveremo:

$$f'(x_0) \quad / \quad \frac{df}{dx}(x_0) \quad / \quad \underbrace{\frac{\partial f}{\partial x}(x_0)}$$

f primo nel punto x_0

de f su de x in x_0

de f su de x in x_0. Per funzioni di più var.

$\boxed{Df(x_0)}$ ← Simbolo del libro

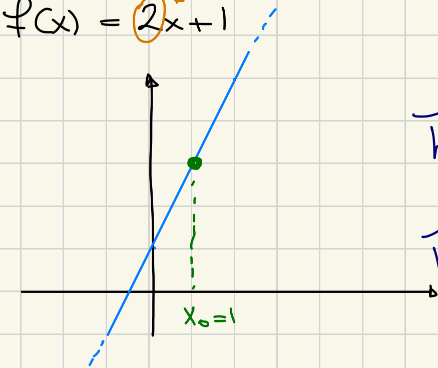
Oss 1) Graficamente parlando $(h \to 0)$ = (il punto B collassa su A)

2) Per quanto detto, la derivata in un punto è il valore della tangente dell'angolo della retta tangente al grafico in quel punto.

↳ Per le cose viste in III la derivata in un punto è quindi il coeff. angolare della retta tangente al grafico in quel punto.

Esempi: (1)

$f(x) = 2x+1$



Calcolo la derivata in $x_0=1$

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} =$$

$$\lim_{h \to 0} \frac{[2(1+h)+1] - 3}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{2\cancel{h}}{\cancel{h}} = 2$$

è proprio il coeff. angolare perché la tg coincide con la retta

(2) $f(x) = ax^2+bx+c$ ⤳ La tg nel punto x è $2ax+b$ $\quad$ ($^{2}\ {}^{2}\!\downarrow\ {}^{0}$)

<u>Caso particolare</u>: $f(x) = 2x^2+3$ Calcolo la derivata in $x_0 = 2$

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(2+h)-f(2)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{[2(2+h)^2+3]-[2(2)^2+3]}{h}$$

Coeff. angolare di retta tg a $f(x)$ in $x_0=2$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{[8+2h^2+8h+3]-11}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{2h^2+8h}{h} = \lim_{h\to 0}(2h+8) = 8$$

$$\boxed{f'(2) = 8}$$

<u>Def</u>: Sia $f: (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$ una funzione e supponiamo che $\forall x_0 \in (a,b)$, esista la derivata $f'(x_0)$. Diremo che la funzione è Derivabile in ogni punto e possiamo definire la funzione Derivata come

$$f': (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$$

<u>Esempio</u>: $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$

▷ Calcolo $f'(7)$, se esiste

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(7+h)-f(7)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(7+h)^2-7^2}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\cancel{49}+h^2+14h-\cancel{49}}{h} = \lim_{h\to 0}(h+14) = 14$$

▷ Calcolare $f'(x)$:

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(\cancel{x^2}+h^2+2xh)-\cancel{x^2}}{h} =$$

$$\lim_{h\to 0} \frac{\cancel{h}(2x+h)}{\cancel{h}} = 2x$$

Ho scoperto che se $f(x) = x^2$, $f'(x) = 2x$ e diremo la derivata di x^2 è $2x$

Derivate delle funzioni elementari:

▷ $f(x) = x \rightsquigarrow f'(x) = 1$

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\cancel{x}+\cancel{h}-\cancel{x}}{\cancel{h}} = 1$$

▷ $f(x) = x^n$, $n \in \mathbb{N} \rightsquigarrow f'(x) = nx^{n-1}$

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h} =$$

Binomio di Newton

$$\lim_{h\to 0} \frac{(\cancel{x^n}+nx^{n-1}h+\overbrace{[\ldots+h^n]}^{h^2(\ldots)})-\cancel{x^n}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\cancel{h}[nx^{n-1}+h(\ldots)]}{\cancel{h}} = nx^{n-1}$$

▷ $f(x) = \sin x \rightsquigarrow f'(x) = \cos x$

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\sin(x+h)-\sin x}{h} =$$

$$\lim_{h\to 0} \frac{\sin x\cos h + \sin h\cos x - \sin x}{h} =$$

$$\lim_{h\to 0} \frac{\sin x\,\overbrace{(\cos h - 1)}^{\to 0}}{h} + \overbrace{\frac{\sin h}{h}}^{\to 1}\cdot\cos x = \cos x$$

▷ $f(x) = \cos x \rightsquigarrow f'(x) = -\sin x$

▷ $f(x) = e^x \rightsquigarrow f'(x) = e^x$ ⇝ Esercizio

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{e^{x+h}-e^x}{h} = \lim_{h\to 0} e^x \underbrace{\frac{(e^h-1)}{h}}_{\to 1} = e^x$$

▷ $f(x) = a^x,\ a>0 \rightsquigarrow f'(x) = a^x \ln a$

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{a^{x+h}-a^x}{h} = \lim_{h\to 0} a^x \underbrace{\frac{(a^h-1)}{h}}_{\to \ln a \text{ Esercizio}} = a^x \ln a$$

▷ $f(x) = \ln(x) \rightsquigarrow f'(x) = \frac{1}{x}$

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\ln(x+h)-\ln(x)}{h} =$$

$$\lim_{h\to 0} \frac{\ln\left(\frac{x+h}{x}\right)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\ln\left(1+\frac{h}{x}\right)}{h} = \left(\underline{\text{Sost}}: \ \frac{h}{x} = t \quad h\to 0 \right.$$
$$\left. h = xt \quad t \to 0 \right)$$

$$\lim_{t\to 0} \underbrace{\frac{\ln(1+t)}{x\,t}}_{\to 1} = \frac{1}{x}$$

▷ $f(x) = \log_a x \quad a\neq 1,\ a>0 \rightsquigarrow f'(x) = \frac{1}{x}\log_a e$

▷ $f(x) = k \rightsquigarrow f'(x) = 0$

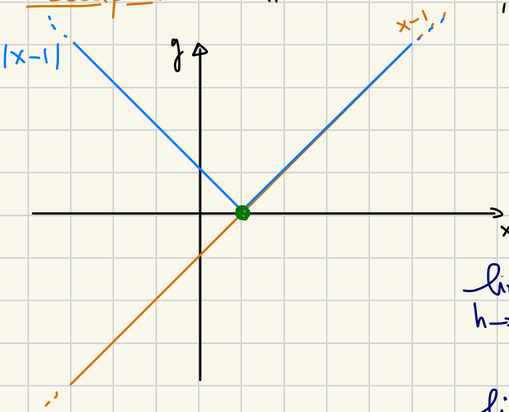
Esercizi

<u>Def</u>: Sia $f:(a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$ funzione, definiamo

$$f'_-(x_0) = \lim_{h\to 0^-} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$ Derivata sinistra

$$f'_+(x_0) = \lim_{h\to 0^+} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$ Derivata destra

Esempio: $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = |x-1|$



Oss: Per disegnare val abs è sufficiente portare tutti i valori negativi in positivi cioè ribaltare rispetto all'asse x

$$\lim_{h\to 0^-} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \underset{x=1}{\boxed{=}} \lim_{h\to 0^-} \frac{|1-1+h|-|1-1|}{h}$$

$$\lim_{h\to 0^-} \frac{|h|}{h} = \lim_{h\to 0^-} \left(-\frac{h}{h}\right) = -1$$

Ho scoperto che $f'_-(1) = -1$
Analogamente $f'_+(1) = 1$

Ma quindi derivata sx e dx <u>NON</u> coincidono e quindi la funzione <u>NON</u> è derivabile in $x=1$

Teorema: Sia $f:(a,b) \to \mathbb{R}$ funzione e supponiamo che f sia derivabile in x_0. Allora f è continua in x_0

(f derivabile in $x_0 \implies f$ continua in x_0)

Il VICEVERSA è FALSO!!! Basta vedere esempio sopra

Dim: So che esiste finito $f'(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$

Voglio dimostrare che $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$

Scriviamo la seguente uguaglianza:

$$f(x_0+h) = f(x_0) + \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} \cdot h$$

Passo al limite

$$\lim_{h\to 0} f(x_0+h) = \lim_{h\to 0} f(x_0) + \lim_{h\to 0} \underbrace{\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}}_{f'(x_0)} \cdot \underbrace{h}_{0}$$

$$\lim_{h\to 0} f(x_0+h) = f(x_0) + 0$$

(Cambio di variabile $x_0+h = x$ $\quad h \to 0$, $x \to x_0$)

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$$ che è la def. di continuità

$\square$

Ricettario per il calcolo delle derivate **Parte 1**

▷ $[k \cdot f(x)]' = k \cdot f'(x)$

Esempio: $[3 \cdot \sin x]' = 3 \cdot (\sin x)' = 3\cos x$

▷ $[f(x) \pm g(x)]' = f'(x) \pm g'(x)$

Es: $(3x+7)' = (3x)' + (7)' = 3$

▷ $[fg]' = f'g + fg'$

Es: $(x^2 \cdot \sin x)' = (x^2)' \sin x + x^2 (\sin x)'$
$= 2x \sin x + x^2 \cos x$

▷ $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$

Pag 1629 n 163

$f(x) = -x^2 + 4x - 12$ $\qquad f'(x) = -2x + 4$

166:

$f(x) = \frac{x^6}{6} - \frac{x^5}{5} - 1$ $\qquad f'(x) = \frac{6x^5}{6} - \frac{5x^4}{5} = x^5 - x^4$

174.

$f(x) = \frac{7x + 5x^3}{x^2} = \frac{7 + 5x^2}{x}$

$f'(x) = \frac{(7+5x^2)' \cdot x - (7+5x^2)(x)'}{x^2} = \frac{10x^2 - 7 - 5x^2}{x^2} = \frac{5x^2 - 7}{x^2}$

205: $f(x) = (\cos x - \sin x) \cdot (-\sin x - \cos x)$

$f'(x) = (\cos x - \sin x)'(-\sin x - \cos x) + (\cos x - \sin x)(-\sin x - \cos x)'$

$= [-\sin x - \cos x]^2 + [\cos x - \sin x][-\cos x + \sin x]$

$= (\sin x + \cos x)^2 - (\cos x - \sin x)^2$

$= 1 + 2\sin x \cos x - 1 + 2\sin x \cos x = 4\sin x \cos x$