Es 310 pag 617 (Ettore)

$$\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^x - 4}{9 - 3^{2x}} < 0$$

<u>N>0</u>: $\left(\frac{1}{2}\right)^x - 4 > 0 \rightsquigarrow 2^{-x} - 2^2 > 0 \overset{\text{BV}}{\rightsquigarrow} 2^{-x} > 2^2$

$\overset{\text{inj}}{\rightsquigarrow} -x > 2 \rightsquigarrow x < -2$

<u>D>0</u>: $9 - 3^{2x} > 0 \rightsquigarrow 3^2 > 3^{2x} \overset{\text{inj}}{\rightsquigarrow} 2 > 2x \rightsquigarrow x < 1$

		-2		1	
N	+		−		−
D	+		+		−
	+		−		+

$\rightsquigarrow$ <u>Sol</u>: $-2 < x < 1$

$(-2, 1)$

Es 336 (Serena)

$$\frac{20 - 8^{2\sqrt{x}+1} - 64^{2\sqrt{x}}}{(2^x - 1)(2^x - 4)} > 0$$

<u>D>0</u> $(2^x - 1)(2^x - 4) > 0$

I) $2^x > 1 \rightsquigarrow 2^x > 2^0 \overset{\text{inj}}{\rightsquigarrow} x > 0$

II) $2^x > 4 \rightsquigarrow 2^x > 2^2 \rightsquigarrow x > 2$

	0		2	
−		+		+
−		−		+
+		−		+

D: $x < 0 \quad \vee \quad x > 2$

<u>N>0</u> $20 - 8^{2\sqrt{x}+1} - 64^{2\sqrt{x}} > 0$

$2^2 \cdot 5 - 2^{6\sqrt{x}+3} - 2^{12\sqrt{x}} > 0$

$20 - 8 \cdot 2^{6\sqrt{x}} - 2^{2(6\sqrt{x})} > 0$

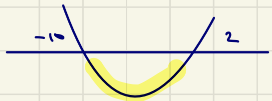
$2^{\alpha} = t \qquad 2^{2\alpha} = t^2$

$2^{6\sqrt{x}} = t$

$$20 - 8t - t^2 > 0 \qquad t_1 = -10 \ , \ t_2 = 2$$

$$t^2 + 8t - 20 < 0$$

$$(t+10)(t-2) < 0$$



$$-10 < t < 2 \quad \rightsquigarrow \quad \underbrace{-10 < 2^{6\sqrt{x}}}_{\text{Sempre vere perché exp è sempre } >0} < 2 \qquad 6\sqrt{x} < 1$$

inj

$$\sqrt{x} < \frac{1}{6} \quad \text{Disequazione irrazionale}$$

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ 1/6 > 0 \ \text{Sempre vere} \\ x < \frac{1}{36} \end{cases} \quad \rightsquigarrow \quad 0 \leq x < \frac{1}{36}$$

		0		1/36		2	
N	$-$	●	$+$	|	$-$	|	$-$
D	$+$	|	$-$	|	$-$	|	$+$
	$-$	|	$-$	|	$+$	|	$-$

Sol: $\frac{1}{36} < x < 2$

$\left(\frac{1}{36} ; 2\right)$

Warning: Una volta che ho finito i conti ricontrollare le c.e.!

---

n 330:

$$\frac{5^{\frac{4}{3}x+3}}{\sqrt{49^{x+2}}} \leq \frac{7\sqrt[3]{25^x}}{\sqrt[3]{7^x}}$$

$$\frac{5^{\frac{4}{3}x+3}}{7^{x+2}} \leq \frac{7 \cdot 5^{\frac{2}{3}x}}{7^{\frac{x}{3}}} \quad \rightsquigarrow \quad 5^{\frac{4}{3}x+3-\frac{2}{3}x} \leq 7^{1+(x+2)-\frac{x}{3}}$$

$$\rightsquigarrow \quad 5^{\frac{2}{3}x+3} \leq 7^{\frac{2}{3}x+3} \quad \overset{\text{OM}}{\rightsquigarrow} \quad \left(\frac{5}{7}\right)^{\frac{2}{3}x+3} \leq \underset{\left(\frac{5}{7}\right)^0}{1} \quad \rightsquigarrow \quad \frac{2}{3}x + 3 \geq 0$$

$$2x + 9 \geq 0$$

$$x \geq -9/2$$

Logaritmi:

Def: Dati due numeri reali positivi a e b, con $a \neq 1$, chiamiamo logaritmo in base a di b l'esponente x da assegnare alla base a per ottenere il numero b.
In formule

$$a^x = b \iff x = \log_a b$$

Esempi:

$$2^x = 32 \qquad x = 5 = \log_2 32$$

$$3^x = 7 \qquad x = \log_3 7$$

$$5^x = 27 \qquad x = \log_5 27$$

Frase Mistica: Il logaritmo è il nome che diamo a un preciso esponente.

Esempi:

$$\log_2 4 = 2 \longleftrightarrow 2^x = 4$$

$$\log_{73} 1 = 0 \longleftrightarrow 73^x = 1$$

$$\log_{10} 10^{27} = 27 \longleftrightarrow 10^x = 10^{27}$$

$$\log_a a = 1 \qquad 27^x = 5 \rightsquigarrow x = \log_{27} 5$$

$$\log_a a^n = n$$

Altro mistica: Ci interessa dare un nome per poter manipolare bene gli esponenti.

Notazione (1) Nel logaritmo in base 10 si omette il 10 a base

$$\log_{10} b = \log b$$

(2) Il logaritmo in base e si chiama logaritmo naturale e si indica con

$$\log_e b = \underbrace{\ln}_{\text{sta per logaritmo naturale}} b$$

(3) Data la scrittura $\log_a b$, la a si chiama base, la b si chiama argomento

Nota bene: Per come è posta la definizione si creano due condizioni di esistenza e cioè: $a > 0$ $\quad a \neq 1$
$b > 0$

Teorema (Mirco 30 sett. 2024): Dati $a, b > 0$ $\quad a \neq 1$, il $\log_a b$ esiste ed è unico.

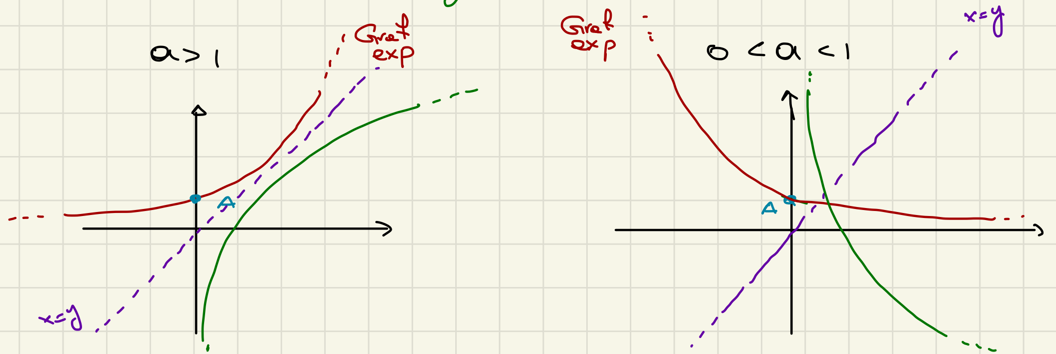
Dim.: Per quanto già visto la funzione esponenziale $a^{\bullet}$ è bigettiva, di conseguenza per il teorema della funzione inversa dell'anno scorso, esiste la funzione inversa che si chiama $\log_a(\cdot)$.

Vale quindi che: $f \circ f^{-1}(x) = x$ $\quad f^{-1} \circ f(x) = x$. Per il caso exp, log si ha

$$\log_a(a^x) = x \qquad\qquad a^{\log_a(x)} = x$$

$\square$

Grafico della funzione $\log_a(\cdot) : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$



Il grafico del logaritmo si ottiene specchiando il grafico dell'exp rispetto alla retta $x=y$ (Vedi teorema Graf(f^{-1}) AS. 2023/24)
Linea verde nel disegno.

Proprietà dei logaritmi:

(1) $\log_a(b) + \log_a(c) = \log_a(bc)$

(2) $\log_a(b) - \log_a(c) = \log_a\left(\frac{b}{c}\right)$ (Per casa)

(3) $\log_a(b^n) = \log_a(\underbrace{b \cdot b \cdot b \cdot \ldots \cdot b}_{n}) \overset{(1)}{=} n \cdot \log_a(b)$

Dim (1):
$$\log_a(b) = x \iff a^x = b$$
$$\log_a(c) = y \iff a^y = c$$

Moltiplico $a^x \cdot a^y = bc$

$$a^{x+y} = bc \iff x+y = \log_a(bc)$$

Ma x e y avevano un nome: ottengo

$$\log_a(b) + \log_a(c) = \log_a(bc)$$

(3) $\log_a(b^n) = n \log_a b$

$$\log_a(b) = x \longleftrightarrow a^x = b$$

elevo alla n: $(a^x)^n = b^n$

$$\log_a b^n = nx \longleftrightarrow a^{nx} = b^n$$
$$\Downarrow$$
$$\log_a(b^n) = n \log_a(b)$$

$\square$