Settimana: 3

Materia: Matematica
Classe: 3D
Data: 29/09/25

Argomenti: Esercizi e prob. su diseq. irraz. Criteri di Similitudine tra triangoli Teo triangoli rettangoli su semi circ. Esercizio dett. Geometria con eq. irraz. Es. dett. di Geom. con eq. irraz. Le funzioni, introd., imm. controimm, inj

---

Es 872 pag 69

$$\frac{\sqrt{2x^2-3x+1}-1}{x-3-\sqrt{x^2+2x}} > 0$$

N: $\sqrt{2x^2-3x+1} - 1 > 0$

$\sqrt{2x^2-3x+1} > 1$ Caso $\sqrt{A(x)} > B(x)$

$$\begin{cases} 2x^2-3x+1 \geq 0 & 1) \\ 1 \geq 0 & 2) \\ 2x^2-3x+1 > 1 & 3) \end{cases} \cup \cancel{\begin{cases} 2x^2-3x+1 \geq 0 \\ 1 < 0 \end{cases}}$$ Impossibile

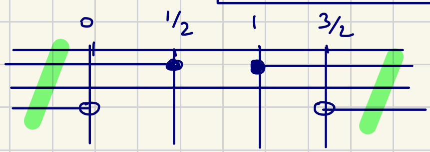
1) $2x^2-3x+1 \geq 0$ $\Delta = b^2-4ac = 9-8 = 1$ $\sqrt{\Delta} = 1$

$x_1/x_2 = \frac{3 \pm 1}{4}$ $\begin{cases} 1 \\ \frac{1}{2} \end{cases}$ $\boxed{x \leq \frac{1}{2} \quad \vee \quad x \geq 1}$

2) $\forall x \in \mathbb{R}$

3) $2x^2-3x > 0$ $x(2x-3) > 0$ $x = 0, \frac{3}{2}$

$\boxed{x < 0 \quad \vee \quad x > \frac{3}{2}}$



N: $\boxed{x < 0 \quad \vee \quad x > \frac{3}{2}}$

D: $x-3-\sqrt{x^2+2x} > 0$

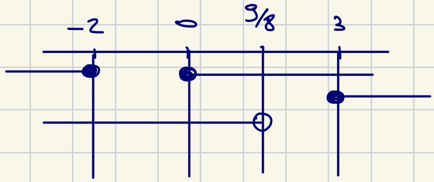
$\sqrt{x^2+2x} < x-3$

$$\begin{cases} x^2+2x \geq 0 & 1) \\ x-3 \geq 0 & 2) \\ x^2+2x < x^2-6x+9 & 3) \end{cases}$$

1) $x^2+2x \geq 0$ $x(x+2) \geq 0$ $x = 0, -2$ $\boxed{x \leq -2 \quad \vee \quad x \geq 0}$

2) $\boxed{x \geq 3}$

3) $8x < 9 \rightsquigarrow \boxed{x < \frac{9}{8}}$



Impossibile

$\rightsquigarrow$ D: Impossibile

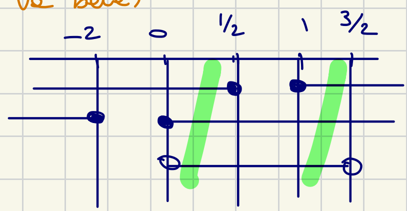
Fra N e D devo fare il grafico dei segni:

		0		3/2	
N	+	0	−	0	+
D	−		−		−
	−		+		−

$\rightsquigarrow$ $0 < x < \frac{3}{2}$

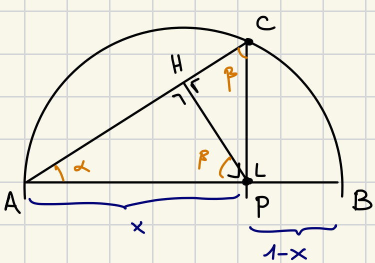
WARNING. La soluzione trovata si è dimenticata delle C.E.!
Quelle vanno ricontrollate intersecando la soluzione con le C.E. già fatte (Anche in maniera smart va bene)

C.E. Vedi evidenziate:
$$\begin{cases} x \leq \frac{1}{2} \quad \vee \quad x \geq 1 \\ x \leq -2 \quad \vee \quad x \geq 0 \\ 0 < x < \frac{3}{2} \end{cases}$$



$$\boxed{\text{Sol finale: } 0 < x \leq 1/2 \quad \vee \quad 1 \leq x < \frac{3}{2}}$$

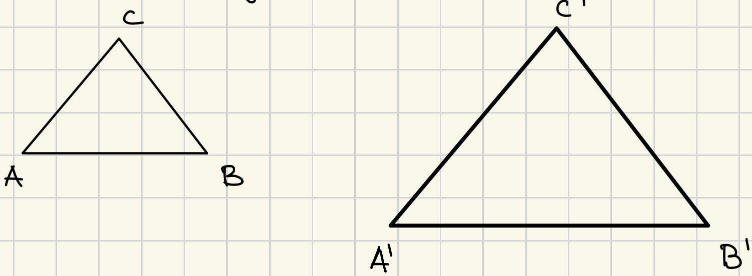
Es 83 pag 79 64 - 72 - 89



$AB = 1$ $0 < x < 1$ C.E.
$AP = x$
Determina x in modo che
a) $CP = 2PH$
b) $\frac{PH}{AP} \leq \sqrt{8} \frac{AP}{PB}$

Teoria: La similitudine tra triangoli:

Def: Dati due triangoli ABC, $A'B'C'$



diciamo che sono simili se hanno gli angoli congruenti e i lati in proporzione. In formule

$$C\hat{A}B \simeq C'\hat{A}'B' \qquad \frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{CA}{C'A'}$$
$$A\hat{B}C \simeq A'\hat{B}'C'$$
$$B\hat{C}A \simeq B'\hat{C}'A'$$

Criteri di Similitudine:

I criterio di similitudine: Due triangoli ABC e $A'B'C'$ che hanno

1) Un angolo congruente
2) I lati che comprendono l'angolo in proporzione

sono simili

II criterio di sim Due triangoli ABC e $A'B'C'$ che hanno

1) 3 angoli congruenti

Sono simili

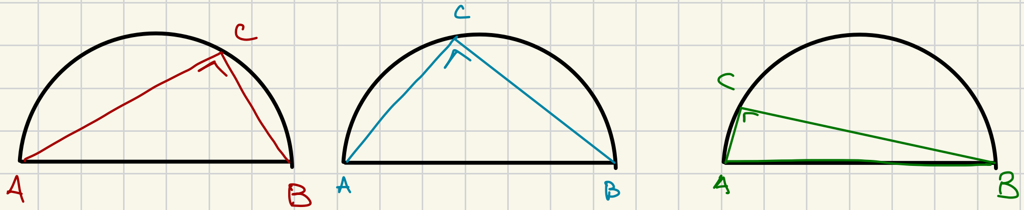
Oss CI  : Per applicare il II criterio, bastano in realtà 2 angoli

Segue da: somma angoli interni triangolo $= \pi$.

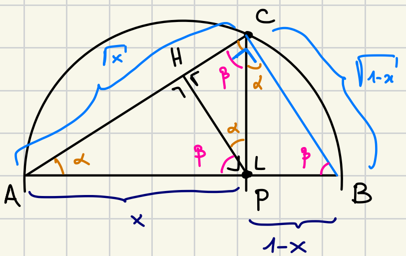
Fatto: Un triangolo costruito su una semicirconferenza (2 vertici sui vertici del diametro e l'altro vertice sulla semicirconferenza) è RETTANGOLO

Dim: Segue da un teorema che vedremo (IV sup.)

Esempio



Back to esercizio



α

$\beta = \frac{\pi}{2} - \alpha$

$P\hat{C}B = \frac{\pi}{2} - \beta = \alpha$

a) $CP = 2PH$

b) $\dfrac{PH}{AP} \leq \sqrt{8}\, \dfrac{AP}{PB}$

Dato che tutti i triangoli che compaiono sono simili, faccio dei maneggi e scrivo PC e PH in funzione di x

PC: $\overset{\triangle}{ABC}$, $P\hat{B}C$ $\left.\right\}$ simili $\rightsquigarrow$ $\underbrace{\dfrac{AB}{BC}}_{\text{ipotenuse}} = \underbrace{\dfrac{BC}{PB}}_{\text{cateto opposto a } \alpha} = \underbrace{\dfrac{AC}{PC}}_{\text{cateto opposto ad } \beta}$

$$\rightsquigarrow \boxed{\frac{1}{BC} = \frac{BC}{1-x}} = \frac{AC}{PC}$$

$$\Downarrow$$

$$BC = \sqrt{1-x}$$

$AC^2 + BC^2 = AB^2$ Teo di Pitagora

$AC^2 = AB^2 - BC^2 = 1 - (1-x) = x \rightsquigarrow AC = \sqrt{x}$

$AP^2 + PC^2 = AC^2$ Teo di Pitagora

$$PC^2 = AC^2 - AP^2 = x - x^2 \rightsquigarrow PC = \sqrt{x(1-x)}$$

<u>Calcolo PH</u>: $\dfrac{AB}{AP} = \dfrac{BC}{PH} \rightsquigarrow PH = \dfrac{BC \cdot AP}{AB} = \sqrt{1-x}\; x$

$$PH = x\sqrt{1-x}$$

a) $\sqrt{x(1-x)} = 2x\sqrt{1-x}$ $\rightsquigarrow$ Se $0<x<1$, le C.E. sono a posto ed elevo

$$\cancel{x}(\cancel{1-x}) = 4x^{\cancel{2}}(\cancel{1-x})$$

$$1 = 4x \rightsquigarrow \boxed{x = \frac{1}{4}}$$

b) $\dfrac{PH}{AP} \le \sqrt{8}\,\dfrac{AP}{PB}$ $\qquad \dfrac{\cancel{x}\sqrt{1-x}}{\cancel{x}} \le \sqrt{8}\,\dfrac{x}{1-x}$ $\qquad$ Dato che $x>0$, posso semplificare le x a sx

$$\sqrt{1-x} \le \sqrt{8}\,\frac{x}{1-x}$$

$$\begin{cases} 1-x \ge 0 \\ \sqrt{8}\,\dfrac{x}{1-x} \ge 0 \\ 1-x \le 8\,\dfrac{x^2}{(1-x)^2} \quad 3) \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} x \le 1 \\ 0 \le x < 1 \\ -2-\sqrt{5} \le x \le -1 \;\vee\; x \ge -2+\sqrt{5} \quad x \ne 1 \end{cases}$$

3) $\dfrac{8x^2}{(1-x)^2} + x - 1 \ge 0$ $\qquad \dfrac{8x^2 + (x-1)(1-x)^2}{(1-x)^2} \ge 0$ $\qquad (1-x)^2 = (x-1)^2$

$$\frac{8x^2 + x^3 - 1 - 3x^2 + 3x}{(1-x)^2} \ge 0 \qquad \frac{x^3 + 5x^2 + 3x - 1}{(1-x)^2} \ge 0$$

Sol finale

$$\boxed{-2+\sqrt{5} \le x < 1}$$

$N \ge 0$ Ruffini -1 :

	1	5	3	−1
−1		−1	−4	1
	1	4	−1	0

$(x+1)(x^2+4x-1) \geq 0$

$f_1: \; x \geq -1$

$f_2: \; x^2+4x-1 \geq 0 \qquad \frac{\Delta}{4} = 4+1 = 5$

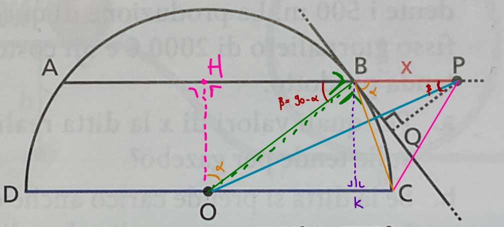
$x_1/x_2 = -2 \pm \sqrt{5} \;\rightsquigarrow\; x \leq -2-\sqrt{5} \;\vee\; x \geq -2+\sqrt{5}$

$D>0 \qquad (1-x)^2 > 0 \qquad \forall x \in \mathbb{R}, \; x \neq 1$

	$-2-\sqrt{5}$		-1		$-2+\sqrt{5}$		1	
N1	$-$		$-$	$+$		$+$		$+$
N2	$+$		$-$	$-$		$+$		$+$
D	$+$		$+$	$+$		$+$		$+$
	$-$		$+$	$-$		$+$		$+$

$$\boxed{\begin{array}{c} -2-\sqrt{5} \leq x \leq -1 \\ \vee \\ x \geq -2+\sqrt{5} \qquad x \neq 1 \end{array}}$$

Es 85 pag 79



85 La semicirconferenza della figura ha raggio 10, la corda AB dista 6 dal centro e la retta su cui si trova Q è tangente in B alla semicirconferenza.

a. Trova x in modo che $\frac{\overline{BP}^2 + \overline{BQ}^2}{\overline{OP}^2} \leq 1$.

b. Se $x = 10$, calcola l'area del quadrilatero $OCPB$ e la lunghezza delle sue diagonali.

$AO = r = 10$

$OH = 6$

Fatto: Le rette tangenti alla circonferenza sono perpendicolari al raggio nel punto di tangenza

(Nell'es. Angolo verde)

$BP = x$

a) $\frac{BP^2 + BQ^2}{OP^2} \leq 1$

Goal: Trovare BP, BQ, OP in funzione di x

$\boxed{BP = x}$

Per Teo Pitagora $OH^2 + HB^2 = OB^2 \;\rightsquigarrow\; HB^2 = OB^2 - OH^2 = 100 - 36 = 64$

$\rightsquigarrow\; HB = 8 \;\rightsquigarrow\; HP = HB + BP = 8 + x$

Per Teo Pitagora $\overset{\triangle}{OHP}$ si ha $OH^2 + HP^2 = OP^2$

$$OP^2 = 36 + (8+x)^2$$

$$\boxed{OP = \sqrt{x^2+16x+100}}$$

Chiamo α l'angolo $P\hat{B}Q = \alpha$

L'angolo $H\hat{B}O$ vale $180 - 90 - \alpha = 90 - \alpha = \beta$

L'angolo $H\hat{O}B$ vale $180 - 90 - \beta = 180 - 90 - 90 + \alpha = \alpha$ (Somma ang. interni)

L'angolo $B\hat{P}Q$ vale $180 - 90 - \alpha = 90 - \alpha = \beta$ (Somma ang. interni)

$\Rightarrow$ $\overset{\triangle}{OHB}$ è simile a $\overset{\triangle}{BPQ}$. Imposto i lati in proporzione

Lati: op a β $\left[\frac{BQ}{OH} = \frac{BP}{OB} \right]$ Ipotenuse

$$BQ = \frac{x}{10} \cdot 6 = \frac{3}{5} x \qquad \boxed{BQ = \frac{3}{5} x}$$

$$\frac{BP^2 + BQ^2}{OP^2} \leq 1 \quad \leadsto \quad \frac{x^2 + \frac{3}{5} x^2}{x^2 + 16x + 100} \leq 1$$

$$\frac{\frac{8}{5} x^2 - x^2 - 16x - 100}{x^2 + 16x + 100} \leq 0$$

$$\frac{\frac{3}{5} x^2 - 16x - 100}{x^2 + 16x + 100} \leq 0 \qquad \frac{\frac{3x^2 - 80x - 500}{5}}{x^2 + 16x + 100} \leq 0$$

$$\frac{3x^2 - 80x - 500}{5(x^2 + 16x + 100)} \leq 0$$

$\leadsto$ Risolvete e tutti felici (Tom)

b) Se $x=10$, calcola A_{OCBP} e diagonali

$$A_{OCPB} = \frac{(OC+BP)\,BK}{2} = \ldots = 60$$

OP ce l'ho già ... $OP = 6\sqrt{10}$

$$BC^2 = BK^2 + KC^2 = BK^2 + (OC-BH)^2 = \ldots = (2\sqrt{10})^2$$

Funzioni (Hard)

Def. Dati due insiemi A, B, una funzione

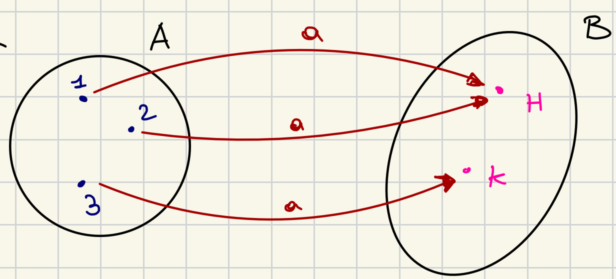
$$f: A \longrightarrow B$$ "f da A in B"

è una relazione tale che a ogni elemento di A associa uno e un solo elemento di B

A si chiama Dominio $A = \mathrm{Dom}(f)$
B si chiama Codominio

Esempio: $a: \{1,2,3\} \longrightarrow \{H, K\}$

$a(1) = H$ "funzione applicata a ..."
$a(2) = H$
$a(3) = K$



Rappresentazione per diagramma di Eulero-Venn

Esempio: $g: \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{Z}$, $g(n) = -n$
$n \longmapsto -n$

Le gialle sono scritture equivalenti

Esempio: $m: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$
$x \longmapsto 2x^2 - 1$

$m(x) = 2x^2 - 1$

$m(3) = 2 \cdot 3^2 - 1 = 17$
$m(0) = -1$

Esempio: $c: \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ $\qquad c(x) = \sqrt{x}$

Questa NON è una funzione perché $\sqrt{x}$ non è detto che appartenga al codominio

$b: \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$ $\qquad b(x) = \sqrt{x}$

Questa è una funzione. $\qquad b(25) = \sqrt{25} = 5$

Def: Data $f: A \longrightarrow B$, l'immagine di f sono tutti gli elementi del codominio (arrivo) che vengono raggiunti da almeno un elemento del dominio. Formalmente:

$$\mathrm{Im}(f) = \{ \underbrace{b \in B}_{\text{elementi arrivo}} \mid \underbrace{\exists a \in A}_{\text{c'è elemento in partenza}} \text{ t.c. } \underbrace{f(a) = b}_{\text{la partenza va nell'arrivo}} \} \subseteq B$$

Esempio: $f: \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ $\qquad f(n) = 2n + 1$ $\qquad f(1) = 3 \quad f(3) = 7$
$f(2) = 5$

$\mathrm{Im}(f) =$ Numeri dispari

Esempio: $k: \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{R}$ $\qquad k(x) = x^2$

$\mathrm{Im}(f) =$ Numeri naturali al quadrato $= \{0, 1, 4, 9, 16, \ldots\}$

Def: Sia $f: A \longrightarrow B$ funzione e sia $b \in B$, la **controimmagine di b tramite f** sono tutti gli elementi che vanno a finire in b. Formalmente

$$f^{-1}(b) = \{a \in A \mid f(a) = b\} \subseteq A$$

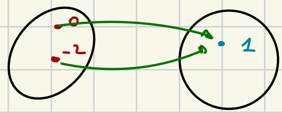
Esempio: $A: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ $\qquad A(x) = x^2 + 2x + 1$

Chi è la controimmagine di 1? Chi è $A^{-1}(1) = ?$

Pongo $A(x) = 1$, cioè $x^2+2x+1 = 1$ e risolvo:

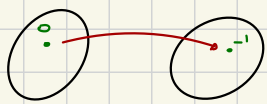
$$x^2 + 2x = 0 \qquad x(x+2) = 0 \qquad x = 0, -2$$

$$A^{-1}(1) = \{0, -2\}$$



Chi è $A^{-1}(0)$? Pongo $A(x) = 0$, $x^2+2x+1 = 0$, $(x+1)^2 = 0$
$\rightsquigarrow x = -1$

$$A^{-1}(0) = \{-1\}$$



Chi è $A^{-1}(-5)$? $A(x) = -5$, $x^2+2x+1 = -5$

$$x^2 + 2x + 6 = 0 \qquad \Delta = 4 - 24 = -20 < 0 \qquad \text{Imp}$$

Ho scoperto che -5 non è raggiunto da niente, cioè

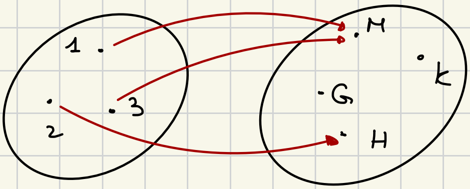
$$A^{-1}(-5) = \emptyset \quad , \quad -5 \notin \mathrm{Im}(A)$$

Def: Sia $f: A \longrightarrow B$. f si dice **iniettiva** se ogni elemento di B è raggiunto da **al più** un solo elemento di A. In formule

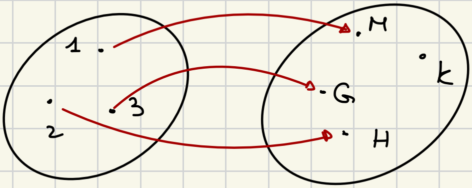
$$f(a_1) = f(a_2) \Rightarrow a_1 = a_2$$

Cristian sharpness

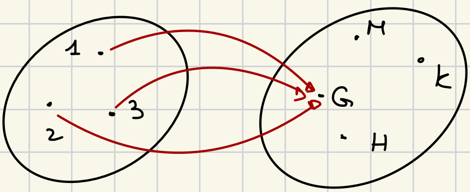
Esempi:



No inj; 2 elementi su M



Iniettiva



No inj

$A: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \qquad A(x) = x^2+2x+1$

È iniettiva? No perquanto visto prima