Settimana: 6

Materia: Matematica
Classe: 5C
Data: 20/10/2025

Argomenti:

Pag 1531 n 250

$$\lim_{x\to0^+}\left(\frac{x^2}{4}\right)^{\frac{1}{3\ln x}} = \lim_{x\to0^+} e^{\frac{1}{3\ln x}\cdot\ln\left(\frac{x^2}{4}\right)} =$$

$$= \lim_{x\to0^+} e^{\frac{2\cdot\ln\left(\frac{x}{2}\right)}{3\ln x}} =$$

$$= \lim_{x\to0^+} e^{\frac{2\ln x}{3\ln x}-\frac{2\ln(2)}{\ln(x)}} = e^{\frac{2}{3}}$$

533 $$\lim_{x\to0}\left(1+tg^2x\right)^{\frac{1}{x\ln(x+1)}} =$$

$$\lim_{x\to0}\frac{\ln(x+1)}{x}=1$$

$$\lim_{x\to0} e^{\frac{1}{x\,\ln(x+1)}\,\ln(1+tg^2(x))\cdot\frac{x}{x}} =$$

$$\lim_{x\to0} e^{\frac{x}{\ln(x+1)}\cdot\frac{\ln(1+tg^2(x))}{x^2}\cdot\frac{tg^2(x)}{tg^2(x)}} =$$

$$\lim_{x\to0} e^{\frac{x}{\ln(x+1)}\cdot\frac{\ln(1+tg^2(x))}{tg^2(x)}\cdot\frac{tg^2(x)}{x^2}} =$$

↳ Tenderà a 1 poiché sost $tg^2x=t$

$$\lim_{x\to0} e^{\underset{\downarrow\,1}{\boxed{\frac{x}{\ln(x+1)}}}\cdot\underset{\downarrow\,1}{\boxed{\frac{\ln(1+tg^2(x))}{tg^2(x)}}}\cdot\underset{\downarrow\,1}{\boxed{\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2}}\cdot\underset{\downarrow\,1}{\boxed{\frac{1}{\cos^2x}}}} = e$$

Pag 1581 n 94

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin 2x}{x} & x<0 \\ 2e^{\frac{ax+b}{x-c}} & x \geq 0 \quad x \neq c \end{cases} \qquad a,b \in \mathbb{R},\ c \in \mathbb{R}^+$$

(1) Trova a,b,c sapendo

i) f è continua in 0

ii) $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 2e$

iii) $\lim_{x \to 3^-} f(x) = 0$

i) $\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} \underbrace{\frac{\sin 2x}{2x}}_{1} \cdot 2 = 2$

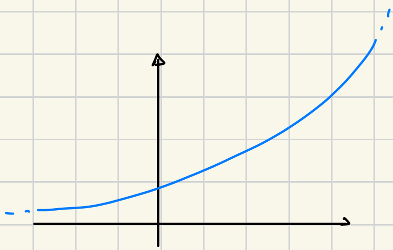
$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} 2e^{\frac{ax+b}{x-c}} = 2e^{-\frac{b}{c}}$

$f(0) = 2e^{-\frac{b}{c}} \rightsquigarrow \boxed{2 = 2e^{-\frac{b}{c}}}$

ii) $\lim_{x \to +\infty} 2e^{\frac{ax+b}{x-c}} = \lim_{x \to +\infty} 2e^{\frac{\cancel{x}(a+\frac{b}{x})}{\cancel{x}(1-\frac{c}{x})}} = \boxed{2e^{a} = 2e}$

iii) $\lim_{x \to 3^-} f(x) = \lim_{x \to 3^-} 2e^{\frac{ax+b}{x-c}} = 0$

Per fare in modo che l'exp vada a 0, l'esponente deve essere $-\infty$



$\Rightarrow \lim_{x \to 3^-} \frac{ax+b}{x-c} = -\infty$

$\Rightarrow$ Al denominatore, quando $x \to 3^-$, deve venire 0 $\Rightarrow \boxed{c=3}$

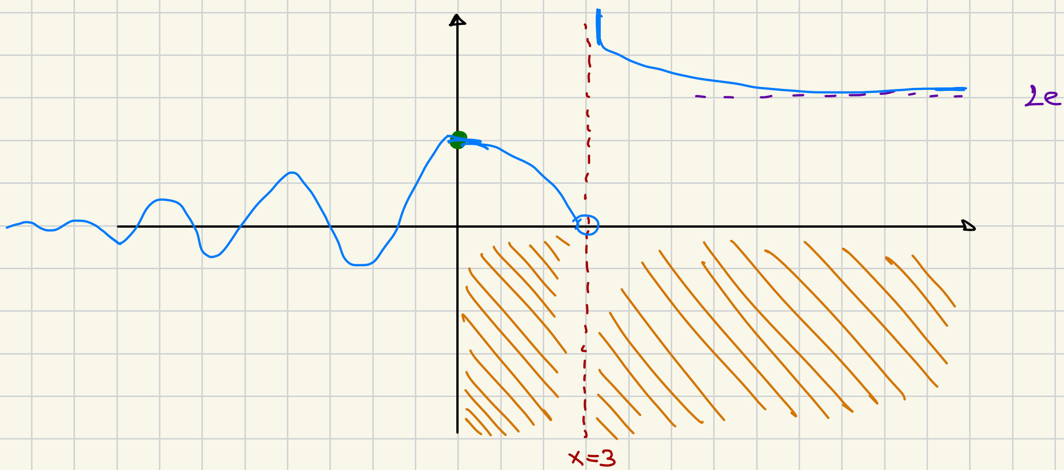
Condizioni.
$$\begin{cases} 2 = 2e^{-\frac{b}{c}} \\ a = 1 \\ c = 3 \end{cases} \qquad \begin{cases} \frac{b}{3} = 0 \\ a = 1 \\ c = 3 \end{cases} \qquad \begin{cases} b = 0 \\ a = 1 \\ c = 3 \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin 2x}{x} & x < 0 \\ 2e^{\frac{x}{x-3}} & x \geq 0 \quad x \neq 3 \end{cases}$$

$$\lim_{x \to 3^+} f(x) = \lim_{x \to 3^+} 2e^{\frac{x \,\to\, +\infty}{x-3 \,\to\, 0^+}} = \infty$$

Teo Confronto

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \frac{\sin 2x}{x} \boxed{=} 0$$



$$\lim_{x \to -\infty} x f(x) = \lim_{x \to -\infty} \cancel{x} \cdot \frac{\sin 2x}{\cancel{x}} = \lim_{x \to -\infty} (\sin 2x)$$

Il limite NON esiste, perché a $-\infty$ continua a oscillare

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to 0^-} \frac{\sin 2x}{x^2} = \lim_{x \to 0^-} \underbrace{\frac{\sin 2x}{2x}}_{1} \cdot \underbrace{\frac{2}{x}}_{-\infty} = -\infty$$

n. 100 $\quad f(x) = \dfrac{e^{ax}-a}{e^{bx}+b} \qquad a,b \in \mathbb{R}$

Trova a,b t.c. $\quad$ i) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 1$

ii) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -1$

(i) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^{ax}-a}{e^{bx}+b} = \left(\begin{array}{c}\text{sost: } e^x = t \\ x\to+\infty,\ t\to+\infty\end{array}\right) =$

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{t^a-a}{t^b+b} = \lim_{t\to+\infty} \frac{t^a\left(1-\frac{a}{t^a}\right)}{t^b\left(1+\frac{b}{t^b}\right)} =$$

$$\lim_{t\to+\infty} \underset{\downarrow\, 1}{t^{a-b}} \underset{\to 1}{\left(\frac{1-\frac{a}{t^a}}{1+\frac{b}{t^b}}\right)} = 1 \quad \leadsto \text{Dunque } a=b$$

(c'è un piccolo problema: funzione solamente se $a,b>0$, altrimenti non va)

$\leadsto$ Quello che si deve fare è analizzare tutte le casistiche

(1) $a,b>0$ $\qquad$ (3) $a<0,\ b>0$

(2) $a>0,\ b<0$ $\qquad$ (4) $a,b<0$

] Per casa con cond. 2

b) Pongo $a=b=1$ e traccio il grafico probabile

$$f(x) = \frac{e^x-1}{e^x+1}$$

1) Dom(f): $\quad e^x+1 \neq 0 \quad$ Sempre $\quad f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$

2) Int. Assi. $\quad$ Asse x : $\quad y=0 \quad e^x-1=0 \quad x=0 \qquad A=(0;0)$

Asse y : $\quad x=0 \quad \leadsto y=0$

(3) Segno: $f(x) \geq 0 \quad \frac{e^x - 1}{e^x + 1} \geq 0 \rightsquigarrow e^x > 1 \rightsquigarrow \boxed{x > 0}$

(4) limiti: $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 1 \qquad \lim_{x \to -\infty} f(x) = -1$