

Settimana: 17

Argomenti:

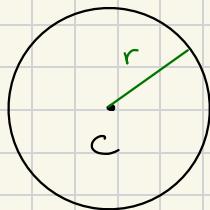
Materia: Matematica

Classe: 3D

Data: 3/02/2026

Circonferenze sul piano cartesiano

Def. Una circonferenza è il luogo geometrico dei punti equidistanti da un punto C detto centro delle circonferenze. La distanza tra uno di questi punti e il centro si chiama Raggio



Formule che segno:

Lungh circonf: $2\pi r$

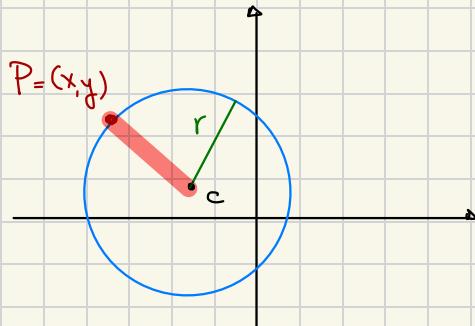
Area del cerchio: πr^2

Impostiamo adesso lo def sul piano cartesiano

$C = (\alpha, \beta)$ coordinate centro

r raggio

$P = (x, y)$ è il punto generico delle circonferenze



Impongo $\text{dist}(P, C) = r$

$$\sqrt{(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2} = r$$

elavo al quadrato:

$$(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 = r^2$$

→ Formula base (deriva da def) delle circonferenze
RICORDARE!!

vedo avanti con i conti
e trovo altre forme

$$x^2 - 2\alpha x + \alpha^2 + y^2 - 2\beta y + \beta^2 - r^2 = 0$$

$$x^2 + y^2 - \underbrace{2\alpha x}_{a} - \underbrace{2\beta y}_{b} + \underbrace{\alpha^2 + \beta^2 - r^2}_{c} = 0$$

assegno dei nomi

L'equazione generica delle circonferenze diventa

$$x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$$

← Forma canonica
 $a, b, c \in \mathbb{R}$

Tip: Per riconoscere che è circonferenze noto che ci sono x^2 e y^2 che hanno stesso coefficiente.

Relazione tra le forme canonica e centro C e raggio r

Abbiamo imposto

$$\begin{aligned} -2\alpha &= a \\ -2\beta &= b \\ \alpha^2 + \beta^2 - r^2 &= c \end{aligned}$$

Ricavo il centro $C = (\alpha; \beta)$ e r in funzione di a, b, c.

$$\alpha = -\frac{a}{2}$$

$$\Rightarrow C = \left(-\frac{a}{2}; -\frac{b}{2} \right)$$

$$\beta = -\frac{b}{2}$$

$$r^2 = \alpha^2 + \beta^2 - c = \frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{4} - c$$

$$r = \sqrt{\frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{4} - c}$$

Esempi / Esercizi:

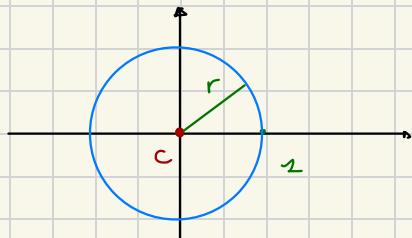
(1) $x^2 + y^2 = 1$ Trovare raggio e centro

$$x^2 + y^2 - 1 = 0 \quad a=0 \quad b=0 \quad c=-1$$

$$x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$$

$$C = \left(-\frac{a}{2}; -\frac{b}{2} \right) = (0; 0)$$

$$r^2 = 0 + 0 - (-1) = 1 \Rightarrow r = 1$$



Def: La circonferenza
 $x^2 + y^2 = 1$

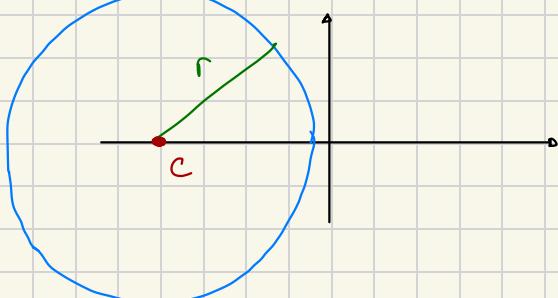
è detta **circonferenze goniometriche**

Esempio: $x^2 + y^2 + 8x + 2 = 0$ Trova r, C

$$C = (-4; 0)$$

$$r^2 = (-4)^2 + (0)^2 - 2 = 14$$

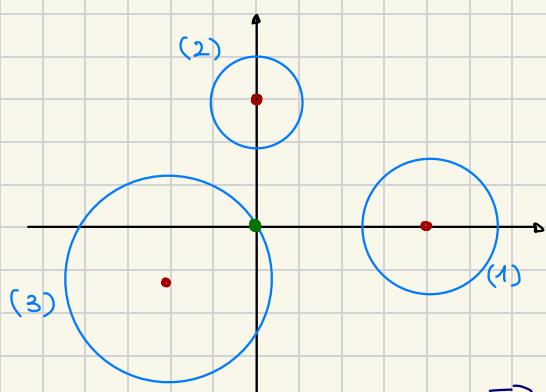
$$a=8, b=0, c=2$$



Esempio: $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$

Che condizioni devo impostare su a, b, c in modo che

- (1) la circonf. abbia centro sull'asse $x \Rightarrow b=0$
- (2) " " " " sull'asse $y \Rightarrow a=0$
- (3) " " possa per l'origine $\Rightarrow c=0$



$$(1) C = \left(-\frac{a}{2}; -\frac{b}{2}\right)$$

Centro su asse x: $-\frac{b}{2} = 0 \Rightarrow b = 0$

(2) Centro su asse y: $-\frac{a}{2} = 0 \Rightarrow a = 0$

$$(3) \text{ Impongo che } O = (0;0) \text{ è circuito.} \\ \Rightarrow 0^2 + 0^2 + a \cdot 0 + b \cdot 0 + c = 0 \\ \Rightarrow c = 0$$

Mini es: Trovare eq. delle circ con raggio 3 e centro (-1; 2)

$$(x+1)^2 + (y-2)^2 = 3^2$$

n⁴ pag 339

$$\begin{aligned} y &= x^2 - 2x + 4 \\ y &= -x^2 + 2 \end{aligned} \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Fascio} \end{array} \right.$$

$$y - x^2 + 2x - 4 + k(y + x^2 - 2) = 0$$

- Trova k in modo che

(1) Parabola passa per O. Sostituisco $O = (0;0)$ nel fascio e trovo k)

$$-4 - 2k = 0 \Rightarrow k = -2$$

$$(2) x_V = \frac{1}{4} \quad V = \left(-\frac{b}{2a}; -\frac{\Delta}{4a}\right)$$

$$\text{Dovrò mettere } -\frac{b}{2a} = \frac{1}{4}$$

Per trovare b, a metto il fascio di parabole in forma "normale"

$$y - x^2 + 2x - 4 + k(y + x^2 - 2) = 0$$

$$\Rightarrow y = ax^2 + bx + c$$

$$\hookrightarrow y(k+1) = x^2(-k+1) + x(-2) + (2k+4)$$

$$y = \left(\frac{1-k}{1+k}\right)x^2 + \left(-\frac{2}{1+k}\right)x + \frac{2k+4}{1+k}$$

$$\left[\frac{2}{1+k} : 2 \left(\frac{1-k}{1+k}\right) = \frac{1}{4} \right] \Rightarrow -\frac{b}{2a} = \frac{1}{4}$$

$$\frac{2}{1+k} \cdot \frac{1-k}{2(1-k)} = \frac{1}{4} \Rightarrow 1-k = 4 \Rightarrow k = -3$$

(c) k in modo che le parabole siano parallele alle rette $y = -2x + 4$

Interseco e impongo $\Delta = 0$

$$\begin{cases} y = -2x + 4 \\ y = \left(\frac{1-k}{1+k}\right)x^2 + \left(-\frac{2}{1+k}\right)x + \frac{2k+4}{1+k} \end{cases}$$

$$-2x + 4 = \left(\frac{1-k}{1+k}\right)x^2 + \left(-\frac{2}{1+k}\right)x + \frac{2k+4}{1+k}$$

$$\left(\frac{1-k}{1+k}\right)x^2 + \left(-\frac{2}{1+k} + 2\right)x + \frac{2k+4}{1+k} - 4 = 0 \quad \text{---} \quad k \neq -1$$

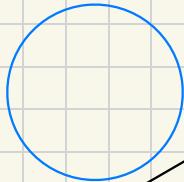
$$(1-k)x^2 + (-\frac{2}{1+k} + 2k)x + 2k + \frac{4}{1+k} - 4 = 0$$

$$(1-k)x^2 + 2kx - 2k = 0$$

$$\frac{\Delta}{a} = \left(\frac{b}{2}\right)^2 - ac = k^2 - (-2k)(1-k) = k^2 + 2k - 2k^2 = 0$$

$$2k - k^2 = 0 \Rightarrow k(2-k) = 0 \Rightarrow \begin{cases} k=0 \\ k=2 \end{cases}$$

Posizioni reciproche fra rette, circonference; circonf. - parabola

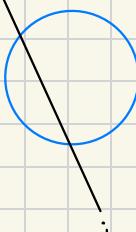


Si dicono esterne

Sistema impossibile

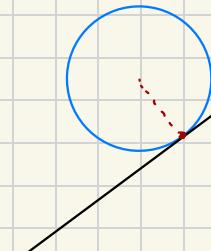
$$\begin{cases} x^2 + y^2 + ax + by + c = 0 \\ ax + by + c = 0 \end{cases} \Rightarrow \text{no sol}$$

Caso in cui sist. ha 0 sol



Si dicono secanti

Il sistema ha due soluzioni



Si dicono tangenti

e il sistema ha esattamente 1 soluzione

Esempio: $C = (1; 0)$

$$r = 1$$

$$(x-1)^2 + (y-0)^2 = 1^2$$

$$\text{retta: } y = 2x + 1$$

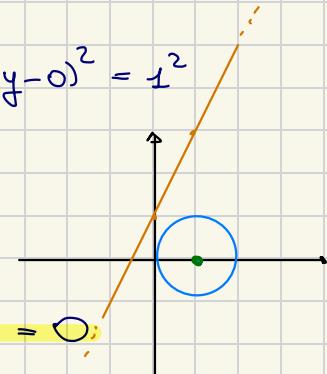
Vedo se sono tg, sec, esterne facendo il sistema

$$\begin{cases} x^2 - 2x + 1 + y^2 = 1 \\ y = 2x + 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 - 2x + 1 + y^2 = 1 \\ y = 2x + 1 \end{cases}$$

$$5x^2 + 2x + 1 = 0$$

$$\Delta = 4 - 20 = -16$$



No soluzioni: esterne

Esercizio: Circ. $x^2 + y^2 - 2x = 0$

Fascio di rette: $y = 2x + k$

Trova k in modo che le rette siano tangenti, esterne o secanti

Imposto il sistema e impongo condizioni sul Δ .

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 2x = 0 \\ y = 2x + k \end{cases} \quad \begin{cases} x^2 + (4x^2 + 4kx + k^2) - 2x = 0 \\ y = 2x + k \end{cases}$$

$$5x^2 + 2(2k-1)x + k^2 = 0$$

$$\text{Tg: } \Delta = 0$$

$$\text{secanti: } \Delta > 0$$

$$\text{esterne: } \Delta < 0$$

Impongo $\Delta \geq 0$ e poi, guardando la soluzione capisco le geometrie

$$\frac{\Delta}{4} \geq 0 \quad \begin{aligned} (2k-1)^2 - 5k^2 &\geq 0 \\ 4k^2 + 1 - 4k - 5k^2 &\geq 0 \\ -k^2 - 4k + 1 &\geq 0 \\ k^2 + 4k - 1 &\leq 0 \end{aligned}$$

$$\frac{\Delta}{4} = 2^2 + 1 = 5 \quad k_1/k_2 = -2 \pm \sqrt{5}$$

$$-2 - \sqrt{5} \leq k \leq -2 + \sqrt{5}$$

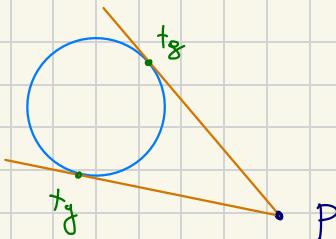
Secanti se $-2 - \sqrt{5} < k < -2 + \sqrt{5}$

Tangenti se $k = -2 \pm \sqrt{5}$

Esterne se $k < -2 - \sqrt{5}$, $k > -2 + \sqrt{5}$

$$x^2 + y^2 - 6x - 4y + 9 = 0 \quad P = (9; 0)$$

Travi rette tg a C circonference che passano per P



(1) Fascio di rette per P.

$$(y - 0) = m(x - 9)$$

$$y = mx - 9m \rightarrow$$

$$y = \frac{3}{4}x + \frac{27}{4} \quad m = \frac{3}{4}$$

(2) Interseco fascio e circ: $\begin{cases} x^2 + y^2 - 6x - 4y + 9 = 0 \\ y = mx - 9m \end{cases}$

$$x^2 + m^2 x^2 + 81m^2 - 18m^2 x - 6x - 4mx + 36m + 9 = 0$$

$$x^2(1+m^2) + x(-18m^2 - 4m - 6) + 81m^2 + 36m + 9 = 0$$

$$x^2(1+m^2) - 2x(9m^2 + 2m + 3) + 81m^2 + 36m + 9 = 0$$

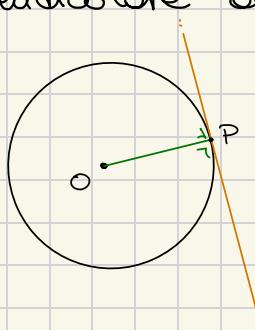
$$\left[\frac{\Delta}{4} = (9m^2 + 2m + 3)^2 - (81m^2 + 36m + 9)(1+m^2) = 0 \right] \text{Cond. si tangenze}$$

$$81m^4 + 4m^2 + 9 + 36m^3 + 12m + 54m^2 - 81m^2 - 36m - 9 - 81m^4 - 36m^3 - 9m^2 = 0$$

$$-32m^2 - 24m = 0 \quad m = 0$$

$$8m(4m + 3) = 0 \quad m = -\frac{3}{4}$$

Teorema: Date una circonferenza C e una retta tangente alla circonferenza in un punto P , il raggio OP è perpendicolare alla retta.



Dim: Per esercizio (fare un conto), ma NON necessario

Esempi di utilizzo: La condizione di tangenza $\Delta=0$ può essere anche espresso in virtù del teorema sopra come

$$\text{dist}(C; \text{retta}) = r$$

centro

Pag 398 n 177

C circonferenze di raggio 1 e centro $C = (0; 2)$

Retta che passano per $P = (2; 3)$

$$(x-0)^2 + (y-2)^2 = 1^2$$

centro

y

(1) Fascio di rette per P : $(y-3) = m(x-2)$

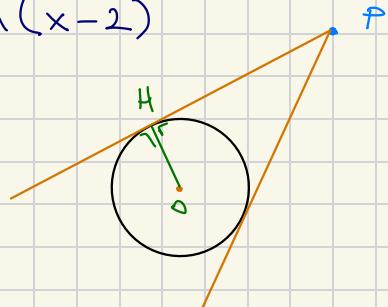
$$mx - 2m + 3 - y = 0$$

a b c

(2) Imposto che OH sia uguale al raggio

$$OH = \text{dist}(O; \text{fascio}) = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} =$$

$$= \frac{|0 - 2 + (-2m + 3)|}{\sqrt{0^2 + (-1)^2}} = 1$$



$$|-2m+1| = 1 \quad \text{La risolvo:}$$

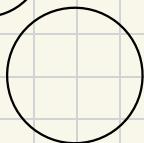
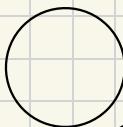
$$(A) \quad -2m+1 = 1 \quad \text{m} \rightarrow \boxed{m=0}$$

$$(B) \quad -2m+1 = -1 \quad \text{m} \rightarrow \boxed{m=1}$$

Intersezioni

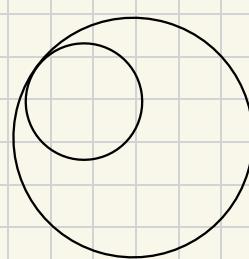
Circ - Circ

↳ Pos. Reciproche (Folc's correction)

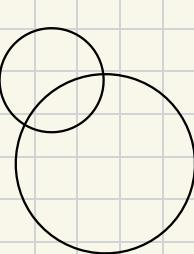
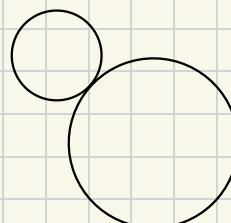
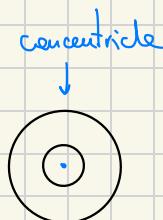


ESTERNE

TANGENTI
INTERNALEMENTE



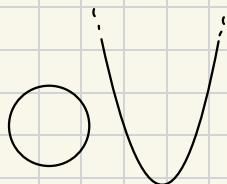
Circ - Parabola



TANGENTI
ESTERNAMENTE

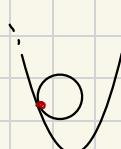
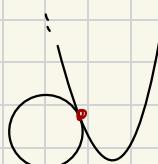
SECANTI

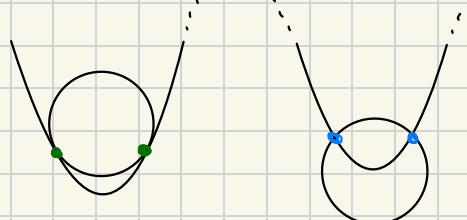
Oss.: Si intersecano in al massimo 2 punti



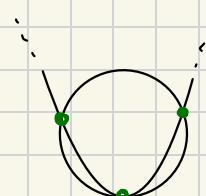
Esterne: 0 pt di intersezione

tangenti in 1 pt

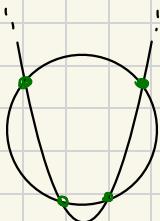




Intersezione in 2 punti.



Intersezione in 3 pti



Intersezione in 4 pti

Può sempre accadere con raggio fisso
e parabola fisso?