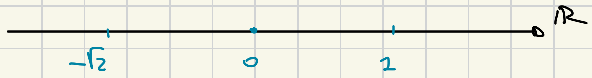
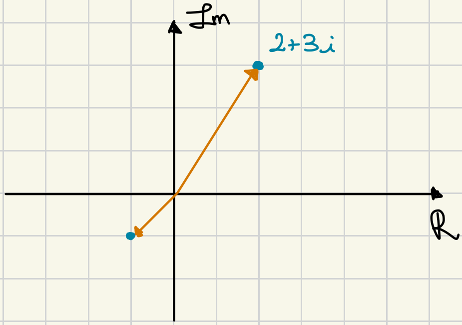
Rappresentazione Cartesiana dei numeri complessi

I num. reali si rappresentano su una retta



I numeri complessi si rappresentano sul piano cartesiano:



L'asse x è l'asse reale
L'asse y è l'asse Immaginario

Piano di Gauss.

$\mathbb{R}$ reale
Im Immag.

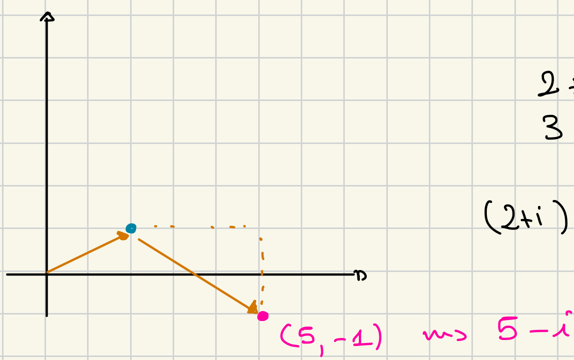
$2+3i$, $-1-i$

Def / Not: Se il numero complesso è $a+bi$ le sue coordinate nel piano cartesiano sono (a,b)

Oss: Il modulo di $a+ib$, cioè $\sqrt{a^2+b^2}$ rappresenta la lunghezza del vettore

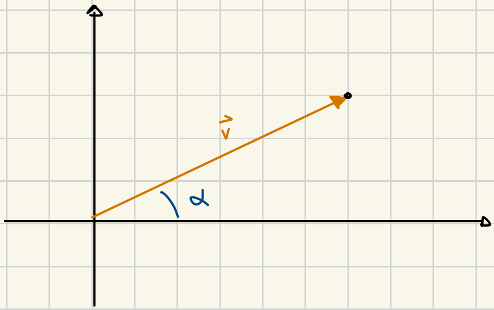
Oss: La somma tra numeri complessi corrisponde alla somma tra vettori comp. per componente

Esempio:



$2+i$
$3-2i$
$\Downarrow$
$(2+i)+(3-2i) = 5-i$

Forma Trigonometrica di un numero complesso



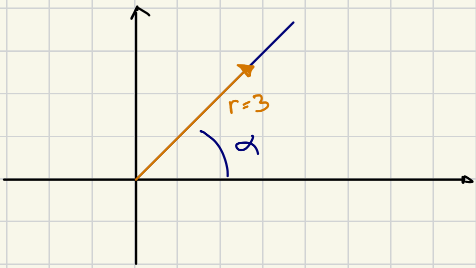
$v = 6 + 3i$

Posso identificare il n.c. v con la lunghezza del vettore e l'angolo α ottenuto rud. il verso positivo dell'asse x fino a raggiungere v.

Def: Dato un angolo α e un numero reale r posso identif. il numero complesso dato dalla coppia (r, α) e tale scrittura è detta rappresentazione polare

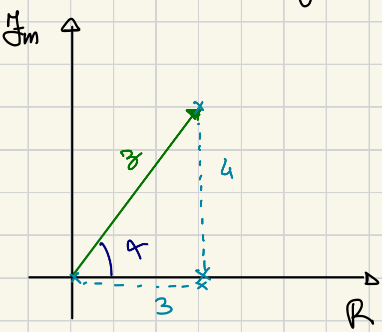
Agg: r è il modulo
α è l'argomento

Esempio: $r = 3$ $\quad \alpha = \frac{\pi}{4}$



Fatto: Si può passare dalla rappresentazione classica (cartesiana) $a+ib$, a quella polare:

Si fa nel seguente modo:



$z = 3 + 4i$

$\Downarrow$

r = quanto è lungo il vettore
α = angolo indicato

$\Downarrow$

$r = \sqrt{3^2 + 4^2}$ $\qquad \alpha = \arctan\left(\frac{4}{3}\right)$

Cambio di rappresentazione

$$a + bi \rightsquigarrow \begin{array}{l} r = \sqrt{a^2+b^2} \\ \alpha = \mathrm{artg}\left(\frac{b}{a}\right) \end{array}$$

$r = 5$

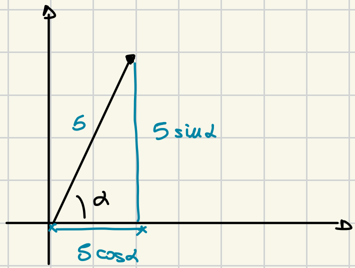
$\alpha = \frac{\pi}{3}$

$\Downarrow$

Trovo le coordinate

$\Downarrow$

$a = 5\cos\frac{\pi}{3}$, $b = 5 \cdot \sin\frac{\pi}{3}$



Cambio di Rappresentazione

$$r\cos\alpha + i\, r\sin\alpha \leftsquigarrow r, \alpha$$

$$= r(\cos\alpha + i\sin\alpha) \ (= re^{i\alpha})$$

Def: Dato un numero complesso $z = a+bi$, il coniugio di z è il numero

$$\bar{z} = a - bi$$

z coniugato

che cambia di segno alla parte immaginaria

Esempio: $\overline{2+3i} = 2-3i$

$\overline{i^2+1+2i} = \overline{-\cancel{1}+\cancel{1}+2i} = -2i$

$\bar{3} = 3$

Esercizio: ▷ Risolvere $x^2+1=0$ nei numeri complessi

$x^2=-1 \rightsquigarrow x=\pm i \rightsquigarrow x_1=i \,,\; x_2=-i \qquad x_1=\overline{x_2}$

▷ $x^2+x+1=0$ nei num complessi

$\Delta=1-4=-3 \qquad \sqrt{-3}=\sqrt{3}\,i$

$x_1/x_2=\dfrac{-1\pm\sqrt{3}\,i}{2}$ — $\dfrac{-1+\sqrt{3}\,i}{2}=-\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i$, $\dfrac{-1-\sqrt{3}\,i}{2}=-\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}i \qquad x_1=\overline{x_2}$

Alert Spicy: Se $ax^2+bx+c=0$ ha soluzioni complesse non reali, allora $x_1=\overline{x_2}$

▷ $x^3-1=0$

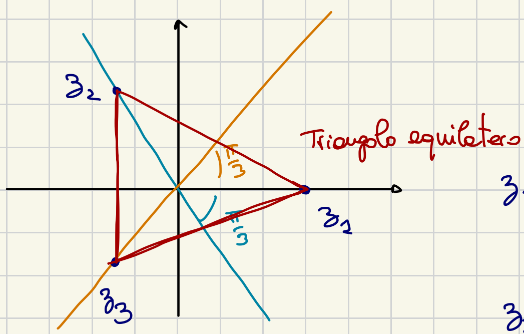
$(x-1)(x^2+x+1)=0$

$z_1=1$

$z_2=-\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i$

$z_3=-\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}i$

Metto z_1, z_2, z_3 nel piano cartesiano complesso



$z_1=1 \rightsquigarrow r_1=1,\; \alpha_1=0$

$z_2=-\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i \rightsquigarrow r_2=1,\; \alpha_2=-\dfrac{\pi}{3}$

$z_3=-\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}i \rightsquigarrow r_3=1,\; \alpha_3=\dfrac{\pi}{3}$

Esercizio: Fare $z^4-1=0$

$z^5-1=0 \qquad \dots \qquad z^n-1=0$

$z^6-1=0$