Settimana: 4

Materia: Matematica
Classe: 5C
Data: 6/10/2025

Argomenti: Esercizi alla lavagna Definizione di Limiti precisa. Esercizio cardine per studio di funzione mediante limiti

n61 pag 1448

$$f(x) = \frac{1}{|x| + 2x^2}$$

(1) Dom(f): $|x| + 2x^2 \neq 0$

$\underbrace{2x^2}_{\geq 0} \neq \underbrace{-|x|}_{\leq 0} \Rightarrow x \neq 0$

$\text{Dom}(f) = \{x \neq 0\}$

(2) f è pari o dispari? $f(x) = f(-x)$

$$f(-x) = \frac{1}{|-x| + 2(-x)^2} = \frac{1}{|x| + 2x^2} = f(x)$$

Pari

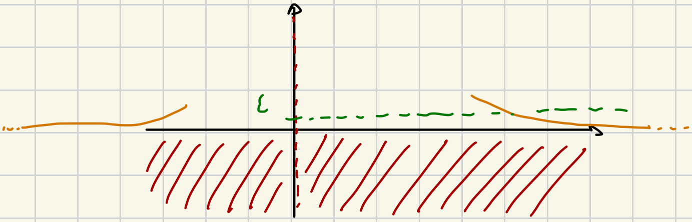
=

=

Dispari: $-f(-x) = -\frac{1}{|-x| + 2(-x)^2} = -\frac{1}{|x|+2x^2}$

che è diverso da f(x) perché c'è il − davanti.

(3) $\inf(f) = 0$. Intuiscilo e verificalo. $f(x) = \frac{1}{|x|+2x^2}$



(1) 0 è minorante

$\frac{1}{|x|+2x^2} > 0$ Si sempre vero.

(2) 0 è il più grande dei minoranti:

Sia $\varepsilon > 0$, Se la diseq $\frac{1}{|x|+2x^2} \geq \varepsilon$ NON è sempre vera, ε NON è un minorante

$$\frac{1 - \varepsilon|x| - \varepsilon 2x^2}{|x| + 2x^2} \geq 0$$

Per semplicità $x \geq 0$
Noto che D sempre positivo

$$1 - \varepsilon x - 2\varepsilon x^2 \geq 0$$

$$2\varepsilon x^2 + \varepsilon x - 1 \leq 0 \qquad \Delta = \varepsilon^2 + 8\varepsilon$$

$$x_1 / x_2 = \frac{-\varepsilon \pm \sqrt{\varepsilon^2 + 8\varepsilon}}{4\varepsilon} \rightsquigarrow \boxed{x_1 \leq x \leq x_2}$$

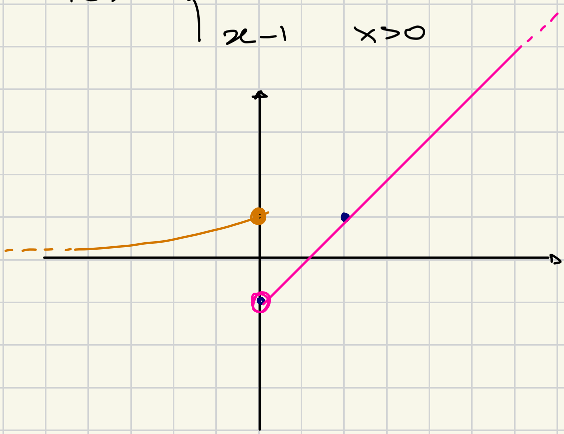
$\rightsquigarrow$ NON è sempre vera $\Rightarrow$ ε NON è minorante

---

Es 58

$$f(x) = \begin{cases} e^x & x \leq 0 \\ x - 1 & x > 0 \end{cases}$$

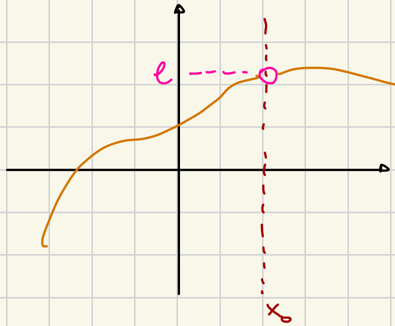
1) Limit. sup?
2) Limit inf ?
3) Ha minimo?



x	y
0	-1
2	1

$\rightsquigarrow$ Non è limitata superiormente
$\rightsquigarrow$ $\mathrm{Inf}(f) = -1$
$\rightsquigarrow$ Non ha minimo

Back to limiti



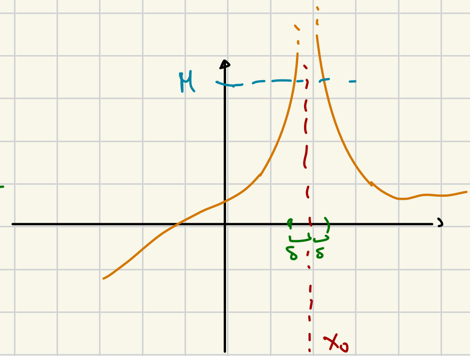
$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \ell \quad \text{se}$$

$\forall \varepsilon>0,\ \exists \delta>0$ t.c. $|x-x_0|<\delta \Rightarrow |f(x)-\ell|<\varepsilon$

Def. Diremo che $f(x)$ ha un asintoto verticale se vale che

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \pm\infty$$

Si appiattisce a $x = x_0$



Scriveremo così se:

$\forall M>0,\ \exists \delta>0$ t.c. $|x-x_0|<\delta \Rightarrow f(x)>M$ (caso $+\infty$)

Def: Diremo che $f(x)$ ha un asintoto orizzontale (a $+\infty$) se

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = \ell$$

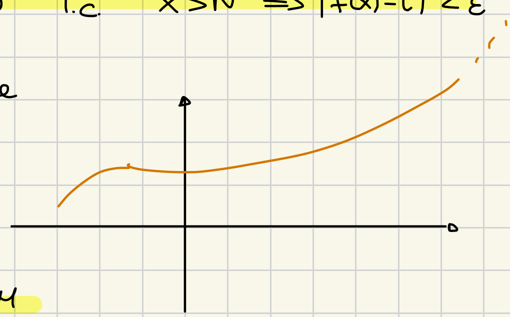
f si appiattisce alla retta $y=\ell$

Scriveremo in questo modo se:

$\forall \varepsilon>0,\ \exists N>0$ t.c. $x>N \Rightarrow |f(x)-\ell|<\varepsilon$

Def: Definisco il limite ∞ a $+\infty$ e scrivo

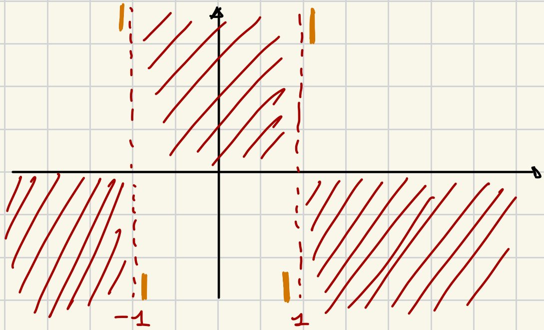
$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = +\infty \quad \text{se}$$



$\forall M>0,\ \exists N>0$ t.c. $x>N \Rightarrow f(x)>M$

Esempio:

$$f(x) = \frac{e^{-x}+1}{x^2-1}$$



(1) $\mathrm{Dom}(f) = \{x \neq \pm 1\}$

(2) Asse y: $x=0$ $\quad f(0) = \frac{2}{-1} = -2$

$A = (0,-2)$

Asse x: $y=0$ $\quad \frac{e^{-x}+1}{\cancel{x^2-1}} = 0 \quad e^{-x} = -1$ Mai

(3) Segno: $\frac{e^{-x}+1}{x^2-1} \geq 0$ $\quad$ N: $e^{-x}+1 \geq 0$ sempre
D: $x < -1 \vee x > 1$ $\quad \leadsto \boxed{x < -1 \vee x > -1}$

(4) Limiti: Si fanno agli estremi dei C.E. e a $\pm\infty$

$$\lim_{x \to 1^{+}} f(x) = \lim_{x \to 1^+} \frac{e^{-x}+1}{x^2-1} = +\infty$$

↳ Mi sto avvicinando da destra e il limite si chiama limite destro

$$\lim_{x \to 1^{-}} f(x) = \lim_{x \to 1^-} \frac{e^{-x}+1}{x^2+1} = -\infty$$

↳ Limite sinistro

$$\lim_{x \to (-1)^+} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \to (-1)^-} f(x) = +\infty$$

Per casa