

Settimana: 6

Argomenti:

Materia: Matematica

Classe: 5A

Data: 20/10/25

Quesito 116

$$f(x) = \begin{cases} \frac{|x^2+x|}{x} & x \neq 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases}$$

(1) È continua in $x=0$?

(2) $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) \cdot \ln(x+1)$ se esiste

Faccio

da sx

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{|x^2+x|}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{|x||x+1|}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} [-|x+1|] = -1$$

da dx

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{|x^2+x|}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{|x||x+1|}{x} = 1$$

$$f(0) = 1$$

$\mathbb{N} \cup \mathbb{N}$ è continua

(2) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x^2+x|}{x} \ln(x+1) = 0$

Quesito 118

$$f(x) = \sqrt[3]{x^3 - x}$$

Ha asintoti?

C.E.: non c'è C.E. $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ no asintoti verticali

Per gli asintoti orizzontali si fanno i limiti a $\pm\infty$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[3]{x^3 - x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[3]{x^3 \left(1 - \frac{1}{x^2}\right)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \sqrt[3]{1 - \frac{1}{x^2}} = +\infty$$

\downarrow
 $+\infty$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt[3]{x^3 - x} = \dots = -\infty$$

Potrebbero esistere gli **asintoti obliqui** è una retta su cui si spieccica la f_x . Una retta è della forma



$$y = mx + q$$

Per trovare m si calcola, se esiste

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = m$$

Per trovare q , se m esiste, si calcola $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - mx) = q$

L'asintoto obliquo, per esistere, deve avere m e q finiti. Altrimenti NON esiste

$$f(x) = \sqrt[3]{x^3 - x}$$

Provo asintoto obliquo:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[3]{x^3 - x}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[3]{1 - \frac{1}{x^2}}}{1} = 1 = m$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - mx] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\sqrt[3]{x^3 - x} - x \right] \cdot \frac{\sqrt[3]{(x^3 - x)^2} + x^2 + x \sqrt[3]{x^3 - x}}{\sqrt[3]{(x^3 - x)^2} + x^2 + x \sqrt[3]{x^3 - x}}$$

$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + b^2 + ab)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 - x - x^3}{\sqrt[3]{(x^3 - x)^2} + x^2 + x \sqrt[3]{x^3 - x}} = 0 = q$$

Asintoto obliquo

$$[y = x]$$

Pag 1581 n. 95

$$f(x) = \frac{(x-a)(x-b)}{x-c}$$

$$a, b, c \in \mathbb{R}, \quad a > 0, \quad x \neq c$$

Trova a, b, c (i) Asintoto verticale $x=2$

(ii) Pesse per $A = (1, 0)$

(iii) Un asintoto obliquo passe per $B = (0, 3)$

(i) C.E.: $x \neq c \Rightarrow \boxed{c=2}$ Unico asintoto vert. poss.

(ii) $\boxed{0 = (1-a)(1-b)}$

(iii) Per asintoto obliquo:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x-a)(x-b)}{x(x-2)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\cancel{x^2} \left(1 - \frac{a}{x}\right) \left(1 - \frac{b}{x}\right)}{\cancel{x^2} \left(1 - \frac{2}{x}\right)} = 1 = m$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - x &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x-a)(x-b)}{x-2} - x = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\cancel{x^2} - ax - bx + ab - \cancel{x^2} + 2x}{x-2} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\cancel{x} [(2-a-b) + \frac{ab}{x}]}{\cancel{x} (1 - \frac{2}{x})} = 2-a-b = q \end{aligned}$$

Asintoto obliquo: $y = x + (2-a-b)$

\downarrow

B

\rightsquigarrow

$$\boxed{3 = 2-a-b}$$

$$\begin{cases} (1-a)(1-b) = 0 \\ a+b = -1 \end{cases} \quad \begin{cases} (1-a)(1+1+a) = 0 \rightsquigarrow (1-a)(2+a) = 0 \\ b = -1-a \end{cases}$$

$a=1 \leftarrow$ Accettabile
 $a=-2$

\downarrow

$$b = -2$$

$$f(x) = \frac{(x-1)(x+2)}{x-2}$$

Disegnare grafico $f(x)$ (e di $g(x) = \frac{1}{f(x)}$ Per caso)

(1) Dom(f): $x \neq 2$

$$f: \mathbb{R} \setminus \{2\} \longrightarrow \mathbb{R}$$

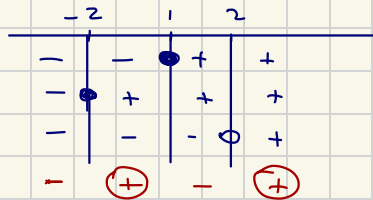
(2) Inters Asse x $y=0$ $\frac{(x-1)(x+2)}{x-2} = 0$ $x=1, -2$

$$A=(1,0), C=(-2,0)$$

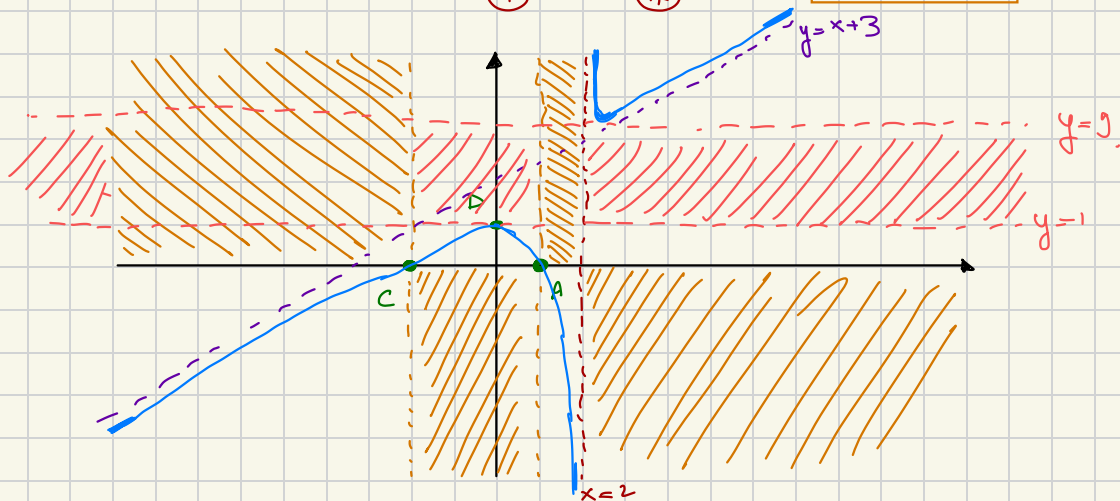
Asse y: $x=0$ $y = \frac{(-1)(2)}{-2} = 1$ $D=(0,1)$

(3) Segno: $f(x) \geq 0$ $\frac{(x-1)(x+2)}{x-2} \geq 0$

$$\begin{array}{ll} N1 \geq 0 & x \geq 1 \\ N2 \geq 0 & x \geq -2 \\ D > 0 & x > 2 \end{array}$$



$$\begin{array}{c} -2 \leq x \leq 1 \\ \vee \\ x > 2 \end{array}$$



(4) Limiti $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = +\infty$ $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = -\infty$ Asintoto obliquo: $y = x+3$

(3bis) $\text{Im}(f)$: $y = \frac{(x-1)(x+2)}{x-2}$ e si ricava x in f_z di y .

$$xy - 2y = x^2 - x + 2x - 2$$

$$x^2 + x(1-y) + 2y - 2 = 0$$

Per avere soluzioni devo imporre $\Delta \geq 0$

$$(1-y)^2 - 4(2y-2) \geq 0$$

$$y^2 - 2y + 1 - 8y + 8 \geq 0$$

$$y^2 - 10y + 9 \geq 0 \quad (y-9)(y-1) \geq 0 \quad y=1,9$$

$$y \leq 1 \quad \vee \quad y \geq 9$$

$$\text{Im}(f) = (-\infty; 1] \cup [9; +\infty)$$