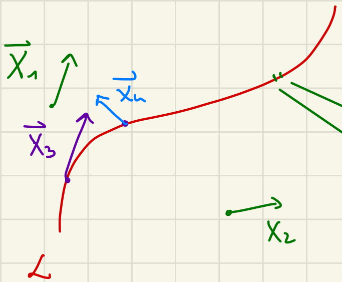
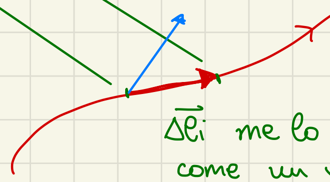
Def. Data $\mathcal{L}$ una linea nello spazio e $\vec{X}$ un campo vettoriale, la circuitazione di $\vec{X}$ lungo $\mathcal{L}$ è una quantità numerica che si indica con



$$\Gamma_{\mathcal{L}}(\vec{X})$$

Γ = Gamma
γ = gamma

E si calcola nel seguente modo:



$\vec{X_i}$ costante perché $\vec{\Delta l_i}$ piccolo

$\vec{\Delta l_i}$ me lo immagino come un vettore perché piccolissimo.

1) Si fissa un verso di percorrenza di $\mathcal{L}$

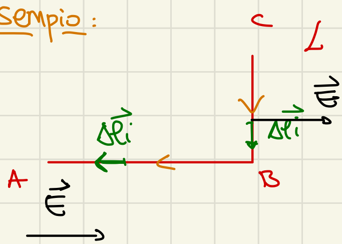
2) Si divide $\mathcal{L}$ in pezzi piccolissimi $\vec{\Delta l_i}$, in modo che in quei pezzetti considero il campo vettoriale costante

3) Si calcola il prodotto scalare di ogni pezzettino $\vec{X_i} \cdot \vec{\Delta l_i}$

4) La circuitazione è la somma di tutti questi pezzettini

$$\Gamma_{\mathcal{L}}(\vec{X}) = \sum_{i=1}^{n} \vec{X_i} \cdot \vec{\Delta l_i}$$
$$= \vec{X}_1 \cdot \vec{\Delta l}_1 + \vec{X}_2 \cdot \vec{\Delta l}_2 + \dots + \vec{X}_n \cdot \vec{\Delta l}_n$$

Esempio:



$E = 10 \frac{N}{C}$ costante

$AB = 2m$
$BC = 1m$

$\Gamma_{\mathcal{L}}(\vec{E}) = ?$

Tratto orizzontale AB: $\sum_{i=1}^{n} \vec{E}_i \cdot \vec{\Delta l_i} = \sum_{i=1}^{n} \vec{E} \cdot \vec{\Delta l_i}$

$$= \sum_{i=1}^{n} E \cdot \Delta l_i \cdot \cos(\pi) = \sum_{i=1}^{n} E \cdot \Delta l_i \, (-1)$$

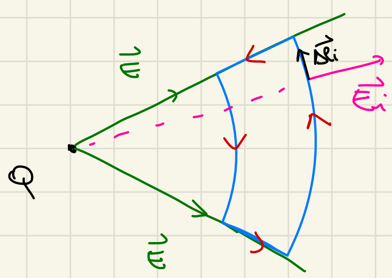
$$= -\left[E \cdot \Delta l_1 + E \cdot \Delta l_2 + \dots + E \cdot \Delta l_n\right]$$

$$= -E\left[\Delta l_1 + \Delta l_2 + \dots + \Delta l_n\right] = -E \cdot AB$$

Su BC: $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \vec{E}_i \cdot \vec{\Delta l_i} = \sum_{i=1}^{n} \vec{E} \cdot \vec{\Delta l_i} = \sum_{i=1}^{n} E \cdot \Delta l_i \cdot \underbrace{\cos\left(\tfrac{\pi}{2}\right)}_{=0} = 0$

$$\Gamma_L(\vec{E}) = \Gamma_{AB}(\vec{E}) + \Gamma_{BC}(\vec{E}) = -E \cdot AB + 0 = -E \cdot AB$$

Esempio:



Calcolare $\Gamma_L(\vec{E})$:

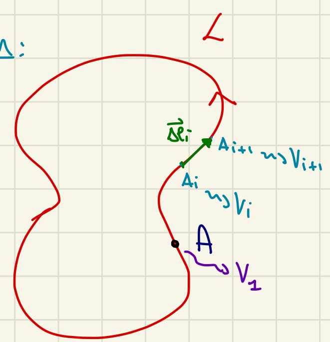
1) Nei tratti curvi Γ_{Arco} è 0

2) Usare il teorema che sto per dimostrare

Teorema: Data una curva chiusa L, la circuitazione del campo elettrico lungo la curva vale

$$\Gamma_L(\vec{E}) = 0$$

Dim:



Metto una carica di prova su A e faccio fare il giro completo.

Spezziamo tutto il percorso in tratti $\vec{\Delta l_i}$ e calcolo la circuitazione

$$\Gamma_L(\vec{E}) = \sum_{i=1}^{n} \vec{E_i} \cdot \vec{\Delta l_i}$$

Idea: far comparire in queste formule il potenziale elettrico. Ricordiamo che la differenza di potenziale vale

$$-\frac{W_{A_i \to A_{i+1}}}{q} = \Delta V_i$$

$$W_{A_i \to A_{i+1}} = \vec{F}_i \cdot \vec{\Delta l_i} = q \cdot \vec{E}_i \cdot \vec{\Delta l_i}$$

Dunque

$$\Delta V_i = -\frac{q \cdot \vec{E}_i \cdot \vec{\Delta l_i}}{q} = -\vec{E}_i \cdot \vec{\Delta l_i}$$

Dunque $\vec{E}_i \cdot \vec{\Delta l_i} \boxed{=} -\Delta V_i = -(V_{i+1} - V_i) \boxed{=} V_i - V_{i+1}$

$$\Gamma_\gamma(\vec{E}) = \sum_{i=1}^{n} \vec{E}_i \cdot \vec{\Delta l_i} = \underline{\vec{E}_1 \cdot \vec{\Delta l_1}} + \underline{\vec{E}_2 \cdot \vec{\Delta l_2}} + \dots + \vec{E}_n \cdot \vec{\Delta l_n}$$

$$\boxed{=} \underline{(V_1 - \cancel{V_2})} + \underline{(\cancel{V_2} - \cancel{V_3})} + (\cancel{V_3} - V_4) + \dots + (V_n - V_{n+1})$$

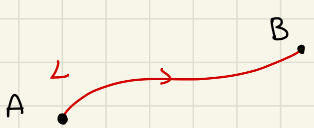
$$= V_1 - V_{n+1}$$

Dato che la curva è chiusa vale che $V_1 = V_{n+1}$ poiché il potenziale dipende solo dal pto.

$$\Rightarrow \Gamma_\gamma(\vec{E}) = V_1 - V_{n+1} = 0$$

□

Oss importantissima: La dim precedente ci dice che



$$\Gamma_\gamma(\vec{E}) = V_A - V_B$$