Settimana: 15

Materia: Matematica
Classe: 5A
Data: 17/01/26

Pag 1712 n. 85

1) Verifica le Hp di Rolle ?
2) Se si, trova un max o un min

$f(x) = x^2 - 5x + 3$

$f: [-2;7] \longrightarrow \mathbb{R}$

(1) a) f è continua in $[-2;7]$? Si banalmente
b) f è derivabile in $(-2;7)$?

↳ $f'(x) = 2x - 5$ Nessun problema

c) $f(-2) = 4 + 10 + 3 = 17$
$f(7) = 49 - 35 + 3 = 17$] uguali

Si, verifica Rolle ✓

Per trovare il punto in cui $f'(x) = 0$; lo impongo $2x - 5 = 0$ $x = \frac{5}{2}$

n 101

$f: [0;1] \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = |-2x+1|$

Verifica Rolle ? (a) Continua in $[0;1]$?

Caso a: $-2x+1 \geq 0$, $x \leq \frac{1}{2}$

↳ $f(x) = -2x+1$

Caso b: $-2x+1 \leq 0$, $x \geq \frac{1}{2}$

$f(x) = 2x-1$

$$f(x) = \begin{cases} -2x+1 & 0 \le x \le \frac{1}{2} \\ 2x-1 & \frac{1}{2} \le x \le 1 \end{cases}$$

Il valore assoluto l'ho fatto diventare una f_z a tratti

La funzione è banalmente continua ovunque tranne che in $x = \frac{1}{2}$
Per il pto $\frac{1}{2}$ faccio lim sinistro e destro

$$\lim_{x \to \frac{1}{2}^-} f(x) = \lim_{x \to \frac{1}{2}^-} (-2x+1) = 0$$

$$\lim_{x \to \frac{1}{2}^+} f(x) = \lim_{x \to \frac{1}{2}^+} (2x-1) = 0$$

Continua!

(2) <u>Derivabilità</u>:

$$f'(x) = \begin{cases} -2 & 0 < x < \frac{1}{2} \\ 2 & \frac{1}{2} < x < 1 \end{cases}$$

La derivata è questa nei punti NON problematici.

Adesso per vedere se esiste $f'(\frac{1}{2})$ faccio i limiti della derivata a dx e sx (Attenzione, non funziona sempre!)

$$f'_+\left(\tfrac{1}{2}\right) = \lim_{x \to \frac{1}{2}^+} f'(x) = \lim_{x \to \frac{1}{2}^+} 2 = 2$$

$$f'_-\left(\tfrac{1}{2}\right) = \lim_{x \to \frac{1}{2}^-} f'(x) = \lim_{x \to \frac{1}{2}^-} (-2) = -2$$

Dato che $f'_+(\frac{1}{2}) \neq f'_-(\frac{1}{2})$, f <u>non</u> è derivabile in $\frac{1}{2}$, e non vale quindi Rolle.

33 $\quad f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \qquad f(x) = e^x \underbrace{\sqrt[3]{(x-1)^2}}_{\to (x-1)^{\frac{2}{3}}}$

1) faccio la derivata dove posso

$$f'(x) = e^x \cdot \sqrt[3]{(x-1)^2} + e^x \, \frac{2}{3} \, (x-1)^{-\frac{1}{3}}.$$

$$= e^x \left[\sqrt[3]{(x-1)^2} + \frac{2}{3\sqrt[3]{x-1}} \right]$$

$$= e^x \left[\frac{x+1}{3\sqrt[3]{x-1}} \right]$$

$f'(x)$ no problema tranne che in $\boxed{x=1}$

Per vedere cosa succede in $x=1$ si fa con la definizione e si vede che succede

$$f'_-(1) = \lim_{h\to 0^-} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{e^{1+h}\sqrt[3]{h^2} - e^1 \cdot 0}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0^-} \frac{e^{1+h}}{\sqrt[3]{h}} = -\infty$$

$$f'_+(1) = \lim_{h\to 0^+} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \dots = \lim_{h\to 0^+} \frac{e^{1+h}}{\sqrt[3]{h}} = +\infty$$

$\boxed{x = 1 \text{ Cuspide}}$

136 $f(x) = 2e^x + x \qquad f: [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$

Lagrange: (a) $f: [a;b] \longrightarrow \mathbb{R}$ continua
(b) $f: (a;b) \longrightarrow \mathbb{R}$ derivabile

$$\Rightarrow \exists c \in (0,1) \text{ t.c. } \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c)$$

(a) f è continua? Si
(b) f è derivabile $\rightsquigarrow f'(x) = 2e^x + 1$ derivabile ovunque

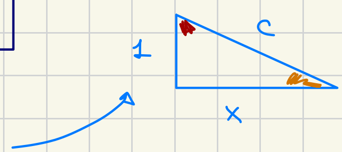
Vale Lagrange cioè posso risolvere l'equazione:

$$f'(x) = \frac{f(1)-f(0)}{1-0} = \frac{2e+1-2}{1}$$

$$2e^x + 1 = 2e - 1$$

$$2e^x = 2e - 2 \rightsquigarrow e^x = e - 1$$

$$\boxed{x = \ln(e-1)}$$



176: $f(x) = \operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{x}\right) \qquad \mathrm{Dom}(f) = \{x \neq 0\}$

$$f: (-\infty;0) \cup (0;+\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$$

Dimostra che la funzione è costante in $(-\infty;0)$ e quanto vale?
" " in $(0;+\infty)$ e quanto vale?

Invoco Lagrange: Derivo.

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{1+\left(\frac{1}{x}\right)^2} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right)$$

$$= \frac{1}{1+x^2} + \frac{\cancel{x^2}}{1+x^2}\left(-\frac{1}{\cancel{x^2}}\right) = 0$$

Dato che $f'(x) = 0$ la f_2 è costante e vale

$\frac{\pi}{2}$ in $(0;+\infty)$ (Nicolò)

$-\frac{\pi}{2}$ in $(-\infty;0)$

252 Per quali k la funzione $f(x) = -x^3 + (2k-1)x$ è SEMPRE decrescente in $\mathbb{R}$?

Funzione decrescente se $f'(x) < 0$

$$f'(x) = -3x^2 + (2k-1)$$

Deve essere vero sempre che $-3x^2 + 2k - 1 < 0$

$$x^2 > \frac{2k-1}{3} \quad \text{Sempre}$$

È sufficiente che $\frac{2k-1}{3} < 0 \rightsquigarrow 2k-1 < 0 \rightsquigarrow k < \frac{1}{2}$