Pag 688 n 99

$f(x) = a \cdot \log_3(2x+b)$ $\quad a, b \neq 0$

(1) f passa per $(0,0)$ e $(1,9)$. Trova a e b:

$$\begin{cases} 0 = a \cdot \log_3(b) \\ 9 = a \cdot \log_3(2+b) \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0 = \log_3(b) \leadsto b = 1 \\ 9 = a \cdot \log_3(3) \leadsto a = 9 \end{cases}$$

(Semplifico a poiché $a \neq 0$)

$$f(x) = 9 \log_3(2x+1)$$

(2) f è invertibile?

Calcolo il dominio $\quad Dom(f) = \{2x+1>0\} = \{x > -\frac{1}{2}\}$

f iniettiva? $\quad f(x_1) = f(x_2) \quad \ldots\ldots \quad$ Spero $\ldots \quad x_1 = x_2$

$$\cancel{9} \log_3(2x_1+1) = \cancel{9} \log_3(2x_2+1) \leadsto \text{inj}$$

$$\cancel{2}x_1 + \cancel{1} = \cancel{2}x_2 + \cancel{1} \leadsto x_1 = x_2 \quad \text{Iniettiva}$$

Supponiamo $f: (-\frac{1}{2}, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$

f suriettiva? $\quad \forall y \in \mathbb{R} \quad \exists x \in (-\frac{1}{2}; +\infty) \text{ t.c. } f(x) = y$

Operativamente $\quad y = 9\log_3(2x+1) \quad$ e ricavo x in funzione di y. Se non c'è cond. di esistenza, è suriettiva

$$\log_3(2x+1) = \frac{y}{9} \leadsto 3^{\frac{y}{9}} = 2x+1$$

$$\boxed{x = \frac{3^{\frac{y}{9}} - 1}{2}}$$

Non ci sono C.E. $\Rightarrow$ Suriettiva
Abbiamo in automatico la funzione inversa

$$f^{-1}: \mathbb{R} \longrightarrow \left(-\tfrac{1}{2}; +\infty\right)$$

t.c. $f^{-1}(y) = \dfrac{3^{y/9} - 1}{2}$

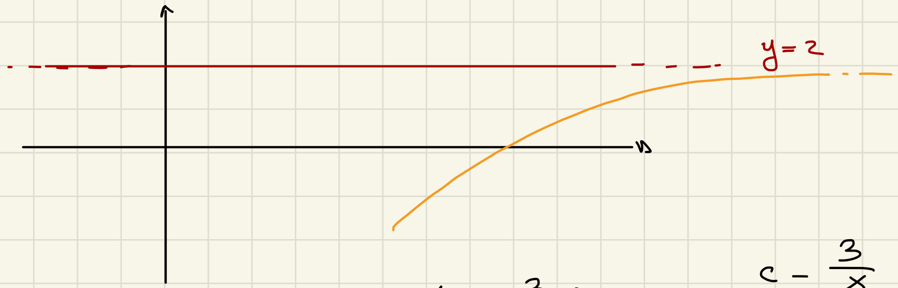
Per Anxhela: Se rispondi bene fate pace con Emma

$$f \circ f^{-1}(y) = y \qquad id: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$f^{-1} \circ f\,(x) = x \qquad id: \left(-\tfrac{1}{2}; +\infty\right) \longrightarrow \left(-\tfrac{1}{2}; +\infty\right)$$

(c) $g(x) = \dfrac{cx-3}{x+d}$ Trova c e d t.c.
- g passa per $(0,-3)$
- Asintoto $y = 2$

$$-3 = \frac{c \cdot 0 - 3}{0 + d} \Rightarrow -3 = \frac{-3}{d} \rightsquigarrow d = 1$$



$$g(x) = \frac{cx-3}{x+1} = \frac{\cancel{x}\left(c - \frac{3}{x}\right)}{\cancel{x}\left(1 + \frac{1}{x}\right)} = \frac{c - \frac{3}{x}}{1 + \frac{1}{x}}$$

Se x diventa "mooolto, mooolto grande" $\frac{3}{x}$ e $\frac{1}{x}$ sono "all'incirca" 0
Dunque possiamo pensare che $g(x) = 2$ quando $x \to +\infty$

ovvero $\quad 2 = \dfrac{c}{1} \Rightarrow \boxed{c = 2} \Rightarrow g(x) = \dfrac{2x-3}{x+1}$

(d) $h(x) = \log_g(g(x))$. Invertibile? e l'inverse?

$$h(x) = \log_g\left(\frac{2x-3}{x+1}\right) \qquad \mathrm{Dom}(h) = \left\{ x < -1 \ \vee \ x > \frac{3}{2} \right\}$$

$$h : (-\infty; -1) \cup \left(\frac{3}{2}; +\infty\right) \longrightarrow \mathbb{R}$$

<u>h iniettiva?</u> $h(x_1) = h(x_2)$

$$\log_g\left(\frac{2x_1-3}{x_1+1}\right) = \log_g\left(\frac{2x_2-3}{x_2+1}\right) \qquad \rightsquigarrow \text{inj}$$

$$(2x_1-3)(x_2+1) = (2x_2-3)(x_1+1)$$

$$\cancel{2x_1x_2} + 2x_1 - 3x_2 - \cancel{3} = \cancel{2x_1x_2} + 2x_2 - 3x_1 - \cancel{3}$$

$$5x_1 = 5x_2 \quad \rightsquigarrow \quad x_1 = x_2 \qquad \underline{\text{Iniettiva}}$$

<u>h suriettiva?</u>

$$y = \log_g\left(\frac{2x-3}{x+1}\right) \quad \rightsquigarrow \quad g^y = \frac{2x-3}{x+1}$$

$$\rightsquigarrow (x+1)g^y = 2x-3$$

$$x(g^y - 2) = -3 - g^y$$

$$x = -\frac{g^y+3}{g^y-2}$$

CE. $g^y - 2 \neq 0 \qquad g^y \neq 2 \qquad y \neq \log_g 2$

$$\mathrm{Im}(h) = \mathbb{R} \setminus \{\log_g 2\}$$

Ho tolto l'unico pto non raggiunto

$$h : (-\infty; -1) \cup \left(\frac{3}{2}; +\infty\right) \longrightarrow \mathbb{R} \setminus \{\log_g 2\} \quad \text{suriettiva}$$