Settimana: 5

Materia: Matematica
Classe: 5C
Data: 13/10/2025

Argomenti: Esercizi sui limiti; tipologie diverse da quelle già osservate. Esercizi in Autonomia. Tutti i limiti notevoli, Artificio del Bernoulli. Esercizi in classe sui limiti. Def di continuità ed esercizi.

Pag 1530

n 240
$$\lim_{x\to 5^+}\frac{\sqrt{x^2-5x}}{\sqrt{x^2-25}} = \lim_{x\to 5^+}\frac{\sqrt{x(x-5)}}{\sqrt{(x-5)(x+5)}}$$

Scompongo per vedere dove il 5 dà fastidio

$$= \lim_{x\to 5^+}\sqrt{\frac{x\cancel{(x-5)}}{\cancel{(x-5)}(x+5)}} = \sqrt{\frac{5}{10}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

n 242
$$\lim_{x\to -1}\frac{\sqrt{x^2+3}-2}{3-\sqrt{8-x^3}} =$$

Sistemo le radici "Somma . differenze"

Remind. $a^3+b^3=(a+b)(a^2+b^2-ab)$

$$\lim_{x\to -1}\frac{\sqrt{x^2+3}-2}{3-\sqrt{8-x^3}}\cdot\frac{\sqrt{x^2+3}+2}{\sqrt{x^2+3}+2}\cdot\frac{3+\sqrt{8-x^3}}{3+\sqrt{8-x^3}}$$

$$\lim_{x\to -1}\frac{x^2+3-4}{9-(8-x^3)}\cdot\frac{3+\sqrt{8-x^3}}{\sqrt{x^2+3}+2} = \lim_{x\to -1}\frac{x^2-1}{x^3+1}\cdot\frac{3+\sqrt{8-x^3}}{\sqrt{x^2+3}+2}$$

Problema sopra

$$\lim_{x\to -1}\frac{\overbrace{(x-1)}^{\to -2}\cancel{(x+1)}}{\cancel{(x+1)}\underbrace{(x^2+1-x)}_{\to 3}}\cdot\frac{\overbrace{3+\sqrt{8-x^3}}^{\to 6}}{\underbrace{\sqrt{x^2+3}+2}_{\to 4}} = -1$$

n 243
$$\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x^2-2x+9}-3}{x-2} = \lim_{x\to 2}\frac{x^2-2x}{x-2}\cdot\frac{1}{\sqrt{x^2-2x+9}+3}$$

$$= \lim_{x\to 2}\frac{x(x-2)}{x-2}\cdot\frac{1}{\sqrt{x^2-2x+9}+3} = \frac{1}{3}$$

n. 266 $\lim_{x \to -3^-} \frac{x+3}{x^3+9x^2+27x+27} = \lim_{x \to -3^-} \frac{x+3}{(x+3)^3} =$

Ruffini: $p(x) = x^3 + 9x^2 + 27x + 27$

$p(-3) = 0$

	1	9	27	27
-3		-3	-18	-27
	1	6	9	0

DEVE VENIRE 0

$p(x) = (x - (-3))\,[x^2 + 6x + 9]$

Abbasso di 1 il grado

$(x+3)(x^2+6x+9) =$

$(x+3)^3$

$= \lim_{x \to -3^-} \frac{1}{\underbrace{(x+3)^2}_{\to 0}} = +\infty$

n. 267 $\lim_{x \to -\infty} \frac{x - 2x^3 + x^5 + x^7}{x^2 - 2x^4 + 10x^6} = \lim_{x \to -\infty} \frac{\underbrace{x^{\cancel{7}}}_{-\infty}\overbrace{\left(\frac{1}{x^6} - \frac{2}{x^4} + \frac{1}{x^2} + 1\right)}^{1}}{\cancel{x^6}\underbrace{\left(\frac{1}{x^4} - \frac{2}{x^2} + 10\right)}_{10}} = -\infty$

n. 303 $\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{2^x - 2^{3+2x}} =$

Sostituzione $\left[\begin{array}{ll} 2^x = t & t = \log_2 x \\ x \to +\infty & t \to +\infty \end{array}\right]$

$\lim_{t \to +\infty} \frac{1}{t - 8t^2} = \lim_{t \to +\infty} \frac{1}{\underbrace{t^2}_{+\infty}\underbrace{\left(\frac{1}{t} - 8\right)}_{-8}} = 0^-$

Limiti Notevoli. Volgono i seguenti limiti notevoli

(1) $$\boxed{\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1}$$

(2) $$\boxed{\lim_{x \to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}}$$

(3) $$\lim_{x \to \pm\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$$ ← Def. del numero di Nepero $e \approx 2{,}71$

(4) $$\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$$

(5) $$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

n 371 pag 1535

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x - \operatorname{tg} x}{6x^3} =$$

Scompattiamo tutto e cerchiamo di manipolare in modo che compaiano i lim. notevoli

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x - \frac{\sin x}{\cos x}}{6x^3} = \lim_{x \to 0} \frac{\cos x \sin x - \sin x}{6x^3 \cos x} =$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x (\cos x - 1)}{6x^3 \cos x} = \lim_{x \to 0} \underbrace{\frac{1}{6}}_{\downarrow\, 1/6} \cdot \underbrace{\frac{\sin x}{x}}_{\downarrow\, 1} \cdot \underbrace{\frac{\cos x - 1}{x^2}}_{\downarrow\, -1/2} \cdot \underbrace{\frac{1}{\cos x}}_{\searrow\, 1} = -\frac{1}{12}$$

Dim. Limiti notevoli

(1) Già fatto

(2) $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \lim_{x\to 0} \overbrace{\frac{(1-\cos x)(1+\cos x)}{x^2 \quad\quad 1+\cos x}}^{\text{Faccio comp.}} =$ $\quad \sin^2 x + \cos^2 x = 1$

$$= \lim_{x\to 0} \underbrace{\frac{\sin^2 x}{x^2}}_{\to 1 \text{ Lim not}} \cdot \underbrace{\frac{1}{1+\cos x}}_{\to \frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$$

(3) Prendo come def., non c'è nulla da fare $\lim_{x\to +\infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$

(4) $\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{x}\ln(1+x) = \lim_{x\to 0} \ln(1+x)^{\frac{1}{x}} =$

$\left(\text{Sost.} \quad \frac{1}{x} = t \quad x = \frac{1}{t} \quad x\to 0 \quad t\to +\infty \right) = \lim_{t\to +\infty} \ln \underbrace{\left(1+\frac{1}{t}\right)^t}_{\to e} = 1$

(5) $\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = \left(\text{Sost} \quad x = \ln(1+t) \quad t = e^x - 1 \quad x\to 0 \quad t\to 0 \right) =$

$$= \lim_{t\to 0} \underbrace{\frac{t}{\ln(1+t)}}_{\to 1} = 1$$

D

Artificio di Bernoulli

Usando le proprietà dei logaritmi vale che

$$f(x)^{g(x)} = e^{\ln f(x)^{g(x)}} = e^{g(x)\cdot \ln f(x)}$$

n. 253 pag 1531

$$\lim_{x\to 0^+} x^{-\frac{1}{\ln x^2}} \quad (\text{F.I. } 0^0)$$

$$\lim_{x\to 0^+} e^{-\frac{1}{\ln x^2}\cdot \ln(x)} = \lim_{x\to 0^+} e^{-\frac{1}{2\cancel{\ln x}}\cdot \cancel{\ln x}} = e^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{e}}$$

Pag 1539 n 460

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{2x^3+x^2-4x+3}{2x^2-x-1} = +\infty$$

461:
$$\lim_{x\to -2^+} \frac{x^2-x-6}{2x^2+8x+8} = \lim_{x\to -2^+} \frac{(x-3)(x+2)}{2(x^2+4x+4)} = \lim_{x\to -2^+} \frac{(x-3)\cancel{(x+2)}}{2(x+2)^{\cancel{2}}} = -\infty$$

464:
$$\lim_{x\to -\infty} \left(\sqrt{1+4x^2} - \sqrt{x^2+3}\right) \cdot \frac{\sqrt{1+4x^2}+\sqrt{x^2+3}}{\sqrt{1+4x^2}+\sqrt{x^2+3}} =$$

$$= \lim_{x\to -\infty} \frac{4x^2+1-x^2-3}{\sqrt{1+4x^2}+\sqrt{x^2+3}} = \lim_{x\to -\infty} \frac{3x^2-2}{\sqrt{1+4x^2}+\sqrt{x^2+3}}$$

$$= \lim_{x\to -\infty} \frac{\cancel{x^2}^{|x|}\left(3-\frac{2}{x^2}\right)}{\cancel{|x|}\left[\sqrt{\frac{1}{x^2}+4}+\sqrt{1+\frac{3}{x^2}}\right]} = \infty$$

496
$$\lim_{x\to 0} (1-8x)^{\frac{1}{2x}} = \lim_{t\to +\infty} \left(1-\frac{8}{t}\right)^{\frac{t}{2}} =$$

$\left(\text{sost: } x=\frac{1}{t},\ t=\frac{1}{x};\quad x\to 0,\ t\to\infty\right)$

$$= \lim_{\ell\to -\infty} \left(1+\frac{1}{\ell}\right)^{-4\ell}$$

$\left(\text{sost: } -\frac{8}{t}=\frac{1}{\ell},\ -8\ell=t;\quad t\to+\infty,\ \ell\to-\infty\right)$

$$= \lim_{\ell \to -\infty} \left[\underbrace{\boxed{\left(1+\frac{1}{\ell}\right)^{\ell}}}_{e} \right]^{-4} = e^{-4}$$

<u>490</u>. $\displaystyle \lim_{x\to 0} \frac{\sin x - 2x}{\sin x + x} \cdot \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0} \frac{\overbrace{\frac{\sin x}{x}}^{\to 1} - 2}{\underbrace{\frac{\sin x}{x}}_{\to 1} + 1} = -\frac{1}{2}$

<u>536</u> $\displaystyle \lim_{x\to e} \frac{\ln x^2 - 2}{x-e} = \lim_{x\to e} \frac{2[\ln(x) - 1]}{x-e} =$ $\left(\text{Sost: } \ln(x) - 1 = t \quad x = e^{t+1} \quad x \to e,\ t \to 0 \right)$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{2t}{e^{t+1} - e} = \lim_{t\to 0} \frac{2t}{e(e^t - 1)} = \frac{2}{e}$$

<u>496 Con Bernoulli</u>

$\displaystyle \lim_{x\to 0} (1-8x)^{\frac{1}{2x}} = \lim_{x\to 0} e^{\frac{1}{2x}\ln(1-8x)} =$ $\left(\text{Sost: } -8x = t \quad t \to 0 \quad x \to 0 \right)$

$$= \lim_{t\to 0} e^{-4\frac{\ln(1+t)}{t}} = e^{-4}$$

- Promethean 5C
- 5D
- 2E
- 1D

Pag 1540 <u>n. 470</u>

$$\lim_{x\to +\infty} \left[\log(x^2+2x) - \log(2x^2+3) \right] = \lim_{x\to +\infty} \log \frac{x^2+2x}{2x^2+3} =$$

$$= \lim_{x\to +\infty} \log \frac{1+\frac{2}{x}}{2+\frac{3}{x^2}} = \log \frac{1}{2}$$

n 472

$$\lim_{x\to\frac{1}{2}^+} \frac{2x^2+x-1}{4x^3-8x^2-5x-1} = \lim_{x\to\frac{1}{2}^+} \frac{\overbrace{\left(x-\frac{1}{2}\right)(2x+2)}^{\to 0}}{\underbrace{4x^3-8x^2-5x-1}_{\to -5}} = 0$$

	2	1	-1
$\frac{1}{2}$		1	1
	2	2	0

	4	-8	-5	-1
$\frac{1}{2}$		2	-3	-4
	4	-6	-8	-5

n 469

$$\lim_{x\to-2} \frac{\sqrt[3]{x^3+8}}{\sqrt[3]{x^2-4}} = \lim_{x\to-2} \frac{\sqrt[3]{\cancel{(x+2)}}\cdot\sqrt[3]{x^2-2x+4}}{\sqrt[3]{\cancel{(x+2)}}\sqrt[3]{(x-2)}} = -\sqrt[3]{3}$$

n.499

$$\lim_{x\to+\infty} \left(\frac{x}{x+3}\right)^x = \left(\begin{array}{lll} \text{Sost} & x+3=t & x\to+\infty \\ & x=t-3 & t\to+\infty \end{array}\right) =$$

$$\lim_{t\to+\infty} \underbrace{\left(1-\frac{3}{t}\right)^t}_{\to e^{-3}} \cdot \underbrace{\left(1-\frac{3}{t}\right)^{-3}}_{\to 1} = e^{-3}$$

Vedi sez. succ.

Limite notevole:

$$\lim_{x\to\pm\infty} \left(1+\frac{k}{x}\right)^x = e^k \qquad \forall k\neq 0$$

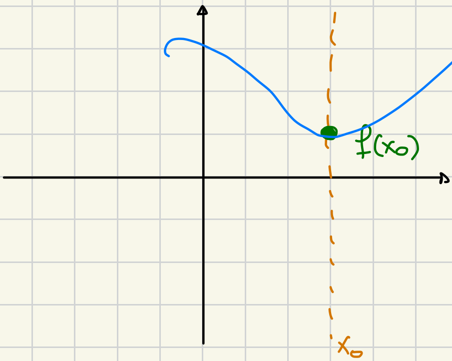
Dim:

$$\left(\begin{array}{lll} \text{Sost:} & \frac{k}{x}=\frac{1}{t} & x=kt \\ & x\to+\infty & t\to\pm\infty \end{array}\right)$$

$$\lim_{t\to\pm\infty} \left(1+\frac{1}{t}\right)^{kt} = \lim_{t\to\pm\infty} \left[\left(1+\frac{1}{t}\right)^t\right]^k = e^k$$

Def: Sia $f: D \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ una funzione, $x_0 \in D$ di accumulazione
Diremo che f è continua in x_0 se

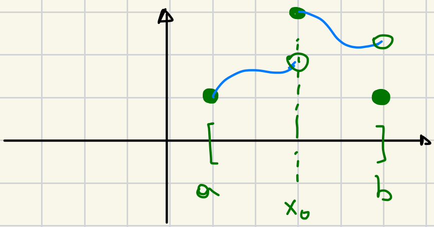
$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$



"Moralmente è continua in x_0 se riuscite a passare da x_0 senza staccare la penna dal foglio"

Diremo che f è continua in $[a,b]$ se è continua in ogni pto dell'int $[a,b]$.
Warning: Agli estremi dovete verificare solamente se il limite è verificato provenendo da $[a,b]$

Esempio:



f è continua in a
f NON è continua in x_0 e b

Pag 1553 n 764

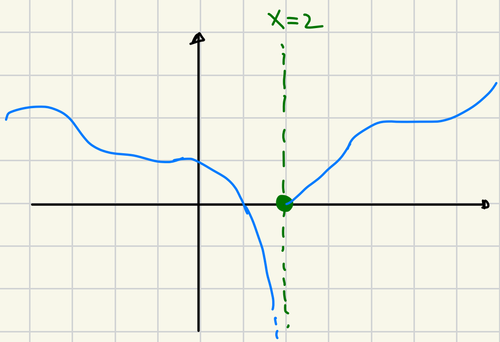
$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-1}{x-2} & x<2 \\ \ln(2x-3) & x \geq 2 \end{cases}$$

La f_z è continua in $x=2$?

$f(2) = \ln(1) = 0$ $\quad A = (2,0)$

$$\lim_{x \to 2^-} f(x) = \lim_{x \to 2^-} \frac{x^2-1}{x-2} = -\infty$$

$$\lim_{x \to 2^+} f(x) = \lim_{x \to 2^+} \ln(2x-3) = 0$$



Teoremi vari (no dim.) che giustificano il modo in cui calcoliamo i limiti

Siano $f: D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g: D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e sia x_0 pto di acc. per D (Analogo se si fa per limiti a $\pm\infty$).

(a) Supponiamo

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = a \quad , \quad \lim_{x \to x_0} g(x) = b \qquad \text{con } a, b \in \mathbb{R}, \ b \neq 0$$

allora

(1) $\displaystyle\lim_{x \to x_0} [f(x) + g(x)] = a + b$

(2) $\displaystyle\lim_{x \to x_0} [f(x) \cdot g(x)] = ab$

(3) $\displaystyle\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{a}{b}$

(4) $\displaystyle\lim_{x \to x_0} [f(x)]^n = a^n$

(5) $\displaystyle\lim_{x \to x_0} [f(x)]^{g(x)} = a^b$

(b) Supponiamo

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = 0 / \pm\infty \qquad \lim_{x \to x_0} g(x) = b \qquad b \neq 0$$

Allora

(1) $\displaystyle\lim_{x \to x_0} [f(x) + g(x)] = b \ / \pm\infty$

(2) $\displaystyle\lim_{x \to x_0} [f(x) g(x)] = 0 \ / \pm\infty$

(3) $\displaystyle\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0 \ / \pm\infty$

(4) $\displaystyle\lim_{x \to x_0} [f(x)]^n = 0 / \pm\infty$

(5) $\displaystyle\lim_{x \to x_0} [f(x)]^{g(x)} = 0 / \pm\infty$

(c) Sia

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = 0 \ / \pm\infty \qquad \overbrace{|g(x)| < M}^{\text{Limitata}}$$

Allora valgono gli stessi risultati di (b) $\rightsquigarrow$ Teo Carabinieri