Settimana: 8

Materia: Matematica
Classe: 5C
Data: 3/11 /25

Correz. pti compito

$$f(x) = \frac{x^2+p}{(x+q)^2}$$

1) f passa per $(1;0)$
2) $x=-2$ è asintoto

$$0 = \frac{1^2+p}{(1+q)^2} \rightsquigarrow 1+p=0 \rightsquigarrow \boxed{p=-1}$$

$$\lim_{x\to -2} \frac{x^2-1}{(x+q)^2} = \infty$$

$\rightsquigarrow$ Per fare ∞, Den $\to 0$ $\Rightarrow$ $-2+q=0$

$\boxed{q=2}$

Pari: $f(x) = f(-x)$

$$f(x) = \frac{x^2-1}{(x+2)^2}$$

$$f(x) = \frac{x^2-1}{x^2+4x+4}$$

$$f(-x) = \frac{(-x)^2-1}{(-x+2)^2} = \frac{x^2-1}{x^2-4x+4}$$

Non è pari

Dovete specificare di più!

$$\lim_{x\to -2} \frac{x^2-1}{(x+2)^2}(e^{x+2}-1)\sin(x+2) =$$

(Sost: $x+2=t$
$x\to -2 \quad t\to 0$)

$$\lim_{t\to 0} \frac{(t-2)^2-1}{} \underbrace{\frac{(e^t-1)}{t}}_{\to 1} \underbrace{\frac{\sin t}{t}}_{\to 1} = 3$$

$$\lim_{x\to +\infty} \underbrace{\frac{x^2-1}{(x+2)^2}}_{\to 1} \cdot \underbrace{\ln(x+1)}_{\to +\infty} = \infty$$

Teoremi sulle funzioni continue

Teorema (continuità della f inversa): Sia $f: D_1 \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow D_2 \subseteq \mathbb{R}$ (D_1 intervallo) bigettiva e continua in tutto D_1. Allora la funzione inversa

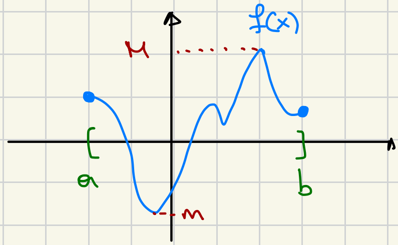
$$f^{-1}: D_2 \longrightarrow D_1$$

è ancora continua

Remind: $f: D \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $Max(f)$ = valore più alto raggiunto dalla funzione
$min(f)$ = valore più basso raggiunto dalla funzione

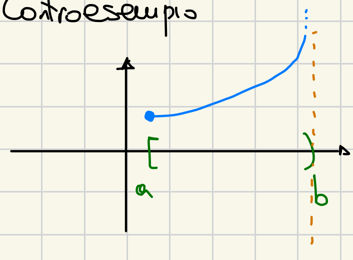
$Max(f) = Max(Im\, f)$
$min(f) = min(Im\, f)$] Non è detto che esistano!

Teorema di Weierstrass: (Vaiestrass ← Pronuncia):
Sia $f: [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ una funzione continua. Allora f ammette sia massimo che minimo.



M è il Massimo
m è il minimo.

Oss importanti:
(1) L'ipotesi che l'intervallo sia chiuso (da entrambi i lati) è necessaria
Controesempio

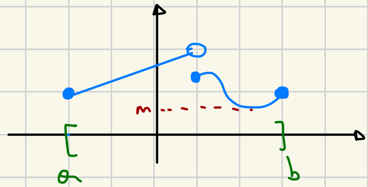


In questo esempio un estremo NON è incluso e la funzione in questo caso NON ammette massimo

(2) L'ipotesi che f sia continua è Necessaria

Controesempio

La funzione NON ha massimo, la palla bianca è solamente un sup



Pag 1557 n 808

$f(x) = \dfrac{x}{x^2+x-2}$ $\qquad f: D \subseteq [0;3] \longrightarrow \mathbb{R}$

Ha massimo e/o minimo in $[0;3]$?

Prova a Verificare le Hip di Weierstrass

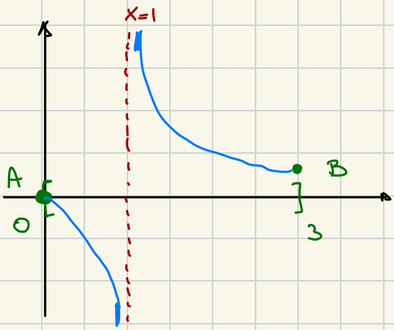
(1) Il dominio è un intervallo chiuso?

Dom(f): $x^2+x-2 \neq 0$ $\rightsquigarrow$ Dom$(f) = [0;1) \cup (1;3]$

$(x+2)(x-1) \neq 0$

$\underbrace{x \neq -2}_{\text{non sta in } [0,3]} \vee \underbrace{x \neq 1}_{\text{Problema!}}$

Dato che Dom(f) NON è intervallo chiuso, Non posso applicare W.



$f(0) = 0 \qquad f(3) = \dfrac{3}{10}$

$\lim\limits_{x \to 1^-} \dfrac{x}{(x-1)(x+2)} = -\infty$

$\lim\limits_{x \to 1^+} \dfrac{x}{(x-1)(x+2)} = +\infty$

n 809

$$f(x) = \frac{x}{-x^2+3x} \qquad f: D \subseteq [1;2] \longrightarrow \mathbb{R}$$

(1) Dom f:

$$-x^2+3x \neq 0$$
$$x(-x+3) = 0$$
$$x \neq 0 \ \vee \ x \neq 3$$

Fuori dall'intervallo che ci dice il problema

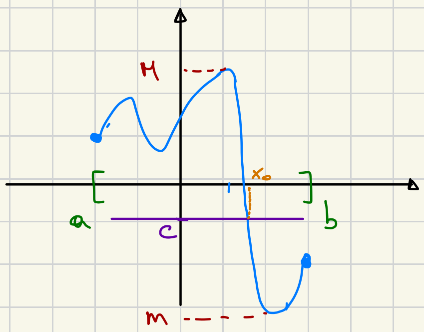
(2) Continuità: ovvia (no problemi o funzioni a tratti)

⇝ Posso applicare TdW e la fz ammetterà max e min.

Teorema dei valori intermedi: Sia $f: [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ continua.
Siano m e M il minimo e il max di f (Esistono per TdW).
Allora

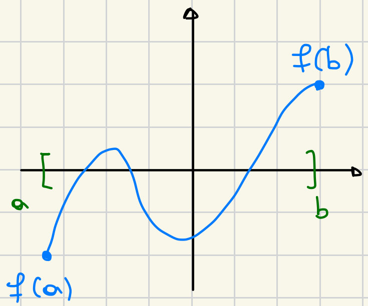
$$\forall c \in [m;M], \quad \exists x_0 \in [a,b] \text{ t.c. } f(x_0) = c$$

Ovvero ogni numero tra il minimo e il massimo è raggiunto da qualcosa



Fisso un'altezza $c \in [m;M]$, traccio la retta $y=c$ e tale retta interseca il grafico della funzione

Teorema degli zeri: Sia $f: [a;b] \to \mathbb{R}$ funzione continua.
Supponiamo che $f(a) \cdot f(b) < 0$ (in altre parole i numeri $f(a)$ e $f(b)$ sono di segno opposto, cioè uno pos e uno neg).
Allora $\exists x_0 \in [a;b]$ t.c. $f(x_0) = 0$; cioè la funzione ha almeno uno zero.



Dim: Per il TdW, esistono m e M minimo e Massimo.

Dato che $f(a) \cdot f(b) < 0$, allora il minimo deve essere negativo e il massimo deve essere positivo.

Per il teorema dei valori intermedi,
$\forall c \in [m; M]$, $\exists x_0$ t.c. $f(x_0) = c$

Dato $m < 0$ e $M > 0$, allora posso scegliere $c = 0$
Di conseguenza
$$\exists x_0 \text{ t.c. } f(x_0) = 0$$
cioè x_0 è uno zero di f.

$\square$

Pag 1558 n 824

$f: [0; \frac{\pi}{2}] \longrightarrow \mathbb{R}$ $\qquad f(x) = -1 + x + \sin x$ $\qquad$ Ha qualche zero in $[0; \frac{\pi}{2}]$?

1) La funzione è continua in $[0; \frac{\pi}{2}]$: Si no prob di dominio o di raccordo

2) $f(0) = -1 + 0 + 0 = -1$
$f(\frac{\pi}{2}) = -1 + \frac{\pi}{2} + 1 = \frac{\pi}{2}$ $\Rightarrow$ La funzione ha almeno uno 0 per il Teorema degli zeri.