

Settimana: 5

Materia: Matematica

Classe: 3D

Data: 13/10/2025

Argomenti: Es dettagliato studio di funzione.
Composizione di fz. Intro ed esempi. Funzioni
inverse, tes fz inverse, calcolo di fz inverse.
Funzioni pari e dispari, esempi. Es di studio di fz

Pag 115 n201

$$y = \sqrt{\frac{x^2 - 2x}{x^3}}$$

$$f: \text{Dom}(f) \rightarrow \mathbb{R}$$

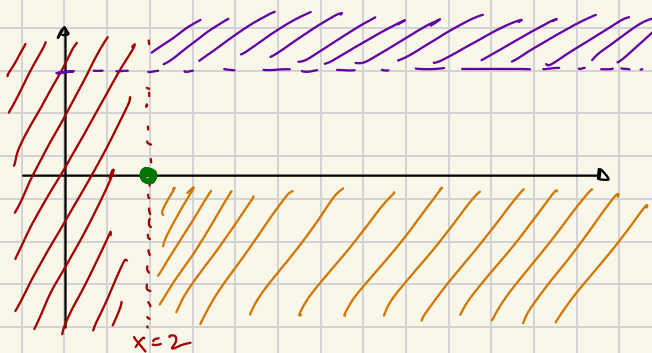
1) $\text{Dom}(f)$: $\frac{x^2 - 2x}{x^3} \geq 0$

N: $x(x-2) \geq 0 \rightsquigarrow x \leq 0 \vee x \geq 2$

D: $x^3 > 0 \rightsquigarrow x > 0$

	0	2	
N	+	-	+
D	-	+	+
	-	-	⊕

$$\text{Dom}(f) = \{x \geq 2\} = [2; +\infty)$$



Fz

Non puoi andare sopra per Dom f

2) Int assi (a) $x=0$: Impossibile perché $x \geq 2$ Dom(f)

(b) $y=0 \rightsquigarrow \sqrt{\frac{x^2 - 2x}{x^3}} = 0 \rightsquigarrow \frac{x^2 - 2x}{x^3} = 0 \rightsquigarrow x^2 - 2x = 0$

$\rightsquigarrow \boxed{x=0} \vee x=2$
Non Accett. Accett.

$A = (2, 0)$

3) Segno: $f(x) \geq 0 \quad \sqrt{\frac{x^2-2x}{x^3}} \geq 0$ Sempre vera nel dominio
e dunque $\boxed{x \geq 2}$ \rightsquigarrow Cancellate le zone sotto

(4) Im(f): $y = \sqrt{\frac{x^2-2x}{x^3}}$ e si ricava la x in funzione di y .

Posso elevare al \square imponendo $\boxed{y \geq 0}$

$$y^2 = \frac{x^2-2x}{x^3} \quad \text{Risolviamo} \quad y^2 = \frac{x(x-2)}{x^3} \quad x \neq 0$$

$$y^2 x^2 - x + 2 = 0 \quad \text{Affinché possa risolvere devo imporre } \Delta \geq 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = 1 - 8y^2 \geq 0$$

$$8y^2 - 1 \leq 0$$

$$y^2 = \frac{1}{8}$$

$$y = \pm \frac{1}{2\sqrt{2}} = \pm \frac{\sqrt{2}}{4}$$

$$\boxed{-\frac{\sqrt{2}}{4} \leq y \leq \frac{\sqrt{2}}{4}} \rightsquigarrow \text{la metto a sistema con } y \geq 0.$$

$$\text{Dunque } \text{Im}(f) = \left\{ 0 \leq y \leq \frac{\sqrt{2}}{4} \right\} = \left[0; \frac{\sqrt{2}}{4} \right]$$

$$(5) f: \text{Dom}(f) \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$\text{Im}(f) = \left[0; \frac{\sqrt{2}}{4} \right]$$

$$\text{Dom}(f) = [2; +\infty)$$

Non è suriettiva $\text{Im}(f) \neq \mathbb{R}$

È iniettiva se $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$. Ci provo

$$\sqrt{\frac{x_1^2-2x_1}{x_1^3}} = \sqrt{\frac{x_2^2-2x_2}{x_2^3}} \rightsquigarrow \frac{x_1-2}{x_1^2} = \frac{x_2-2}{x_2^2} \rightsquigarrow x_2^2 x_1 - 2x_2^2 = x_1^2 x_2 - 2x_1^2$$

$$x_1^2 x_2 - x_1 x_2^2 + 2x_2^2 - 2x_1^2 = 0$$

$$x_1 x_2 (x_2 - x_1) - 2(x_2 - x_1)(x_2 + x_1) = 0$$

$$(x_2 - x_1)[x_1 x_2 - 2x_2 - 2x_1] = 0$$

Per essere certi che sia iniettiva doveva essere presente solo $x_2 - x_1$.
Dato che c'è un altro termine devo analizzare se quel termine può essere 0 violando inj

$$x_1 x_2 - 2x_2 - 2x_1 = 0 \rightsquigarrow \text{Risolvo } x_1 \text{ in funzione di } x_2$$

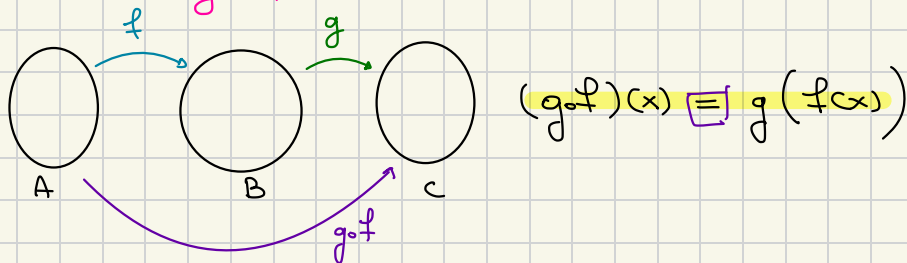
$$x_1 (x_2 - 2) = 2x_2$$

$$x_1 = \frac{2x_2}{x_2 - 2} = \frac{2x_2 - 4 + 4}{x_2 - 2} = 2 + \frac{4}{x_2 - 2}$$

Oss: Da qui si deduce il max: Basta imporre $x = 2 + \frac{4}{x-2}$ per simmetria $\rightsquigarrow x=4$ è dove si ha il max

Composizione di funzioni

Def: Sia $f: A \rightarrow B$ $g: B \rightarrow C$, definiamo la composizione $g \circ f$ l'applicazione successiva di due funzioni
 g composto f



Esempio: $f(x) = x^2 + 2$
 $g(x) = \frac{1}{x+3}$

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
 $g: \mathbb{R} \setminus \{-3\} \rightarrow \mathbb{R}$

$$(g \circ f)(x) \stackrel{\text{Def}}{=} g(f(x)) = g(x^2 + 2) = \frac{1}{(x^2 + 2) + 3} = \frac{1}{x^2 + 5}$$

Forse f e poi g è come fare $g \circ f$

$$\begin{aligned} (f \circ g)(x) &= f(g(x)) = f\left(\frac{1}{x+3}\right) = \left(\frac{1}{x+3}\right)^2 + 2 \\ &= \frac{1 + 2x^2 + 18 + 12x}{(x+3)^2} = \frac{2x^2 + 12x + 19}{x^2 + 6x + 9} \end{aligned}$$

La composizione NON è commutativa (se possibile in entrambi i sensi)

Remind. $f: A \rightarrow B$, $g: B \rightarrow C$ $g \circ f: A \rightarrow C$

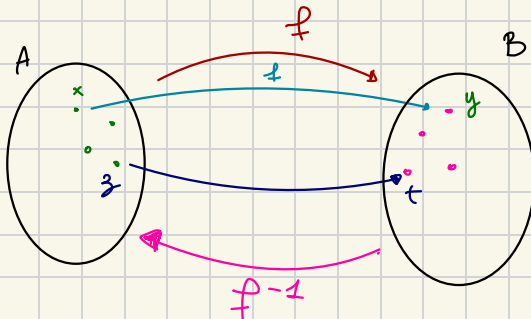
Example: $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ $f(x) = 3x + 2$
 $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ $g(x) = x^2 + 1$

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x^2 + 1) = 3(x^2 + 1) + 2 = 3x^2 + 5$$

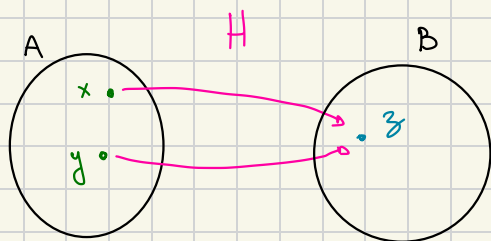
Def: Sia $f: A \rightarrow B$ una funzione biunivoca. Definisco la funzione inversa di f , la funzione

$$f^{-1}: B \rightarrow A$$

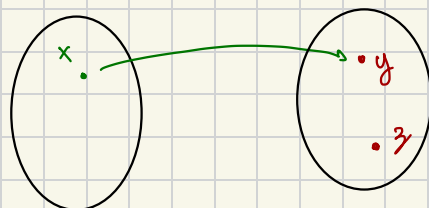
tale che $f^{-1}(b)$ è quell'elemento $a \in A$ t.c. $f(a) = b$



Oss: (1) Se la funzione NON è biunivoca, NON esiste la f_g inversa



Ad Haman: "Non so dove tornare indietro se non sei iniettiva"



A Filippo M.: "Non ho nessuna strada da percorrere se non sei suriettiva"

(2) f bigettiva, f^{-1} funzione inversa

$$(f \circ f^{-1})(x) = f(f^{-1}(x)) = x$$

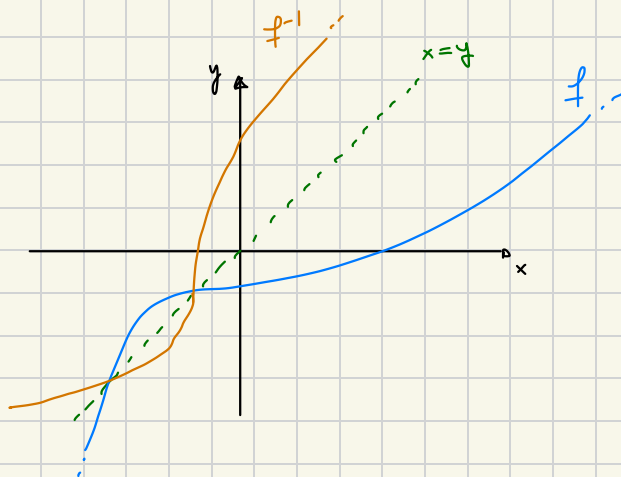
$$(f^{-1} \circ f)(x) = f^{-1}(f(x)) = x$$

Matteo Dei
 $3 \cdot 3^{-1} = 1$

(3) Teorema del grafico della funzione inversa. Sia f biunivoca, f^{-1} funzione inversa. Allora il grafico di f è simmetrico al grafico di f^{-1} rispetto alla bisettrice del I e del III quadrante

Dim: Appunti 3A - 2023/24
 Bella dim

Dato $\text{Graf}(f)$, lo si specchia rispetto alla retta $x=y$



Pag 120 n 233

$$y = \frac{1}{2}x^2 - 5$$

$$f: \text{Dom}(f) \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(1) \text{Dom}(f) = \mathbb{R}$$

$$\begin{aligned} \text{Inj: } f(x_1) &= f(x_2) \rightsquigarrow \cancel{\frac{1}{2}}x_1^2 - \cancel{5} = \cancel{\frac{1}{2}}x_2^2 - \cancel{5} \rightsquigarrow \underline{x_1^2 = x_2^2} \\ &\rightsquigarrow (x_1 - x_2)(x_1 + x_2) = 0 \end{aligned}$$

La funzione NON è iniettiva

Nel problema in realtà, ci dice $f: [0; +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$

Nel dominio $[0; +\infty)$ posso semplificare e ottengo $x_1 = x_2$
(Perché tutto deve essere positivo)

$$(2) \text{Surj: } y = \frac{1}{2}x^2 - 5 \rightsquigarrow \frac{1}{2}x^2 = y + 5 \rightsquigarrow x^2 = 2(y + 5)$$

$$\rightsquigarrow x = \pm \sqrt{2(y+5)} \rightsquigarrow \text{Questo sarà la f.z. inversa. Ma ancora non la posso chiamare col suo nome}$$

$$\text{Im}(f): 2(y+5) \geq 0 \rightsquigarrow y \geq -5$$

$$\begin{aligned} \text{Im}(f) &= [-5; +\infty) \\ &= \{y \geq -5\} \end{aligned}$$

La funzione NON è suriettiva, ma se cambio Codominio posso renderla surj. Morale: Considero

$$f: [0; +\infty) \rightarrow [-5; +\infty)$$

Finalmente f è bigettiva. Posso calcolare l'inversa. In realtà l'abbiamo già fatto: Per farlo si fa lo stesso conto fatto per $\text{Im}(f)$ e si conclude dicendo $f^{-1}: [-5; +\infty) \rightarrow [0; +\infty)$ $f^{-1}(y) = \sqrt{2(y+5)}$
 $y \mapsto \sqrt{2(y+5)}$

$$\begin{aligned}
 (f^{-1} \circ f)(x) &= f^{-1}(f(x)) = f^{-1}\left(\frac{1}{2}x^2 - 5\right) \\
 &= \sqrt{2\left(\frac{1}{2}x^2 - 5\right) + 5} = \sqrt{x^2} = |x| \quad \boxed{x}
 \end{aligned}$$

Dom f

SIAMO IS "BEAUTIFUL"
"SCARLETT" È "BRUNELLO"
OCCHIO AR BRUNELLO

OCCHIO AR MOCHIO
"OCCHIO" AL "BRUNELLO"



OCCHIO
A TERA

OCCHIO A MERE

- 1) 3 domini (Riemann)
- 2) 1. Riemann
- 3) 2. Riemann
- 4) 3. Riemann
- 5) 4. Riemann
- 6) 5. Riemann

Def: Sia $f: D \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Diremo che

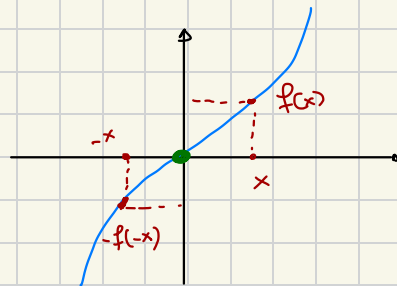
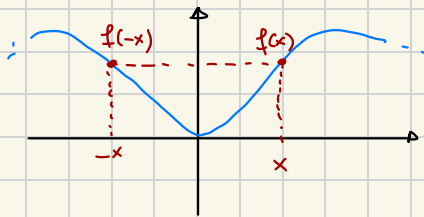
(1) f è una funzione PAR se $f(x) = f(-x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$

(2) f è una funzione DISPARI se $f(x) = -f(-x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$

Esempio: $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad f(x) = x^2 + 1$

PAR: $f(x) = x^2 + 1$
 $f(-x) = (-x)^2 + 1 = x^2 + 1$ } \leadsto la funzione è PAR

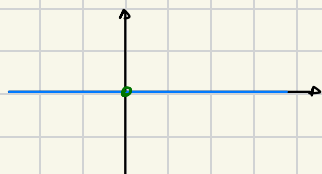
Graficamente



Par: Graficamente significa
simmetrico rispetto all'asse y

Dispari: Graficamente significa
simmetrico rispetto a O.

Domanda: Trovare, se esiste, $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sia PAR che DISPARI



$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = 0$

Homon e Meteo +

Pensare se è L'UNICA funzione con queste proprietà...

Pag 115 n 208

$$y = \sqrt{4x^2 - 1} - 2x + 6$$

(1) Dom(f): $4x^2 - 1 \geq 0$ $x = \pm \frac{1}{2}$ $x \leq -\frac{1}{2} \vee x \geq \frac{1}{2}$

$$f: (-\infty; -\frac{1}{2}] \cup [\frac{1}{2}; +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$$



(2) Asse y: Imp

Asse x: $y = 0$ $\sqrt{4x^2 - 1} = 2x - 6$

C.E. $2x - 6 \geq 0$
 $x \geq 3$

Elevo al 0 $\cancel{4x^2} - 1 = \cancel{4x^2} + 36 - 24x$
 $24x = 37 \rightsquigarrow x = \frac{37}{24}$

NON ACCETTABILE

(3) Segno: $f(x) \geq 0$

$$\sqrt{4x^2 - 1} - 2x + 6 \geq 0$$

$$\boxed{\sqrt{4x^2 - 1} \geq 2x - 6}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x \leq -\frac{1}{2} \vee x \geq \frac{1}{2} \\ 2x - 6 \geq 0 \\ 4x^2 - 1 \geq 4x^2 + 36 - 24x \end{array} \right.$$

$$\cup \left\{ \begin{array}{l} x \leq -\frac{1}{2} \vee x \geq \frac{1}{2} \\ 2x - 6 \leq 0 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x \leq -\frac{1}{2} \vee x \geq \frac{1}{2} \\ x \geq 3 \\ x \geq \frac{37}{24} \end{array} \right.$$

$\hookrightarrow x \geq 3$

$$\cup \left\{ \begin{array}{l} x \leq -\frac{1}{2} \vee x \geq \frac{1}{2} \\ x \leq 3 \end{array} \right.$$

$x \leq -\frac{1}{2} \vee \frac{1}{2} \leq x \leq 3$

\rightsquigarrow Tutto nel C.E.

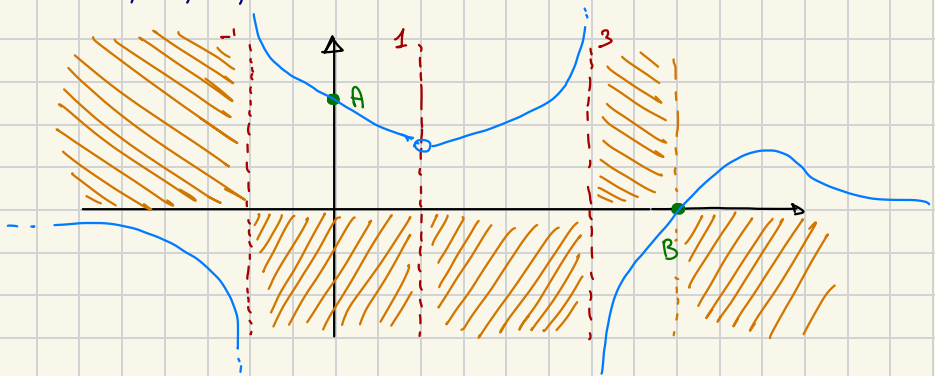
$$\boxed{x \leq -\frac{1}{2} \vee x \geq \frac{1}{2}}$$

198:

$$y = \frac{x^2 - 5x + 4}{x^3 - 3x^2 - x + 3} = \frac{(x-4)(x-1)}{(x-1)(x+1)(x-3)}$$

$x^2(x-3) - (x-3)$
 $(x^2-1)(x-3)$

1) Dom(f): $x \neq 1, -1, 3$ $f: \mathbb{R} \setminus \{-1, 1, 3\} \rightarrow \mathbb{R}$



2) Asse y: $x = 0$ $y = +\frac{4}{3}$ $A = (0; \frac{4}{3})$

Asse x: $y = 0$ $\frac{(x-4)(x-1)}{(x-1)(x+1)(x-3)} = 0$ $x = 4$ $B = (4; 0)$
 $x = 1$ Nicht Acc.

cc.

3) Signa f(x) ≥ 0: $\frac{(x-4)(x-1)}{(x-1)(x+1)(x-3)} \geq 0$

	-1	1	3	4	
N1	-	-	-	-	+
D1	-	+	+	+	+
D2	-	-	-	+	+
	-	+	+	-	+

Sol: $-1 < x < 1 \vee 1 < x < 3 \vee x \geq 4$

Pag 123 Es 314

$$f(x) = \frac{2x^2 + ax - 1}{2x - b}$$

Trova a, b in modo che

1) $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} \setminus \{4\}$

2) $A = (1, \frac{1}{2}) \in \text{Gr}_f(f)$

(2) $\frac{1}{2} = \frac{2+a-1}{2-b}$ (Sostituisco 1 a x , $\frac{1}{2}$ a $f(x)$)

(1) $\text{Dom}(f)$: $2x - b \neq 0$ $x \neq \frac{b}{2}$ $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} \setminus \{\frac{b}{2}\}$

(Ho ricavato $\text{Dom}(f)$ in f.g. di b e poi sostituisco)

$$\leadsto 4 = \frac{b}{2} \leadsto \boxed{b = 8}$$

$$\frac{1}{2} = \frac{1+a}{-6} \leadsto -3 = 1+a \leadsto \boxed{a = -4}$$

Es 315

$$y = \frac{3}{kx^2 + 6x + 3}$$

k in modo che $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$

$\text{Dom}(f)$: $kx^2 + 6x + 3 \neq 0$

$$\frac{\Delta}{4} = 9 - 3k$$

$$x_1/x_2 = \frac{-\frac{b}{2} \pm \sqrt{\frac{\Delta}{4}}}{a} = \frac{-3 \pm \sqrt{9-3k}}{k}$$

$$\text{Dom}(f) = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{-3 - \sqrt{9-3k}}{k}, \frac{-3 + \sqrt{9-3k}}{k} \right\}$$

$$\text{Dom}(f) \stackrel{''}{=} \mathbb{R} \setminus \{-1\}$$

Quindi impongo $9 - 3k = 0 \leadsto \boxed{k = 3}$

Es 317 $f(ax) \equiv a f(x)$ (Linearità su \mathbb{R})
 $f(4) = -2$

Quanto fa $f(12)$?

$f(5) = ?$

$$f(12) = f(3 \cdot 4) \equiv 3 \cdot f(4) = 3 \cdot (-2) = -6$$

$$f(5) = f\left(\frac{5}{4} \cdot 4\right) \equiv \frac{5}{4} \cdot f(4) = \frac{5}{4} \cdot (-2) = -\frac{5}{2}$$

$$f(\pi) = f\left(\frac{\pi}{4} \cdot 4\right) \equiv \frac{\pi}{4} f(4) = \frac{\pi}{4} \cdot (-2) = -\frac{\pi}{2}$$

↳ Num per aggiungere

Es 319 $f(x)$

i) $f(1) = 1$

ii) $f(2x) \equiv 4 f(x) + 6$

$f(6) = ?$

iii) $f(x+2) \equiv f(x) + 12x + 12$

$$f(2) = f(2 \cdot 1) \equiv 4 f(1) + 6 = 10$$

$$f(3) = f(1 + 2) \equiv f(1) + 12 \cdot 1 + 12 = 25$$

$$f(6) = f(2 \cdot 3) \equiv 4 f(3) + 6 = 106$$

Spicy: Trovare formule generale per $f(2n)$, $f(2n+1)$

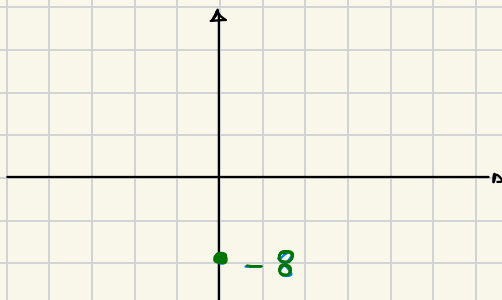
Verso l'esame 3°

$$f(x) = \frac{ax+b}{x^2+1} \quad a \neq 0$$

A = (0; -8) intersecco

$$f(1) = -1$$

Trova
a e b



$$\triangleright -8 = \frac{0+b}{0+1} \quad \leadsto \quad \boxed{b = -8}$$

$$\triangleright -1 = \frac{a-8}{2} \quad \leadsto -2 = a-8 \quad \leadsto \quad \boxed{a = 6}$$

$$f(x) = \frac{6x-8}{x^2+1}$$

$$\triangleright \text{Dom}(f): \quad x^2+1 \neq 0 \quad \text{Sempre vero} \quad \text{Dom}(f) = \mathbb{R}$$

$$\triangleright \text{Im}(f): \quad y = \frac{6x-8}{x^2+1} \quad \text{Ricavo } x \text{ in funzione di } y.$$

$$x^2y + y = 6x - 8 \quad \leadsto \quad x^2y - 6x + y + 8 = 0$$

L'equazione ha soluzione se $\Delta \geq 0$, cioè

$$36 - 4(y)(y+8) \geq 0 \quad \leadsto \quad 9 - y^2 - 8y \geq 0$$

$$y^2 + 8y - 9 \leq 0$$

$$(y+9)(y-1) \leq 0$$

$$y = -9, 1$$

$$-9 \leq y \leq 1$$

$$\leadsto \quad \boxed{\text{Im}(f) = [-9; 1]}$$