Settimana: 5

Materia: Matematica
Classe: 5C
Data: 13/10/2025

Argomenti: Esercizi sui limiti; tipologie diverse da quelle già osservate. Esercizi in Autonomia. Tutti i limiti notevoli, Artificio del Bernoulli

Pag 1530

n 240

$$\lim_{x \to 5^+} \frac{\sqrt{x^2-5x}}{\sqrt{x^2-25}} = \lim_{x \to 5^+} \frac{\sqrt{x(x-5)}}{\sqrt{(x-5)(x+5)}}$$

Scompongo per vedere dove il 5 dà fastidio

$$= \lim_{x \to 5^+} \sqrt{\frac{x\cancel{(x-5)}}{\cancel{(x-5)}(x+5)}} = \sqrt{\frac{5}{10}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

n 242

$$\lim_{x \to -1} \frac{\sqrt{x^2+3}-2}{3-\sqrt{8-x^3}} =$$

Sistemo le radici "Somma · differenze"

Remind. $a^3+b^3 = (a+b)(a^2+b^2-ab)$

$$\lim_{x \to -1} \frac{\sqrt{x^2+3}-2}{3-\sqrt{8-x^3}} \cdot \frac{\sqrt{x^2+3}+2}{\sqrt{x^2+3}+2} \cdot \frac{3+\sqrt{8-x^3}}{3+\sqrt{8-x^3}}$$

$$\lim_{x \to -1} \frac{x^2+3-4}{9-(8-x^3)} \cdot \frac{3+\sqrt{8-x^3}}{\sqrt{x^2+3}+2} = \lim_{x \to -1} \frac{x^2-1}{x^3+1} \cdot \frac{3+\sqrt{8-x^3}}{\sqrt{x^2+3}+2}$$

Problema sopra

$$\lim_{x \to -1} \frac{\overbrace{(x-1)}^{\to -2}\cancel{(x+1)}}{\cancel{(x+1)}\underbrace{(x^2+1-x)}_{\to 3}} \cdot \frac{\overbrace{3+\sqrt{8-x^3}}^{\to 6}}{\underbrace{\sqrt{x^2+3}+2}_{\to 4}} = -1$$

n 243

$$\lim_{x \to 2} \frac{\sqrt{x^2-2x+9}-3}{x-2} = \lim_{x \to 2} \frac{x^2-2x}{x-2} \cdot \frac{1}{\sqrt{x^2-2x+9}+3}$$

$$= \lim_{x \to 2} \frac{x(x-2)}{x-2} \cdot \frac{1}{\sqrt{x^2-2x+9}+3} = \frac{1}{3}$$

n. 266 $\lim_{x\to -3^-} \frac{x+3}{x^3+9x^2+27x+27} = \lim_{x\to -3^-} \frac{x+3}{(x+3)^3} =$

$= \lim_{x\to -3^-} \frac{1}{\underbrace{(x+3)^2}_{\to 0}} = +\infty$

Ruffini: $p(x) = x^3 + 9x^2 + 27x + 27$

$p(-3) = 0$

	1	9	27	27
-3		-3	-18	-27
	1	6	9	0

DEVE VENIRE 0

$p(x) = (x - (-3))[x^2 + 6x + 9]$

Abbasso di 1 il grado

$(x+3)(x^2+6x+9) =$
$(x+3)^3$

n. 267 $\lim_{x\to -\infty} \frac{x - 2x^3 + x^5 + x^7}{x^2 - 2x^4 + 10x^6} = \lim_{x\to -\infty} \frac{\underbrace{x^{\cancel{7}}}_{-\infty}\overbrace{\left(\frac{1}{x^6} - \frac{2}{x^4} + \frac{1}{x^2} + 1\right)}^{1}}{\cancel{x^6}\underbrace{\left(\frac{1}{x^4} - \frac{2}{x^2} + 10\right)}_{10}} = -\infty$

n. 303 $\lim_{x\to +\infty} \frac{1}{2^x - 2^{3+2x}} =$

Sostituzione $\left[\begin{array}{ll} 2^x = t & t = \log_2 x \\ x \to +\infty & t \to +\infty \end{array}\right]$

$\lim_{t\to +\infty} \frac{1}{t - 8t^2} = \lim_{t\to +\infty} \frac{1}{\underbrace{t^2}_{+\infty}\underbrace{\left(\frac{1}{t} - 8\right)}_{-8}} = 0^-$

Limiti Notevoli. Volgono i seguenti limiti notevoli

(1) $$\boxed{\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1}$$

(2) $$\boxed{\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}}$$

(3) $$\lim_{x\to\infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$$ ← Def. del numero di Nepero $e \approx 2{,}71$

(4) $$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$$

(5) $$\lim_{x\to 0} \frac{e^x-1}{x} = 1$$

n 371 pag 1535

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x - \operatorname{tg} x}{6x^3} =$$

Scompattiamo tutto e cerchiamo di manipolare in modo che compaiano i lim. notevoli

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x - \frac{\sin x}{\cos x}}{6x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos x \sin x - \sin x}{6x^3 \cos x} =$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x(\cos x - 1)}{6x^3 \cos x} = \lim_{x\to 0} \underbrace{\frac{1}{6}}_{\to 1/6} \cdot \underbrace{\frac{\sin x}{x}}_{\to 1} \cdot \underbrace{\frac{\cos x - 1}{x^2}}_{\to -1/2} \cdot \underbrace{\frac{1}{\cos x}}_{\to 1} = -\frac{1}{12}$$

Dim. Limiti notevoli (1) Già fatto

Faccio comp. $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$

(2) $$\lim_{x \to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{(1-\cos x)(1+\cos x)}{x^2 \quad 1+\cos x} =$$

$$= \lim_{x \to 0} \underbrace{\frac{\sin^2 x}{x^2}}_{\to 1 \text{ Lim not}} \cdot \underbrace{\frac{1}{1+\cos x}}_{\to \frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$$

(3) Prendo come def., non c'è nulla da fare $\lim_{x \to +\infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$

(4) $$\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{1}{x} \ln(1+x) = \lim_{x \to 0} \ln(1+x)^{\frac{1}{x}} =$$

$$\left(\text{Sost.} \quad \frac{1}{x} = t \quad x = \frac{1}{t} \atop x \to 0 \quad t \to +\infty \right) = \lim_{t \to +\infty} \ln \underbrace{\left(1+\frac{1}{t}\right)^t}_{\to e} = 1$$

(5) $$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = \left(\text{Sost} \quad x = \ln(1+t) \quad t = e^x - 1 \atop x \to 0 \quad t \to 0 \right) =$$

$$= \lim_{t \to 0} \underbrace{\frac{t}{\ln(1+t)}}_{\to 1} = 1$$

D

Artificio di Bernoulli

Usando le proprietà dei logaritmi vale che

$$f(x)^{g(x)} = e^{\ln f(x)^{g(x)}} = e^{g(x) \cdot \ln f(x)}$$

n. 253 pag 1531

$$\lim_{x\to 0^+} x^{-\frac{1}{\ln x^2}} \quad (\text{F.I. } 0^0)$$

$$\lim_{x\to 0^+} e^{-\frac{1}{\ln x^2}\cdot \ln(x)} = \lim_{x\to 0^+} e^{-\frac{1}{2\cancel{\ln x}}\cdot \cancel{\ln x}} = e^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{e}}$$