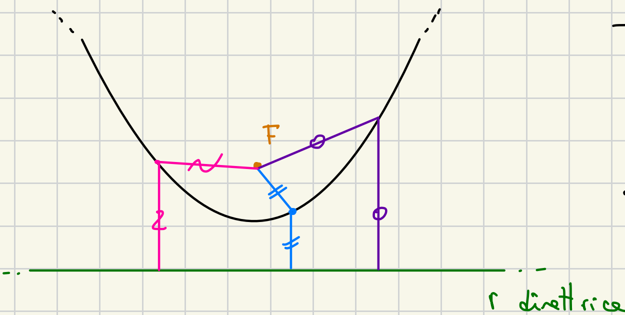
Settimana: 12

Argomenti:

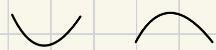
Materia: Matematica
Classe: 3D
Data: 2/12/2025

Def: Una parabola è un luogo geometrico di punti equidistanti da una retta r detta Direttrice e un punto F detto fuoco



Troviamo l'equazione generale della parabola a partire dalla definizione.

Fissiamo la direttrice come una retta ORIZZONTALE, le parabole che vedremo saranno sempre



direttrice: $y=k \rightsquigarrow y-k=0$ — k lo conosco

Fuoco: $F=(x_F, y_F)$ — $\rightsquigarrow y_F \neq k$ perché $F \notin$ direttrice

$$\frac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

Sia $P=(x,y) \in \gamma$ γ parabola.

Se $P \in \gamma$, deve valere che $dist(P;F) = dist(P,r)$

$$\sqrt{(x_F-x)^2+(y_F-y)^2} = \frac{|0+1\cdot y+(-k)|}{\sqrt{0^2+1^2}}$$

Faccio conti e trovo scritture carine (elevo al ², è tutto positivo)

$$x_F^2-2xx_F+x^2+y_F^2-2yy_F+\cancel{y^2} = \cancel{y^2}+k^2-2yk$$

Si porta le y da una parte

$$2y(y_F-k) = x^2 - 2x x_F + x_F^2 + y_F^2 - k^2$$

Divido per coeff y.
Tutto ok per C.E.

$$y = \frac{1}{2(y_F-k)}x^2 + \left(-\frac{x_F}{y_F-k}\right)x + \frac{x_F^2+y_F^2-k^2}{2(y_F-k)}$$

Dò dei nomi: $\frac{1}{2(y_F-k)} = a \qquad \frac{x_F^2+y_F^2-k^2}{2(y_F-k)} = c$

$$-\frac{x_F}{y_F-k} = b$$

Ho scoperto che la parabola è definita dall'equazione

$$\boxed{y = ax^2+bx+c \qquad a,b,c \in \mathbb{R} \qquad a \neq 0}$$

Facciamo ora il procedimento inverso; data la parabola troviamo fuoco e direttrice. Ho a, b, c; valgono le formule di sopra e ricavo x_F, y_F, k

$$\begin{cases} a = \dfrac{1}{2(y_F-k)} \\[2ex] b = -\dfrac{x_F}{y_F-k} \\[2ex] c = \dfrac{x_F^2+y_F^2-k^2}{2(y_F-k)} \end{cases}$$

$$\frac{b}{a} = \frac{-\frac{x_F}{(y_F-k)}}{\frac{1}{2(y_F-k)}} = -2x_F$$

$$\Rightarrow \boxed{x_F = -\frac{b}{2a}}$$

La metto nella III e poi uso la I

$$\begin{cases} a = \dfrac{1}{2(y_F - k)} \\ c = \left(\dfrac{b^2}{4a^2} + y_F^2 - k^2\right) \cdot \underbrace{\dfrac{1}{2(y_F-k)}}_{= a} \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = \dfrac{1}{2(y_F - k)} \\ c = a\left(\dfrac{b^2}{4a^2} + y_F^2 - k^2\right) \end{cases}$$

$$\begin{cases} y_F = \dfrac{1}{2a} + k \\ c = \cancel{a}\left(\dfrac{b^2}{4a^{\cancel{2}}} + \dfrac{1}{4a^{\cancel{2}}} + \cancel{k^2} + \dfrac{k}{\cancel{a}} - \cancel{k^2}\right) \end{cases} \rightsquigarrow \boxed{y_F = \dfrac{1-\Delta}{4a}}$$

$$4ac = b^2 + 1 + 4ak \rightsquigarrow 4ak = 4ac - b^2 - 1$$

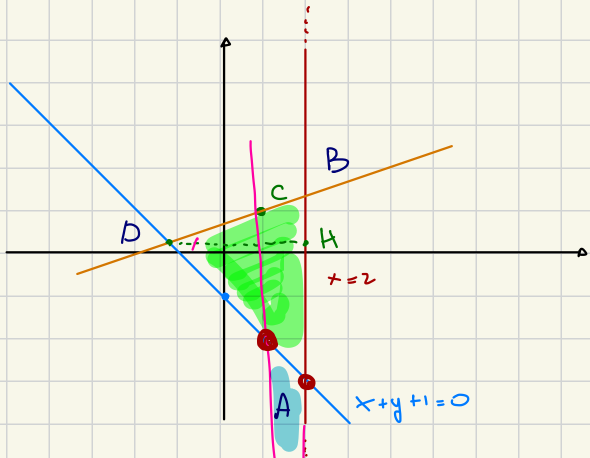
$$\rightsquigarrow k = \frac{4ac - b^2 - 1}{4a} = \boxed{-\frac{\Delta+1}{4a}}$$

Pag 260 n 584

Fascio proprio di centro $C(1;1)$

$r: x+y+1=0$

$s: x=2 \rightsquigarrow x-2=0$



Area triangolo $=2$

$y = -x-1$

x	y
0	-1
1	-2
-1	0

Fascio di centro $C=(x_c, y_c)$

$$y - y_c = k(x - x_c)$$

Nel nostro esempio $r_k: y-1 = k(x-1)$

↳ Impone passaggio per il pto lasciando il coeff. angolare variabile

A) $r \cap s$ $\begin{cases} x=2 \\ x+y+1=0 \end{cases}$ $\begin{cases} x=2 \\ y=-3 \end{cases}$ $A=(2;-3)$

B) $r_k \cap s$ $\begin{cases} x=2 \\ y-1=k(x-1) \end{cases}$ $\begin{cases} x=2 \\ y-1=k \end{cases}$ $\begin{cases} x=2 \\ y=k+1 \end{cases}$ $B=(2;k+1)$

D) $r_k \cap r$ $\begin{cases} x+y+1=0 \\ y-1=kx-k \end{cases}$ $\begin{cases} y=-x-1 \\ -x-1-1=kx-k \end{cases}$ $\begin{cases} y=-x-1 \\ x(k+1)=k-2 \end{cases}$

$$x=\frac{k-2}{k+1} \qquad y=-\frac{k-2}{k+1}-1=\frac{-k+2-k-1}{k+1}=\frac{-2k+1}{k+1}$$

$$D=\left(\frac{k-2}{k+1};\frac{1-2k}{k+1}\right)$$

Ho trovato i 3 pti. Calcolo Base e Altezza

$$\overline{AB}^2=(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2=(2-2)^2+(-3-k-1)^2=$$

$$=(-k-4)^2=(k+4)^2$$

$s: x-2=0$

$$dist(D;s)=\frac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{\left|1\cdot\frac{k-2}{k+1}+0-2\right|}{\sqrt{1^2+0}}$$

$$=\left|\frac{k-2}{k+1}-2\right|=\left|\frac{k-2-2k-2}{k+1}\right|=\left|\frac{-k-4}{k+1}\right|$$

Impongo Area $=2$

$$2 = \frac{|k+4| \cdot \left| -\frac{k+4}{k+1} \right|}{2} \rightsquigarrow 4 = \left| -\frac{(k+4)^2}{k+1} \right|$$

Funzione

<u>Caso 1</u>: $-\dfrac{(k+4)^2}{k+1} = 4$

$$(k+4)^2 = -4k-4$$
$$k^2+16+8k = -4k-4$$
$$k^2+12k+20 = 0$$
$$(k+10)(k+2) = 0$$

$$\boxed{k = -10 \,, \quad k = -2}$$

Vanno controllate ⇝ Significa metterle dentro e verificare che faccia 4, e non -4

<u>Caso 2</u>: $-\dfrac{(k+4)^2}{k+1} = -4$

$$(k+4)^2 = 4k+4$$
$$k^2+8k+16 = 4k+4$$
$$k^2+4k+12 = 0$$

$$\frac{\Delta}{4} = 2^2 - 12 = -8 \rightsquigarrow \frac{\Delta}{4} < 0 \quad \text{Impossibile.}$$

Sostituisco i k al fascio e trovo

$$y-1 = -2(x-1) \rightsquigarrow y = -2x+3$$

$$y-1 = -10(x-1) \rightsquigarrow y = -10x+11$$

<u>Compito</u>: 1) Ricette + 1/2 pticino } 1 es
2) Piano cartesiano e rette il resto } 4 es

3) Spicy

Pag 267 n 27

$(k-1)x + (1-k)y + 2 - k = 0$ Gen., centro, ...

$-x + y + 2 \quad + k(x - y - 1) = 0$

Generatrici: $-x + y + 2 = 0$
$x - y - 1 = 0$

Centro: Intersezione tra due rette del fascio (se esiste)

$$\begin{cases} -x + y + 2 = 0 \\ x - y - 1 = 0 \end{cases} \downarrow +$$

$0 + 0 + 1 = 0 \rightsquigarrow 1 = 0$ Impossibile

$\Rightarrow$ Fascio è improprio cioè sono tutte rette parallele

Metto il fascio in forma explicit

$(k-1)x + (1-k)y + 2 - k = 0$

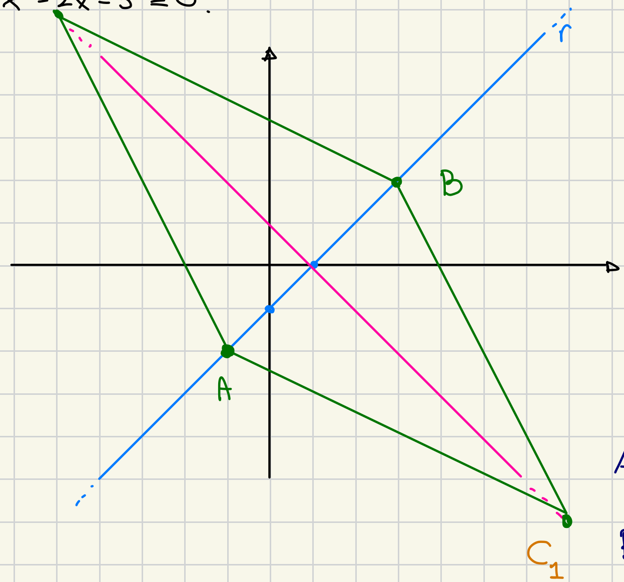
$(1-k)y = (1-k)x + k - 2$

$$\boxed{y = x + \frac{k-2}{1-k}}$$

2) Considera la retta r del fascio che NON corrisponde a nessun valore di k. Guardando la teoria, questa corrisponde al caso $p = 0$ che corrisponde alla generatrice che è moltipl. per k.

$\rightsquigarrow \boxed{r: \ x - y - 1 = 0}$

Triangoli isosceli di vertici C_1 e C_2; di area 24 con base AB
$AB \in r$ e con l'ascissa di A e B che è soluzione dell'equazione
$x^2-2x-3=0$.



$x-y-1=0$

$y=x-1$

x	y
0	-1
1	0

Calcolo A, B:

$x^2-2x-3=0$

$(x-3)(x+1)=0$

$x=-1 \quad x=3$

$A=(-1;\ -2)$

$B=(3;\ 2)$

ottenuti mettendo ascisse nella retta

Per trovare C_1 C_2 faccio l'asse di AB e poi cerco un punto sull'asse in modo che l'area del triangolo sia 24.

<u>Def</u>: L'asse di un segmento sono i punti equidistanti dagli estremi del segmento. e sarà una retta

Sia $P=(x,y)$ nell'asse; allora:

$$(x-x_A)^2+(y-y_A)^2 = (x-x_B)^2+(y-y_B)^2$$

$$(x+1)^2+(y+2)^2 = (x-3)^2+(y-2)^2$$

$$\cancel{x^2}+1+2x+\cancel{y^2}+4y+\cancel{4} = \cancel{x^2}+9-6x+\cancel{y^2}-4y+\cancel{4}$$

$$8x+8y-8=0 \qquad \boxed{x+y-1=0} \rightsquigarrow y=-x+1$$

Sia $C \in$ Asse: $\quad C=(k;\ -k+1)$

$AB^2 = (-1-3)^2 + (-2-2)^2 = 16+16 = 32$

retta AB $x-y-1=0$

C $(k; -k+1)$

$$d(AB; C) = \frac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

$$\text{dist}(AB; C) = \frac{|k+(-1)(-k+1)-1|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}} = \frac{|2k-2|}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}\,|k-1|$$

Area triangolo $= 24$ $\qquad \frac{AB \cdot \text{dist}(AB; C)}{2} = 24$

$$4\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}\,|k-1| = 48 \implies |k-1| = 6 \quad \begin{cases} k = 7 \\ k = -5 \end{cases}$$

$C_1 = (7; -6)$ $\qquad C_2 = (-5; 6)$

<u>Pag 273 n 48</u>

$$2(k+1)x - (k-1)y - 11k - 1 = 0$$

$$2x + y - 1 + k(2x - y - 11) = 0$$

r_1: $2x+y-1=0$

r_2: $2x-y-11=0$

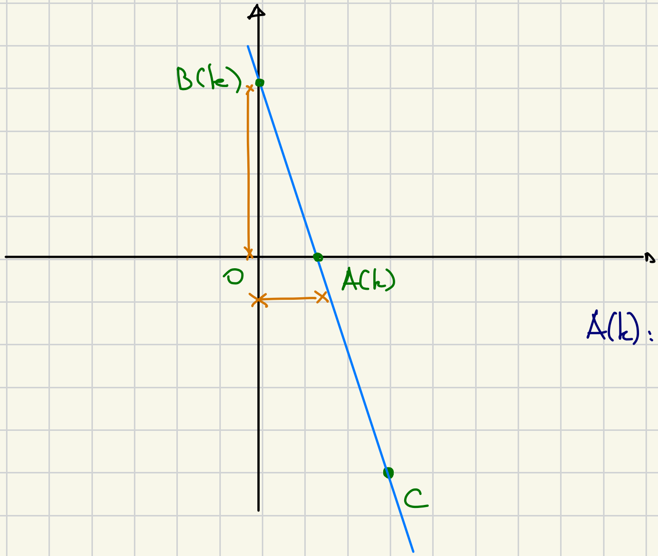
Centro: $\begin{cases} 2x+y-1=0 \\ 2x-y-11=0 \end{cases}$ $\downarrow -$

$2y+10=0$ $\qquad y=-5$

$2x-5-1=0$ $\qquad x=3$

$$C = (3; -5)$$

$y - y_C = m(x - x_C) \quad \rightsquigarrow \quad (y+5) = m(x-3)$



Trova k t.c. il triangolo $A(k)\hat{B}(k)O$ abbia area $\frac{98}{3}$

$$A(k): \begin{cases} 2(k+1)x + (k-1)y - 11k - 1 = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

$$2(k+1)x = 11k+1$$

$$x = \frac{11k+1}{2(k+1)}$$

$$A(k) = \left(\frac{11k+1}{2(k+1)}\ ;\ 0\right)$$

$$B(k): \begin{cases} 2(k+1)x + (k-1)y - 11k - 1 = 0 \\ x = 0 \end{cases}$$

$$y = \frac{11k+1}{k-1}$$

$$B(k) = \left(0\ ;\ \frac{11k+1}{k-1}\right)$$

Condizioni del problema:

↳ Intersezioni nel primo quadrante

$$\begin{cases} \frac{11k+1}{2(k+1)} > 0 \\ \frac{11k+1}{k-1} > 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} k < -1 \ \vee \ k > -\frac{1}{11} \\ k < -\frac{1}{11} \ \vee \ k > 1 \end{cases}$$

⇝ Soluzione del sistema $\boxed{k < -1 \quad \vee \quad k > 1}$

$$\text{Area} = \frac{|x_A| \cdot |y_B|}{2}$$ ⇝ per le C.E. posso scrivere

$$\frac{(11k+1)}{2(k+1)} \cdot \frac{(11k+1)}{(k-1)} = \frac{98}{3} \cdot 2$$

$$3(11k+1)^2 = (k^2-1)\cdot 98\cdot 4$$

$$3(121k^2+22k+1) = 392k^2-392$$

$$363k^2+66k+3 = 392k^2-392$$

$$29k^2-66k-395=0$$

$$\frac{\Delta}{4} = 33^2+29\cdot 395 = 112^2$$

$$k_1/k_2 = \frac{66\pm 112}{29} \quad \begin{matrix} \frac{178}{29} \\ -\frac{48}{29} \end{matrix}$$

$$\begin{array}{r} 395 \\ 29 \\ \hline 3555 + \\ 7900 \\ \hline 11455 + \\ 1089 \\ \hline 12544 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 33 \\ 33 \\ \hline 99 + \\ 990 \\ \hline 1089 \end{array}$$