

Settimana: 14

Materia: Matematica

Classe: 5A

Data: 15/12/25

Teorema di Cauchy:

Siano $f, g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ tali che:

- 1) f, g continue in $[a, b]$
- 2) f, g derivabili in (a, b)
- 3) $g'(x) \neq 0 \quad \forall x \in (a, b)$

Allora $\exists c \in [a, b]$ t.c.

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

Euristicamente: Il rapporto tra gli incrementi di due funzioni è misurabile tramite il rapporto delle derivate in un p.t.

Teorema di De L'Hospital

DATE DUE FUNZIONI $f, g: I(x) \rightarrow \mathbb{R}$, SE

- 1) f, g continue e $f(x_0) = g(x_0) = 0$ (oppure $+\infty$)
- 2) f, g derivabili ovunque eccetto in x_0
- 3) $g'(x) \neq 0 \quad \forall x \in I \setminus \{x_0\}$
- 4) esiste $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$

Allora esiste il $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ e vale che.

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}}$$

Esempio: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x}{1} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{2x} \quad \text{De L' Hop}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x}{2} = \frac{1}{2} \quad \text{De L' Hop}$$

Peg 1750 n° 97 (2014)

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\sin x + \cos x - \sqrt{2}}{\ln(\sin 2x)} = \frac{1}{2\sqrt{2}}$$

De L' Hop

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\cos x - \sin x}{\frac{1}{\sin 2x} \cdot \cos(2x) \cdot 2} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\sin 2x (\cos x - \sin x)}{2 \cos 2x} = \frac{1}{2\sqrt{2}}$$

$\cos^2 x - \sin^2 x$
 $(\cos x - \sin x)(\cos x + \sin x)$

1750 n 38 (2012)

$$D(a^x) = \mathbb{R}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty^+} \frac{2^{3x} - 3^{4x}}{x^2} = -\infty$$

De L'Hop

$$\lim_{x \rightarrow \infty^+} \frac{2^{3x} \ln(2) \cdot 3 - 3^{4x} \ln(3) \cdot 4}{2x} = -\infty$$

Quesito 2. 2006 IAU pag 1751

$$f(x) = \arctg x - \arctg \frac{x-1}{x+1}$$

Calcola $f'(x)$ e deduci cose.

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{1+\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^2} \cdot \frac{1(x+1) - 1(x-1)}{(x+1)^2} \\ &= \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{x^2+1+2x+x^2+1-2x} \cdot \frac{x+1-x+1}{(x+1)^2} \\ &= \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{2(x^2+1)} \cdot \cancel{x} = 0 \end{aligned}$$

Remind: Se $f: (a; b) \rightarrow \mathbb{R}$ f.c. $f'(x) = 0$ in $(a; b)$
 $\Rightarrow f(x)$ è costante

Per trovare la costante provo $x=0$

$$f(x) = f(0) = \arctg(0) - \arctg(-1) = 0 - \frac{\pi}{4} = -\frac{\pi}{4}$$

Do scoprile: Perché il libro dà due soluzioni? (Perché $f(x)$ è definita nell'unione di due intervalli)

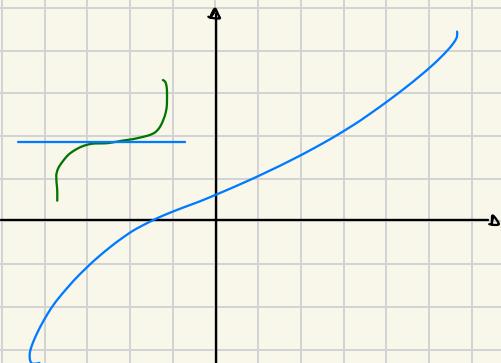
Pag 144 n° 8

$$f_a(x) = ax^3 + (2a+1)x^2 + 3ax + 2a \quad a \in \mathbb{R}$$

(a) Mostri che $A = (-1; 1)$ appartiene a $f_a(x)$ indipendentemente da a .

$$\begin{aligned} f_a(-1) &= -a + (2a+1) - 3a + 2a = \\ &= -\cancel{a} + 2\cancel{a} + 1 - 3\cancel{a} + 2\cancel{a} = 1 \end{aligned}$$

(b) Trovare i valori di a per cui $f_a(x)$ è invertibile



Iniettiva: La funzione NON deve avere Golbe, cioè NON deve avere Flex o min.

$$f_a'(x) = 3ax^2 + 2(2a+1)x + 3a$$

Affinché $f_a'(x) = 0$ NON ha soluzione impone $\Delta \leq 0$

Cfless

$$[2(2a+1)]^2 - 4(3a)(3a) \leq 0$$

$$\cancel{4}(4a^2+1+4a) - \cancel{4} \cdot 9a^2 \leq 0$$

$$5a^2 - 4a - 1 > 0$$

$$\frac{\Delta}{4} = 4+5=9$$

$$a_1/a_2 = \frac{2+3}{5} < -\frac{1}{5}$$

$$a \leq -\frac{1}{5} \quad \vee \quad a \geq 1$$

Suriettività: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_a(x) = \pm \infty$ e $\lim_{x \rightarrow -\infty} f_a(x) = \mp \infty$

$\Rightarrow f_a(x)$ è suriettiva SEMPRE

$\Rightarrow f_a(x)$ è INVERTIBILE se $a \leq -\frac{1}{3} \vee a > 1$

(c) Dette $F_a(x)$ la funzione inversa (nelle Hip giuste), so che

$$F_a^{-1}(1) = 2 \quad \text{mo Dobbiamo trovare } a.$$

$$F_a^{-1}(y) = \frac{1}{f^1(x)} \quad \text{L.c.} \quad x = F_a(y)$$

1) Dobbiamo calcolare $x = F_a(1)$ per buttarlo nella formula

↓ applico f_a

$$f_a(x) = f_a(F_a(1)) = 1$$

$$ax^3 + (2a+1)x^2 + 3ax + 2a = 1 \quad \text{mo Oss. Liude: } x = -1$$

Bisolve! Dunque
Basta mettere di
sotto

Dove inoltre valere che $F_a^{-1}(1) = 2$

$$F_a^{-1}(1) = \frac{1}{f^1(-1)} \quad \text{mo} \quad F_a^{-1}(1) = \frac{1}{3a-4a-2+3a} = \frac{1}{2(a-1)}$$

$$\text{mo} \quad F_a^{-1}(1) = \frac{1}{2(a-1)}$$

