

Settimana: 3

Materia: Matematica

Classe: 5A

Data: 29/09/25

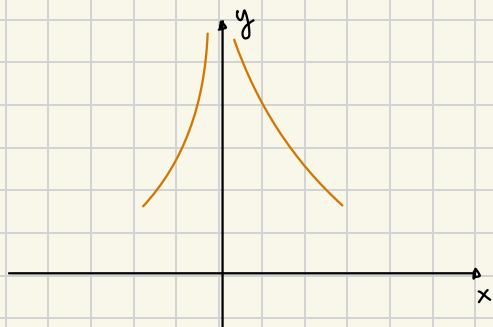
Argomenti: Correzione di esercizi simili a quesiti delle maturità. Verifica di limiti. Teoremi di prodotto e quoziente dei limiti (come $x \rightarrow x_0$). Molti esempi di calcolo di limiti. Es sui limiti, Limiti notevoli, esercizi a gruppi.

Pag 1485 Q1

$$f(x) = \left| \frac{2x+5}{k^2x} \right|, \quad k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

Verificare che $x=0$ è asintoto verticale

$$f_2(x) = \left| \frac{2x+5}{4x} \right|$$



$$\lim_{x \rightarrow 0} \left| \frac{2x+5}{4x} \right| = +\infty$$

Analisi: provando con $k=2$ mi sono convinto che il limite sopra è $+\infty$. Se cambio k , succede sempre la stessa cosa quindi sembra essere:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left| \frac{2x+5}{k^2x} \right| = +\infty$$

Si deve VERIFICARE.

$$\forall M > 0, \exists \delta > 0 \text{ t.c. } |x-0| < \delta \Rightarrow f(x) > M$$

Vittoria mi ha detto M , cerco δ

Parto dal fatto che $f(x) > M$, cioè $\left| \frac{2x+5}{k^2x} \right| > M$

Ora lo risolvo e quella sarà la condizione per x .

Per semplicità faccio solo $x > 0$, cioè provengo da destra → $x < 0$ per caso

In questo caso, la condizione diventa:

$$\frac{2x+5}{k^2x} > M \quad \leadsto \quad \frac{2x-k^2xM+5}{k^2x} > 0 \quad \leadsto \quad \frac{x(2-k^2M)+5}{k^2x} > 0$$

$$\frac{x(k^2M-2)-5}{k^2x} < 0 \quad \text{Devi: sempre positivo}$$

Guardo solo il numeratore: $x(k^2M-2)-5 < 0$

$$\Rightarrow x < \frac{5}{k^2M-2}$$

} Suppongo che M molto grande e
 $k^2M-2 > 0$

\leadsto Basta quindi scegliere $\delta \in (0, \frac{5}{k^2M-2})$

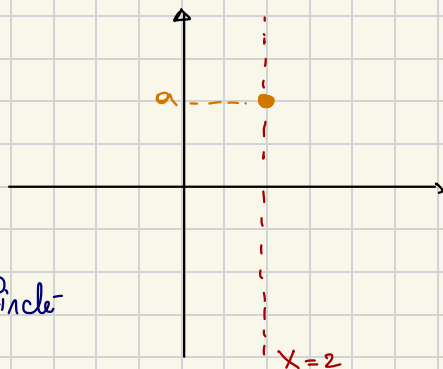
Q4: Verifica $\lim_{x \rightarrow 2} 3(x^2-4) = 0$ e considera

$$f(x) = \begin{cases} 3(x^2-4) \cdot \sin \frac{1}{x-2} & x \neq 2 \\ a & x = 2 \end{cases}$$

per quali a è continua

Per verificare che la funzione è continua deve valere che

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ \text{vicino a 2}}} f(x) = \underbrace{f(2)}_{\text{su 2}}$$



Sostituendo ho da trovare a affinché

$$\lim_{x \rightarrow 2} \left[3(x^2-4) \cdot \sin \left(\frac{1}{x-2} \right) \right] = a$$

Imp: Noto che $\sin\left(\frac{1}{x-2}\right)$ è limitato / Quindi nel conteggio del limite si comporta bene (Moltiplicato per 0, fa 0)

Formalmente

$$-1 \leq \sin \frac{1}{x-2} \leq 1$$

↓ $\cdot 3(x^2-4)$

$$3(x^2-4) \cdot (-1) \leq 3(x^2-4) \sin \frac{1}{x-2} \leq 3(x^2-4)$$

↓ Lim

$$\underbrace{\lim_{x \rightarrow 2} [-3(x^2-4)]}_{=0 \text{ per pto 1}} \leq \lim_{x \rightarrow 2} 3(x^2-4) \sin \frac{1}{x-2} \leq \underbrace{\lim_{x \rightarrow 2} 3(x^2-4)}_{0'' \text{ per pto 1}}$$

↪ Per teo carabinieri $0 \leq \underbrace{\lim_{x \rightarrow 2} 3(x^2-4) \sin \frac{1}{x-2}}_{\downarrow 0} \leq 0$

↪ lo rimetto sopra e scopro che $\boxed{a=0}$

Teoremi di calcolo dei limiti

Prodotto Siano $f, g: D \rightarrow \mathbb{R}$, x_0 di acc. per D e supponiamo

$$(1) \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l \quad \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = m \quad l, m \text{ finiti}$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) \cdot g(x)] = \left[\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \right] \cdot \left[\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) \right] = lm$$

$$(2) \text{ Se } \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0 \quad \text{Non si può dire nulla a priori}$$

$$(3) \text{ Se } \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0 \quad \text{e} \quad g(x) \text{ è limitato in un intorno di } x_0$$

allora $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \cdot g(x) = 0$

Dim 3: Analogo all'esercizio sopra. Fare i combinieri con l'ipotesi che

$$m \leq g(x) \leq M \quad] \Leftrightarrow g \text{ limitata}$$

Posso
elim

$$\begin{aligned} f(x) \cdot m &\leq f(x) \cdot g(x) \leq f(x) \cdot M \\ \lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) \cdot m) &\leq \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \cdot g(x) \leq \lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) \cdot M) \\ 0 &\leq \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \cdot g(x) \leq 0 \end{aligned}$$

Per i Combinieri ho concluso

Oss: Se da $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$ Quanto fa $\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x)]^n = l^n$

Quoziente: Siano $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$, $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = m$, $m \neq 0$

$$(1) \quad \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)}{\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)} = \frac{l}{m}$$

(2) Se $l, m = 0$ nelle notazioni sopra; purtroppo non si può dire niente. Stesse cose se ho $\frac{\infty}{\infty}$

Esempio: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^3 + 2x^2 + 1}{5x^2} =$ Manipolazione interna per giungere a delle forme che posso trattare con le regole sopra

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 \left(3 + \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2} \right)}{x^2 \cdot 5} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \underbrace{x}_{+\infty} \cdot \underbrace{\frac{3 + \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2}}{5}}_{\frac{3}{5}} = \infty$$

Esempio: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{37x^{21} + 12x^3 + 7}{12x^{21} + 74x^{15} + 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\cancel{x^{21}} \left(37 + \frac{12}{x^{18}} + \frac{7}{x^{21}} \right)}{\cancel{x^{21}} \left(12 + \frac{74}{x^6} + \frac{1}{x^{21}} \right)} = \frac{37}{12}$

Esempio: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(2x)}{x} (x+1) = \lim_{x \rightarrow 0} \boxed{\frac{\sin(2x)}{2x}} \cdot \underbrace{2(x+1)}_2 = 2$

Esempio: $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sin(2(x-3))}{x-3}$

Sempre nello stesso spirito voglio manipolare e arrivare a $\frac{\sin x}{x}$

Sostituisco tutto nel limite

$$\begin{array}{ll} 2v = t & v = \frac{t}{2} \\ v \rightarrow 0 & t \rightarrow 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} x-3 = v & \leadsto \quad x \rightarrow 3 \\ \downarrow & v \rightarrow 0 \\ x = v+3 & \end{array}$$

$$\lim_{v \rightarrow 0} \frac{\sin(2v)}{v}$$

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin(t)}{\frac{t}{2}} = \lim_{t \rightarrow 0} \underbrace{\frac{\sin(t)}{t}}_1 \cdot 2 = 2$$

Esempio: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin(x)}{x} = 0$ Sopra è l'asintoto

Esempio: $\lim_{x \rightarrow \infty} (x - \sqrt{x^2 + 1}) =$ Penso: la radice e il - non mi piacciono. Provo a

fare cose tipo razionalizzazione

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (x - \sqrt{x^2 + 1}) \cdot \frac{x + \sqrt{x^2 + 1}}{x + \sqrt{x^2 + 1}} =$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - (x^2 + 1)}{x + \sqrt{x^2 + 1}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-1}{x + \sqrt{x^2 + 1}} = 0$$

0 · ∞

Esempio: $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} (1 - \sin x) \cdot \tan x =$

Non mi piace! c'è -

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} (1 - \sin x) \frac{\sin x}{\cos x} \cdot \frac{(1 + \sin x)}{(1 + \sin x)} =$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \frac{(1 - \sin^2 x) \sin x}{\cos x (1 + \sin x)} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \frac{\cos^2 x \cdot \sin x}{\cos x (1 + \sin x)} = 0$$

0 · 1

Pag 1526 n. 151

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \log_{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2} x^2 - x \right) = -\infty$$

∞

n. 155:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{2}{\sin x} - \frac{1}{\tan x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{2}{\sin x} - \frac{\cos x}{\sin x} \right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{2 - \cos x}{\sin x} \right) = +\infty$$

n. 176

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(4x^3 + 1)^2}{-2x^6 + 3x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{16x^6 + 8x^3 + 1}{-2x^6 + 3x^2} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^6 \left(16 + \frac{8}{x^3} + \frac{1}{x^6} \right)}{x^6 \left(-2 + \frac{3}{x^4} \right)} = -8$$

16
-2

n. 180: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{2x} + e^x - 1}{e^x + 4} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{t^2 + t - 1}{t + 4} = \infty$

$e^x = t \quad x \rightarrow +\infty \quad t \rightarrow +\infty$

$= \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{t^2 \left(1 + \frac{1}{t} - 1\right)}{t \left(1 + \frac{4}{t}\right)} = \infty$

n. 182: $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x^2 - 2x}{4x^2 + 1} \right)^x = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[\frac{x \left(1 - \frac{2}{x}\right)}{4 \left(1 + \frac{1}{x^2}\right)} \right]^x = \infty$

Stiamo usando il teorema che dice che sotto opportune ipotesi, vale che

$$\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x)]^{g(x)} = \left[\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \right]^{\left(\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) \right)}$$

Non devono venire cose tipo: 0^0 , ∞^0 , 1^∞

n. 248: $\lim_{x \rightarrow 0^+} (2x)^{\frac{2}{\ln(2x)}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{\frac{2}{\ln(2x)} \cdot \ln(2x)} = e^2$

Artificio del Bernoulli

$$[f(x)]^{g(x)} = e^{\ln[f(x)]^{g(x)}} = e^{g(x) \cdot \ln(f(x))}$$

n. 252:

$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^{\frac{1}{\ln^2 x^2}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\frac{1}{\ln^2 x^2} \cdot \ln(x)}$

$\ln^2 x^2 = \ln(x^2) \ln(x^2) = 2 \ln(x) \cdot 2 \ln(x) = 4 \ln^2(x)$

$= \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\frac{1}{4 \ln^2(x)} \cdot \ln(x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\frac{1}{4 \ln(x)}} = 1$

n. 210: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[3]{x^3 + x^2} - \sqrt[3]{x^3 - x^2} = \begin{cases} a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2) \end{cases}$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt[3]{x^3 + x^2} - \sqrt[3]{x^3 - x^2} \right) \cdot \frac{\left(\sqrt[3]{x^3 + x^2} \right)^2 + \sqrt[3]{x^3 + x^2} \sqrt[3]{x^3 - x^2} + \left(\sqrt[3]{x^3 - x^2} \right)^2}{\left(\sqrt[3]{x^3 + x^2} \right)^2 + \sqrt[3]{x^3 + x^2} \sqrt[3]{x^3 - x^2} + \left(\sqrt[3]{x^3 - x^2} \right)^2}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 + x^2 - x^3 + x^2}{\left(\sqrt[3]{x^3 + x^2}\right)^2 + \sqrt[3]{x^3 + x^2} \sqrt[3]{x^3 - x^2} + \left(\sqrt[3]{x^3 - x^2}\right)^2} =$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2}{\left[\sqrt[3]{x^3 \left(1 + \frac{1}{x}\right)}\right]^2 + \sqrt[3]{x^3 \left(1 + \frac{1}{x}\right)} \sqrt[3]{x^3 \left(1 - \frac{1}{x}\right)} + \left[\sqrt[3]{x^3 \left(1 - \frac{1}{x}\right)}\right]^2}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2}{x^2 \left[\underbrace{\left(\sqrt[3]{1 + \frac{1}{x}}\right)^2}_{\downarrow 1} + \underbrace{\sqrt[3]{1 + \frac{1}{x}} \sqrt[3]{1 - \frac{1}{x}}}_{\downarrow 1} + \underbrace{\left(\sqrt[3]{1 - \frac{1}{x}}\right)^2}_{\downarrow 1} \right]} = \frac{2}{3}$$

Remind: Limite notevole: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

Def / Lim notevole: Definiamo il numero di Nepero e come

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$$

Es / Limite notevole:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos x)(1 + \cos x)}{x^2 (1 + \cos x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{x^2 (1 + \cos x)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \underbrace{\frac{\sin x}{x}}_{\downarrow 1} \cdot \underbrace{\frac{\sin x}{x}}_{\downarrow 1} \cdot \underbrace{\frac{1}{1 + \cos x}}_{\downarrow 1/2} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}}$$

Es / Limite notevole:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \cdot \ln(1+x) = \lim_{x \rightarrow 0} \ln(1+x)^{\frac{1}{x}}$$

$$\begin{array}{l} t = \frac{1}{x} \\ x = \frac{1}{t} \end{array} \quad \begin{array}{l} x \rightarrow 0 \\ t \rightarrow +\infty \end{array} \quad = \lim_{t \rightarrow +\infty} \ln \left[1 + \frac{1}{t} \right]^t = 1$$

\downarrow
 e

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1}$$

Es / Lim notevole:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{y}{\ln(y+1)} = 1$$

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1}$$

$$\begin{array}{l} x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0 \end{array} \quad \begin{array}{l} x = \ln(y+1) \\ e^x - 1 = y \end{array}$$