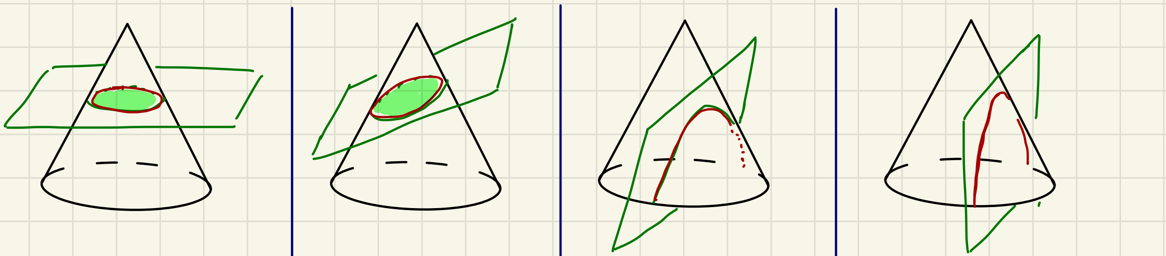
Dimostrazioni / Deduzioni Leggi di Keplero

Prima Legge: Se si impostano le equazioni matematiche che descrivono l'orbita di un satellite si scopre che tale orbita è l'intersezione tra un cono nello spazio e un piano.



Piano parallelo alla base. La traiettoria viene **circolare**

Piano inclinato di una inclinaz. α compresa tra orizzontale e inclinazione del cono, esce **Ellisse**

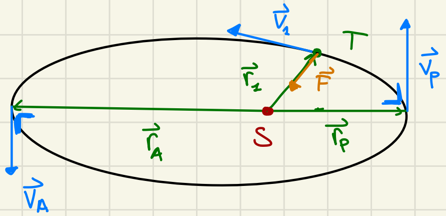
Piano inclinato come l'inclinazione del cono esce una **parabola**

Piano inclinato più dell'inclinazione del cono. Esce fuori un **ramo di iperbole**

Def: Una **conica** è un luogo geometrico di punti definito dall'inters. tra un piano e un cono nello spazio.

Oss: Le traiettorie dei pianeti (Kepleriane) sono coniche.

Seconda Legge: Vera come conseguenza della conservazione del momento angolare



$$\vec{L} = \vec{r} \wedge \vec{p}$$

Remind. Il momento angolare si conserva quando la somma dei momenti delle forze è 0.

Se provo a calcolare il momento della forza $\vec{F}$, che è l'unica in gioco ottengo

$$\vec{M} = \vec{r} \wedge \vec{F}$$

$$M = rF \cdot \sin\alpha = 0 \qquad (\sin 180° = 0)$$

Dato che $\vec{L}$ si conserva, vale in particolare che

$\vec{L}_A = \vec{L}_P$ ⇝ con i moduli ⇝ $L_A = L_P$

$$r_A \cdot \cancel{m} \cdot v_A \cdot \cancel{\sin 90°} = r_P \cdot \cancel{m} \cdot v_P \cdot \cancel{\sin 90°}$$

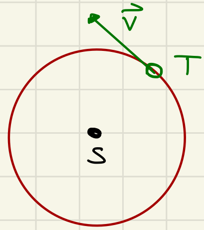
$$r_A \cdot v_A = r_P \cdot v_P$$

Dato che $r_A > r_P$, deve valere che $v_A < v_P$ e cioè se sono più lontano mi muovo più lentamente

Warning: Questo conto è fatto solo per Afelio e Perielio per difficoltà tecniche. Ma funziona in generale

Terza Legge: Dice che $\frac{a^3}{T^2}$ è costante. Dimostriamo il fatto che la quantità è costante sfruttando un orbita circolare, ma poi è sempre utilizzabile

Bonus Giulia C.



Dim: Dato che il moto è circolare, quanto vale la velocità v della Terra?

$$V = \frac{2\pi r}{T} \rightsquigarrow v^2 = \frac{4\pi r^2}{T^2}$$

dove r è la distanza tra il pianeta e il sole

La Terra si comporta come un satellite e la velocità del satellite la conosciamo e vale

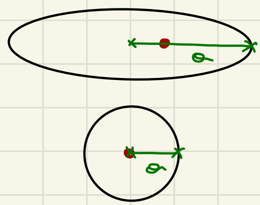
$$v^2 = G\frac{M}{r}$$

dove M è la massa dell'oggetto rispetto a cui sto ruotando.

Uguagliando le due formule ottengo

$$\frac{4\pi^2 r^2}{T^2} = \frac{GM}{r} \rightsquigarrow \boxed{\frac{r^3}{T^2} = \frac{GM}{4\pi^2}}$$

Dato che l'orbita è circolare $a = r$.
Ma allora la formula sopra è:



$$\frac{a^3}{T^2} = \frac{GM}{4\pi^2}$$

che è una costante $k = \frac{GM}{4\pi^2}$

Dunque ho fatto vedere che $\frac{a^3}{T^2}$ è costante e so esattamente quanto vale