Settimana: 4

Materia: Matematica
Classe: 3D
Data: 6/10/2025

Argomenti: Suriettività, bigettività, Cardinalità, Esercizi con Im(f). Esercizi su domini, zeri, Segno, Immagine. Molti esercizi di comprensione e interpretazione grafica su $\mathbb{R}^2$. Interpretazione grafica e numerica di iniettività e suriettività

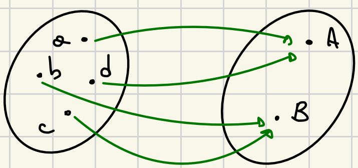
Def: Una funzione $f: A \longrightarrow B$ è **suriettiva** (o **surgettiva**) se ogni elemento di B è raggiunto da **almeno** un elemento di A. Formalmente

$$\forall b \in B \,,\ \exists a \in A \mid f(a) = b$$

equival.

$$\underbrace{B}_{\text{Insieme di arrivo}} = \underbrace{Im(f)}_{\text{Tutto quello che viene raggiunto}}$$

Esempio: (1) Suriettiva



(2) $f: \mathbb{N} \longrightarrow \text{Num Pari}$
$n \longmapsto 2n$

⇝ f è suriettiva
⇝ f è anche iniettiva

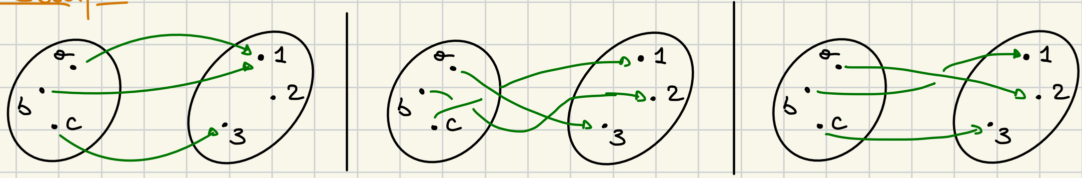
(3) $F_f: \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$
$n \longmapsto 2n$

F_f non è suriettiva
F_f è iniettiva

Oss: Per la suriettività fate molta attenzione a Dominio e Codominio

Def: Una funzione $f: A \longrightarrow B$ è **bigettiva** (o **Biunivoca** o **Biettiva**) se è sia iniettiva che suriettiva

Esempio



No inj
No surj

Inj
Surj $\Longrightarrow$ Bij

Inj
Surj $\Longrightarrow$ Bigettiva

Def: Dato un insieme, la cardinalità di A è il numero di elementi di A. Si indica con $|A|$

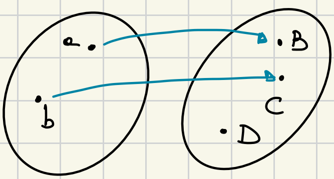
Def: Diremo che due insiemi hanno la stessa cardinalità se esiste una funzione bigettiva tra i due insiemi

Esempio:

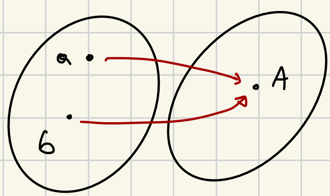
	0	1	2	3	4	5	6	7	...
f	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	
	0	2	4	6	8	10	12	14	

$f(n) = 2n$ $\qquad$ $f: \mathbb{N} \longrightarrow$ Num Pari

Oss (1) Sia $f: A \to B$ iniettiva, allora $|A| \leq |B|$
(2) Sia $f: A \to B$ suriettiva, allora $|A| \geq |B|$



(1) Per essere iniettiva B non può avere più elementi di A



(2) Per essere suriettiva A deve avere almeno gli el. di B

Es 24 pag 107

$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$y = f(x) \qquad x \longmapsto 2x^2+3 \qquad\qquad x \longmapsto 2x^2+3$

Determina $\mathrm{Im}(f)$ (Imp!!)

$5 \in \mathrm{Im}(f) = ?$ ⇝ "Posso risolvere $2x^2+3=5$?"

Si, $2x^2 = 2$ ⇝ $x^2 = 1$, $x = \pm 1$ $\Longrightarrow$ $5 \in \mathrm{Im}(f)$

$$f^{-1}(5) = \{1, -1\}$$

$-3 \in \mathrm{Im} f$? $\quad 2x^2+3 = -3$ ⇝ $2x^2 = -6$ Impossibile

In generale è vero che $y \in \mathrm{Im} f$? Vediamo quelli che vanno bene

$\boxed{\text{Posso risolvere } 2x^2+3 = y \ ?}$ ⇝ La mia incognita è la x e faccio finto di conoscere y

↳ $2x^2 = y-3$ ⇝ $x^2 = \dfrac{y-3}{2}$

Per trovare x faccio radice $x = \pm\sqrt{\dfrac{y-3}{2}}$ ⇝ MA LO POSSO FARE SOLAM. SE IMPONGO LE C.E. per y

⇝ C.E. $\dfrac{y-3}{2} \geq 0$ ⇝ $\boxed{y \geq 3}$

⇝ Dunque $\mathrm{Im} f = \{y \geq 3\}$

Pag 110 Es 97

$y = \sqrt[3]{x^2 - 3x + 4}$ Dominio ⟶ $f: \mathrm{Dom}(f) \longrightarrow \mathbb{R}$

in arrivo se non spec. prendo $\mathbb{R}$

$\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R}$, non ci sono restrizioni

Es 138

$y = \sqrt{4 + 3x^2 - x^4}$ $\quad f: Dom(f) \longrightarrow \mathbb{R}$

Dom(f) = Valori accettabili della x = C.E. dell'espressione

$\Rightarrow \quad -x^4 + 3x^2 + 4 \geq 0 \qquad \boxed{x^2 = t}$

$-t^2 + 3t + 4 \geq 0$

$t^2 - 3t - 4 \leq 0 \rightsquigarrow (t-4)(t+1) \leq 0$

$(x^2 - 4)(x^2 + 1) \leq 0 \rightsquigarrow (x-2)(x+2)(x^2+1) \leq 0$

$f_1: \ x \geq 2$
$f_2: \ x \geq -2$
$f_3: \ x^2 + 1 \geq 0$ Sempre

$\Rightarrow$ Graf segni $\Rightarrow \boxed{-2 \leq x \leq 2}$

$Dom(f) = [-2; 2]$

Pag 113 Es 170

$y = \sqrt{1 - x^2}$ $\quad f: Dom(f) \longrightarrow \mathbb{R}$

Dom(f): $\quad 1 - x^2 \geq 0 \rightsquigarrow x^2 - 1 \leq 0 \rightsquigarrow \boxed{-1 \leq x \leq 1}$

$Dom(f) = [-1; 1]$

Per Im(f): Si ricava la x in funzione della y:

$y = \sqrt{1 - x^2} \overset{\boxed{y \geq 0} \text{ C.E.}}{\rightsquigarrow} y^2 = 1 - x^2 \rightsquigarrow x^2 = 1 - y^2$

$\rightsquigarrow x = \pm\sqrt{1 - y^2}$ Non correttissimo, ma ok

Si fanno le C.E. e si mettono a sistema con quelle già trovate

$1-y^2 \geq 0 \rightsquigarrow -1 \leq y \leq 1 \rightsquigarrow$ Sist. $\begin{cases} y \geq 0 \\ -1 \leq y \leq 1 \end{cases}$

$$\rightsquigarrow \boxed{\mathrm{Im}(f) = [0, 1]}$$

Pag 113, Es 172

$y = \sqrt{x^2-9} - 3$ $\qquad f: \mathrm{Dom}(f) \longrightarrow \mathbb{R}$

Dom(f): $x^2-9 \geq 0 \rightsquigarrow \boxed{x \leq -3 \quad \vee \quad x \geq 3}$

$$\mathrm{Dom}(f) = (-\infty; -3] \cup [3; +\infty)$$

Im(f): $y = \sqrt{x^2-9} - 3 \rightsquigarrow y+3 = \sqrt{x^2-9} \rightsquigarrow$ elevo: $y+3 \geq 0$ $\boxed{y \geq -3}$

$$y^2 + 6y + 9 = x^2 - 9$$

$$x^2 = y^2 + 6y + 18 \rightsquigarrow x = \pm \sqrt{y^2+6y+18}$$

faccio le C.E. sulla y $\rightsquigarrow y^2+6y+18 \geq 0$

$\frac{\Delta}{4} = \left(\frac{b}{2}\right)^2 - ac = 9 - 18 = -9$ $\quad \Rightarrow \boxed{\forall y \in \mathbb{R}}$

$$\rightsquigarrow \mathrm{Im}(f) = [-3; +\infty)$$

Def: Data $\underbrace{f: D \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}}$, definiamo gli zeri della funzione

↳ funzione di variabile reale a valori reali

f, tutti gli elementi $x \in D$ t.c. $f(x) = 0$

Un altro modo per indicarli è:

$$\boxed{\text{zeri di } f = f^{-1}(0)}$$

Def: Data $f: D \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, studiare il segno di f, significa studiare $f(x) \geq 0$, risolverla e ottenere che:

1) Nei valori della soluzione, la funzione è positiva o 0
2) Nei valori complementari, la funzione è negativa o 0

Pag 114 Es 200

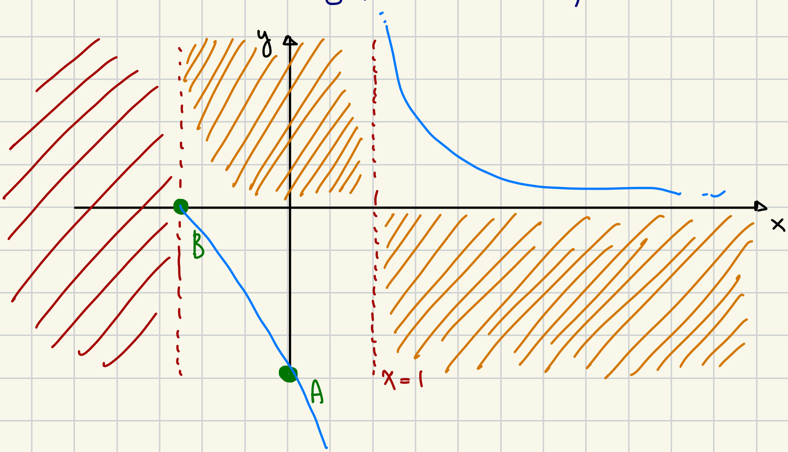
$$y = \frac{\sqrt{3x+4}}{x-1}$$

$\rightarrow f: Dom(f) \longrightarrow \mathbb{R}$

Ricetta: (1) Dominio
(2) Inters. con assi cart.
(3) Segno.
(Bonus) Immagine

(1) Dom(f): $\begin{cases} 3x+4 \geq 0 \\ x-1 \neq 0 \end{cases}$ $\begin{cases} x \geq -\frac{4}{3} \\ x \neq 1 \end{cases}$

$$Dom(f) = \left[-\frac{4}{3}; 1\right) \cup (1; +\infty)$$



(1) La parte rossa è il divieto della x dato dal dominio. I punti del grafico NON possono stare nelle parte rossa.

(2) Intersezione con assi cartesiani: I punti in cui il grafico interseca gli assi cartesiani

Int con Asse y: Impongo $x = 0$; $f(0) = \frac{\sqrt{3 \cdot 0 + 4}}{0-1} = -2$

Ho trovato il pto $A = (0; -2)$ per cui passa il grafico

Int con Asse x: Impongo $y = 0$ che corrisponde al trovare gli zeri della funzione

$$0 = \frac{\sqrt{3x+4}}{x-1} \rightsquigarrow \sqrt{3x+4} = 0 \rightsquigarrow \boxed{x = -\frac{4}{3}}$$

Quindi ho trovato un pto $B = \left(-\frac{4}{3}; 0\right)$

(3) Segno della funzione: Ci dice in che zona (sopra o sotto l'asse x) sta il grafico di f.
Per farlo:

$$f(x) \geq 0$$

$$\frac{\sqrt{3x+4}}{x-1} \geq 0$$

Dato che ho già fatto Dom(f), il num è sempre ≥ 0 nel dominio

$\Rightarrow$ Soluzione corrisponde a $x-1>0 \rightsquigarrow x>1$

Cancello le zone sotto l'asse x identificate

Cioè la funzione sta sopra asse x, quando $x>1$

(Bonus) Im(f): $y = \frac{\sqrt{3x+4}}{x-1}$

$(x-1)y = \sqrt{3x+4}$ $\rightsquigarrow$ elevo al $\square$; devo imporre $\boxed{(x-1)y \geq 0}$

$(x-1)^2 y^2 = 3x+4 \rightsquigarrow (x^2-2x+1)y^2 = 3x+4$

$$\underbrace{x^2y^2}_{a} - x\overbrace{(2y^2-3)}^{b} + \underbrace{y^2-4}_{c} = 0$$

Scritta in modo che se conosco y è una eq. di II grado.

Per far sì che l'eq. abbia soluzione, devo imporre $\Delta \geq 0$ e risolvere in y quello che viene

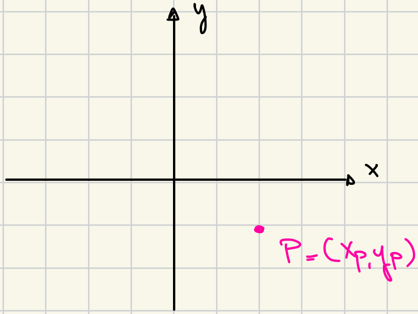
$$\Delta = \left[-(2y^2-3)\right]^2 - 4(y^2-4)y^2 \geq 0$$

$$\cancel{4y^4} + 9 - 12y^2 - \cancel{4y^4} + 16y^2 \geq 0 \rightsquigarrow 4y^2 \geq -9 \quad y^2 \geq -\frac{9}{4} \text{ Sempre}$$

$x-1>0 \wedge y>0 \rightsquigarrow x>1, y>0$
$x-1<0 \wedge y<0 \rightsquigarrow x<1, y<0$
$x-1=0 \wedge \forall y \rightsquigarrow x=0, \forall y$
$\forall x \wedge y=0 \rightsquigarrow \forall x, y=0$

Non ci dà restrizioni su y.
$\Rightarrow \boxed{Im(f) = \mathbb{R}}$

Def: Un piano cartesiano è costituito da due rette perpendicolari orientate. Un punto P nel piano cartesiano è costituito da due coordinate



$$P = (x_P ; y_P)$$

x_P è la coordinata x
y_P è la coordinata y

L'asse x prende il nome di Ascisse
" y " " di Ordinate

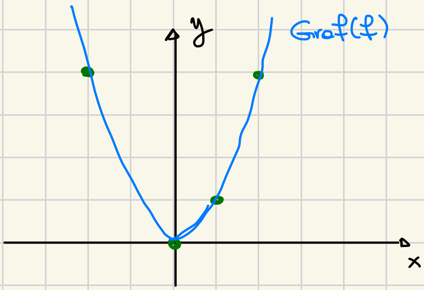
L'asse y è descritto dall' equazione $x = 0$
L'asse x è " " $y = 0$

Piano cartesiano $= \mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$

Def: Data $f : A \longrightarrow B$ funzione, il grafico di f è l'insieme

$$\text{Graf}(f) = \{ (a, f(a)) \mid a \in A \} \subseteq A \times B$$

Esempio: $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$



$\text{Graf}(f) = ?$

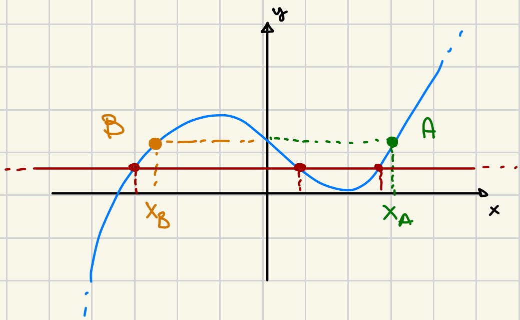
$$\| $$

$$\{ (0,0) ; (1,1) ; (2;4) ; (-2,4) \ \ldots\ldots \}$$

x	y
0	0
1	1
-2	4
2	4

Cosa sono graficamente iniettività e suriettività

Iniettività



Ogni pto dell'arrivo è raggiunto da al più una freccia

$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

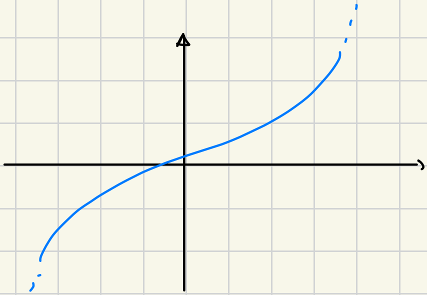
$A = (x_A, f(x_A))$

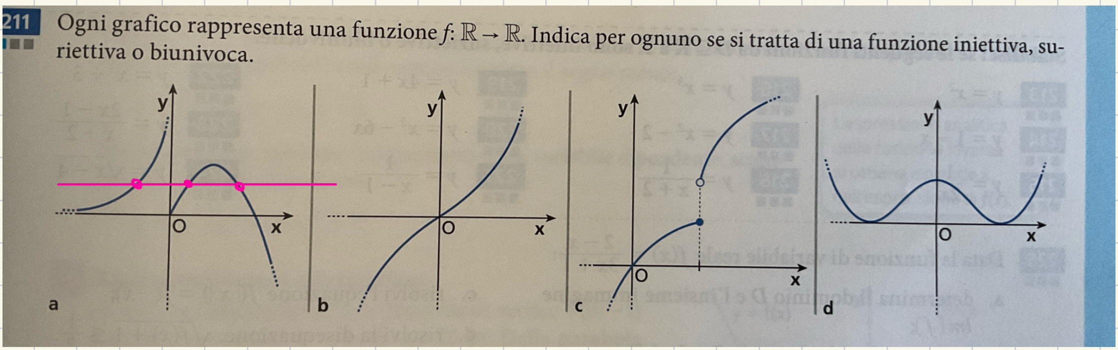
$B = (x_B, f(x_B))$

Ma $f(x_A) = f(x_B)$ e $x_A \neq x_B$

Dunque la funzione NON è inj

È iniettiva se e solo se ogni retta orizzontale interseca la curva in al più un punto





211 Ogni grafico rappresenta una funzione $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Indica per ognuno se si tratta di una funzione iniettiva, suriettiva o biunivoca.

No iniettiva | Iniettiva | Iniettiva | No iniettiva

Esempio numerico:

$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + 3$ È iniettiva?

No, perché $f(1) = 4 = f(-1)$

Se provo il conto $f(x_1) = f(x_2)$

$x_1^2 + \cancel{3} = x_2^2 + \cancel{3} \rightsquigarrow x_1^2 = x_2^2$

$g: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = 7x + 12$ È iniettiva?

Prendo la definizione. Parto da $g(x_1) = g(x_2)$, faccio dei conti e SE arrivo a $x_1 = x_2$, allora la 'fz' è iniettiva

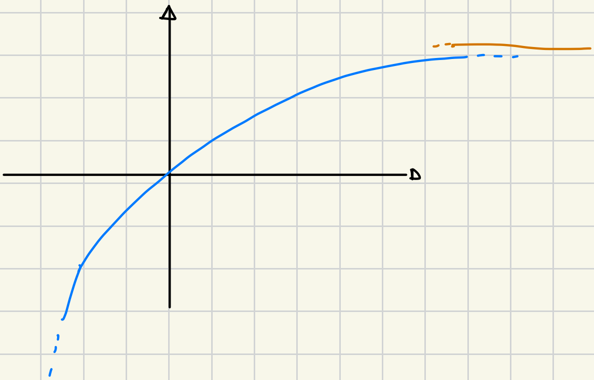
$$g(x_1) = g(x_2) \rightsquigarrow 7x_1 + \cancel{12} = 7x_2 + \cancel{12} \rightsquigarrow$$

$$\rightsquigarrow 7x_1 = 7x_2 \rightsquigarrow x_1 = x_2$$

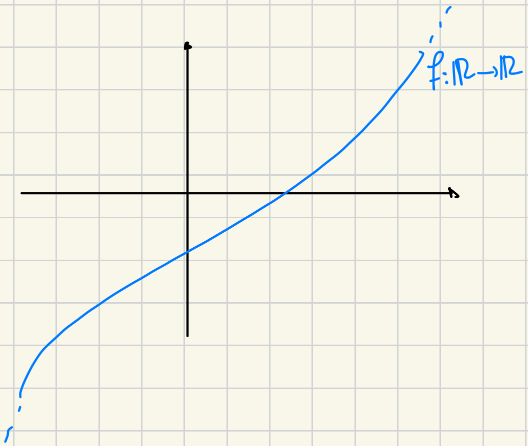
TOP è iniettiva

Suriettività:

Ogni pto del codominio deve essere raggiunto da almeno un valore

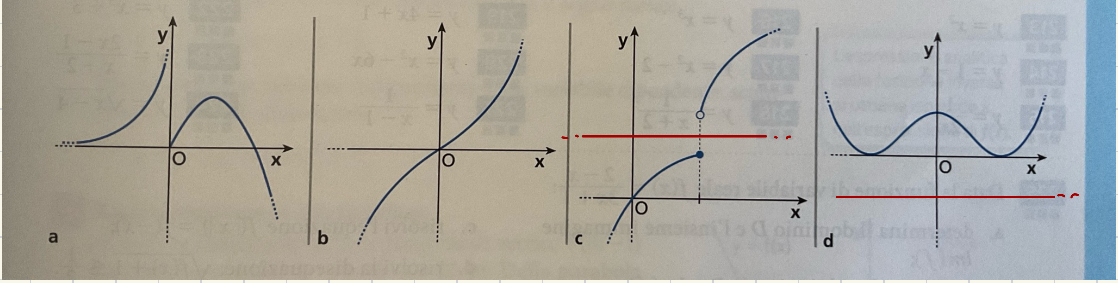


Worning: Devo specificare il codominio $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$



È suriettiva se e solo se Ogni retta di altezza compresa nel codominio interseca il grafico almeno una volta

211 Ogni grafico rappresenta una funzione $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Indica per ognuno se si tratta di una funzione iniettiva, suriettiva o biunivoca.



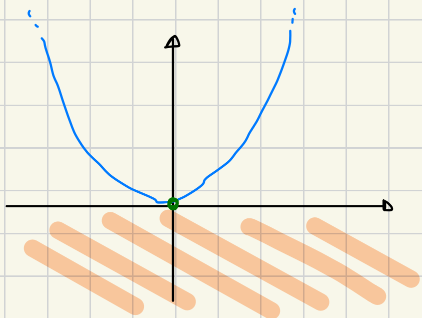
a	b	c	d
Suriettiva	Suriettiva	No suriettiva	No suriettiva

Esempio:

$$f: \mathbb{R} \to [0, +\infty)$$

$$f(x) = x^2$$

$\rightsquigarrow$ Sì, è suriettiva



Non sta nel codominio

Esempio: $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = x^2$ No suriettiva!

Esempio Numerico: $f: \mathbb{R} \to [0, +\infty)$ $f(x) = x^2$

Calcolo l'immagine e se $Im(f)$ = codominio $(Im(f) = [0; \infty))$ allora è suriettiva

$y = x^2 \rightsquigarrow x = \pm\sqrt{y} \rightsquigarrow$ C.E. su y $\{y \geq 0\} = [0; +\infty)$

$\rightsquigarrow$ Dunque è suriettiva.