Settimana: 3

Materia: Matematica
Classe: 5A
Data: 29/09/25

Argomenti: Correzione di esercizi simili a quesiti della maturità. Verifica di limiti. Teoremi di prodotto e quoziente dei limiti (forme $x \to x_0$). Molti esempi di calcolo di limiti

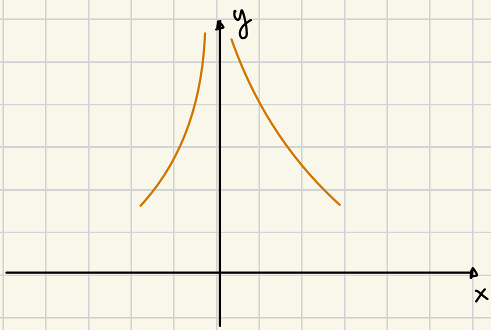
---

Pag 1485 Q1

$$f(x) = \left| \frac{2x+5}{k^2 x} \right| , \quad k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

Verificare che $x=0$ è asintoto verticale

$$f_2(x) = \left| \frac{2x+5}{4x} \right|$$



$$\lim_{x \to 0} \left| \frac{2x+5}{4x} \right| = +\infty$$

Analisi: provando con $k=2$ mi sono convinto che il limite sopra è $+\infty$. Se cambio k, succede sempre la stessa cosa quindi sembra essere:

$$\lim_{x \to 0} \left| \frac{2x+5}{k^2 x} \right| = +\infty$$

Si deve VERIFICARE.

$$\forall M > 0 , \quad \exists \delta > 0 \quad t.c. \quad |x - 0| < \delta \implies f(x) > M$$

Vittoria mi ha detto M, cerco δ

Parto dal fatto che $f(x) > M$, cioè $\left| \frac{2x+5}{k^2 x} \right| > M$

Ora la risolvo e quella sarà la condizione per x.

Per semplicità faccio solo $x>0$ ($\to x<0$ per caso), cioè provengo da destra

In questo caso, la condizione diventa:

$$\frac{2x+5}{k^2x} > M \rightsquigarrow \frac{2x-k^2xM+5}{k^2x} > 0 \rightsquigarrow \frac{x(2-k^2M)+5}{k^2x} > 0$$

$$\frac{x(k^2M-2)-5}{k^2x} < 0$$

<u>Den</u>: sempre positivo

Guardo solo il numeratore: $x(k^2M-2)-5<0$

$$\Rightarrow x < \frac{5}{k^2M-2}$$

Suppongo che M molto grande e $k^2M-2>0$

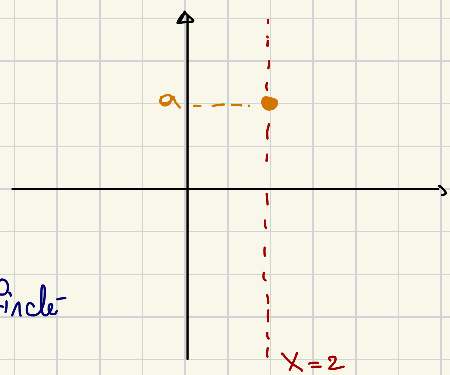
$\rightsquigarrow$ Basta quindi scegliere $\delta \in \left(0, \frac{5}{k^2M-2}\right)$

<u>Q4</u>: Verifico $\lim_{x\to2} 3(x^2-4) = 0$ e considero

$$f(x) = \begin{cases} 3(x^2-4)\cdot\sin\frac{1}{x-2} & x\neq2 \\ a & x=2 \end{cases}$$

per quali a è continua

Per verificare che la funzione è continua deve valere che



$$\underbrace{\lim_{x\to2} f(x)}_{\text{vicino a 2}} = \underbrace{f(2)}_{\text{su 2}}$$

Sostituendo ho da trovare a affinché

$$\lim_{x\to2}\left[3(x^2-4)\,\sin\left(\frac{1}{x-2}\right)\right] = a$$

Imp: Noto che $\sin\left(\frac{1}{x-2}\right)$ è Limitato! Quindi nel conteggio del limite si comporta bene (Moltiplicato per 0, fa 0)

Formalmente $$-1 \leq \sin\frac{1}{x-2} \leq 1$$

$\cdot\, 3(x^2-4)$

$$3(x^2-4)(-1) \leq 3(x^2-4)\sin\frac{1}{x-2} \leq 3(x^2-4)$$

Lim

$$\underbrace{\lim_{x\to 2}\left[-3(x^2-4)\right]}_{=0 \text{ per pto } 1} \leq \lim_{x\to 2} 3(x^2-4)\sin\frac{1}{x-2} \leq \underbrace{\lim_{x\to 2} 3(x^2-4)}_{\text{“}0\text{” per pto } 1}$$

⇝ Per teo carabinieri $$0 \leq \underbrace{\lim_{x\to 2} 3(x^2-4)\sin\frac{1}{x-2}}_{0} \leq 0$$

⇝ Lo rimetto sopra e scopro che $\boxed{a = 0}$

Teoremi di calcolo dei limiti

Prodotto Siano $f, g : D \to \mathbb{R}$, x_0 di acc. per D e supponiamo

(1) $\lim_{x\to x_0} f(x) = \ell$ $\qquad \lim_{x\to x_0} g(x) = m$ $\qquad \ell, m$ finiti

$$\lim_{x\to x_0}\left[f(x)\cdot g(x)\right] = \left[\lim_{x\to x_0} f(x)\right]\cdot\left[\lim_{x\to x_0} g(x)\right] = \ell m$$

(2) Se $\lim_{x\to x_0} f(x) = \pm\infty$, $\lim_{x\to x_0} g(x) = 0$ Non si può dire nulla a priori

(3) Se $\lim_{x\to x_0} f(x) = 0$ e $g(x)$ è Limitata in un intorno di x_0

allora $\lim_{x \to x_0} f(x) \cdot g(x) = 0$

Dim 3: Analogo all'esercizio sopra. Fare i carabinieri con l'ipotesi che

$$m \le g(x) \le M \quad] \Leftrightarrow g \text{ limitata}$$

$\cdot f(x)$

$$f(x) \cdot m \le f(x) g(x) \le f(x) \cdot M$$

Passo al lim

$$\lim_{x \to x_0} (f(x) \cdot m) \le \lim_{x \to x_0} f(x) g(x) \le \lim_{x \to x_0} (f(x) \cdot M)$$

$$0 \le \lim_{x \to x_0} f(x) g(x) \le 0$$

Per i Carabinieri ho concluso

$\square$

Oss: So che $\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell$ Quanto fa $\lim_{x \to x_0} [f(x)]^n = \ell^n$

Quoziente: Siano $\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell$, $\lim_{x \to x_0} g(x) = m$, $m \neq 0$

(1) $$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \to x_0} f(x)}{\lim_{x \to x_0} g(x)} = \frac{\ell}{m}$$

(2) Se $\ell, m = 0$ nella notazioni sopra, purtroppo non si può dire niente. Stesso cosa se ho $\frac{\infty}{\infty}$

Esempio: $$\lim_{x \to +\infty} \frac{3x^3 + 2x^2 + 1}{5x^2} =$$ Manipolazione interna per giungere a delle forme che posso trattare con le regole sopra

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{x^3\left(3+\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}{x^2\cdot 5} = \lim_{x\to+\infty} \underbrace{x}_{+\infty}\cdot\underbrace{\frac{3+\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}}{5}}_{\frac{3}{5}} = \infty$$

Esempio: $$\lim_{x\to+\infty} \frac{37x^{21}+12x^3+7}{12x^{21}+74x^{15}+1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\cancel{x^{21}}\overbrace{\left(37+\frac{12}{x^{18}}+\frac{7}{x^{21}}\right)}^{37}}{\cancel{x^{21}}\underbrace{\left(12+\frac{74}{x^6}+\frac{1}{x^{21}}\right)}_{12}} = \frac{37}{12}$$

Esempio: $$\lim_{x\to0} \frac{\sin(2x)}{x}(x+1) = \lim_{x\to0} \underbrace{\boxed{\frac{\sin(2x)}{2x}}}_{1}\cdot\underbrace{2(x+1)}_{2} = 2$$

Esempio: $$\lim_{x\to3} \frac{\sin(2(x-3))}{x-3}$$

Sempre nello stesso spirito voglio manipolare e arrivere a $\frac{\sin x}{x}$

$x-3=v \rightsquigarrow$ $x\to3$, $v\to0$

$x = v+3$

Sostituisco tutto nel limite

$$\lim_{v\to0} \frac{\sin(2v)}{v}$$

$2v=t$ $\quad v=\frac{t}{2}$

$v\to0$ $\quad t\to0$

$$\lim_{t\to0} \frac{\sin(t)}{\frac{t}{2}} = \lim_{t\to0} \underbrace{\frac{\sin(t)}{t}}_{1}\cdot 2 = 2$$

Esempio: $$\lim_{x\to+\infty} \frac{\sin(x)}{x} = 0$$ Sopra è limitato

Esempio: $$\lim_{x\to\infty} \left(x-\sqrt{x^2+1}\right) =$$ Penso: La radice e il − non mi piacciono. Provo a fare cose tipo razionalizzazione

$$\lim_{x\to+\infty} \left(x-\sqrt{x^2+1}\right)\cdot\frac{x+\sqrt{x^2+1}}{x+\sqrt{x^2+1}} =$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2-(x^2+1)}{x+\sqrt{x^2+1}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{-1}{x+\sqrt{x^2+1}} = 0$$

$0\cdot\infty$

Esempio: $\displaystyle\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-} (1-\sin x)\cdot \operatorname{tg} x =$

Non mi piace! c'è -

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-} (1-\sin x)\,\frac{\sin x}{\cos x}\cdot\frac{(1+\sin x)}{(1+\sin x)} =$$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-} \frac{(1-\sin^2 x)\sin x}{\cos x\,(1+\sin x)} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-} \frac{\overbrace{\cos^{\cancel{2}} x}^{\to 0}\cdot\overbrace{\sin x}^{\to 1}}{\cancel{\cos x}\,\underbrace{(1+\sin x)}_{\to 2}} = 0$$