

Settimana: 14

Argomenti

Materia: Matematica

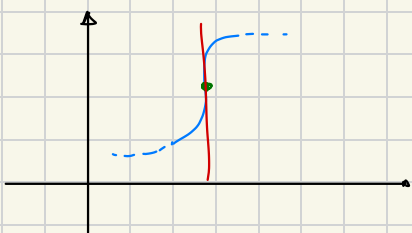
Classe: 5C

Data: 10/1/26

Punti di non derivabilità

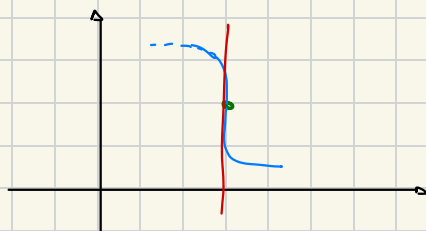
Remind. Si ha un pto di non derivabilità se la derivata sinistra e destra non coincidono oppure sono $\pm\infty$

(1) Flesso a tangente Verticale



$$f'_-(x_0) = +\infty$$

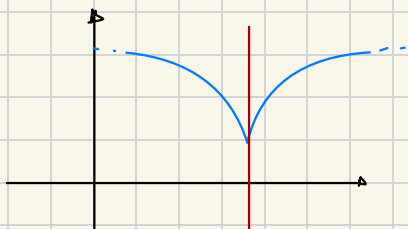
$$f'_+(x_0) = +\infty$$



$$f'_-(x_0) = -\infty$$

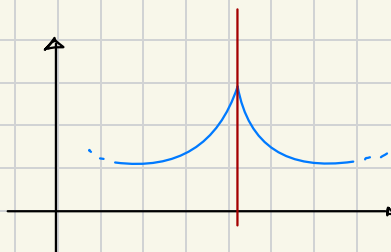
$$f'_+(x_0) = -\infty$$

(2) Cuspidi



$$f'_-(x_0) = -\infty$$

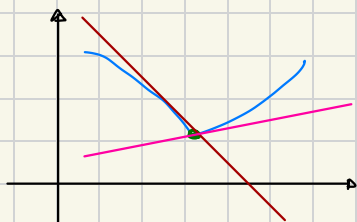
$$f'_+(x_0) = +\infty$$



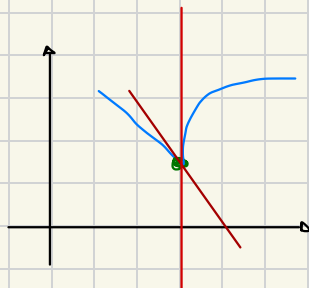
$$f'_-(x_0) = +\infty$$

$$f'_+(x_0) = -\infty$$

(3) Punti angolosi



$$\left. \begin{aligned} f'_-(x_0) &= l \\ f'_+(x_0) &= m \end{aligned} \right\} \text{finiti, ma diversi}$$



Possano essere invertiti

$$\left. \begin{aligned} f'_-(x_0) &= l \text{ finito} \\ f'_+(x_0) &= \pm \infty \end{aligned} \right\}$$

Pag 1708 n. 23

$f(x) = \sqrt[3]{x^2} + 2x$ Studia la derivabilità.

$$f'(x) = \left[x^{\frac{2}{3}} + 2x \right]' = \frac{2}{3} x^{-\frac{1}{3}} + 2 = \frac{2}{3\sqrt[3]{x}} + 2$$

È derivata in tutti i pt tranne $x=0$

Per capire cosa accade in $x=0$ calcolo con la definizione la derivata destra e sinistra in $x=0$.

$$\begin{aligned} f'_+(0) &\stackrel{\text{Def}}{=} \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt[3]{h^2} + 2h - 0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt[3]{h^2} (1 + 2\sqrt[3]{h})}{\sqrt[3]{h^2} \cdot \sqrt[3]{h}} = +\infty \end{aligned}$$

$$f'_-(0) \stackrel{\text{Def}}{=} \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \dots = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{(1 + 2\sqrt[3]{h})}{\sqrt[3]{h}} = -\infty$$

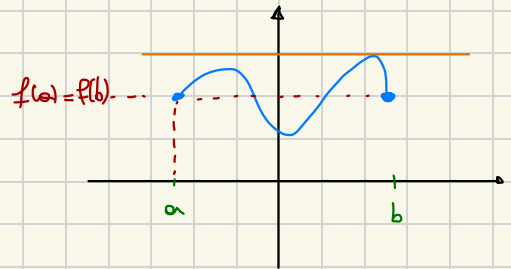
$\leadsto C$ è una cuspid

Teoremi del calcolo differenziale

Teorema di Rolle: Data $f: [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ tale che

- (1) f è continua in $[a; b]$
- (2) f è derivabile in $(a; b)$
- (3) $f(a) = f(b)$

Allora $\exists c \in [a; b] \text{ t.c. } f'(c) = 0$

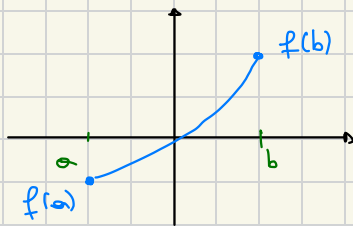


Oss: Geometricamente sto dicendo che se valgono quelle Hip c'è un punto della curva che ha una tangente orizzontale

\leadsto No dim (Slide 5A)

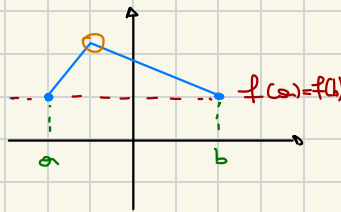
Oss: Le Hip sono tutte e tre necessarie, cioè se ne togliamo l'implicazione potrebbe non essere vero.

Valle (1), (2)
Non Valle (3)



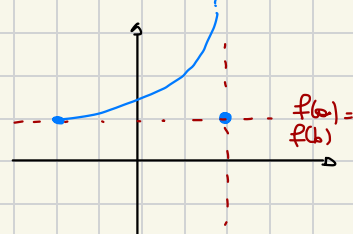
No tg orizzontale

Valle (1), (3)
Non Valle (2)



Il punto conchiuso non è derivabile e sarebbe il punto c del Teorema

Valle (2), (3)
Non Valle (1)

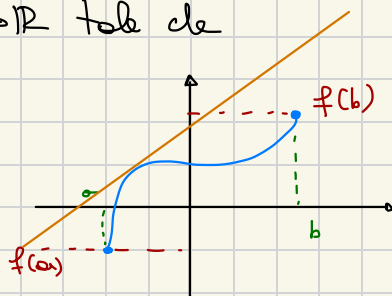


Non c'è punto con tangente orizzontale

Teorema di Lagrange: Data $f: [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ tale che

- (1) f è continua in $[a; b]$
- (2) f è derivabile in $(a; b)$

Allora $\exists c \in (a; b)$ t.c. $f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$



L'Inclinazione retta che congiunge $(a, f(a))$, $(b, f(b))$

Oss: Geometricamente mi sta dicendo che esiste un punto nel grafico in cui la tangente è parallela alla retta che congiunge i punti $(a; f(a))$, $(b; f(b))$.

\rightarrow No dim (slide 5A)

Oss: Le Hip sono tutte necessarie. I controesempi sono esattamente uguali a quelli di Rolle.

n. 100 pag 1713

$f(x) = 1 + |x|$ $f: [-2; 2] \rightarrow \mathbb{R}$ Verificare le Hip di Rolle?

Caso a: Se $x \geq 0$

$$f(x) = 1 + x$$

Caso b: Se $x \leq 0$

$$f(x) = 1 - x$$

$$f(x) = \begin{cases} 1 - x & -2 \leq x \leq 0 \\ 1 + x & 0 \leq x \leq 2 \end{cases}$$

(1) Continuità $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} 1 - x = 1$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} 1 + x = 1$$

) Uguali $\Rightarrow f$ continua in 0

(2) Derivabilit : $f'(x) = \begin{cases} -1 & -2 < x < 0 \\ 1 & 0 < x < 2 \end{cases}$ } Derivabile in $(-2; 2)$ con $x \neq 0$

Dobbiamo quindi verificare a mano se esiste $f'(0)$. Per farlo si fanno derivate sx e destra e si confrontano.

$$f'_-(0) = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{1-h-1}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0^-} (-1) = -1$$

$$f'_+(0) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{1+h-1}{h} =$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0^+} 1 = 1$$

$f'_-(0) \neq f'_+(0) \Rightarrow$ Punto Angolare \Rightarrow Non derivabile \Rightarrow No Rolle.