Settimana: 5

Materia: Matematica
Classe: 3D
Data: 13/10/2025

Argomenti: Es dettagliato studio di funzione. Composizione di fz. Intro ed esempi. Funzione inversa, teo fz inversa, calcolo di fz inversa. Funzioni pari e dispari, esempi. Es di studio di fz

Pag 115 n201

$$y = \sqrt{\frac{x^2-2x}{x^3}}$$

$f : Dom(f) \longrightarrow \mathbb{R}$

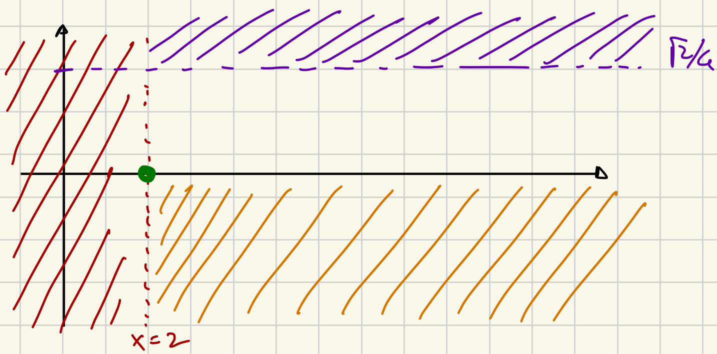
1) Dom(f) : $\frac{x^2-2x}{x^3} \geq 0$

N: $x(x-2) \geq 0 \rightsquigarrow x \leq 0 \vee x \geq 2$

D: $x^3 > 0 \rightsquigarrow x > 0$

	0		2	
N	+	−		+
D	−	+		+
	−	−		⊕

$Dom(f) = \{x \geq 2\} = [2; +\infty)$



2) Int assi (a) $x = 0$: Impossibile perché $x \geq 2$ Dom(f)

(b) $y = 0 \rightsquigarrow \sqrt{\frac{x^2-2x}{x^3}} = 0 \rightsquigarrow \frac{x^2-2x}{x^3} = 0 \quad x^2-2x=0$

$\rightsquigarrow \boxed{x=0} \vee x=2$

Non Accett. Accett.

$A = (2,0)$

3) <u>Segno</u>: $f(x) \geq 0$ $\qquad \sqrt{\frac{x^2-2x}{x^3}} \geq 0$ Sempre vero nel dominio

e dunque $\boxed{x \geq 2}$ ⇝ Cancellate la zone sotto

(4) <u>Im(f)</u>: $\qquad y = \sqrt{\frac{x^2-2x}{x^3}}$ $\qquad$ e si ricava la x in funzione di y.

Posso elevare al □ imponendo $\boxed{y \geq 0}$

$$y^2 = \frac{x^2-2x}{x^3} \qquad \text{Risolvo} \qquad y^2 = \frac{\cancel{x}(x-2)}{x^{\cancel{3}2}} \qquad x \neq 0$$

$$y^2x^2 - x + 2 = 0$$ Affinché possa risolvere devo imporre $\Delta \geq 0$

$$\Delta = b^2 - 4ac = 1 - 8y^2 \geq 0$$

$$8y^2 - 1 \leq 0 \qquad y^2 = \frac{1}{8} \qquad y = \pm\frac{1}{2\sqrt{2}} = \pm\frac{\sqrt{2}}{4}$$

$$\boxed{-\frac{\sqrt{2}}{4} \leq y \leq \frac{\sqrt{2}}{4}}$$ ⇝ la metto a sistema con $y \geq 0$.

Dunque $\text{Im}(f) = \{0 \leq y \leq \frac{\sqrt{2}}{4}\} = [0; \frac{\sqrt{2}}{4}]$

(5) $f: \text{Dom}(f) \longrightarrow \mathbb{R}$ $\qquad \text{Im}(f) = [0; \frac{\sqrt{2}}{4}]$

$\qquad \qquad \qquad \qquad \text{Dom}(f) = [2; +\infty)$

NON è suriettiva $\text{Im}(f) \neq \mathbb{R}$

È iniettiva se $f(x_1) = f(x_2) \implies x_1 = x_2$. Ci provo

$$\sqrt{\frac{x_1^2-2x_1}{x_1^3}} = \sqrt{\frac{x_2^2-2x_2}{x_2^3}} \rightsquigarrow \frac{x_1-2}{x_1^2} = \frac{x_2-2}{x_2^2} \rightsquigarrow x_2^2x_1 - 2x_2^2 = x_1^2x_2 - 2x_1^2$$

$$x_1^2 x_2 - x_1 x_2^2 + 2x_2^2 - 2x_1^2 = 0$$

$$x_1 x_2 (x_2 - x_1) - 2(x_2 - x_1)(x_2 + x_1) = 0$$

$$(x_2 - x_1)[x_1 x_2 - 2x_2 - 2x_1] = 0$$

Per essere certi che sia iniettiva doveva essere presente solo $x_2 - x_1$.
Dato che c'è un altro termine devo analizzare se quel termine può essere 0 violando inj

$x_1 x_2 - 2x_2 - 2x_1 = 0$ ⇝ Ricavo x_1 in funzione di x_2

$$x_1 (x_2 - 2) = 2x_2$$

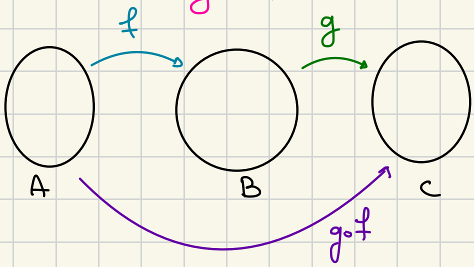
$$x_1 = \frac{2x_2}{x_2 - 2} = \frac{2x_2 - 4 + 4}{x_2 - 2} = 2 + \frac{4}{x_2 - 2}$$

Oss: Da qua si deduce il max: Basta imporre $x = 2 + \frac{4}{x-2}$ per simmetria ⇝ $x = 4$ è dove si ha il max

---

Composizione di funzioni

Def: Sia $f: A \longrightarrow B$, $g: B \longrightarrow C$, definiamo la composizione $\underbrace{g \circ f}_{g \text{ composto } f}$ l'applicazione successiva di due funzioni



$$(g \circ f)(x) \boxed{=} g(f(x))$$

Esempio: $f(x) = x^2 + 2$ $\qquad f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$g(x) = \frac{1}{x+3}$ $\qquad g: \mathbb{R} \setminus \{-3\} \longrightarrow \mathbb{R}$

$$(g\circ f)(x) \overset{Def}{=} g\big(f(x)\big) = g\big(x^2+2\big) = \frac{1}{(x^2+2)+3} = \frac{1}{x^2+5}$$

Fare f e poi g è come fare $g\circ f$

$$(f\circ g)(x) = f\big(g(x)\big) = f\left(\frac{1}{x+3}\right) = \left(\frac{1}{x+3}\right)^2+2$$

$$= \frac{1+2x^2+18+12x}{(x+3)^2} = \frac{2x^2+12x+19}{x^2+6x+9}$$

La composizione <u>NON</u> è commutativa (se possibile in entrambi i sensi)

<u>Remind</u>: $f: A\to B$, $g: B\to C$ $\qquad g\circ f: A \longrightarrow C$

<u>Esempio</u>: $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R} \qquad f(x) = 3x+2$

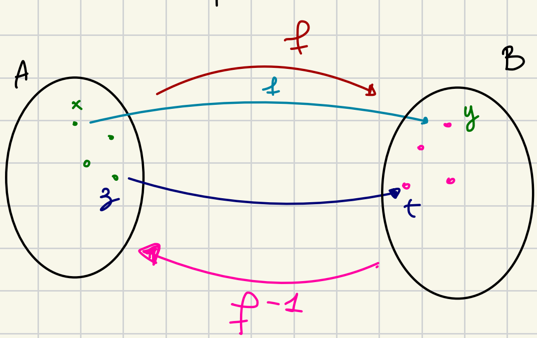
$g:\mathbb{R}\to\mathbb{R} \qquad g(x) = x^2+1$

$$(f\circ g)(x) = f\big(g(x)\big) = f(x^2+1) = 3(x^2+1)+2 = 3x^2+5$$

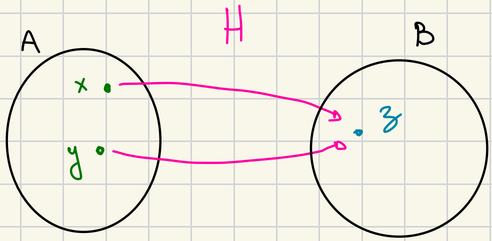
Def: Sia $f: A\to B$ una funzione <u>biunivoca</u>. Definisco la funzione inversa di f, la funzione

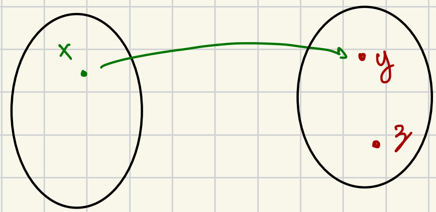
$$f^{-1}: B \longrightarrow A$$

tale che $f^{-1}(\overset{\in B}{b})$ è quell'elemento $\overset{\in A}{a}$ t.c. $f(a)=b$



Oss: (1) Se la funzione <u>NON</u> è biunivoca, <u>NON</u> esiste la fz inversa





<u>Ad Hamon</u>: "Non so dove tornare indietro se non sei iniettiva"

<u>A Filippo M.</u>: "Non ho nessuna strada da percorrere se non sei suriettiva"

(2) f bigettiva, f^{-1} funzione inversa

$$(f \circ f^{-1})(x) = f(f^{-1}(x)) = x$$

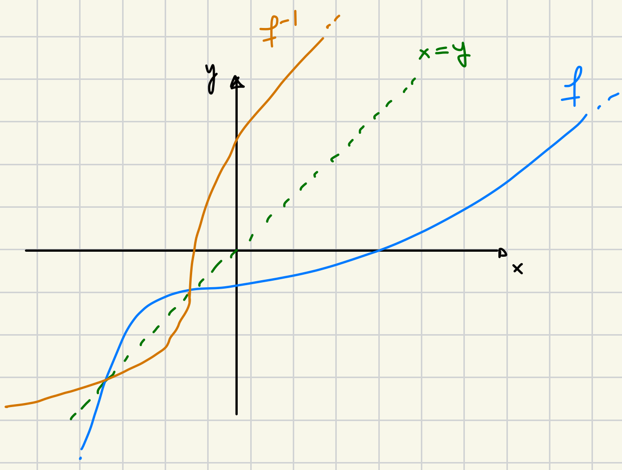
$$(f^{-1} \circ f)(x) = f^{-1}(f(x)) = x$$

Matteo Dei
$3 \cdot 3^{-1} = 1$

(3) <u>Teorema del grafico della funzione inversa</u>. Sia f biunivoca, f^{-1} funzione inversa. Allora il grafico di f è simmetrico al grafico di f^{-1} rispetto alla bisettrice del I e del III quadrante

<u>Dim</u>: Appunti 3A - 2023/24
Bella dim

Dato Graf (f), lo si specchia rispetto alla retta $x = y$



Pag 120 n 233

$y = \frac{1}{2}x^2 - 5$ $\qquad f: \mathrm{Dom}(f) \longrightarrow \mathbb{R}$

(1) $\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R}$

Inj: $f(x_1) = f(x_2) \rightsquigarrow \cancel{\frac{1}{2}} x_1^2 - \cancel{5} = \cancel{\frac{1}{2}} x_2^2 - \cancel{5} \rightsquigarrow \underbrace{x_1^2 = x_2^2}$

$\rightsquigarrow (x_1 - x_2)(x_1 + x_2) = 0$

La funzione NON è iniettive

Nel problema in realtà, ci dice $f: [0; +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$

Nel dominio $[0; +\infty)$ posso semplificare e ottengo $x_1 = x_2$
(Perché tutto deve essere positivo)

(2) Surj: $y = \frac{1}{2}x^2 - 5 \rightsquigarrow \frac{1}{2}x^2 = y + 5 \rightsquigarrow x^2 = 2(y+5)$

$\rightsquigarrow x = \pm\sqrt{2(y+5)} \rightsquigarrow$ Questa sarà la fz. inversa. Ma ancora non la posso chiamare col suo nome

Im(f): $2(y+5) \geq 0 \rightsquigarrow y \geq -5$ $\qquad \mathrm{Im}(f) = [-5; +\infty) = \{y \geq -5\}$

La funzione NON è suriettiva, ma se cambio Codominio posso renderla surj. Morale. Considero

$$f: [0; +\infty) \longrightarrow [-5; +\infty)$$

Finalmente f è bigettiva. Posso calcolare l'inversa. In realtà l'abbiamo già fatto: Per farlo si fa lo stesso conto fatto per Im(f) e si conclude dicendo $f^{-1}: [-5; +\infty) \longrightarrow [0; +\infty)$ $\quad f^{-1}(y) = \sqrt{2(y+5)}$

$$y \longmapsto \sqrt{2(y+5)}$$

$$(f^{-1} \circ f)(x) = f^{-1}(f(x)) = f^{-1}\left(\frac{1}{2}x^2 - 5\right)$$

$$= \sqrt{\cancel{2}\left(\frac{1}{\cancel{2}}x^2 - \cancel{5} + \cancel{5}\right)} = \sqrt{x^2} = |x| \overset{\text{Dom} f}{\boxed{=}} x$$

SMILE IS BEAUTIFUL
" SORRIDI È BELLISSIMO"
OCHO AR BRUNELLO

OCHO AR MOCHO
" occhio al mocho" ♡

OCHO A MELE

OCHO
A FALA

1) 3 diseq (forse 4)
2) 1 Ricetta
3) Trova i parametri, inj surj
4) Composizione ⇝ contro imma
5) Misto
6) Spicy

Def: Sia $f: D \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$. Diremo che

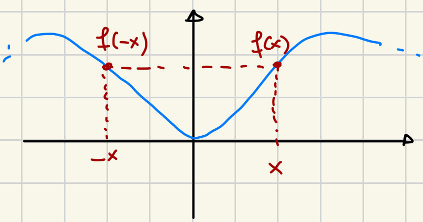
(1) f è una funzione PARI se $\quad f(x) = f(-x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$

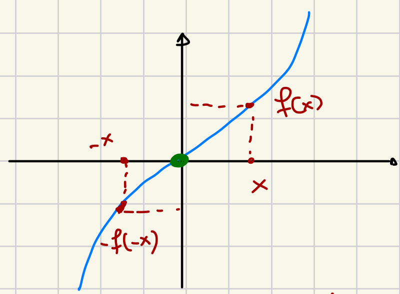
(2) f è una funzione DISPARI se $\quad f(x) = -f(-x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$

Esempio: $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \qquad f(x) = x^2 + 1$

PARI: $\left.\begin{array}{l} f(x) = x^2+1 \\ f(-x) = (-x)^2 + 1 = x^2+1 \end{array}\right] \rightsquigarrow$ la funzione è PARI

Graficamente

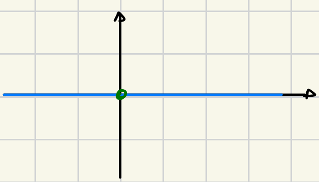




Pari: Graficamente significa simmetrico rispetto all'asse y

Dispari: Graficamente significa simmetrico rispetto a O.

Domanda: Trovare, se esiste, $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sia PARI che DISPARI



$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad f(x) = 0$

Harman e Matteo +

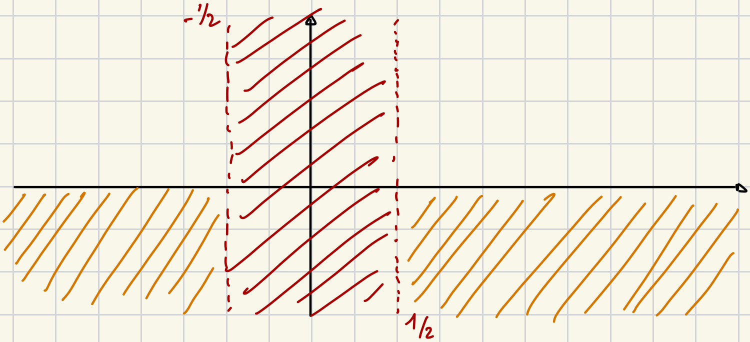
Pensare se è L'UNICA FUNZIONE con queste proprietà...

Pag 115 n 208

$$y = \sqrt{4x^2-1} - 2x + 6$$

(1) Dom(f) : $4x^2 - 1 \geq 0$ $\quad x = \pm\frac{1}{2}$ $\quad x \leq -\frac{1}{2} \ \vee \ x \geq \frac{1}{2}$

$$f : \left(-\infty; -\tfrac{1}{2}\right] \cup \left[\tfrac{1}{2}; +\infty\right) \longrightarrow \mathbb{R}$$



(2) Asse y : Imp

Asse x : $y = 0$ $\quad \sqrt{4x^2-1} = 2x - 6$ $\qquad$ C.E. $2x - 6 \geq 0$

$x \geq 3$

Elevo al □ $\quad \cancel{4x^2} - 1 = \cancel{4x^2} + 36 - 24x$

$24x = 37 \quad \rightsquigarrow \quad x = \frac{37}{24}$ $\qquad$ NON ACCETTABILE

(3) Segno : $f(x) \geq 0$ $\quad \sqrt{4x^2-1} - 2x + 6 \geq 0$ $\quad \boxed{\sqrt{4x^2-1} \geq 2x - 6}$

$$\begin{cases} x \leq -\frac{1}{2} \ \vee \ x \geq \frac{1}{2} \\ 2x - 6 \geq 0 \\ 4x^2 - 1 \geq 4x^2 + 36 - 24x \end{cases} \cup \begin{cases} x \leq -\frac{1}{2} \ \vee \ x \geq \frac{1}{2} \\ 2x - 6 \leq 0 \end{cases}$$

$$\underbrace{\begin{cases} x \leq -\frac{1}{2} \ \vee \ x \geq \frac{1}{2} \\ x \geq 3 \\ x \geq \frac{37}{24} \end{cases}}_{\hookrightarrow\ x \geq 3} \cup \underbrace{\begin{cases} x \leq -\frac{1}{2} \ \vee \ x \geq \frac{1}{2} \\ x \leq 3 \end{cases}}_{x \leq -\frac{1}{2} \ \vee \ \frac{1}{2} \leq x \leq 3}$$

$\rightsquigarrow$ Tutto nel C.E

$\boxed{x \leq -\frac{1}{2} \ \vee \ x \geq \frac{1}{2}}$

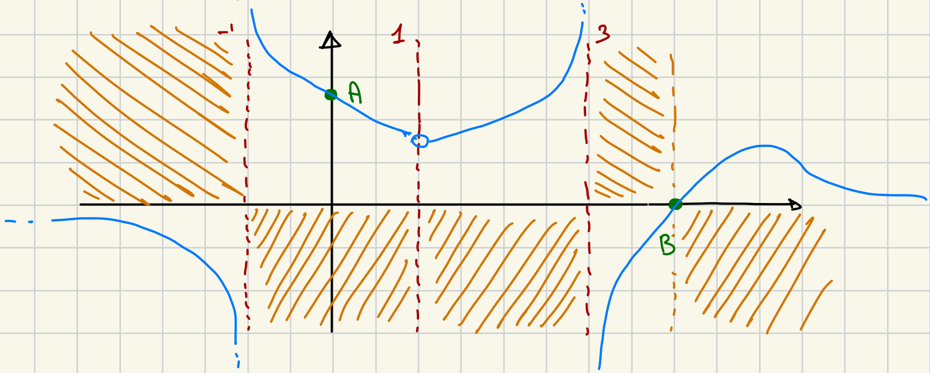
198:

$$y = \frac{x^2-5x+4}{x^3-3x^2-x+3} = \frac{(x-4)(x-1)}{(x-1)(x+1)(x-3)}$$

$x^2(x-3)-(x-3)$

$(x^2-1)(x-3)$

1) Dom(f): $x \neq 1, -1, 3$ $\qquad f: \mathbb{R}\setminus\{-1,1,3\} \longrightarrow \mathbb{R}$



2) Asse y: $x = 0$ $\qquad y = +\frac{4}{3}$ $\qquad A = \left(0; \frac{4}{3}\right)$

Asse x: $y = 0$ $\qquad \frac{(x-4)(x-1)}{(x-1)\cancel{(x+1)(x-3)}} = 0$ $\qquad x = 4$ $\qquad B = (4;0)$

C.E. $\qquad x = 1$ NON Acc.

3) Segno $f(x) \geq 0$: $\qquad \frac{(x-4)\cancel{(x-1)}}{\cancel{(x-1)}(x+1)(x-3)} \geq 0$

		-1		1		3		4	
N	−		−	o	−		−	●	+
D1	−	o	+	o	+		+		+
D2	−		−	o	−	o	+		+
	−		+		+		−		+

$\boxed{\text{Sol: } -1 < x < 1 \ \vee\ 1 < x < 3 \ \vee\ x \geq 4}$

Pag 129 Es 314

$f(x) = \dfrac{2x^2+ax-1}{2x-b}$ Trova a,b in modo che 1) $Dom(f) = \mathbb{R}\setminus\{4\}$
2) $A=(1;\frac{1}{2}) \in Graf(f)$

(2) $\dfrac{1}{2} = \dfrac{2+a-1}{2-b}$ (Sostituisco 1 a x, $\frac{1}{2}$ a $f(x)$)

(1) $Dom(f)$: $2x-b \neq 0$ $x \neq \dfrac{b}{2}$ $Dom(f) = \mathbb{R}\setminus\{\frac{b}{2}\}$

(Ho ricavato $Dom(f)$ in fz di b e poi sostituisco)

$\leadsto 4 = \dfrac{b}{2} \leadsto \boxed{b=8}$

$\dfrac{1}{2} = \dfrac{1+a}{-6} \leadsto -3 = 1+a \leadsto \boxed{a=-4}$

Es 315 $y = \dfrac{3}{kx^2+6x+3}$ k in modo che $Dom(f) = \mathbb{R}\setminus\{-1\}$

$Dom(f)$: $kx^2+6x+3 \neq 0$ $\dfrac{\Delta}{4} = 9-3k$

$x_1/x_2 = \dfrac{-\frac{b}{2} \pm \sqrt{\frac{\Delta}{4}}}{a} = \dfrac{-3 \pm \sqrt{9-3k}}{k}$

$Dom(f) = \mathbb{R}\setminus\left\{\dfrac{-3-\sqrt{9-3k}}{k}, \dfrac{-3+\sqrt{9-3k}}{k}\right\}$

$Dom(f) \overset{!!}{=} \mathbb{R}\setminus\{-1\}$

Quindi impongo $9-3k=0 \leadsto k=3$

Es 317 $f(ax) \boxed{=} a f(x)$ (Linearità su $\mathbb{R}$)

$f(4) = -2$

Quanto fa $f(12)$? $f(5) = ?$

$$f(12) = f(3 \cdot 4) \boxed{=} 3 \cdot f(4) = 3 \cdot (-2) = -6$$

$$f(5) = f\left(\frac{5}{4} \cdot 4\right) \boxed{=} \frac{5}{4} \cdot f(4) = \frac{5}{4}(-2) = -\frac{5}{2}$$

$$f(\pi) = f\left(\frac{\pi}{4} \cdot 4\right) \boxed{=} \frac{\pi}{4} f(4) = \frac{\pi}{4}(-2) = -\frac{\pi}{2}$$

↳ Num per aggiustare

Es 319 $f(x)$

i) $f(1) = 1$

ii) $f(2x) \boxed{=} 4f(x) + 6$ $f(6) = ?$

iii) $f(x+2) \boxed{=} f(x) + 12x + 12$

$$f(2) = f(2 \cdot 1) \boxed{=} 4 f(1) + 6 = 10$$

$$f(3) = f(1+2) \boxed{=} f(1) + 12 \cdot 1 + 12 = 25$$

$$f(6) = f(2 \cdot 3) \boxed{=} 4 f(3) + 6 = 106$$

Spicy: Trovare formule generale per $f(2n)$, $f(2n+1)$

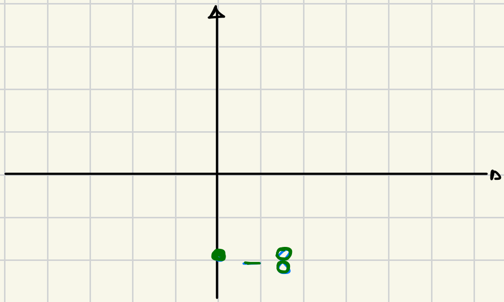
Verso l'esame 39

$$f(x) = \frac{ax+b}{x^2+1} \qquad a \neq 0$$

$A = (0; -8)$ intersecato

$f(1) = -1$

Trova a e b



▷ $-8 = \frac{0+b}{0+1}$ ⇝ $\boxed{b=-8}$

▷ $-1 = \frac{a-8}{2}$ ⇝ $-2 = a-8$ ⇝ $\boxed{a=6}$

$f(x) = \frac{6x-8}{x^2+1}$

▷ Dom(f): $x^2+1 \neq 0$ Sempre vero Dom(f) $= \mathbb{R}$

▷ Im(f): $y = \frac{6x-8}{x^2+1}$ Ricavo x in funzione di y.

$x^2y + y = 6x - 8$ ⇝ $x^2y - 6x + y + 8 = 0$

L'equazione ha soluzione se $\Delta \geq 0$, cioè

$36 - 4(y)(y+8) \geq 0$ ⇝ $9 - y^2 - 8y \geq 0$

$y^2 + 8y - 9 \leq 0$

$(y+9)(y-1) \leq 0$ $y = -9, 1$

$-9 \leq y \leq 1$

⇝ $\boxed{\text{Im}(f) = [-9; 1]}$