Numeri complessi

Def: L'unità immaginaria i è quel valore tale che $i^2 = -1$

Informalmente $i = \sqrt{-1}$ ← Brutto

Un numero complesso è un numero della forma

$$a + bi \quad \text{con} \quad a, b \in \mathbb{R}$$

Esempio:
- ▷ $2+3i$ è un num. complesso
- ▷ $5i$ è complesso
- ▷ $3 = 3+0i$ è complesso
- ▷ $3 + 7i^2 = 3 + (-7) = -4$
- ▷ $3 + 5i - \sqrt{2}\, i^2 + 6\underbrace{i^3}_{= i^2 \cdot i = -i} = 3 + 5i + \sqrt{2} - 6i$

Oss: Se ho potenze di i maggiori o uguali a 2, posso ridurle usando $i^2 = -1$

Esempio:

$i = i \qquad i^5 = i^4 \cdot i = i$

$i^2 = -1 \qquad i^6 = -1$

$i^3 = -i$

$i^4 = i^2 \cdot i^2 = 1$

Esercizio: $i^{2025} = \overbrace{i^{4 \cdot 506}}^{=1} \cdot i = i$

Oss. I campi di esistenza delle radici NON vanno fatti quando si parla di Num. complessi

Def / Not: L'insieme dei numeri complessi si indica con

$$\mathbb{C} = \{ a + bi \mid a, b \in \mathbb{R},\ i^2 = -1 \}$$

Def: Un numero immaginario è un numero complesso con $a = 0$

Esempio: $2i+1$ Non è immaginario
πi è immaginario

Operazioni tra numeri complessi:

- Si considera i come un monomio e si fanno i conti.
- Ogni volta che i compare con potenze ≥ 2 abbasso le potenze come sopra
- Di solito non si tiene i al denominatore e si razionalizza

(1) $\frac{7}{3i} \cdot \frac{i}{i} = \frac{7i}{-3} = -\frac{7}{3}i$

$\frac{a}{i} \cdot \frac{i}{i} = \frac{ai}{-1}$ $a \in \mathbb{C}$

(2) $\frac{7}{1+5i} \cdot \frac{1-5i}{1-5i} = \frac{7-35i}{26}$

$\underbrace{(1+5i)(1-5i)}_{\substack{1-(5i)^2 \\ 1-(25i^2)}}$

$\frac{c}{a+bi} \cdot \frac{a-bi}{a-bi} = \frac{ca-cbi}{a^2+b^2}$ $c \in \mathbb{C}$, $a,b \in \mathbb{R}$

Def: Dato un numero complesso $a+bi$, $a,b \in \mathbb{R}$, il modulo è

$$|a+bi| = \sqrt{a^2+b^2}$$

Pag 1015 n 156: Semplificare

$$\frac{1-2i}{2+i} + \frac{2-3i}{5} = \frac{5(1-2i)+(2+i)(2-3i)}{5(2+i)}$$

$$= \frac{5-10i+4+2i-6i\overbrace{-3i^2}^{+3}}{5(2+i)} = \frac{12-14i}{5(2+i)} \cdot \frac{(2-i)}{(2-i)}$$

$$= \frac{24-28i-12i\overbrace{+14i^2}^{-14}}{5(4\underbrace{-i^2}_{+1})} = \frac{10-40i}{5\cdot 5} = \frac{\overset{2}{\cancel{10}}(1-4i)}{5\cdot\cancel{5}} = \frac{2}{5}(1-4i)$$

17:

$$(1-i)(3-2i) - \frac{i}{4-2i} \cdot \frac{4+2i}{4+2i} =$$

$$3 - 2i - 3i + \overbrace{2i^2}^{-2} - \frac{4i + 2i^2}{\underbrace{16 - (2i)^2}_{+4}} =$$

$$1 - 5i - \frac{\overset{2i-1}{\cancel{4i-2}}}{\underset{10}{\cancel{20}}} = \frac{10 - 50i - 2i + 1}{10} = \frac{11 - 52i}{10}$$

18:

$$(1+i)^5 + 4i$$

$$(1+i)^2 (1+i)^3 + 4i$$

$$(\cancel{1} + (\cancel{-1}) + 2i)\,(1+i)^3 + 4i$$

$$2i \cdot 2i\,(1+i) + 4i$$

$$4i^2 (1+i) + 4i$$

$$-4 - \cancel{4i} + \cancel{4i} = -4$$

1

1 1

1 2 1

1 3 3 1

1 4 6 4 1

1 5 10 10 5 1

1 6 15 20 15 6 1