Formula del cambiamento di base per logaritmi

Proposizione: Vale la seguente formula

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a} \qquad a>0,\ c>0 \quad a,c\neq 1 \quad b>0$$

Dim: Fissiamo la notazione

$$x = \log_a b \iff \underbrace{a^x = b}$$

Calcolo il logaritmo in base c
(Applico cioè la funzione $\log_c(\cdot)$)

$$\log_c(a^x) = \log_c(b) \quad \rightsquigarrow \quad (3) \quad [\text{Dettaglio}]$$

$$x \cdot \log_c(a) = \log_c(b)$$

$$\log_a(b) \cdot \log_c(a) = \log_c(b) \qquad \text{Rimaneggio e ottengo}$$

$$\log_a(b) = \frac{\log_c(b)}{\log_c(a)}$$

$\square$

Def: Una equazione logaritmica è una equazione in cui l'incognita compare nell'argomento di almeno un logaritmo

Def: Una disequazione logaritmica è una disequazione in cui l'incognita compare nell'argomento di almeno un logaritmo

Pag 650 n 111

$$\log_2(x+1) + 5\log_2(x-1) - 4\log_2(x^2-1) =$$

$$\log_2(x+1) + \underbrace{\log_2(x-1)^5}_{(3)} - \underbrace{\log_2(x^2-1)^4}_{(3)} =$$

$$\log_2 \frac{(x+1)(x-1)^5}{(x^2-1)^4} = \log_2 \frac{\cancel{(x+1)}(x-1)^{\cancel{5}}}{(x+1)^{\cancel{4}\,3}\cancel{(x-1)^4}} = \log_2 \frac{x-1}{(x+1)^3}$$

$x^2-1 = (x-1)(x+1)$

n 278 $\log_a b = c \longleftrightarrow a^c = b$

$\log_5 x = -2 \rightsquigarrow 5^{-2} = \frac{1}{25} = x$

n 279 $\log_4 x = \frac{1}{2} \rightsquigarrow x = 4^{1/2} = 2$

n 280 $\log_2 (x-4) = 0 \rightsquigarrow 2^0 = x-4 \rightsquigarrow x = 5$

n 284

$\log_3 (x^2+2x) = 1 \overset{\text{Def}}{\rightsquigarrow} ✶\ 3^1 = x^2+2x$

Altro modo: ✶ $\log_3 (x^2+2x) = \log_3 (3) \overset{\text{inj}}{\rightsquigarrow} x^2+2x = 3$

$x^2+2x-3 = 0 \qquad (x+3)(x-1) = 0 \rightsquigarrow x = -3 \vee x = 1$

Devo verificare che siano accettabili: C.E.: $x^2+2x > 0$ (Arg log > 0)

$x(x+2) > 0$

$\boxed{x < -2 \vee x > 0}$

Entrambe le soluzioni sono accettabili

n 296:

$4\log_{16} x = \underbrace{\log_5 \frac{1}{125}}$ → x tale che $5^x = \frac{1}{125}$

cioè $x = -3$

$\log_{16} x^4 = -3 \rightsquigarrow 16^{-3} = x^4 \rightsquigarrow 2^{-12} = x^4$

$\overset{\text{Radice con indice 4}}{\rightsquigarrow}$ $\boxed{x = \pm 2^{-3}}$

(Spoiler: come soluzioni avremo anche $\pm 2^{-3} i$ con $i = \sqrt{-1}$)

C.E. : $x > 0$ $\rightsquigarrow$ Sol Accettabili : $x = 2^{-3} = \frac{1}{8}$

n 330:

$$\log_4 (x^2+2) - \log_4 (x^2-1) = \log_4 (5) - \log_4 (x+1)$$

Porto tutto in un unico log a RHS e LHS.

$$\log_4 \left(\frac{x^2+2}{x^2-1}\right) = \log_4 \left(\frac{5}{x+1}\right) \quad \overset{\text{iny}}{\rightsquigarrow}$$

$$\frac{x^2+2}{x^2-1} = \frac{5}{x+1}$$

$$\frac{x^2+2}{(x-1)\cancel{(x+1)}} = \frac{5x-5}{\cancel{(x-1)(x+1)}}$$

$$x^2 - 5x + 7 = 0$$

$$\Delta = 25 - 28 = -3 \quad \rightsquigarrow \text{Impossibile}$$

C.E.: $\begin{cases} x^2+2 > 0 \\ x^2-1 > 0 \\ x+1 > 0 \end{cases}$

È un sistema poiché tutte le condizioni valgono contemp.

$\downarrow$

$\begin{cases} \forall x \in \mathbb{R} \\ x < -1 \vee x > 1 \\ x > -1 \end{cases} \rightsquigarrow x > 1$