Def: Dato un angolo α, la cotangente di α che si indica con

$$\cot(\alpha) = ctg(\alpha) = \frac{1}{tg(\alpha)} = \frac{\cos(\alpha)}{\sin(\alpha)}$$

Oss: La cotangente NON ha senso se $\sin(\alpha) = 0$, cioè se $\alpha = k\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$.

Def: La funzione cotangente è la funzione

$$ctg : \mathbb{R} \setminus \{k\pi ; k \in \mathbb{Z}\} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$\alpha \longmapsto ctg(\alpha)$$

Esercizi: (1) Fare il grafico
(2) Trovare una interpretazione grafica della cotangente

Def: Dato α angolo, definisco

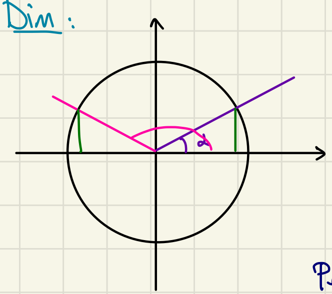
secante di α $\quad \sec(\alpha) = \dfrac{1}{\cos\alpha} \quad\quad \alpha \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi$

cosecante di α $\quad \csc(\alpha) = \mathrm{cosec}(\alpha) = \dfrac{1}{\sin\alpha} \quad\quad \alpha \neq k\pi$

Funzioni goniometriche inverse

Proposizione: La funzione $\sin : \mathbb{R} \longrightarrow [-1, 1]$ NON è iniettiva
La funzione $\cos : \mathbb{R} \longrightarrow [-1, 1]$ NON è iniettiva

Dim:



Se $\alpha = \frac{\pi}{6}$, $\sin\alpha = \frac{1}{2}$

Se $\beta = \pi - \frac{\pi}{6}$, $\sin\beta = \frac{1}{2}$

$\Rightarrow$ la funzione $\sin : \mathbb{R} \rightarrow [-1, 1]$ Non è iniettiva
Per il coseno analogo $\square$

Mi piacerebbe rendere iniettiva la funzione; Mi danno fastidio gli angoli simmetrici rispetto all'asse y

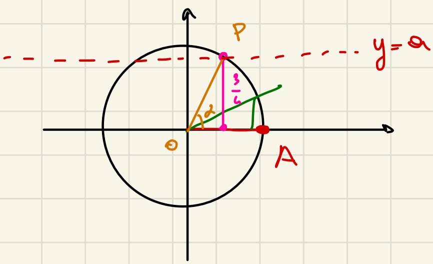
Soluzione: Riduco il Dominio e considero:

$$\sin : \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right] \longrightarrow [-1,1]$$

Oss: Per il coseno si fa analogamente prendendo come dominio $[0,\pi]$

Teorema: La funzione $\sin : \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right] \longrightarrow [-1,1]$ è bigettiva
" $\cos : [0,\pi] \longrightarrow [-1,1]$ è bigettiva

Dim: $\sin : \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right] \longrightarrow [-1,1]$ è iniettiva per quanto detto sopra.
Inoltre è suriettiva poiché (vedi disegno e spiegazione):



Prendo $\sin(\alpha) = a$ che è un numero tra -1 e 1

Traccio la retta $y=a$. La retta interseca la circonferenza nel punto P

$$\begin{cases} y=a \\ x^2+y^2=1 \end{cases} \qquad \begin{cases} y=a \\ x^2 = 1-a^2 \end{cases} \qquad \begin{cases} y=a \\ x = \pm\sqrt{1-a^2} \end{cases}$$

Dunque il punto P ha coordinate $(\sqrt{1-a^2}; a)$

L'angolo α tale che $\sin(\alpha) = a$ è $P\hat{O}A$
Dunque $\sin : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \longrightarrow [-1,1]$ è suriettiva

Per il coseno è analogo

□

Def: Dato che $\sin : [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}] \longrightarrow [-1,1]$

$\cos : [0,\pi] \longrightarrow [-1,1]$

sono bigettive per il teorema della funzione inversa esistono due funzioni

$$\arcsin : [-1,1] \longrightarrow [-\tfrac{\pi}{2}; \tfrac{\pi}{2}]$$ arcoseno

$$\arccos : [-1,1] \longrightarrow [0,\pi]$$ arcocoseno

che sono le inverse di sin e cos

Oss: $\arcsin(\sin(\alpha)) = \alpha$ | $\arccos(\cos(\beta)) = \beta$

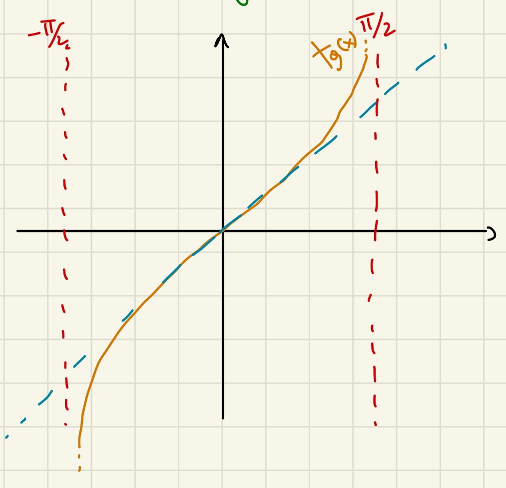
$\sin(\arcsin(y)) = y$ | $\cos(\arccos(x)) = x$

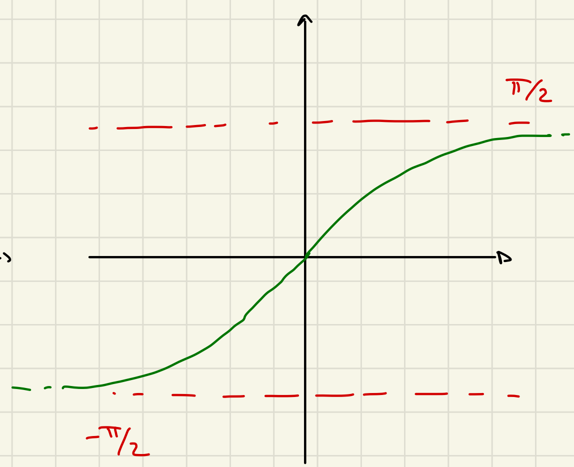
Oss. Si può fare la stessa cosa per $tg : (-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}) \longrightarrow \mathbb{R}$ e vale dunque che esiste

$$arctg : \mathbb{R} \longrightarrow (-\tfrac{\pi}{2}; \tfrac{\pi}{2})$$ arcotangente

funzione inversa della tangente (No dim)

Grafico di arctg:

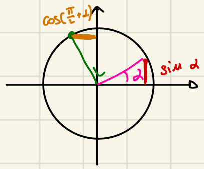




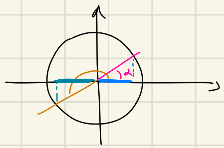
Pag 756 n 481

$$2\cos(486°) + 3\sin(36°) - 2\cos(666°) - 4\sin(216°)$$

Idea chiave: Portare tutti gli angoli nella stessa forma in maniera che posso manipolarli (o li conosco, oppure è sempre lo stesso numero)



$$\cos(486°) = \cos(360° + 126°) = \cos(126°)$$
$$= \cos(90° + 36°) \boxed{=} -\sin(36°)$$



$$\cos(666°) = \cos(360° + 306°) = \cos(306°)$$
$$= \cos(180° + 126°) = -\cos(126°)$$
$$= -\cos(90° + 36°) \boxed{=} \sin(36°)$$

$$\sin(216°) = \sin(180° + 36°) = -\sin(36°)$$

$$\rightsquigarrow \quad -2\sin(36°) + 3\sin(36°) - 2\sin(36°) + 4\sin(36°) = 3\sin(36°)$$

Spicy: Calcolare esplicitamente $\sin(36°)$.

ES 129 PAG 733 $\alpha = \frac{\pi}{2}$

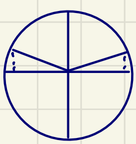
$$\frac{a\sin\alpha + b\cos 2\alpha}{\sin(-4\alpha) - a\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right) - b\cos\left(\frac{7}{2}\pi+\alpha\right)}$$

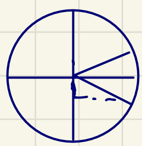
$$\frac{a\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) + b\cos 2\left(\frac{\pi}{2}\right)}{\sin\left(-4\cdot\frac{\pi}{2}\right) - a\cos\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\right) - b\cos\left(\overbrace{\frac{7}{2}\pi+\frac{\pi}{2}}^{4\pi}\right)}$$

$$\frac{a - b}{0 + a - b} = 1$$

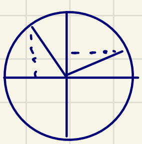
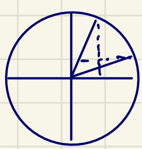
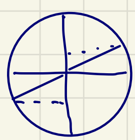
pag 770

$$\frac{\sin(\pi-\alpha)\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)}{\sin(-\alpha)} = \frac{\sin(\alpha)\left(-\cancel{\sin(\alpha)}\right)}{-\cancel{\sin(\alpha)}} = \sin(\alpha)$$





$$\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)}{\cos(\pi+\alpha)} = \frac{\cos\alpha\,(\sin(\alpha))}{-\cos\alpha} = -\sin(\alpha)$$

$\sin(\alpha) - \sin(\alpha) = 0$