Settimana: 10

Materia: Matematica
Classe: 5A
Data: 17/11/25

Pag 1637 n 319

$$f(x) = \ln\left(\frac{\sqrt{4+x^2}}{x}\right)$$

$$\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$$
$$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$$

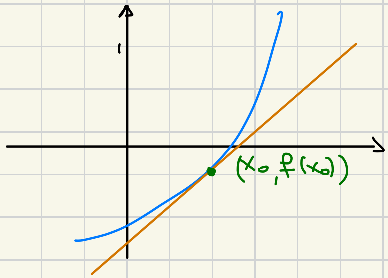
$$f'(x) = \frac{1}{\frac{\sqrt{4+x^2}}{x}} \cdot \left(\frac{\sqrt{4+x^2}}{x}\right)' =$$

$$= \frac{x}{\sqrt{4+x^2}} \frac{\left[(\sqrt{4+x^2})' x - \sqrt{4+x^2}\right]}{x^2} =$$

$$= \frac{\cancel{x}}{\sqrt{4+x^2}} \cdot \frac{1}{x^{\cancel{2}}} \cdot \left(\frac{1}{\cancel{2}}(4+x^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot \cancel{2}x \cdot x - \sqrt{4+x^2}\right)$$

$$= \frac{\frac{x^2}{\sqrt{4+x^2}} - \sqrt{4+x^2}}{\sqrt{4+x^2} \cdot x} = \frac{\cancel{x^2} - 4 - \cancel{x^2}}{x(4+x^2)} = \frac{-4}{x(4+x^2)}$$

Proposizione: Sia $f: (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$ una funzione, e sia $x_0 \in (a,b)$. Supponiamo f derivabile. Allora la retta tangente al grafico di f in x_0 è:



$$y - f(x) = f'(x_0) \cdot (x - x_0)$$

$$y - y_A = m\,(x - x_A)$$

Dim: $m = f'(x_0)$; passa per $(x_0, f(x_0))$.

Esercizio: $f(x) = \ln(2x+3) \cdot \sin(x^2)$ $\qquad x_0 = 2$

$$f(2) = \ln(7) \cdot \sin(4) \approx 0{,}13 \qquad P = (2; \ln(7)\sin(4))$$

$$f'(x) = [\ln(2x+3)]' \sin(x^2) + \ln(2x+3) \cdot [\sin(x^2)]'$$

$$= \frac{1}{2x+3} \cdot 2 \cdot \sin(x^2) + \ln(2x+3) \cdot \cos(x^2) \cdot 2x$$

$$f'(2) = \frac{2}{7} \sin(4) + \ln(7)\cos(4) \cdot 4 \approx 7{,}78$$

$$\boxed{y - 0{,}13 = 7{,}78\,(x-2)}$$

Dim dell'algebra delle derivate:

(1) $D(f+g) = Df + Dg$

$$[D(f+g)](x) = \lim_{h \to 0} \frac{(f+g)(x+h) - (f+g)(x)}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) + g(x+h) - f(x) - g(x)}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} + \frac{g(x+h) - g(x)}{h} = Df(x) + Dg(x)$$

(2) $D(fg) = (Df) \cdot g + f \cdot Dg$

$$D(fg)(x) = \lim_{h \to 0} \frac{(fg)(x+h) - (fg)(x)}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x)}{h} + \frac{f(x+h)g(x) - f(x+h)g(x)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{[f(x+h)-f(x)]\,g(x)}{h} + \frac{f(x+h)\,[g(x+h)-g(x)]}{h}$$

$f'(x)$ $\quad f(x)$ $\quad g'(x)$

$$= (Df)(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot Dg(x)$$

(3) Derivata del quoziente ⤳ Esercizio

(4) Derivata delle fz composte ⤳ Facoltative.

Derivata della funzione inversa:

Teorema: Let $f: (a;b) \longrightarrow \mathbb{R}$ bijective, then the inverse function exists, and we have (dove ha senso la scrittura)

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(x)} \qquad \text{where } f(x) = y$$

Dim: Dato che $(f \circ f^{-1})(y) = y$ posso ricavare la derivata di f^{-1} usando la funzione composta

$$(f \circ f^{-1})'(y) = (y)'$$

$$f'(f^{-1}(y)) \cdot (f^{-1})'(y) = 1$$

$$\Rightarrow (f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))} = \frac{1}{f'(x)}$$

$\square$