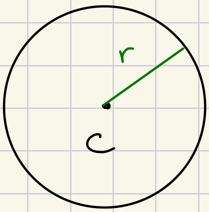
Settimana: 17	Argomenti:
Materia: Matematica Classe: 3D Data: 3/02/2026	

Circonferenza sul piano cartesiano

Def. Una circonferenza è il luogo geometrico dei punti equidistanti da un punto C detto centro della circonferenza. La distanza tra uno di questi punti e il centro si chiama raggio



Formule da sapere:

Lungh circonf: $2\pi r$

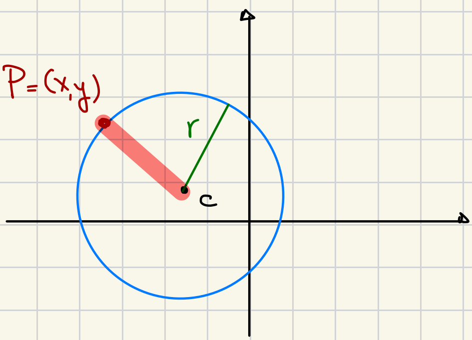
Area del cerchio: πr^2

Impostiamo adesso la def sul piano cartesiano

$C = (\alpha;\beta)$ coordinate centro

r raggio

$P=(x,y)$ è il punto generico della circonferenza



Impongo $\text{dist}(P, C) = r$

$$\sqrt{(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2} = r$$

elevo al quadrato:

$$\boxed{(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 = r^2}$$ → Formula base (deriva da def) della circonferenza RICORDARE!!

Vado avanti con i conti e trovo altra forma

$$x^2 - 2\alpha x + \alpha^2 + y^2 - 2\beta y + \beta^2 - r^2 = 0$$

$$x^2 + y^2 \underbrace{-2\alpha x}_{a} \underbrace{-2\beta y}_{b} + \underbrace{\alpha^2+\beta^2-r^2}_{c} = 0$$

Assegno dei nomi

L'equazione generica della circonferenza diventa

$$\boxed{x^2+y^2+ax+by+c=0}$$ ← Forma canonica $a,b,c \in \mathbb{R}$.

Tip: Per riconoscere che è circonferenza noto che ci sono x^2 e y^2 che hanno stesso coefficiente.

Relazione tra la forma canonica e centro C e raggio r

Abbiamo imposto

$$-2\alpha = a$$
$$-2\beta = b$$
$$\alpha^2+\beta^2-r^2 = c$$

Ricavo il centro $C=(\alpha;\beta)$ e r in funzione di a,b,c.

$$\alpha = -\frac{a}{2}$$

$$\beta = -\frac{b}{2}$$ ⇝ $$\boxed{C=\left(-\frac{a}{2};-\frac{b}{2}\right)}$$

$$r^2 = \alpha^2+\beta^2-c = \frac{a^2}{4}+\frac{b^2}{4}-c$$ ⇝ $$\boxed{r=\sqrt{\frac{a^2}{4}+\frac{b^2}{4}-c}}$$

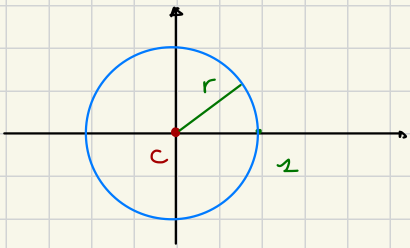
Esempi / Esercizietti:

(1) $x^2+y^2=1$ Trovare raggio e centro

$x^2+y^2-1=0$ $\quad a=0 \quad b=0 \quad c=-1$

$x^2+y^2+ax+by+c=0$

$C=\left(-\frac{a}{2};-\frac{b}{2}\right)=(0;0)$ $\quad r^2=0+0-(-1)=1 \rightsquigarrow r=1$

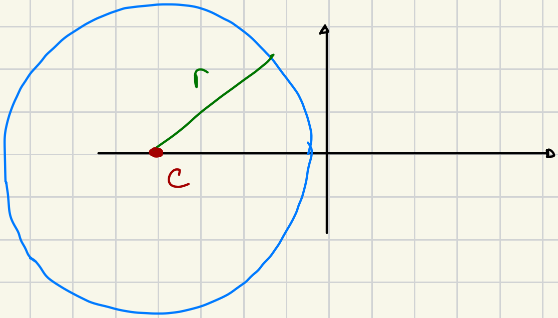


Def: La circonferenza $x^2+y^2=1$ è detta circonferenza goniometrica

Esempio. $x^2+y^2+8x+2=0$ Trova r, C

$C=(-4;0)$ $\quad a=8,\ b=0,\ c=2$

$r^2=(-4)^2+(0)^2-2=14$



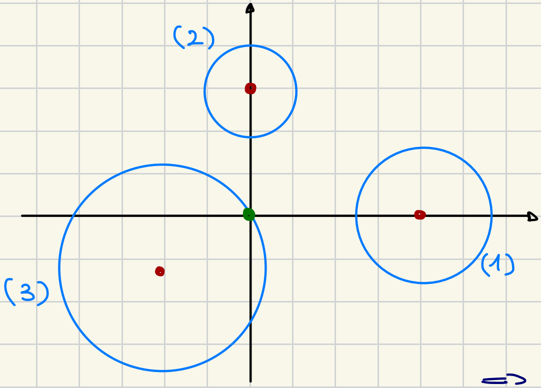
Esempio. $x^2+y^2+ax+by+c=0$

Che condizioni devo imporre su a,b,c in modo che

(1) la circonf. abbia centro sull'asse x $\rightsquigarrow b=0$

(2) " " " sull'asse y $\rightsquigarrow a=0$

(3) " passi per l'origine $\rightsquigarrow c=0$



(1) $C = \left(-\frac{a}{2}; -\frac{b}{2}\right)$

Centro su asse x: $-\frac{b}{2} = 0 \rightsquigarrow b = 0$

(2) Centro su asse y: $-\frac{a}{2} = 0 \rightsquigarrow a = 0$

(3) Impongo che $O = (0;0) \in$ circonf.

$\Rightarrow 0^2 + 0^2 + a \cdot 0 + b \cdot 0 + c = 0$

$\Rightarrow c = 0$

Mini es: Trovare eq. delle circ con raggio 3 e centro $(1;2)$

$$(x-1)^2 + (y-2)^2 = 3^2$$

---

n 474 pag 339

$$\left.\begin{aligned} y &= x^2 - 2x + 4 \\ y &= -x^2 + 2 \end{aligned}\right\} \text{Fascio} \quad \boxed{y - x^2 + 2x - 4 + k\left(y + x^2 - 2\right) = 0}$$

- Trova k in modo che
  (1) Parabola passa per O. Sostituisco $O = (0;0)$ nel fascio e trovo k)

$$-4 - 2k = 0 \rightsquigarrow \boxed{k = -2}$$

(2) $x_V = \frac{1}{4}$ $\qquad V = \left(-\frac{b}{2a}; -\frac{\Delta}{4a}\right)$

Dovrò mettere $-\frac{b}{2a} = \frac{1}{4}$

Per trovare b, a metto il fascio di parabole in forma "normale"

$$\boxed{y - x^2 + 2x - 4 + k\left(y + x^2 - 2\right) = 0} \rightsquigarrow y = ax^2 + bx + c$$

$$\hookrightarrow y(k+1) = x^2(-k+1) + x(-2) + (2k+4)$$

$$y = \left(\frac{1-k}{1+k}\right)x^2 + \left(-\frac{2}{1+k}\right)x + \frac{2k+4}{1+k}$$

$$\left[\frac{2}{1+k} : 2\left(\frac{1-k}{1+k}\right) = \frac{1}{4}\right] \rightsquigarrow -\frac{b}{2a} = \frac{1}{4}$$

$$\frac{\cancel{2}}{\cancel{1+k}} \cdot \frac{\cancel{1+k}}{\cancel{2}(1-k)} = \frac{1}{4} \rightsquigarrow 1-k = 4 \rightsquigarrow \boxed{k = -3}$$

(c) k in modo che la parabola sia tg alla retta $y = -2x + 4$

Interseco e impongo $\Delta = 0$

$$\begin{cases} y = -2x + 4 \\ y = \left(\frac{1-k}{1+k}\right)x^2 + \left(-\frac{2}{1+k}\right)x + \frac{2k+4}{1+k} \end{cases}$$

$$-2x + 4 = \left(\frac{1-k}{1+k}\right)x^2 + \left(-\frac{2}{1+k}\right)x + \frac{2k+4}{1+k}$$

$$\left(\frac{1-k}{1+k}\right)x^2 + \left(-\frac{2}{1+k} + 2\right)x + \frac{2k+4}{1+k} - 4 = 0 \qquad k \neq -1$$

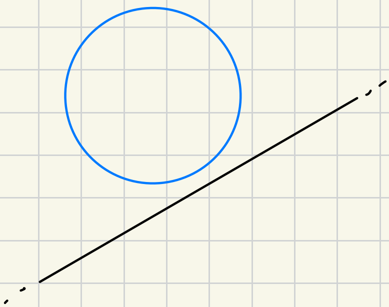
$$(1-k)x^2 + (-\cancel{2} + \cancel{2} + 2k)x + 2k + \cancel{4} - \cancel{4} - 4k = 0$$

$$(1-k)x^2 + 2kx - 2k = 0$$

$$\frac{\Delta}{4} = \left(\frac{b}{2}\right)^2 - ac = k^2 - (-2k)(1-k) = k^2 + 2k - 2k^2 = 0$$

$2k-k^2=0 \rightsquigarrow k(2-k)=0 \rightsquigarrow \left\| \begin{array}{l} k=0 \\ k=2 \end{array} \right.$

Posizioni reciproche fra rette, circonferenze ; circonf. - parabole

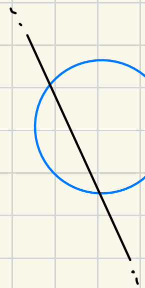


Si dicono **Esterne**

Sistema impossibile

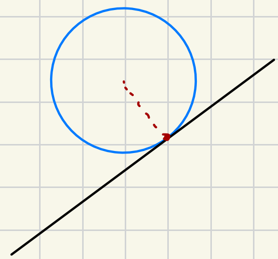
$$\begin{cases} x^2+y^2+ax+by+c=0 & \rightsquigarrow 2 \\ ax+by+c=0 & \rightsquigarrow 1 \end{cases}$$

Caso in cui sist. ha 0 sol



Si dicono **Secanti**

Il sistema ha due soluzioni

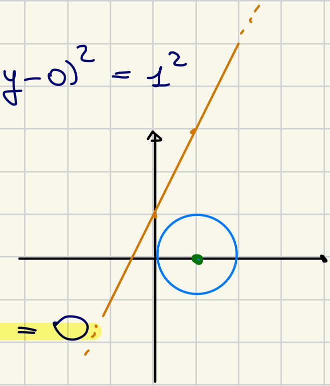


Si dicono **tangenti**

e il sistema ha esattamente 1 soluzione

Esempio: $C=(1;0)$ $\quad r=1$ $\quad (x-1)^2+(y-0)^2=1^2$

retta: $y=2x+1$



Vedo se sono tg, sec, esterne facendo il sistema

$$\begin{cases} x^2-2x+\cancel{1}+y^2=\cancel{1} \\ y=2x+1 \end{cases} \qquad \begin{cases} x^2-2x+(4x^2+4x+1)=0 \\ y=2x+1 \end{cases}$$

$$5x^2+2x+1=0 \qquad \Delta = 4-20=-16$$

No soluzioni : esterne

Esercizio: Circ. $x^2+y^2-2x=0$

Fascio di rette: $y=2x+k$

Trova k in modo che le rette siano tangenti, esterne o secanti

Imposto il sistema e impongo condizioni sul Δ.

$$\begin{cases} x^2+y^2-2x=0 \\ y=2x+k \end{cases} \qquad \begin{cases} x^2+(4x^2+4kx+k^2)-2x=0 \\ y=2x+k \end{cases}$$

$$5x^2+2(2k-1)x+k^2=0$$

Tg : $\Delta=0$
secanti: $\Delta>0$
esterne: $\Delta<0$

Impongo $\Delta \geq 0$ e poi, guardando la soluzione capisco la geometria

$$\frac{\Delta}{4} \geq 0 \qquad (2k-1)^2-5k^2 \geq 0$$
$$4k^2+1-4k-5k^2 \geq 0$$
$$-k^2-4k+1 \geq 0$$
$$k^2+4k-1 \leq 0$$

$$\frac{\Delta}{4} = 2^2+1=5 \qquad k_1/k_2 = -2 \pm \sqrt{5}$$

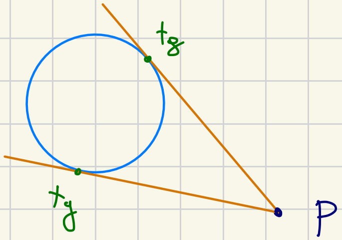
$$-2-\sqrt{5} \leq k \leq -2+\sqrt{5}$$

Secanti se $-2-\sqrt{5} < k < -2+\sqrt{5}$
Tangenti se $k=-2\pm\sqrt{5}$
Esterne se $k<-2-\sqrt{5}$, $k>-2+\sqrt{5}$

Pag 398 n 176

$x^2+y^2-6x-4y+9=0 \qquad P=(9;0)$

Trova rette tg a C circonferenza che passano per P



(1) Fascio di rette per P.

$$(y-0)=m(x-9)$$

$$y=mx-9m \longrightarrow \begin{array}{ll} y=0 & m=0 \\ y=-\frac{3}{4}x+\frac{27}{4} & m=-\frac{3}{4} \end{array}$$

(2) Interseco fascio e circ.: $\begin{cases} x^2+y^2-6x-4y+9=0 \\ y=mx-9m \end{cases}$

$$x^2+m^2x^2+81m^2-18m^2x-6x-4mx+36m+9=0$$

$$x^2(1+m^2)+x(-18m^2-4m-6)+81m^2+36m+9=0$$

$$x^2(1+m^2)-2x(9m^2+2m+3)+81m^2+36m+9=0$$

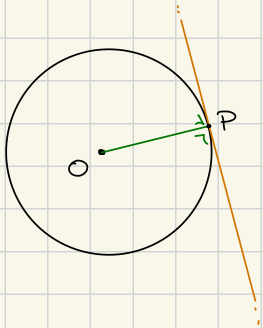
$$\left[\frac{\Delta}{4}=(9m^2+2m+3)^2-(81m^2+36m+9)(1+m^2)=0\right] \text{ Cond. di tangenza}$$

$$\cancel{81m^4}+4m^2+9+\cancel{36m^3}+12m+54m^2-81m^2-36m-9-\cancel{81m^4}-\cancel{36m^3}-9m^2=0$$

$$-32m^2-24m=0$$

$$8m(4m+3)=0 \quad \begin{array}{l} \nearrow m=0 \\ \rightarrow m=-\frac{3}{4} \end{array}$$

Teorema: Data una circonferenza C e una retta tangente alla circonferenza in un punto P, il raggio OP è perpendicolare alla retta



Dim: Per esercizio (fare un conto), ma NON necessario

Esempi di utilizzo: La condizione di tangenza $\Delta = 0$ può essere anche espresso in virtù del teorema sopra come

$$\boxed{\mathrm{dist}(\underset{\text{centro}}{C}\,;\ \text{retta}) = r}$$

Pag 398 n 177

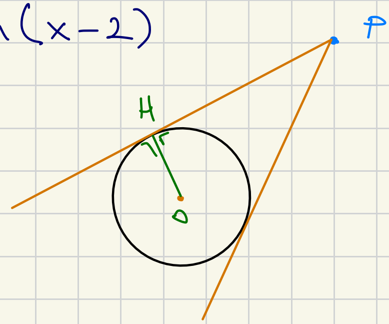
C circonferenza di raggio 1 e centro $C = (\underset{x_0}{0}\,;\underset{y_0}{2})$

$(x-0)^2 + (y-2)^2 = 1^2$

Rette che passano per $P = (2;3)$

(1) Fascio di rette per P: $(y-3) = m(x-2)$

$$\boxed{\underbrace{m}_{a}x\underbrace{-}_{b}y\underbrace{-2m+3}_{c} = 0}$$



(2) Imposto che OH sia uguale al raggio

$$OH = \mathrm{dist}(O;\ \text{fascio}) = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2+b^2}} =$$

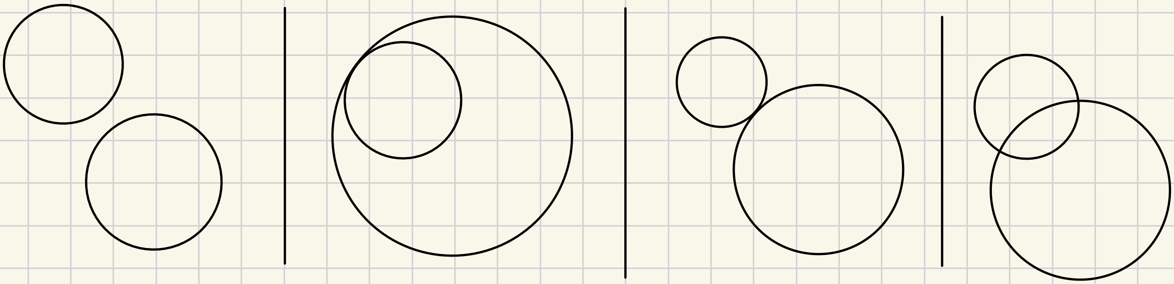
$$= \frac{|0 - 2 + (-2m+3)|}{\sqrt{0^2 + (-1)^2}} = 1$$

$|-2m+1| = 1$ La risolvo:

(A) $-2m+1 = 1 \rightsquigarrow \boxed{m=0}$

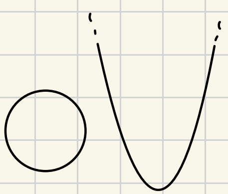
(B) $-2m+1 = -1 \rightsquigarrow \boxed{m=1}$

Intersezioni Circ - Circ / Circ - Parabola



ESTERNE | TANGENTI INTERNAMENTE | TANGENTI ESTERNAMENTE | SECANTI

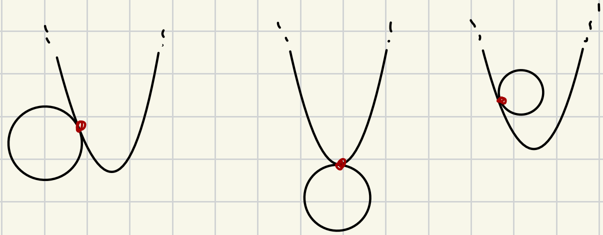
Oss: Si intersecano in al massimo 2 punti

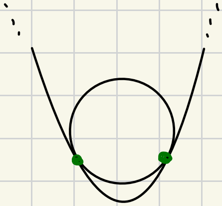
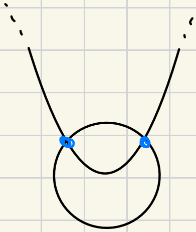


Esterne: 0 pti di intersezione

---

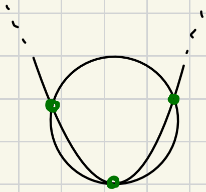
tangenti in 1 pto

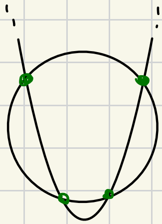


Intersezione in 2 punti

Intersezione in 3 pti





Intersezione in 4 pti

Può sempre accadere con raggio fissato e parabola fissata?