Settimana: 2

Materia: Matematica
Classe: 3D
Data: 22/09/25

Argomenti: Esercizi eq. Irrazionali. Spiegazione completa delle diseq. irrazionali (Tutte le casistiche). Esercizi su eq. irrazionali di tutti i tipi

---

Es 717 pag 63

$$\frac{\sqrt[3]{x^3-2}+2}{x}=1$$

C.E.: $x \neq 0$

$$\sqrt[3]{x^3-2} = x-2$$ ⇝ elevo al

$(a+b)^3 = a^3+b^3+3a^2b+3ab^2$

$$\cancel{x^3}-2 = \cancel{x^3}-8-6x^2+12x$$

$$6x^2-12x+6=0$$

$$x^2-2x+1=0 \qquad (x-1)^2=0 \rightsquigarrow x=1$$ Accettabile

Es 738

$$-\sqrt{x^2-1}+\sqrt{x^2+3x}=2$$

Consiglio: Metto le radici a dx o sx per avere tutti i + davanti a esse

$$\underbrace{\sqrt{x^2+3x}}_{A(x)} = \underbrace{2+\sqrt{x^2-1}}_{B(x)}$$

$$A(x) = B(x)$$

C.E.: $\begin{cases} x^2+3x \geq 0 \\ x^2-1 \geq 0 \\ 2+\sqrt{x^2-1} \geq 0 \end{cases}$ $\begin{cases} x \leq -3 \lor x \geq 0 \\ x \leq -1 \lor x \geq 1 \\ \forall x \in \mathbb{R} \end{cases}$

↳ pos + rad pari ⇒ Positivo

$$\cancel{x^2}+3x = 4+(x^2-1)+4\sqrt{x^2-1}$$

$$4+\cancel{x^2}-1$$

$$\underbrace{3x-3}_{B(x)} = \underbrace{4\sqrt{x^2-1}}_{A(x)}$$

Viene fuori dal secondo elev.

$\begin{cases} \boxed{x \leq -3 \lor x \geq 1} \\ 3x-3 \geq 0 \rightsquigarrow x \geq 1 \end{cases}$ ⇝ $\boxed{x \geq 1}$

$$9x^2+9-18x = 16(x^2-1)$$

$9x^2+9-18x = 16x^2-16 \rightsquigarrow 7x^2+18x-25=0$

$\frac{\Delta}{4} = 81+175 = 256 = 16^2 \rightsquigarrow \sqrt{\frac{\Delta}{4}} = 16$

$x_1/x_2 = \frac{-9 \pm 16}{7}$ $\begin{cases} -\frac{25}{7} \rightsquigarrow \text{N.A} \\ \boxed{1 \rightsquigarrow \text{Accettabile}} \end{cases}$

Back to diseq. irrazionali

Prendo in considerazione $\sqrt{A(x)} \geq B(x)$ oppure $\sqrt{A(x)} \leq B(x)$

Oss: ▷ Faccio tutto per radici quadrate, ma è indifferente per ogni radice di indice pari
▷ Uso sempre $\geq$ o $\leq$. Nel caso $>$ o $<$ c'è un piccolo cambiamento che segnalo nelle ricette

$\sqrt{A(x)} \geq B(x)$

(1) Si fanno le C.E. $\boxed{A(x) \geq 0}$

(2) Pongo $\boxed{B(x) \geq 0}$ per poter elevare al □

(3) Elevo al □ : $\boxed{A(x) \geq [B(x)]^2}$

Se risolvo $\rightsquigarrow$ trovo soluzioni $\begin{cases} A(x) \geq 0 \\ B(x) \geq 0 \\ A(x) \geq [B(x)]^2 \end{cases}$

Ho trovato tutte le soluzioni possibili? NO. Devo considerare anche la casistica $\boxed{B(x) \leq 0}$. In quel caso sono sufficienti le C.E. Perché la radice mi dà come risultato un num. ≥ 0, e $B(x)$ l'ho imposto ≤ 0. Trovo quindi un altro sistema di soluzioni $\begin{cases} A(x) \geq 0 \\ B(x) \leq 0 \end{cases}$

Per risolvere $\sqrt{A(x)} \geq B(x)$ dovete considerare entrambi i casi e fare l'unione. Operativamente la soluzione sarà:

$$\begin{cases} A(x) \geq 0 \\ B(x) \geq 0 \\ A(x) \geq [B(x)]^2 \end{cases} \cup \begin{cases} A(x) \geq 0 \\ B(x) \leq 0 \end{cases}$$

↳ è > se in partenza è >

Consideriamo adesso $\sqrt{A(x)} \leq B(x)$

(1) Si fanno le C.E. $\boxed{A(x) \geq 0}$

(2) Pongo $\boxed{B(x) \geq 0}$ per poter elevare al □. Oss Matteo:

Se $B(x) \leq 0$, la disequazione è automaticamente IMPOSSIBILE perché a dx neg, a sx positivo (occhio all'uguaglianza)

(3) Elevo al □ $\boxed{A(x) \leq [B(x)]^2}$

Operativamente $\sqrt{A(x)} \leq B(x)$ si risolve, risolvendo il sist

$$\begin{cases} A(x) \geq 0 \\ B(x) \geq 0 \\ A(x) \leq [B(x)]^2 \end{cases}$$

↳ < se nella part. è minore

Se avete invece una cosa del tipo $\sqrt[n]{A(x)} \gtreqless B(x)$ con n DISPARI, è sufficiente elevare e risolvere

IMPORTANTISSIMO

$$A(x) \gtreqless [B(x)]^n$$

Es 770 pag 65

$\sqrt{25-x^2} < x+1$

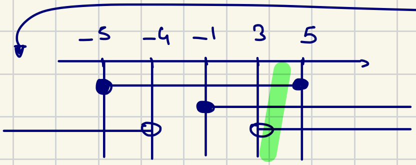
Sol. eq. $x = \pm 5$

$$\begin{cases} 25-x^2 \geq 0 \\ x+1 \geq 0 \\ \text{III)}\ 25-x^2 < x^2+2x+1 \end{cases} \quad \begin{cases} x^2-25 \leq 0 \\ x \geq -1 \\ x<-4 \ \vee \ x>3 \end{cases} \quad \begin{cases} -5 \leq x \leq 5 \\ x \geq -1 \\ x<-4 \ \vee \ x>3 \end{cases}$$

III) $2x^2+2x-24>0$

$x^2+x-12>0$

$(x+4)(x-3)>0 \rightsquigarrow x=3,-4 \rightsquigarrow x<-4 \ \vee \ x>3$



$\boxed{\text{Sol}: \quad 3<x\leq 5}$

Es 789:

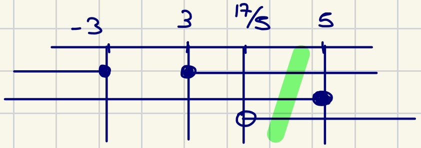
$\sqrt{x^2-9} > 5-x$

a) $\begin{cases} x^2-9 \geq 0 \\ 5-x \geq 0 \\ x^2-9 > (5-x)^2 \end{cases} \cup \begin{cases} x^2-9 \geq 0 \\ 5-x < 0 \end{cases}$

a1) $x^2-9 \geq 0 \rightsquigarrow (x-3)(x+3) \geq 0 \rightsquigarrow x=\pm 3 \rightsquigarrow x \leq -3 \ \vee \ x \geq 3$

a2) $5-x \geq 0 \rightsquigarrow x \leq 5$

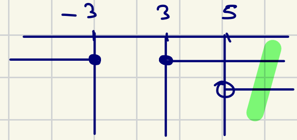
a3) $\cancel{x^2}-9 > 25-10x+\cancel{x^2} \rightsquigarrow 10x>34 \rightsquigarrow x>\frac{17}{5}$



$\boxed{\frac{17}{5} < x \leq 5}$

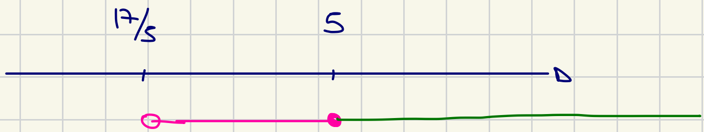
b1) $x \leq -3 \quad \vee \quad x \geq 3$

b2) $5 - x < 0 \rightsquigarrow x > 5$



$\boxed{x > 5}$

Graficamente l'unione si può rappresentare mettendo tutte le soluzioni su un'unica riga e prendere come sol. finale dove appare la riga



Graf unione:

$\boxed{\text{Sol. finale:} \quad x > \frac{17}{5}}$

Es 794: $\sqrt{2x^2 - 5x} > \underbrace{-x^2 + 2x - 1}$

$\hookrightarrow -(x^2 - 2x + 1) = -(x-1)^2$

$\sqrt{2x^2 - 5x} > -(x-1)^2$

Dato che $-(x-1)^2$ è sempre ≤ 0, mi basta impostare la C.E. per trovare la soluzione:

$2x^2 - 5x \boxed{\geq} 0 \qquad x(2x-5) \geq 0 \qquad x = 0, \; x = \frac{5}{2}$

$\boxed{x \leq 0 \quad \vee \quad x \geq \frac{5}{2}}$

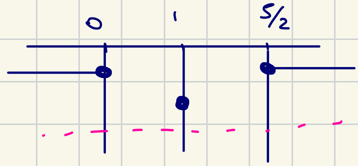
Proviamo con i sistemi

a) $\begin{cases} 2x^2 - 5x \geq 0 \\ -(x-1)^2 \geq 0 \\ 2x^2 - 5x > [-(x-1)^2]^2 \end{cases} \cup \begin{cases} 2x^2 - 5 \geq 0 \\ -(x-1)^2 < 0 \end{cases}$

a1) $x \leq 0 \quad \vee \quad x \geq \frac{5}{2}$ come sopra

a2) $x = 1$

a3) .... Brutto



Ne deduco che il sist. a) è impossibile (perché lo II è quasi imp)

Sisteme b) è quello che abbiamo fatto prima e non lo rifaccio.

Es 804:

$$\sqrt{x^2+3} - \sqrt{x+5} > 0$$

Separo le radici

$$\sqrt{x^2+3} > \sqrt{x+5}$$

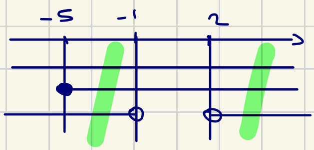
$$\begin{cases} x^2+3 \geq 0 \\ x+5 \geq 0 \\ x^2+3 > x+5 \end{cases}$$

$\longleftarrow$ Posso elevare tranquillamente perché tutto ≥ 0

1) $x^2+3 \geq 0$ $\quad \forall x \in \mathbb{R}$

2) $x+5 \geq 0$ $\quad x \geq -5$

3) $x^2-x-2 > 0$ $\quad (x-2)(x+1) > 0$ $\quad x = -1, 2$ $\quad x < -1 \quad x > 2$



$$\boxed{\begin{matrix} -5 \leq x < -1 \\ \vee \\ x > 2 \end{matrix}}$$

811 $\sqrt{3-2x} - 2 \leq \sqrt{4+x}$

Consiglio: Metto ogni pezzo nella zona (dx o sx) in cui ha il segno + dovuto (con furbizia)

$$\sqrt{3-2x} \leq 2 + \sqrt{4+x}$$

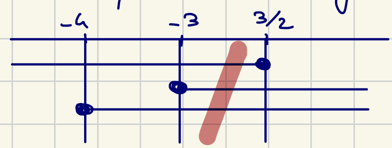
$$\boxed{\begin{cases} 3-2x \geq 0 \\ 4+x \geq 0 \\ 3-2x \leq \left(2+\sqrt{4+x}\right)^2 \end{cases}}$$

$\leadsto$ Federico $\leadsto$ Posso elevare perché sia dx che sx ≥ 0. Se avessi lasciato 2 di là, era una bega.

1) $x \leq \frac{3}{2}$

2) $x \geq -4$

3) $x \geq -3$ $\leadsto$



$$\boxed{\begin{array}{c}\text{Sol finale} \\ -3 \le x \le 3/2\end{array}}$$

3) $3-2x \le 4+(4+x)+4\sqrt{4+x}$

$-5-3x \le 4\sqrt{4+x}$

$4\sqrt{4+x} \ge -3x-5$

$$a)\begin{cases} 4+x \ge 0 \\ -3x-5 \ge 0 \\ 16(4+x) \ge (-3x-5)^2 \end{cases} \quad \cup \quad b)\begin{cases} 4+x \ge 0 \\ -3x-5 \le 0 \end{cases}$$

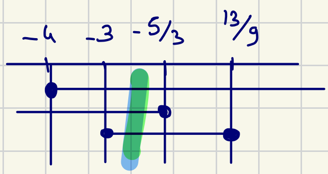
a1) $x \ge -4$

a2) $x \le -5/3$

a3) $64+16x \ge 9x^2+25+30x$

$9x^2+14x-39 \le 0 \qquad \frac{\Delta}{4} = 49+351 = 400 \qquad \sqrt{\Delta/4} = 20$

$$x_1/x_2 = \frac{-7 \pm 20}{9} \begin{cases} -3 \\ \frac{13}{9} \end{cases} \qquad -3 \le x \le \frac{13}{9}$$



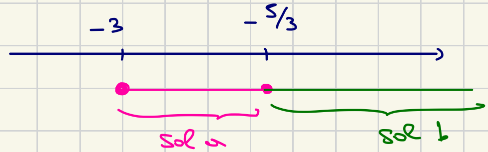
sol a

$-3 \le x \le -\frac{5}{3}$

b1) $x \ge -4$ $\rightsquigarrow$ sol b: $x \ge -\frac{5}{3}$

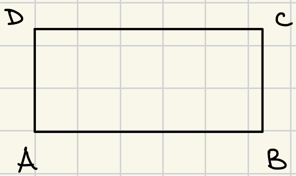
b2) $x \ge -\frac{5}{3}$

Prendo unione di sol a e sol b



Sol (3) sist. iniziale: $x \ge -3$

Es 70 Pag 75



$b = AB = \sqrt{2k+1}$ (a) Per quali k il rett. esiste

$h = AD = \sqrt{k-3}$ (b) $P \geq 8$

(a) $\begin{cases} 2k+1 > 0 \\ k-3 > 0 \end{cases}$ Non metto $\geq$ perché lato > 0

$\begin{cases} k > -\frac{1}{2} \\ k > 3 \end{cases} \rightsquigarrow \boxed{k > 3}$

(b) $\left(\sqrt{2k+1} + \sqrt{k-3}\right) \cdot 2 \geq 8$

$k > 3$

$\sqrt{2k+1} + \sqrt{k-3} \geq 4$ Le C.E. le ho già fatte. Posso elevare

$2k+1 + k-3 + 2\sqrt{(2k+1)(k-3)} \geq 16$

$3k-2 + 2\sqrt{2k^2-6k+k-3} \geq 16$

$2\sqrt{2k^2-5k-3} \geq 18-3k$ Le posso eliminare ricordando $\underline{k>3}$

a) $\begin{cases} \cancel{2k^2-5k-3 \geq 0} \\ 18-3k \geq 0 \\ 4(2k^2-5k-3) \geq (18-3k)^2 \end{cases} \cup \begin{cases} \cancel{2k^2-5k-3 \geq 0} \\ 18-3k \leq 0 \end{cases}$

$k \geq 6$

a2) $k \leq \frac{18}{3} \rightsquigarrow k \leq 6$

a3) $8k^2-20k-12 \geq 324+9k^2-108k$

$k^2-88k+336 \leq 0$ $\frac{\Delta}{4} = 1600$

$k_1/k_2 = 44 \pm 40 \begin{cases} 4 \\ 84 \end{cases}$ $4 \leq k \leq 84$

$\boxed{\text{Sol a: } 4 \le k \le 6}$ $\boxed{\text{Sol b: } k \ge 6}$

Unisco le soluzioni e trovo $\boxed{k \ge 4}$

Metto a sistema con C.E. e trovo $\boxed{k \ge 4 \text{ sol finale}}$