

Settimana: 19

Materia: Matematica

Classe: 5A

Data: 16/02/26

cattedre

Eros	Linde	Greg
------	-------	------

Eto	Emme	Ang
-----	------	-----

Rob	Giam	Sofe
-----	------	------

Giorgia	Chiel	Lorenzo
---------	-------	---------

Omer	Noen	Velenis
------	------	---------

Ducc	Nicc	Aurone
------	------	--------

Becca Vi	Daniela
-------------	---------

Cec.	Mico	Lf.
------	------	-----

Vittorio	Seren
----------	-------

Limiti:

Pag 1550 n 673

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (\sqrt{n+4} - 4) \cdot \frac{(\sqrt{n+4} + 4)}{(\sqrt{n+4} + 4)} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n+4-16}{\sqrt{n+4} + 4} =$$
$$= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n-12}{\sqrt{n+4} + 4} = +\infty$$

676:

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} e^{\frac{x+2}{x-1}} = \infty$$

507:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{\ln(x+2)} = 1$$

H:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x+2}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+2}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x(1+\frac{2}{x})}{x} = 1$$

499:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x}{x+3} \right)^x = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{\cancel{x}}{\cancel{x} \left(1 + \frac{3}{x} \right)} \right)^x$$
$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1^x}{\left(1 + \frac{3}{x} \right)^x} = \frac{1}{e^3} = e^{-3}$$

486:

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\log_2 x}{2^{2x} - 2^x - 2} = \frac{1}{10}$$

548:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} e^{-\frac{1}{x}} \cdot (e+2x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{e+2x}{e} \right)^{\frac{1}{x}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{e} x \right)^{\frac{1}{x}}$$

$$\frac{1}{x} = t$$

$$x \rightarrow 0 \\ t \rightarrow \infty$$

$$= \lim_{t \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{2}{e t} \right)^t = \boxed{e^{\frac{2}{e}}}$$

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{k}{x} \right)^x = e^k}$$

Integrali

Esempio: Qual è la fz che se la derivo fa $2x$? x^2

$$\int 2x \, dx = x^2$$

$$\triangleright \int \sin x \, dx = -\cos x$$

$$\triangleright \int \frac{1}{1+x^2} \, dx = \arctg x$$

$$\triangleright \int \frac{1}{x} \, dx = \ln x$$

$$\triangleright \int \ln x \, dx = \dots$$

Def: Una funzione $F(x)$ è una Primitive della funzione $f(x)$ definite in $[a; b]$ se $F(x)$ è derivabile in $[a; b]$ e vale

$$F'(x) = f(x)$$

Teorema: Se $F(x)$ è una primitive di $f(x)$, allora tutte e sole le primitive di $f(x)$ sono del tipo $F(x) + c$ con c numero reale

$$\text{Esempio: } \begin{aligned} (x^2 + 5)' &= 2x \\ (x^2 + 7)' &= 2x \end{aligned}$$

numero
reale
↓

Più correttamente di prima scriveremo $\int 2x \, dx = x^2 + c$

Dim. Conseguenza del Teo Lagrange, vedere corollario 1.

Def. Date $f: (a; b) \rightarrow \mathbb{R}$, l'integrale indefinito di f sono tutte le primitive di $f(x)$. Dunque sono l'insieme

$$\{F(x) + c \mid F(x) \text{ primitive}, c \in \mathbb{R}\}.$$

Scriveremo $\int f(x) dx$ Si legge: integrale di $f(x)$ in dx
↳ Ricordarselo
Visto dirò agli integrali definiti.

Notazione:

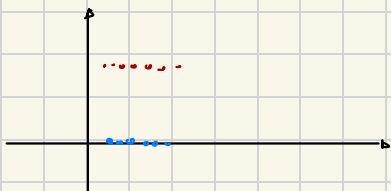
$$\int f(x) dx$$

↳ Variabile di integrazione
↳ Funzione integranda

Una funzione che ammette una primitiva si dice integrabile.

Oss. Non tutto è integrabile: Per esempio la funzione di Dirichlet non è integrabile

$$D: [0; 1] \rightarrow \mathbb{R} \quad D(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{se } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$



Teorema: Se una funzione $f: [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ è continua, allora ammette primitive in $[a; b]$ (cioè è integrabile)

↳ In sintesi: Se dentro l'integrale c'è una funzione continua riuscirete a risolvere l'integrale (magari con difficoltà)

Integrali immediati:

$$\int x^3 dx = \frac{1}{4} x^4 + c$$

$$\int \cos x dx = \sin x + c$$

$$\int e^x dx = e^x + c$$

$$\int e^{2x} dx = \frac{1}{2} e^{2x} + c$$

$$\int \frac{2x}{x^2+1} dx = \ln(x^2+1) + c$$

$$\int x^n dx = \frac{1}{n+1} x^{n+1} + c \quad n \neq -1$$

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + c$$

c'è un valore assoluto

$$\int \cos x dx = \sin x + c$$

$$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \tan x + c$$

$$\int \sin x dx = -\cos x + c$$

$$\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\cotg x + c$$

$$\int e^x dx = e^x + c$$

$$\int \frac{1}{1+x^2} dx = \arctg x + c$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + c$$

Pag 1800 n 384

$$f(x) = \frac{x^2 - 4x - 5}{(x-1)^2}$$

▷ Dom f: $x \neq 1$

▷ Asse x $f(x) = 0$ $\frac{x^2 - 4x - 5}{(x-1)^2} = 0$ $(x-5)(x+1) = 0$

$$A = (5; 0), \quad B = (-1; 0)$$

Asse y $x=0 \Rightarrow \frac{-5}{1} = -5$ $C = (0; -5)$

▷ Segno: $\frac{x^2 - 4x - 5}{(x-1)^2} \geq 0$ $N \geq 0 \Rightarrow x \leq -1 \vee x \geq 5$
 $D > 0 \Rightarrow x \neq 1$

Sol: $x \leq -1 \vee x \geq 5, \quad x \neq 1$

▷ Limiti: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - 4x - 5}{(x-1)^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2(1 - \frac{4}{x} - \frac{5}{x^2})}{x^2(1 - \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2})} = 1$

\downarrow
 $x^2 - 2x + 1$

Asintoto
orizzontale

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 - 4x - 5}{(x-1)^2} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2 - 4x - 5}{(x-1)^2} = -\infty$$

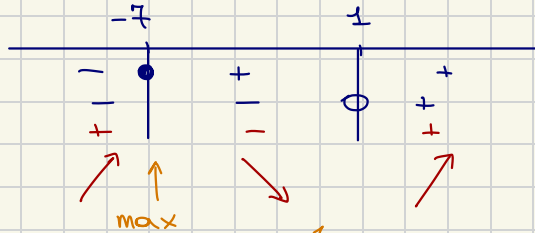
$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2 - 4x - 5}{(x-1)^2} = -\infty$$

Asintoto
verticale

▷ Derivate: $\left[\frac{x^2 - 4x - 5}{(x-1)^2} \right]' = \frac{(2x-4)(x-1)^2 - (x^2-4x-5) \cdot 2(x-1)}{(x-1)^4}$

$$= \frac{\cancel{2x^2} - 2x - 4x + 4 - \cancel{2x^2} + 8x + 10}{(x-1)^3}$$

$$f'(x) = \frac{2x+4}{(x-1)^3} \geq 0 \quad \begin{array}{l} N \geq 0 \\ D > 0 \end{array} \quad \begin{array}{l} 2x+4 \geq 0 \\ (x-1)^3 > 0 \end{array} \quad \begin{array}{l} x \geq -4 \\ x > 1 \end{array}$$



$$(-4, f(-4)) =$$

$$\left(-4; \frac{9}{8}\right)$$

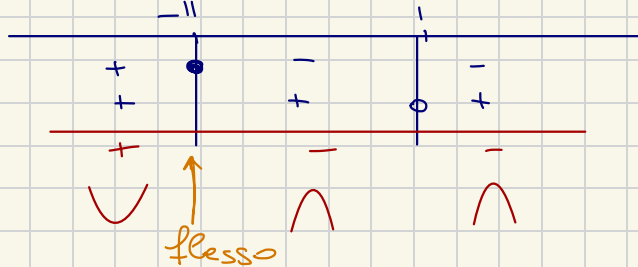
massimo

Derivate II

$$f''(x) = \frac{2(x-1)^3 - (2x+4)3(x-1)^2}{(x-1)^8} =$$

$$= \frac{2x-2-6x-42}{(x-1)^4} = \frac{-4x-44}{(x-1)^4} \geq 0$$

$$\begin{array}{l} N \geq 0 \\ D > 0 \end{array} \quad \begin{array}{l} -4x-44 \geq 0 \\ (x-1)^4 > 0 \end{array} \quad \begin{array}{l} \leadsto x \leq -11 \\ \leadsto x \neq 1 \end{array}$$



$$F = (-11; f(-11)) = \left(-11; \frac{10}{9}\right)$$

