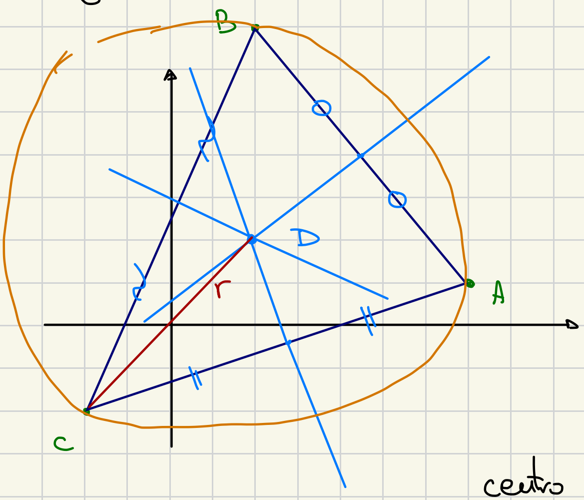
Settimana: 8

Argomenti:

Materia: Matematica
Classe: 3D
Data: 3/11/2025

Pag 217 Es 60



$A = (7, 1)$
$B = (2, 7)$
$C = (-2; -2)$

$D = (x_D, y_D)$ circocentro?

Def: Il circocentro di un triangolo è il punto di incontro degli assi dei lati. In particolare è anche il centro della circonferenza circoscritta (che passa per i vertici) al triangolo.

Dato che D circocentro $\Rightarrow DC = DA = DB$ raggio. Si pongono le uguaglianze si fanno conti.

$$DA^2 = (x_D - x_A)^2 + (y_D - y_A)^2$$
$$= (x_D - 7)^2 + (y_D - 1)^2$$
$$DB^2 = (x_D - 2)^2 + (y_D - 7)^2$$
$$DC^2 = (x_D + 2)^2 + (y_D + 2)^2$$

Devono essere uguali

Lo impongo

Per semplicità $x_D = x$
$y_D = y$

$$\begin{cases} DA^2 = DB^2 \\ DA^2 = DC^2 \end{cases} \qquad \begin{cases} \cancel{x^2} - 14x + \cancel{49} + \cancel{y^2} - 2y + 1 = \cancel{x^2} - 4x + 4 + \cancel{y^2} - 14y + \cancel{49} \\ \cancel{x^2} - 14x + 49 + \cancel{y^2} - 2y + 1 = \cancel{x^2} + 4x + 4 + \cancel{y^2} + 4y + 4 \end{cases}$$

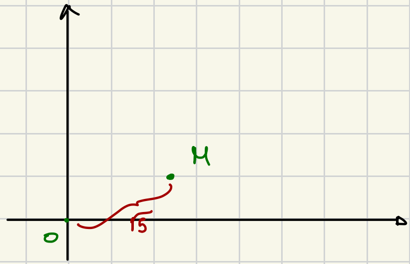
$$\begin{cases} -10x + 12y = 3 \\ -18x - 6y = -42 \end{cases} \quad \downarrow + \quad \cdot 2$$

$$-46x = -81 \leadsto x = \frac{81}{46} \leadsto \text{Riporto dentro} \leadsto y = \frac{79}{46}$$

Pag 219 Es 100

$A = (1; 2a+1)$
$B = (a-2; -a)$

Il punto medio di AB dista $\sqrt{5}$ dall'origine



Scrivo M lasciando a incognita

$$M = \left(\frac{x_A + x_B}{2} ; \frac{y_A + y_B}{2} \right) = \left(\frac{a-1}{2} ; \frac{a+1}{2} \right)$$

A questo punto scrivo $OM = \sqrt{5}$ e risolvo trovando a.

$$OM^2 = (x_M - x_O)^2 + (y_M - y_O)^2 = 5$$

$$\left(\frac{a-1}{2} - 0 \right)^2 + \left(\frac{a+1}{2} - 0 \right)^2 = 5$$

$$\frac{a^2 - 2a + 1}{4} + \frac{a^2 + 2a + 1}{4} = 5$$

$$2a^2 + 2 = 20 \leadsto a^2 = 9 \leadsto a = \pm 3$$

Es 123

$A = (3; a+2)$
$B = (-2a; 1)$
$C = (1; a-4)$

G Baricentro nell'asse y

$$G = \left(\frac{x_A + x_B + x_C}{3} ; \frac{y_A + y_B + y_C}{3}\right)$$

Coordinate $x = 0$

$$\frac{3 - 2a + 1}{3} = 0 \rightsquigarrow \boxed{a = 2}$$

Trovare a

$\rightsquigarrow A = (3; 4) \rightsquigarrow G = (0; 1)$
$B = (-4; 1)$
$C = (1; -2)$

$$AG^2 = (x_G - x_A)^2 + (y_G - y_A)^2 =$$
$$= (0-3)^2 + (1-4)^2 = 18 \rightsquigarrow AG = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$$

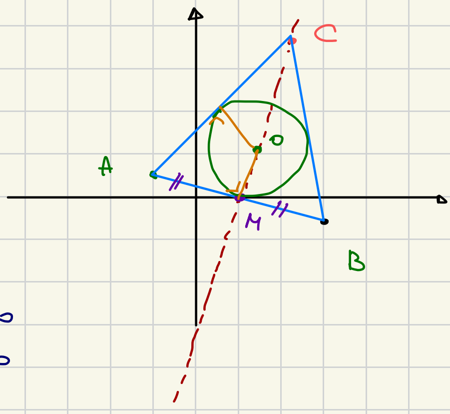
$$BG^2 = (0+4)^2 + (1-1)^2 = 16 \rightsquigarrow BG = 4$$

$$CG^2 = (0-1)^2 + (1+2)^2 = 10 \rightsquigarrow CG = \sqrt{10}$$

Libro di Fole Pag 220 n. 155

$A = (-2; 1)$
$B = (6; -1)$
$A_{ABC} = \frac{85}{2}$

1) Vertice C
2) raggio circonf. inscritta.



Triangolo isoscele
1) Idea: Scrivo i punti equidistanti da A e da B; in generale prendo un punto $C = (x_C; y_C)$ e impongo

$\triangleright AC^2 = BC^2$

$$(x_A-x_C)^2+(y_A-y_C)^2 = (x_B-x_C)^2+(y_B-y_C)^2$$

$$(-2-x_C)^2+(1-y_C)^2 = (6-x_C)^2+(-1-y_C)^2$$

$\longrightarrow$ Per semplicità $x_C=x$, $y_C=y$

$$4+\cancel{x^2}+4x+\cancel{1}+\cancel{y^2}-2y = 36+\cancel{x^2}-12x+\cancel{1}+\cancel{y^2}+2y$$

$$16x-4y=32 \quad \rightsquigarrow \quad \boxed{4x-y=8}$$

▷ Imposto Area :

base $AB^2 = (x_A-x_B)^2+(y_A-y_B)^2 = (-2-6)^2+(1-(-1))^2 = 64+4 = 68$

$$M = \left(\frac{x_A+x_B}{2} ; \frac{y_A+y_B}{2}\right) = \left(\frac{-2+6}{2} ; \frac{1-1}{2}\right) = (2,0)$$

alt. $CM^2 = (x_C-x_M)^2+(y_C-y_M)^2 = (x-2)^2+(y-0)^2$

$$CM^2 = x^2-4x+4+y^2$$

$$AB=\sqrt{68} \qquad CM=\sqrt{x^2+y^2-4x+4}$$

$$A_{ABC} = \frac{AB\cdot CM}{\cancel{2}} = \frac{85}{\cancel{2}}$$

$$\boxed{2\sqrt{17}\cdot\sqrt{x^2+y^2-4x+4} = 85}$$

$$\begin{cases} 4x-y=8 \quad \rightsquigarrow \quad y=4x-8 \\ 4\cdot\cancel{17}\,(x^2+y^2-4x+4) = 17^{\cancel{2}}\cdot 5^2 \end{cases}$$

$$4(x^2+16x^2+64-64x-4x+4) = 17\cdot 5^2$$

$$4\cdot(17x^2-68x+68) = 17\cdot 5^2$$

$$4\cdot \cancel{17}\,(x^2-4x+4) = \cancel{17}\cdot 5^2$$

$$4x^2-16x-9=0 \qquad \frac{\Delta}{4} = 64+36 = 100$$

$$x_1/x_2 = \frac{8\pm 10}{4} \;\begin{cases} \frac{9}{2} & \rightsquigarrow\; y = 4\cdot\frac{9}{2}-8 = 10 \\ -\frac{1}{2} & \rightsquigarrow\; y = 4\left(-\frac{1}{2}\right)-8 = -10 \end{cases}$$

$$C_1 = \left(\frac{9}{2};10\right) \qquad C_2 = \left(-\frac{1}{2};-10\right)$$

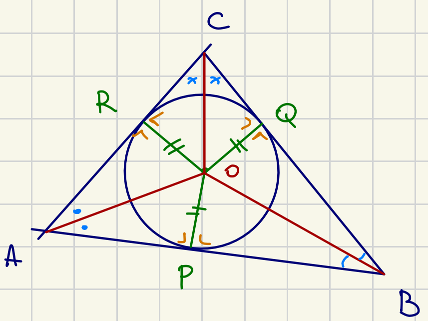
Con questo risolvete il pto 2

Teorema: Dato un triangolo ABC, il raggio della circonferenza inscritta vale

$$\boxed{r = \frac{2A}{P}}$$

A area triangolo
P perimetro

Dim: (Fatta da Alice e Luca nel ~2012)



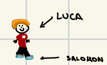
▷ Il centro della circonf. inscritta è il punto di incontro delle bisettrici
Piccolo es. per casa

▷ OP, OQ, OR sono perpendicolari ai lati e sono raggi e le distanze centro - lato (*)

$$A_{ABC} = A_{ABO} + A_{BCO} + A_{ACO} = \frac{AB\cdot PO}{2} + \frac{BC\cdot QO}{2} + \frac{AC\cdot RO}{2} \overset{(*)}{=}$$

$$= \frac{AB\cdot r}{2} + \frac{BC\cdot r}{2} + \frac{AC\cdot r}{2} = r\left(\frac{\overbrace{AB+BC+AC}^{\text{Perimetro}}}{2}\right)$$

$$\rightsquigarrow\; A = \frac{P\cdot r}{2} \;\rightsquigarrow\; \boxed{r = \frac{2A}{P}}$$



Def: Un luogo geometrico di punti nel piano è un insieme di punti caratterizzati da una proprietà.

Molte volte la proprietà si traduce nel soddisfare una equazione.

Esempio: Considero l'equazione $y = 3x + 1$, voglio associare un disegno nel piano cartesiano e l'associazione è la seguente:

$P = (x_P; y_P) \in$ Disegno	$\iff$	Mettendo le coordinate di P dentro l'equazione si ottiene una uguaglianza

Sacro-Santo

$P = (7,3)$ NON appartiene al disegno identificato da $y = 3x+1$ poiché $3 \neq 3 \cdot 7 + 1 = 22$

$A = (1;4)$ appartiene al disegno identificato da $y = 3x+1$

Formalmente, se $f(x,y) = 0$ è l'equazione che sto analizzando il luogo geometrico dei punti associato a $f(x,y)$ è

$$\mathcal{F} = \{ (x_P, y_P) \in \mathbb{R}^2 \mid f(x_P; y_P) = 0 \}$$

Piano Cartesiano

Cioè sono tutti i punti che se sostituiti all'equazione, mi danno una uguaglianza.

⇝ Informalmente il processo sarà (per le poche cose che vedremo)

[Equazione $(f(x,y) = 0)$] ⇝ [Daremo un nome (retta, parabola, ellisse, iperbole ...)]

⇝ [Diremo: il punto appartiene a "nome"]

Rette

Def: Una retta nel piano cartesiano è il luogo geometrico dei punti identificati da una equazione della forma

$$ax + by + c = 0$$

con $a, b, c \in \mathbb{R}$ e $\underbrace{(a,b) \neq (0;0)}$ ~> a,b non 0 nello stesso momento

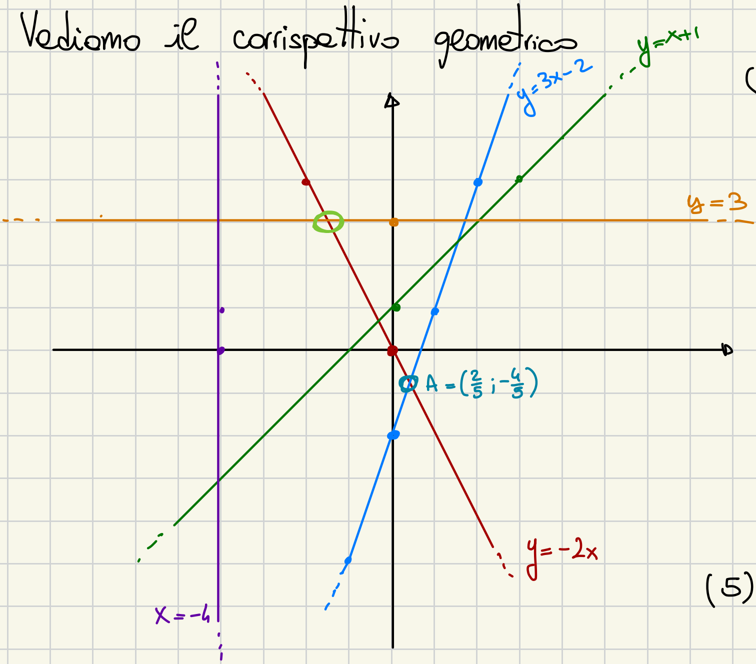
Esempio: (1) $3x + 2y + 5 = 0$ è una retta $(a=3;\ b=2;\ c=5)$

(2) $2x + 3 = 0$ è una retta $(a=2,\ b=0;\ c=3)$

(3) $y - 7 = 0$ è una retta $(a=0;\ b=1;\ c=-7)$

Oss: La forma $ax+by+c=0$ è detta forma implicita di una retta. Ovviamente chiameremo "retta" qualsiasi equazione EQUIVALENTE (keti: Cioè che hanno lo stesso insieme di soluzioni)

Vediamo il corrispettivo geometrico



(1) $2x + y = 0$

$y = -2x$

x	y
-2	4
0	0

(2) $3x - y - 2 = 0$

$y = 3x - 2$

x	y
0	-2
1	1

(3) $x - y + 1 = 0$

$y = x + 1$

x	y
3	4
0	1

(4) $y - 3 = 0$

$y = 3$

x	y
0	3
1	3

(5) $x + 4 = 0$

$x = -4$

x	y
-4	0
-4	1

Oss: (1) Le rette parallele all'asse x sono le rette della forma

$$y = k \quad \text{con} \quad k \in \mathbb{R} \qquad (y=3)$$

(2) Le rette parallele all'asse y sono le rette della forma

$$x = k \quad \text{con} \quad k \in \mathbb{R} \qquad (x=-4)$$

Oss Carina: L'intersezione tra due luoghi geometrici corrisponde al sistema tra le equazioni che definiscono i luoghi.

Esempio (vedi sopra)

$$\begin{cases} 2x+y=0 \\ 3x-y-2=0 \end{cases} \quad \downarrow +$$

$$5x-2=0$$

$$x = \frac{2}{5} \rightsquigarrow 2\cdot\frac{2}{5} = -y$$

$$\rightsquigarrow y = -\frac{4}{5}$$

$$A = \left(\frac{2}{5}; -\frac{4}{5}\right)$$

Forma esplicita della retta

Remind: $ax+by+c=0$

Spesso è utile scrivere la retta in un'altra forma detta forma esplicita

$$\boxed{y = mx + q} \qquad m, q \in \mathbb{R}$$

Come si passa da una forma all'altra?

$ax+by+c=0 \rightsquigarrow$ punto a isolare la y

$$\rightsquigarrow by = -ax - c$$

Imp $b \neq 0$: Se $b=0$, non avete una forma "esplicita" perché la relazione NON è una fz

$$y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}$$

$$\parallel$$

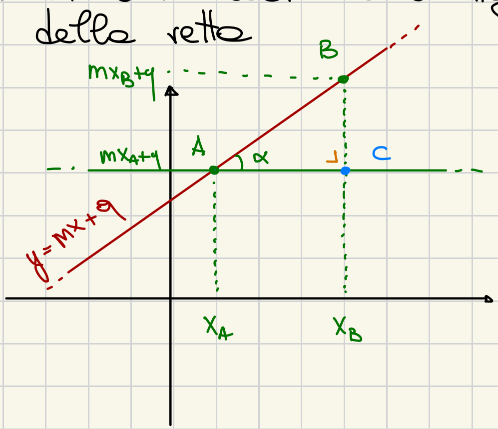
$$y = mx + q$$

$$\boxed{-\frac{a}{b} = m} \qquad \boxed{-\frac{c}{b} = q}$$

(ovviamente se $b \neq 0$)

Def: Data $y = mx + q$

- m è il coefficiente angolare e "misura" la pendenza della retta



Goal: Legare l'angolo α con il coefficiente angolare m

$$A = (x_A, y_A) = (x_A, mx_A + q)$$

$$B = (x_B, y_B) = (x_B; mx_B + q)$$

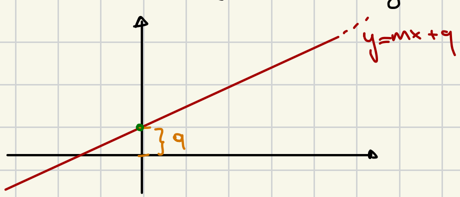
$$C = (x_C; y_C) = (x_B; mx_A + q)$$

Vale che

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{BC}{AC} = \frac{y_B - y_C}{x_B - x_A} = \frac{(mx_B + q) - (mx_A + q)}{x_B - x_A}$$

$$= \frac{mx_B + \cancel{q} - mx_A - \cancel{q}}{x_B - x_A} = \frac{m\cancel{(x_B - x_A)}}{\cancel{x_B - x_A}} = m$$

- q è "l'ordinata all'origine" o "intercetta" ed è l'intersezione tra la retta e l'asse y.
  In altre parole, la retta passa per il punto $(0; q)$



Es: Se una retta passa per l'origine, $q=0$

Pag 226 n 183

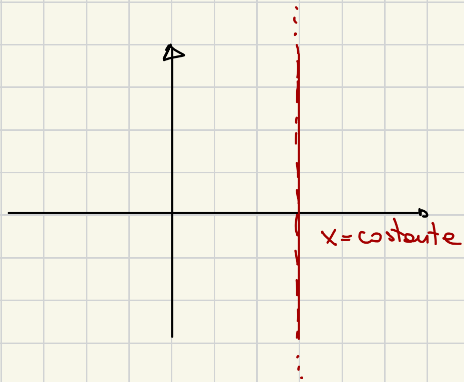
$$(k^2+k-2)x + (k^2-k)y + k^2-1=0$$ Trova k t.c.

a) L'eq. non rappresenta una retta

$$\begin{cases} a=0 \\ b=0 \end{cases} \quad \begin{cases} k^2+k-2=0 \\ k^2-k=0 \end{cases} \quad \begin{cases} (k+2)(k-1)=0 \\ k(k-1)=0 \end{cases} \quad \begin{cases} k=-2;1 \\ k=0;1 \end{cases}$$

$$\leadsto \boxed{k=1}$$

b) Rappresenta retta // asse y.



Quindi $b=0$ e cioè

$k^2-k=0 \qquad k(k-1)=0$

$\leadsto k=0$ ✓

$k=1$ NON Accettabile

c) È una retta che passa per $P=(1;0)$

$$(k^2+k-2)\cdot 1 + (k^2-k)\cdot 0 + k^2-1 = 0$$
$$k^2+k-2+k^2-1=0$$
$$2k^2+k-3=0$$
$$2k^2-2k+3k-3=0$$
$$2k(k-1)+3(k-1)=0$$
$$(2k+3)(k-1)=0 \quad \leadsto \quad k=-\frac{3}{2} \text{ ✓}$$

$k=1$ NON accett.

(d) Il coeff. angolare è 22

$$(k^2+k-2)x + (k^2-k)y + k^2-1 = 0$$ Porto in forma esplicita

$$(k^2-k)y = -(k^2+k-2)\,x - (k^2-1)$$

C.E. $k \neq 0, 1$

$$y = \underbrace{-\frac{(k^2+k-2)}{(k^2-k)}}_{m}\,x - \frac{(k^2-1)}{k^2-k}$$

$m = 22$

$$-\frac{(k^2+k-2)}{k^2-k} = 22$$

$$-\frac{(k+2)\cancel{(k-1)}}{k\,\cancel{(k-1)}} = 22$$

$$-k-2 = 22k \quad \rightsquigarrow \quad \boxed{k = -\frac{2}{23}}$$