Settimana: 18

Argomenti:

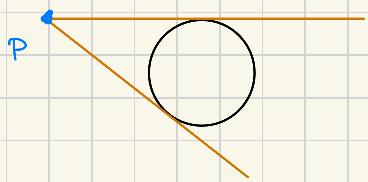
Materia: Matematica

Classe: 3D

Data: 10/02/2026

Pag 398 n181

$P = \left(\frac{2}{3}; 4\right)$ $\qquad$ $C: \ x^2+y^2-18x-8y+72=0$



Fascio per P $\qquad y-4 = m\left(x-\frac{2}{3}\right)$

$$y = mx - \frac{2}{3}m + 4$$

Si fa il sistema (sostituisco y sopra)

$$x^2 + \left(mx - \frac{2}{3}m + 4\right)^2 - 18x - 8\left(mx - \frac{2}{3}m + 4\right) + 72 = 0$$

$$x^2 + m^2x^2 + \frac{4}{9}m^2 + 16 - \frac{4}{3}m^2x - \cancel{\frac{16}{3}m} + \cancel{8mx} - 18x - \cancel{8mx} + \cancel{\frac{16}{3}m} - 32 + 72 = 0$$

$$x^2(m^2+1) - x\left(+\frac{4}{3}m^2+18\right) + \frac{4}{9}m^2 + 56 = 0$$

$$\Delta = \left(\frac{4}{3}m^2+18\right)^2 - \overset{(4m^2+4)}{4(m^2+1)}\left(\frac{4}{9}m^2+56\right) = 0$$

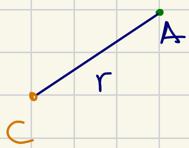
$$\cancel{\frac{16}{9}m^4} + 324 + 48m^2 - \cancel{\frac{16}{9}m^4} - \frac{16}{9}m^2 - 224m^2 - 224 = 0$$

$$m^2\left(-176 - \frac{16}{9}\right) + 100 = 0 \qquad m^2\left(\frac{16\cancel{00}}{9}\right) = 1\cancel{00}$$

$$\boxed{m = \pm\frac{3}{4}}$$

276

Centro $C = (-2; -4)$
Circonferenza passa per $A = (1; 2)$] ⇝ Trova la circonferenza



$$r^2 = AC^2 = (x_A - x_C)^2 + (y_A - y_C)^2$$
$$= (1+2)^2 + (2+4)^2 =$$
$$= 9 + 36 = 45$$

$(x - x_C)^2 + (y - y_C)^2 = r^2$ ← Formula circonferenza

$(x+2)^2 + (y+4)^2 = 45$ ⇝ svolgo

$x^2 + y^2 + 4x + 8y + 4 + 16 - 45 = 0$

$$\boxed{x^2 + y^2 + 4x + 8y - 25 = 0}$$

Modo alternativo:

$x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ $\qquad C = \left(-\frac{a}{2}; -\frac{b}{2}\right) = (-2; -4)$

⇝ $\boxed{a = 4, \quad b = 8}$

$x^2 + y^2 + 4x + 8y + c = 0$ $\qquad A = (1; 2)$

Metto dentro; risolvo e trovo c.

$1 + 4 + 4 + 16 + c = 0$ ⇝ $\boxed{c = -25}$

$B = (2k+1; k+5)$ ⇝ Appartiene a $\mathcal{C}$. Trova k.

Sostituisco le coordinate di B in $\mathcal{C}$

$$(2k+1)^2 + (k+5)^2 + 4(2k+1) + 8(k+5) - 25 = 0$$

$$4k^2 + 1 + 4k + k^2 + \cancel{25} + 10k + 8k + 4 + 8k + 40 - \cancel{25} = 0$$

$$5k^2 + 30k + 45 = 0 \qquad k^2 + 6k + 9 = 0 \qquad (k+3)^2 = 0$$

$$\rightsquigarrow \boxed{k = -3}$$

Asse Radicale e intersezione tra circonferenze:

Def: Siano

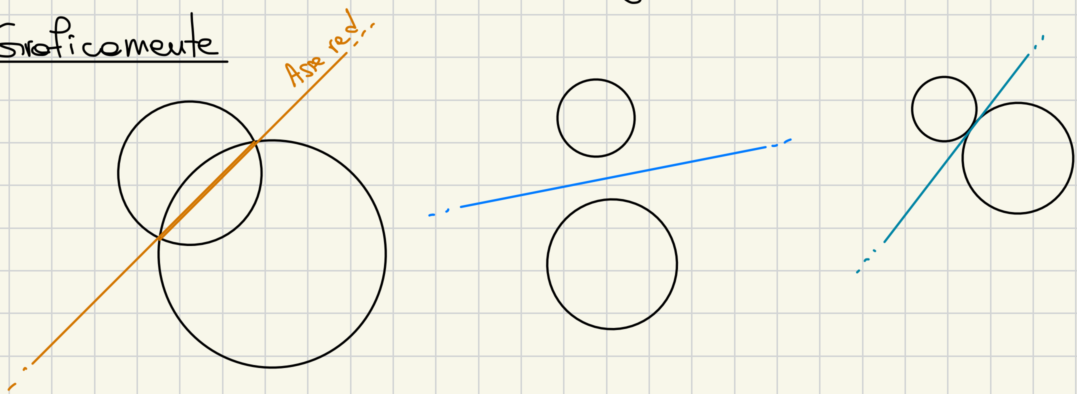
$$C_1 : \quad x^2 + y^2 + a_1 x + b_1 y + c_1 = 0$$

$$C_2 : \quad x^2 + y^2 + a_2 x + b_2 y + c_2 = 0$$

due circonferenze. L'asse radicale fra le due circonferenze è, se esiste, la retta ottenuta sottraendo le equazioni delle due circonferenze. In formule

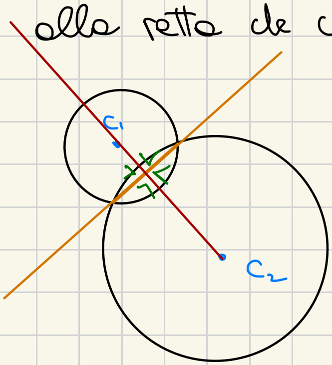
$$(a_1 - a_2)x + (b_1 - b_2)y + (c_1 - c_2) = 0$$

Graficamente



Oss. Intersecare C_1 e C_2 è come intersecare una delle due circonferenze con l'asse radicale. Di conseguenza il numero di intersezioni tra due circonferenze è al massimo 2.

Teorema dell'Asse radicale. L'asse radicale è perpendicolare alla retta che congiunge i due centri delle due circonferenze



Dim: Trovo i due coeff. angolari e spero che il prodotto faccia -1.

$$A.R.: (a_1-a_2)x+(b_1-b_2)y+(c_1-c_2)=0$$

$$\rightsquigarrow \quad y=\underbrace{\boxed{-\frac{(a_1-a_2)}{(b_1-b_2)}}}_{m_{AR}}x-\frac{c_1-c_2}{b_1-b_2}$$

Coeff angolare retta per i centri: $C_1=\left(-\frac{a_1}{2};-\frac{b_1}{2}\right)$ $\quad C_2=\left(-\frac{a_2}{2};-\frac{b_2}{2}\right)$

Remind: Se ho due punti A, B; $m_{AB}=\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}$

$$\rightsquigarrow \quad m_{C_1C_2}=\frac{-\frac{b_2}{2}+\frac{b_1}{2}}{-\frac{a_2}{2}+\frac{a_1}{2}}=\boxed{\frac{b_1-b_2}{a_1-a_2}}$$

$$\text{Allora} \quad m_{AR}\cdot m_{C_1C_2}=-\frac{(\cancel{a_1-a_2})}{(\cancel{b_1-b_2})}\cdot\frac{(\cancel{b_1-b_2})}{(\cancel{a_1-a_2})}=-1$$

$\square$

Formula di Sdoppiamento

Def: La formula di sdoppiamento della circonferenza ci fornisce dato un pto $P\in$ Circonferenza la retta tg alla circonferenza passante per P.

Data $x^2+y^2+ax+by+c=0$ circonferenza

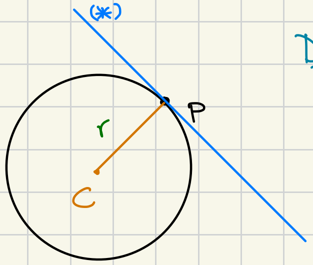
$P=(x_0,y_0)$ appartenente a $\mathcal{C}$

La retta tg è

$$\frac{ax}{2} + \frac{ax_0}{2}$$

$$(*) \quad \boxed{x x_0 + y y_0 + a\,\frac{x+x_0}{2} + b\,\frac{y+y_0}{2} + c = 0}$$

Proposizione: La formula (*) è effettivamente la tangente



Dim: Devo verificare che dist (C; retta) = r e poi ho visto

$$C = \left(-\frac{a}{2}; -\frac{b}{2}\right)$$

Retta in forma impl.

$$x\left(x_0+\frac{a}{2}\right) + y\left(y_0+\frac{b}{2}\right) + \frac{ax_0}{2} + \frac{by_0}{2} + c = 0$$

$$\text{dist}(C,r) = \frac{\left|\left[x_0+\frac{a}{2}\right]\left(-\frac{a}{2}\right) + \left[y_0+\frac{b}{2}\right]\left(-\frac{b}{2}\right) + \frac{ax_0}{2} + \frac{by_0}{2} + c\right|}{\sqrt{\left(x_0+\frac{a}{2}\right)^2 + \left(y_0+\frac{b}{2}\right)^2}}$$

$$= \frac{\left|-\cancel{\frac{ax_0}{2}} - \frac{a^2}{4} - \cancel{\frac{by_0}{2}} - \frac{b^2}{4} + \cancel{\frac{ax_0}{2}} + \cancel{\frac{by_0}{2}} + c\right|}{\sqrt{x_0^2+y_0^2+ax_0+by_0+\frac{a^2}{4}+\frac{b^2}{4}}}$$

Oss: $P \in$ Circ., dunque vale

$$\boxed{x_0^2+y_0^2+ax_0+by_0+c = 0}$$

$$= \frac{|-r^2|}{\sqrt{\frac{a^2}{4}+\frac{b^2}{4}-c}}$$

$$= \frac{r^2}{\sqrt{r^2}} = r$$

$\square$

Esempio: $\mathcal{C}: \quad x^2+y^2-4x-2y=0$

$P=(1;-1)$

(1) Vedi se $P\in\mathcal{C}$
(2) Trova la tg in P

(1) $1^2+(-1)^2-4\cdot 1-2(-1) = 1+1-4+2=0$

$\Rightarrow P\in$ Circonferenza

(2) Per la formula di sdoppiamento

$$x\cdot \overset{x_0}{1} + y\overset{y_0}{(-1)} + \overset{a}{(-4)}\,\frac{x+\overset{x_0}{1}}{2} + \overset{b}{(-2)}\,\frac{y-\overset{y_0}{1}}{2} + \overset{c}{0} = 0$$

$$x-y-2x-2-y+1=0$$

$$\boxed{+x+2y+1=0}$$

Fasci di Circonferenze:

Def. Date $C_1: \quad x^2+y^2+a_1x+b_1y+c_1=0$

$C_2: \quad x^2+y^2+a_2x+b_2y+c_2=0$

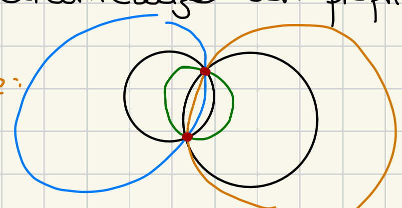
Il fascio di circonferenze generato da C_1 e C_2 è:

$$\underbrace{x^2+y^2+a_1x+b_1y+c_1} + k\,\underbrace{(x^2+y^2+a_2x+b_2y+c_2)} = 0$$

Circonferenze generatrici

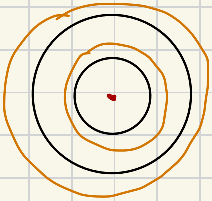
Oss: A seconda della posizione reciproca tra C_1 e C_2 il fascio genera circonferenze con proprietà diverse

Esempio:



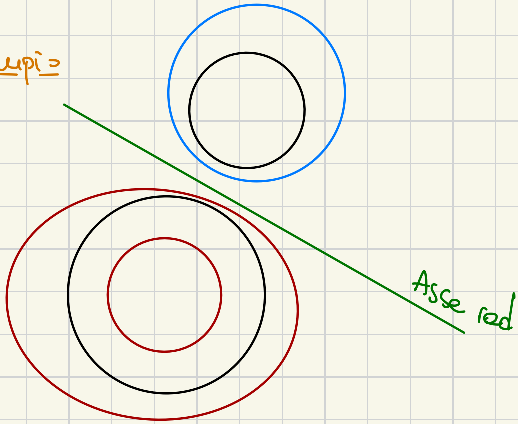
Se le nere sono generatrici e si intersecano, tutte le altre si intersecano nei soliti punti

Esempio.



Se sono concentriche le generate sono tutte concentriche

Esempio



Se sono esterne le generate NON intersecano l'asse radicale

End of circonferenze

Es 1

$$\sqrt{x(x-4)+4} > 2x+1$$

Data $f(x) = \dfrac{ax}{x^2+2x+a}$, $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

Es 2 Trova a in modo che $\mathrm{Dom}f = \mathbb{R}$

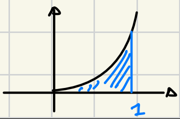
Es 3 " " che $\mathrm{Im}f = \mathbb{R}$

Es 4 " " che $\mathrm{Dom}f = \mathrm{Im}f$

Es 5

Sia C il punto in cui l'asse del segmento AB con $A=(-3;3)$ $B=(1;5)$ incontra asse x. Calcola l'area di ABC

Es 8:



$y=x^2$ Calcola Area colorata

Data $ky-2x^2+(k+1)x-3=0$

Es 6 Trova k in modo che asse $x=1$

Es 7 " " parabola passa per $P=(-1;2)$

Es 339 pag 417

$$x^2+y^2+\underbrace{4k}_{a}x\underbrace{-(4+k)}_{b}y+4+2k=0 \qquad C=\left(-2k;\ \frac{4+k}{2}\right)$$

Studiare il fascio = Prendere 2 circonferenze del fascio, intersecarle e capire tipologia

$$\begin{array}{l} k=0 \\ k=1 \end{array}\begin{cases} x^2+y^2-4y+4=0 \\ x^2+y^2+4x-5y+6=0 \end{cases} \quad \downarrow -$$

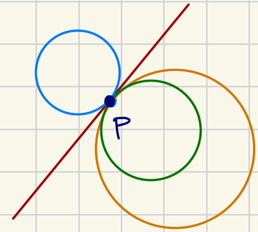
$-4x+y-2=0$

$\boxed{y=4x+2}$

$y=2$

$$x^2+16x^2+\cancel{4}+\cancel{16}x-\cancel{16}x-\cancel{8}+\cancel{4}=0$$

$$17x^2=0 \rightsquigarrow x=0$$



$P=(0;2)$ intersezione unica quindi fascio di circ. tangenti

(a) centro con ascissa $=4 \rightsquigarrow -2k=4 \rightsquigarrow \boxed{k=-2}$

(b) Interseca l'asse y nel $\boxed{\text{punto di ordinata } -1}$

$x=0$

$$\begin{cases} x=0 \\ x^2+y^2+4kx-(4+k)y+4+2k=0 \end{cases}$$

$y=-1$

$$\hookrightarrow y^2-(4+k)y+4+2k=0$$

$$1+4+k+4+2k=0 \rightsquigarrow 3k=-9 \rightsquigarrow \boxed{k=-3}$$

Es 345

$$x^2+y^2\underbrace{-4(k+1)}_{a}x\underbrace{-2k}_{b}y+2=0$$

a) Centro, studio del fascio con cond. esistenza

▷ $C=\left(-\frac{a}{2};-\frac{b}{2}\right)=\left(2(k+1);k\right)$

▷ $k=0$ $\quad\begin{cases} x^2+y^2-4x+2=0 \\ x^2+y^2+2y+2=0 \end{cases}$ $\downarrow -$ $\qquad -4x-2y=0$

$$\boxed{y=-2x}$$

$x^2+4x^2-4x+2=0$

$k=-1$

$5x^2-4x+2=0 \rightsquigarrow \frac{\Delta}{4}=4-10=-6$ Impossibile

Non ci sono pti di intersezione.

▷ $r=\sqrt{\frac{a^2}{4}+\frac{b^2}{4}-c}=\sqrt{(2k+2)^2+k^2-2}$

$\frac{a^2}{4}=\left(\frac{a}{2}\right)^2$

$=\sqrt{4k^2+4+8k+k^2-2}=\sqrt{5k^2+8k+2}$

$\rightsquigarrow$ C.E. $5k^2+8k+2\boxed{\geq}0$

→ Il caso = è raggio =0, Circ. = punto

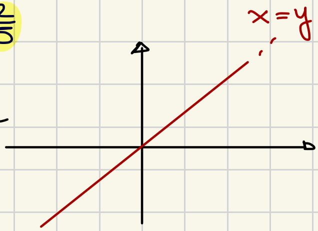
$\frac{\Delta}{4}=16-10=6 \qquad k_1/k_2=\frac{-4\pm\sqrt{6}}{5}$ $\begin{matrix}\frac{-4-\sqrt{6}}{5}\\ \frac{-4+\sqrt{6}}{5}\end{matrix}$

Sol: $k\leq\frac{-4-\sqrt{6}}{5} \quad \vee \quad k\geq\frac{-4+\sqrt{6}}{5}$

(b) Trova k per cui $r=\sqrt{6}$ o $r^2=6$

$5k^2+8k+2=6 \rightsquigarrow 5k^2+8k-4=0$

$\frac{\Delta}{4} = 16+20 = 36 \qquad k_1/k_2 = \frac{-4\pm 6}{5}$ $\begin{cases} -\frac{10}{5} = -2 \\ \frac{2}{5} \end{cases}$



(c) Centro sta nella bisettrice I-III quadrante

$2(k+1) = k$ [Impongo $x_c = y_c$]

$\hookrightarrow 2k+2=k \qquad \boxed{k=-2}$.