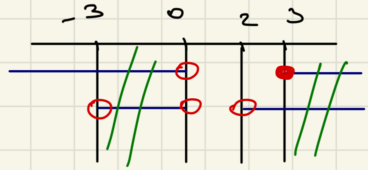
Remind disequazioni

Pag 71 n 88

$$\begin{cases} \text{I)} \quad \dfrac{x+3}{x} \leq 2 \\[2ex] \text{II)} \quad \dfrac{12-2x(1+x)}{x^3+2x^2+3x} < 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x<0 \quad \vee \quad x \geq 3 \\[2ex] -3<x<0 \quad \vee \quad x>2 \end{cases}$$



Sol: $-3 < x < 0$ $\vee$ $x \geq 3$

I) $\dfrac{x+3-2x}{x} \leq 0 \qquad \dfrac{3-x}{x} \leq 0$

N: $3-x \geq 0$ $\qquad x \leq 3$

D: $x > 0$

		0		3	
N	+		+	•	−
D	−	o	+		+
	−		+		−

Sol: $x<0 \quad \vee \quad x \geq 3$

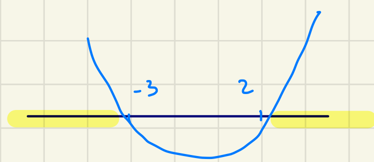
II) $\dfrac{12-2x-2x^2}{x(x^2+2x+3)} < 0 \quad \leadsto \quad \dfrac{-2(+x^2+x-6)}{x(x^2+2x+3)} < 0 \qquad \cdot(-1)$

$$\leadsto \quad \frac{2(x^2+x-6)}{x(x^2+2x+3)} > 0$$

N: $2>0$ Sempre

$x^2+x-6>0 \qquad (x-2)(x+3)>0$

$x_1 = 2, \; x_2 = -3$



$x < -3 \quad \vee \quad x > 2$

D: $x>0$

$x^2+2x+3>0 \qquad \Delta = 4-12 = -8 < 0 \quad \leadsto$ Sempre vere

		-3		0		2	
N1	+		+		+		+
N2	+		−		−		+
D1	−		−		+		+
D2	+		+		+		+
	−		+		−		+

Sol: $-3 < x < 0 \quad \vee \quad x > 2$

Esponenziali e (speriamo a breve) Logaritmi

Remind: Proprietà delle potenze (a si chiama base, x è esponente)

(1) $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$ $\forall a \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$, $x,y \in \mathbb{Q}$

(2) $a^x \cdot b^x = (ab)^x$ $\forall a,b \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$, $x \in \mathbb{Q}$

(3) $(a^x)^y = a^{xy}$ $\forall a \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$, $x,y \in \mathbb{Q}$

(4) $a^{-x} = \frac{1}{a^x}$ $\forall a \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$, $x \in \mathbb{Q}$

(5 ahimé) $a^{\frac{n}{m}} = \sqrt[m]{a^n}$ $a \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$; $n,m \in \mathbb{Z}$

Remind: Un numero reale ($x \in \mathbb{R}$) è un numero decimale infinito. Un numero irrazionale è un numero reale NON periodico, cioè NON è una frazione

$2,3 = \frac{23}{10}$ $0,\overline{3} = \frac{1}{3}$ $\sqrt{2}$ non è una frazione e in particolare è un num dec. infinito non periodico

$\sqrt{2} = 1,414213562 \dots\dots$

Il numero $\sqrt{2}$ è approssimabile per difetto o per eccesso da frazioni.

$$
\begin{array}{ccccc}
1 & < & \sqrt{2} & < & 2 \\
1,4 & < & \sqrt{2} & < & 1,5 \\
1,41 & < & \sqrt{2} & < & 1,42 \\
 & & \vdots & &
\end{array}
$$

Troncando il numero $\sqrt{2}$ alla cifra decimale n-esima riesco a trovare una frazione più piccola e una più grande

Più faccio diventare grande n, più l'approssimazione è fedele.

"Ciò che abbiamo fatto è la costruzione del numero $\sqrt{2}$ per successioni di Cauchy"

Rispondo adesso alla domanda:
Che significato ha la scrittura $a^{\sqrt{2}}$?

Def (per $a^{\sqrt{2}}$) : Il numero $a^{\sqrt{2}}$ è quel numero che viene approssimato per eccesso e per difetto all'infinito dal seguente processo; $a>0$

$$a^{1} < a^{\sqrt{2}} < a^{2}$$
$$a^{1,4} < a^{\sqrt{2}} < a^{1,5}$$
$$a^{1,41} < a^{\sqrt{2}} < a^{1,42}$$
$$\vdots$$

In generale a^x con $x \in \mathbb{R}$ è quell'unico numero reale che è approssimato per difetto e per eccesso da tutte le potenze che hanno come esponente i troncamenti del numero decimale x. Warning: $a>0$

Def: Sia $\boxed{a>0,\ a\in\mathbb{R}} = a \in \mathbb{R}^+$, definiamo la funzione esponenziale

a elevato a puntino $\longrightarrow$ $[a^{\bullet}$:
$$\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^+$$
$$x \longmapsto a^x$$

Se $a=1$, la funzione esponenziale è costante e vale sempre 1

Proprietà: (1) Il Dominio della funzione è $\mathbb{R}$

(2) la funzione è Bigettiva (iniettiva e suriettiva) No dim

(3) $a>1$; la funzione è crescente $(x_1 < x_2 \Rightarrow a^{x_1} < a^{x_2})$

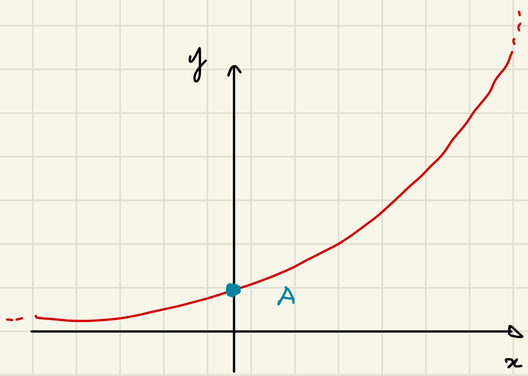
no dim

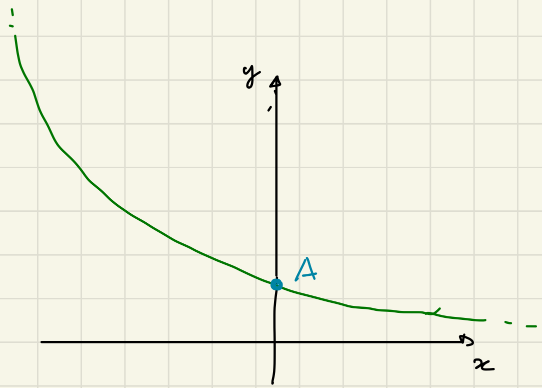
Esempio $a=3$ $\quad 2<5 \Rightarrow 3^2 < 3^5$

(4) $0 < a < 1$: la funzione è decrescente
$(x_1 < x_2 \Rightarrow a^{x_1} > a^{x_2})$

Esempio: $a = \frac{1}{2}$ $\quad 2 < 5 \Rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^2 > \left(\frac{1}{2}\right)^5$

(5) Grafico della fz. exp:





$a > 1$ $\qquad\qquad$ $0 < a < 1$

$x = 0 \rightsquigarrow a^x = 1$
$A = (0,1) \in$ Grafico

$x = 0 \rightsquigarrow a^x = 1$
$A = (0,1) \in$ Grafico

A $-\infty$ (cioè andando verso sx) la funzione si appiattisce a 0

A $+\infty$ (cioè andando verso dx) la funzione si appiattisce a 0

Oss: I due grafici si corrispondono mediante la riflessione rispetto all'asse y.

Def. Una equazione esponenziale è una equazione che contiene almeno una potenza con l'incognita all'esponente

Def: Una disequazione esponenziale è una disequazione che contiene almeno una potenza con l'incognita all'esponente

Def: Numero di Nepero: Si indica con la lettera e, ha una def esplicita (Anno prossimo). $e \approx 2{,}71$

Pag 610 e seguenti

(136) $3^{x+1} = 27 \rightsquigarrow 3^{x+1} = 3^3$ Scrivo con la stessa base LHS e RHS

Dato che la funz. exp è iniettiva (bigettiva), vale che

$$x+1 = 3$$

$$x = 2$$

Warning: Se tirate un frego e non scrivete la cosa giusta, muoio dentro (= Tutto errato)

(137) $5^{2x} = \frac{1}{25} \rightsquigarrow 5^{2x} = 5^{-2} \overset{inj}{\rightsquigarrow} 2x = -2 \rightsquigarrow x = -1$

(150) $\sqrt[3]{5^x} = 25 \rightsquigarrow 5^{\frac{x}{3}} = 5^2 \overset{inj}{\rightsquigarrow} \frac{x}{3} = 2 \rightsquigarrow x = 6$

(151) $4^{x+2} = 1 - \sqrt{2} \rightsquigarrow \underbrace{2^{2x+4}}_{\text{Positivo}} = \underbrace{1 - 2^{\frac{1}{2}}}_{\text{Negativo}} \rightsquigarrow$ Impossibile

(165) $\sqrt{27\sqrt{9^x}} = 3^{x-2} \cdot 27$ Porto tutto in base 3

$$\left[3^3 \cdot (3^{\cancel{2}x})^{\frac{1}{\cancel{2}}}\right]^{\frac{1}{2}} = 3^{x-2} \cdot 3^3$$

$$3^{\frac{3+x}{2}} = 3^{x+1} \overset{inj}{\rightsquigarrow} \frac{3+x}{2} = x+1$$ → Bonus Valerio

$$\rightsquigarrow 3 + x = 2x + 2 \rightsquigarrow x = 1$$

(189) $8 + 2^{x+1} = 2^{2x}$

Ho cercato di riportarlo in una forma in cui c'è 2^x e $(2^x)^2$

$$8 + 2 \cdot 2^x = (2^x)^2$$

$\rightsquigarrow$ Pongo $2^x = z$

$$8 + 2z = z^2 \rightsquigarrow z^2 - 2z - 8 = 0 \rightsquigarrow (z-4)(z+2) = 0$$

$z_1 = 4 \longrightarrow 2^x = 4 \longrightarrow x = 2$

$z_2 = -2 \longrightarrow 2^x = -2$ Impossibile