Settimana: 15

Argomenti:

Materia: Matematica

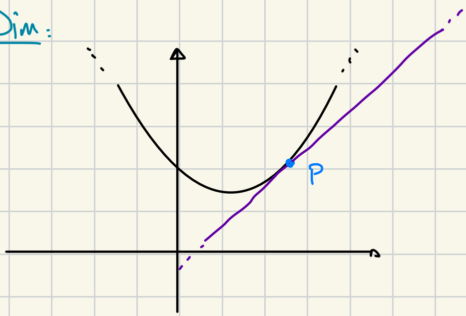
Classe: 3D

Data: 15/01/2026

! **Teorema:** Data una parabola $y=ax^2+bx+c$ e un punto $P \in$ Parabola $P=(x_P, y_P)$, la tangente alla parabola passante per P ha coefficiente angolare

$$\boxed{m = 2ax_P + b}$$

Dim:



(1) Considero il fascio di rette per P

Voglio determinarti

$$y - y_P = m(x - x_P)$$

Questa è una MINACCIA

(2) Interseco la retta con la parabola

$$\begin{cases} y = ax^2 + bx + c \\ y = mx - mx_P + y_P \end{cases} \rightsquigarrow ax^2 + bx + c = mx - mx_P + y_P$$

$$\boxed{ax^2 + x(b-m) + c + mx_P - y_P = 0}$$

(3) Per avere la tangenza impongo $\Delta = 0$

$$\Delta = (b-m)^2 - 4(a)(c + mx_P - y_P) = 0$$

$$b^2 + m^2 - 2bm - 4ac - 4amx_P + 4ay_P = 0$$

Ho tutto tranne m quindi è una eq. di II grado

Riordino

con incognita m.

$$m^2 - 2m(b + 2ax_p) + b^2 - 4ac + 4ay_p = 0$$

Per trovare m rifaccio il Δ di questa nuova equazione. Per semplicità faccio $\frac{\Delta}{4}$

$$\frac{\Delta}{4} = \left[-(b + 2ax_p)\right]^2 - (b^2 - 4ac + 4ay_p)$$

$$= \cancel{b^2} + 4a^2x_p^2 + 4abx_p - \cancel{b^2} + 4ac - 4ay_p$$

$$= 4a(\underline{ax_p^2} + \underline{bx_p} + \underline{c} - y_p)$$

$$= 4a(y_p - y_p) = 0$$

$P = (x_p, y_p)$

$y = ax^2 + bx + c$

$$\boxed{y_p = ax_p^2 + bx_p + c}$$

⇝ Ora che ho calcolato il Δ, trovo la soluzione dell'eq. di II grado

$$\boxed{m_{1/2} = \frac{-\frac{b}{2} \pm \sqrt{\frac{\Delta}{4}}}{a}} = \frac{b + 2ax_p \pm \sqrt{0}}{1} = 2ax_p + b$$

In generale

□

Fasci di Parabole:

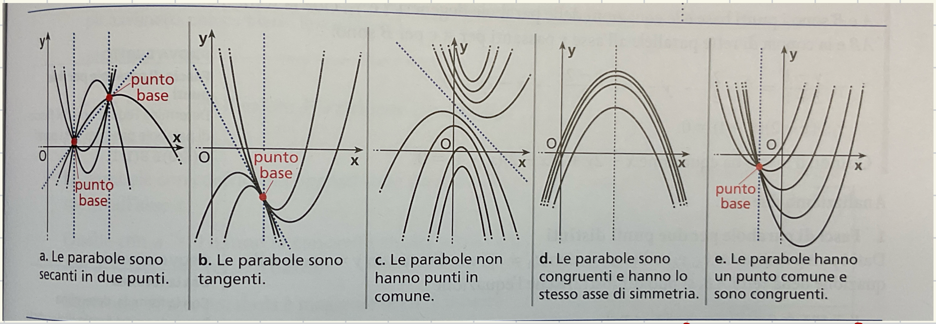
Def. Date due parabole $y = ax^2 + bx + c$, $y = a'x^2 + b'x + c'$ il fascio di parabole generato dalle due parabole è:

$$\boxed{y - ax^2 - bx - c + k(y - a'x^2 - b'x - c') = 0}$$

o, in altro modo per scriverlo è:

$$\boxed{(k+1)y - (a + ka')x^2 - (b + kb')x - (c + c') = 0}$$

A seconda della parabola di partenza, possiamo avere fasci diversi al variare di k. Il disegno rappresenta la casistica.



a. Le parabole sono secanti in due punti.
b. Le parabole sono tangenti.
c. Le parabole non hanno punti in comune.
d. Le parabole sono congruenti e hanno lo stesso asse di simmetria.
e. Le parabole hanno un punto comune e sono congruenti.

Esercizio: Trovare esempi espliciti per ogni situazione

Pag 357, es 29

$y = x^2+2x+4$

$V = \left(-\frac{b}{2a}; -\frac{\Delta}{4a}\right) = \left(-1; -\frac{4-16}{4}\right)$

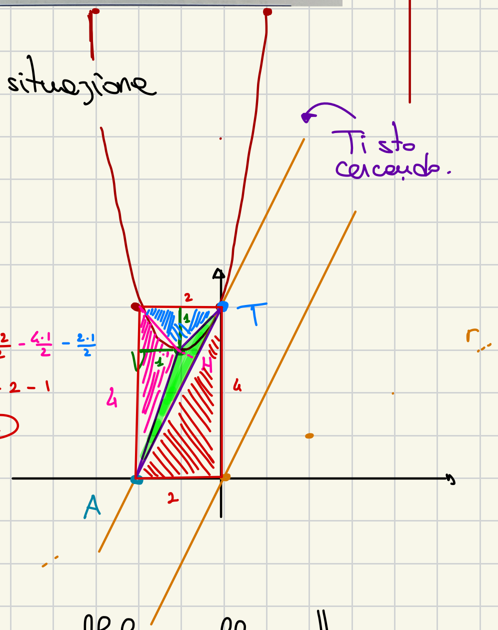
$V = (-1; +3)$

x	y
0	4
2	12

$4\cdot 2 - \frac{4\cdot 2}{2} - \frac{4\cdot 1}{2} - \frac{2\cdot 1}{2}$

$8 - 4 - 2 - 1$

1



Considera la retta $r: y - 2x = 0$ → $y = 2x$

Trova la retta tangente alla parabola parallela alla retta r

Prendo il fascio di rette parallelo a r:

$$y = 2x + q$$ ← Fascio di rette improprio

Lo interseco con la parabola e impongo tangenza per trovare q

$$\begin{cases} y = x^2+2x+4 \\ y = 2x+q \end{cases} \rightsquigarrow x^2 + \cancel{2x} + 4 = \cancel{2x} + q \rightsquigarrow x^2 = q - 4$$

Per avere una unica intersezione $q=4$ e la retta tangente è pertanto

$$\boxed{y = 2x + 4}$$

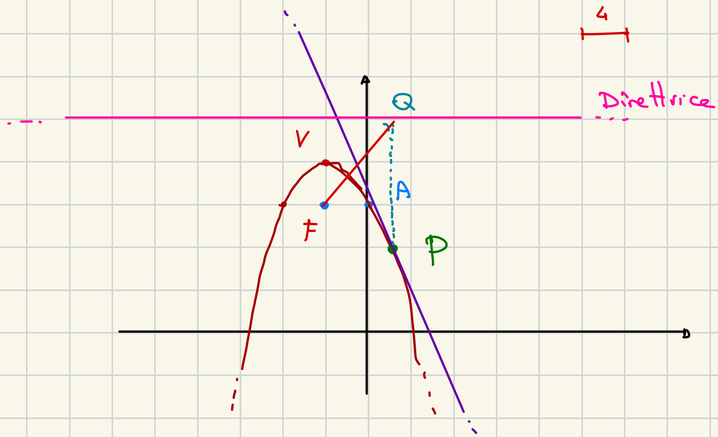
Punto di tangenza $T = (0;4)$ calcolato intersecando parab. e retta

Considera A pto di int. fra la retta tangente e l'asse x

Per trovare A è sufficiente $\begin{cases} y=0 \\ y = 2x+4 \end{cases} \rightsquigarrow A = (-2;0)$

Calcolare area triangolo $A\hat{V}T$ $\rightsquigarrow$ Vedere disegno e sottrazione aree.

<u>Es 58</u>



$V = (-4;16)$ vertice
$A = (0;12)$

Determina eq. della parabola

$$V = \left(-\frac{b}{2a} ; -\frac{\Delta}{4a}\right)$$

$$\begin{cases} -\dfrac{b}{2a} = -4 \\ -\dfrac{b^2-4ac}{4a} = 16 \\ 12 = a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c \end{cases} \qquad \begin{cases} b = 8a \\ -\dfrac{64a^2 - 48a}{4a} = 16 \\ c = 12 \end{cases} \qquad \begin{cases} c = 12 \\ b = 8a \rightsquigarrow b = -2 \\ -16a + 12 = 16 \end{cases}$$

$\rightarrow a = -\frac{1}{4}$

$$\boxed{y = -\frac{1}{4}x^2 - 2x + 12}$$

$\rightarrow \Delta = 4 - 4\left(-\frac{1}{4}\right)(12) = 16$

Trovo la tangente in $P \in$ Parabola con $x_p = 2$

Trovo y_p sostituendo x_p nella parabola $y_p = -\frac{1}{4} \cdot 4 - 4 + 12 = 7$

$$P = (2; 7)$$

Per il coeff. angolare della retta tg uso la formula $m = 2ax_p + b$
$= 2\left(-\frac{1}{4}\right) \cdot 2 - 2$
$= -3$

Per trovare la retta $y - 7 = (-3)(x - 2)$ $\left[y - y_p = m(x - x_p) \right]$

$$r: \boxed{y = -3x + 13}$$

Sia Q proiezione di P sulla direttrice
Sia F il fuoco
Calcola l'asse di FQ e verifica che coincide con r.

Direttrice: $y = k = -\frac{1+\Delta}{4a}$ $Q = \left(2; -\frac{1+16}{-1}\right) = (2; 17)$

x_p

Fuoco: $F = \left(-\frac{b}{2a}; \frac{1-\Delta}{4a}\right)$ $F = \left(-4; \frac{1-16}{-1}\right) = (-4; 15)$

Asse di FQ: Pongo uguale la distanza di un pto generico (x, y) da F e da Q.

$$(x-2)^2 + (y-17)^2 = (x+4)^2 + (y-15)^2$$

$$\cancel{x^2} + 4 - 4x + \cancel{y^2} - 34y + 289 = \cancel{x^2} + 16 + 8x + \cancel{y^2} - 30y + 225$$

$-4y = 12x - 52 \leadsto y = -3x + 13$ che è proprio r $\because$

Pag 368 n1

$y = -x^2 + 3ax - 2a^3$ Per quali a il fuoco F appartiene a uno degli assi?

$F = \left(-\frac{b}{2a} ; \frac{1-\Delta}{4a}\right)$

Caso 1: $-\frac{b}{2a} = 0 \rightsquigarrow -\frac{3a}{-2} = 0 \rightsquigarrow \boxed{a = 0}$

Caso 2: $\frac{1 - b^2 + 4ac}{4a} = 0 \rightsquigarrow \frac{1 - 9a^2 + 4(-1)(-2a^3)}{-4} = 0$

$$8a^3 - 9a^2 + 1 = 0 \qquad -(a^2-1)$$
$$8a^3 - 8a^2 - a^2 + 1 = 0$$
$$8a^2(a-1) - \underbrace{(a-1)(a+1)}_{} = 0$$
$$(8a^2 - a - 1)(a-1) = 0$$

$a = 1$

$\Delta = 1 + 32 = 33$

$a_1/a_2 = \frac{1 \pm \sqrt{33}}{16}$

n2: Fascio di parabole con asse parallelo ad asse y
- aperture costante a ⟶ Coefficiente di x^2
- passante per un pto P fissato

Dimostra che i fuochi delle parabole del fascio appartengono a una parabola di apertura $-a$ e fuoco in P.

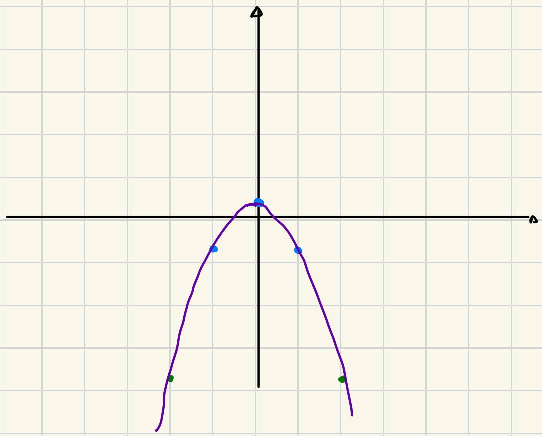
Scelgo $a = 1$
$P = (0;0)$

Il mio fascio di parabole è $y = x^2 + bx + c$ con b, c parametri
So che $P \in$ Parabola $\Rightarrow c = 0$

Fascio di parabole è $y = x^2 + kx$

Prendo i fuochi delle parabole che appartengono al fascio

$$F_k = \left(-\frac{b}{2a} ; \frac{1-\Delta}{4a}\right) = \left(-\frac{k}{2} ; \frac{1-k^2}{4}\right)$$



Scelgo alcuni valori di k per vedere i fuochi

k	F_k
0	$(0, 1/4)$
2	$(-1 ; -\frac{3}{4})$
-2	$(1 ; -\frac{3}{4})$
4	$(-2 ; -15/4)$
-4	$(2 ; -15/4)$

Calcolo la parabola che ha apertura -1 e Fuoco in $(0;0)$

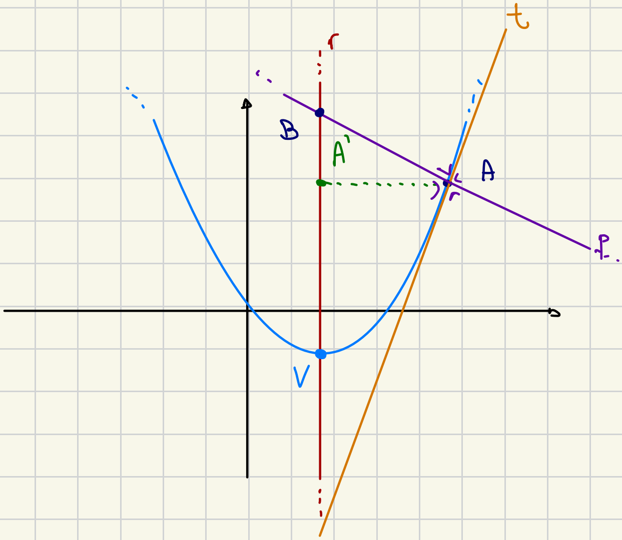
$$y = ax^2+bx+c \quad \rightsquigarrow \quad \begin{cases} a = -1 \\ -\dfrac{b}{2a} = 0 \\ \dfrac{1-\Delta}{4a} = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} a = -1 \\ b = 0 \\ \dfrac{1-\cancel{b^2}+4ac}{\cancel{-4}} = 0 \end{cases} \qquad \begin{array}{l} a=-1 \\ b=0 \\ 1-4c=0 \\ c=+\dfrac{1}{4} \end{array}$$

La parabola che ci dà il libro è: $y = -x^2 + \frac{1}{4}$

I punti F_k sono punti che appartengono alla parabola? Lo verifichiamo mettendo $x = -\frac{k}{2}$ e guardando il risultato:

$$y = -\left(-\frac{k}{2}\right)^2 + \frac{1}{4} = -\frac{k^2}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1-k^2}{4}$$ che è la cosa giusta.

n3:



$\overline{BA'}$ è costante è uguale alla distanza tra il fuoco e la direttrice

$y = ax^2 + bx + c$

Asse: $x = -\frac{b}{2a}$

$A = (x_A, y_A)$

$\boxed{m_t = 2ax_A + b}$ Formula

$m_p \cdot m_t = -1 \rightsquigarrow \boxed{m_p = -\frac{1}{2ax_A + b}}$ retta $\perp$

retta p: $\boxed{y - y_A = -\frac{1}{2ax_A + b}(x - x_A)}$

Per trovare B: Asse $\cap$ p: $\begin{cases} x = -\frac{b}{2a} \\ y = -\frac{1}{2ax_A+b}\left(-\frac{b}{2a} - x_A\right) + y_A \end{cases}$

$A' = \left(-\frac{b}{2a}; y_A\right) \qquad B = \left(-\frac{b}{2a}; -\frac{1}{2ax_A+b}\left(-\frac{b}{2a} - x_A\right) + y_A\right)$

$A'B = \left| -\frac{1}{\cancel{2ax_A+b}}\left(-\frac{\cancel{b+2ax_A}}{2a}\right) + \cancel{y_A} - \cancel{y_A} \right| = \left| \frac{1}{2a} \right|$