Settimana: 13

Materia: Matematica
Classe: 5A
Data: 9/12/25

Pag 1779 n 60

$$f(x) = \frac{-x^2+x-1}{2x^2-3x+3}$$

(1) Dom f: $2x^2-3x+3 \neq 0$ $\quad \Delta = 9-24 = -15$ Impossibile

$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

(2) Assi: $x=0$ $\quad f(0) = -\frac{1}{3}$ $\quad A = \left(0; -\frac{1}{3}\right)$

$y=0$ $\quad -x^2+x-1=0$ $\quad x^2-x+1=0$

$\Delta = 1-4 = -3$ Impo

(3) Segno: $\frac{-x^2+x-1}{2x^2-3x+3} \geq 0$ $\quad \frac{x^2-x+1}{2x^2-3x+3} \leq 0$

$N \geq 0$ Sempre vero
$D > 0$ Sempre vero

Già fatte

N	+
D	+
	+

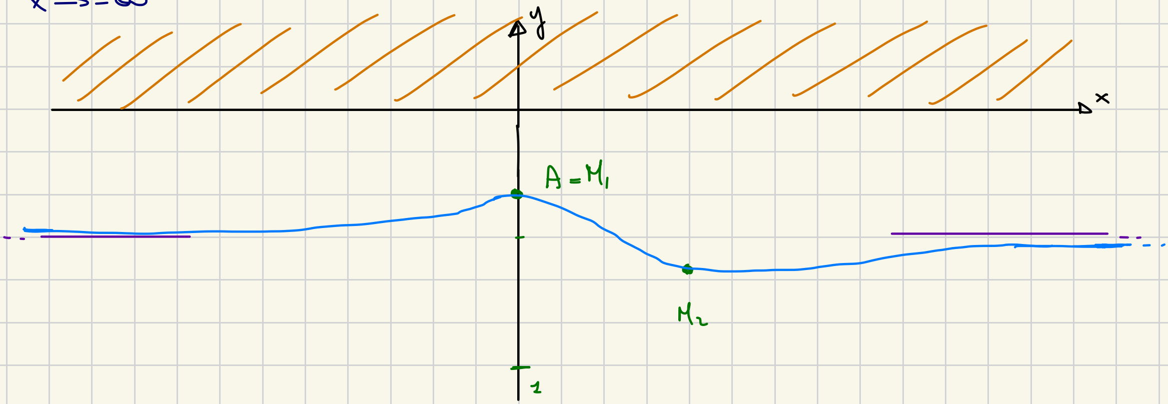
$\Rightarrow$ la funzione è SEMPRE NEGATIVA

(4) Limiti

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{-x^2+x-1}{2x^2-3x+3} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2\left(-1+\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}\right)}{x^2\left(2-\frac{3}{x}+\frac{3}{x^2}\right)} = -\frac{1}{2}$$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\frac{1}{2}$$

Grafico



(5) Derivata Prima

$$f(x) = \frac{-x^2+x-1}{2x^2-3x+3} \rightsquigarrow f(2) = \frac{-4+2-1}{8-6+3} = -\frac{3}{5}$$

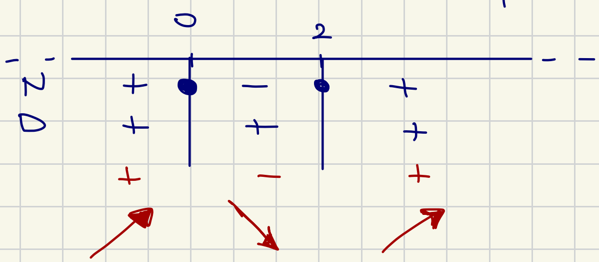
$$f'(x) = \frac{(-2x+1)(2x^2-3x+3) - (-x^2+x-1)(4x-3)}{(2x^2-3x+3)^2}$$

$$= \frac{-\cancel{4x^3}+6x^2-6x+2x^2-3x+3 - [-\cancel{4x^3}+\overbrace{3x^2+4x^2}^{7x^2}\overbrace{-3x-4x}^{-7x}+3]}{(2x^2-3x+3)^2}$$

$$f'(x) = \frac{x^2-2x}{(2x^2-3x+3)^2}$$

Poniamo $f'(x) \geq 0$ $\quad N \geq 0 \quad x^2-2x \geq 0$ $\quad (x = 0, 2)$ $\quad x \leq 0 \vee x \geq 2$

$D > 0$ Sempre vero



Ho scoperto che
$x=0$ max locale
$x=2$ min locale

Calcolo $M_1 = (0; f(0)) = \left(0; -\frac{1}{3}\right) \leftarrow$ Massimo

$M_2 = (2; f(2)) = \left(2; -\frac{3}{5}\right) \leftarrow$ Minimo

Pag 1791 n 248

$$f(x) = \ln\left(\frac{x^2+7}{x-3}\right)$$

(1) Dom f:
$$\begin{cases} \dfrac{x^2+7}{x-3} > 0 \\ x-3 \neq 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x > 3 \\ x \neq 3 \end{cases} \qquad f: (3; +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$$

(2) Assi: $x = 0$ IMPOSS.

$y = 0 \quad \ln\left(\frac{x^2+7}{x-3}\right) = 0 \qquad \frac{x^2+7}{x-3} = 1$

$x^2 + 7 = x - 3 \qquad x^2 - x + 10 = 0 \qquad \Delta = 1 - 40 < 0$

IMP

(3) Segno: $\ln\left(\frac{x^2+7}{x-3}\right) \geq 0 \qquad \frac{x^2-x+10}{x-3} \geq 0 \rightsquigarrow$ Sol $\boxed{x > 3}$

(4) Limiti: $\lim_{x \to +\infty} \ln\left(\frac{x^2+7}{x-3}\right) = +\infty$

$\lim_{x \to 3^+} \ln\left(\frac{x^2+7}{x-3}\right) = +\infty$

(5) Derivate:
$$f'(x) = \frac{1}{\frac{x^2+7}{\cancel{x-3}}} \cdot \frac{\overset{2x^2-6x-x^2-7}{2x(x-3) - (x^2+7)\cdot 1}}{(x-3)^{\cancel{2}}} =$$

$$= \frac{x^2 - 6x - 7}{(x^2+7)(x-3)} = \frac{(x-7)(x+1)}{(x^2+7)(x-3)}$$

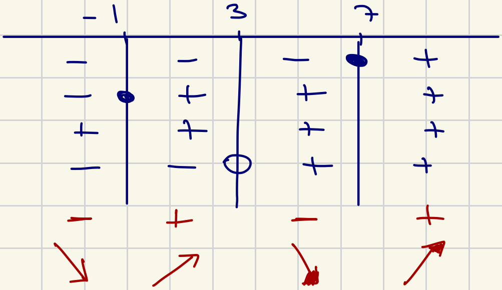
$f'(x) \geq 0$

$N_1 \geq 0 \quad x \geq 7$

$N_2 \geq 0 \quad x \geq -1$

$D_1 > 0 \quad x^2 + 7 > 0$ sempre

$D_2 > 0 \quad x > 3$

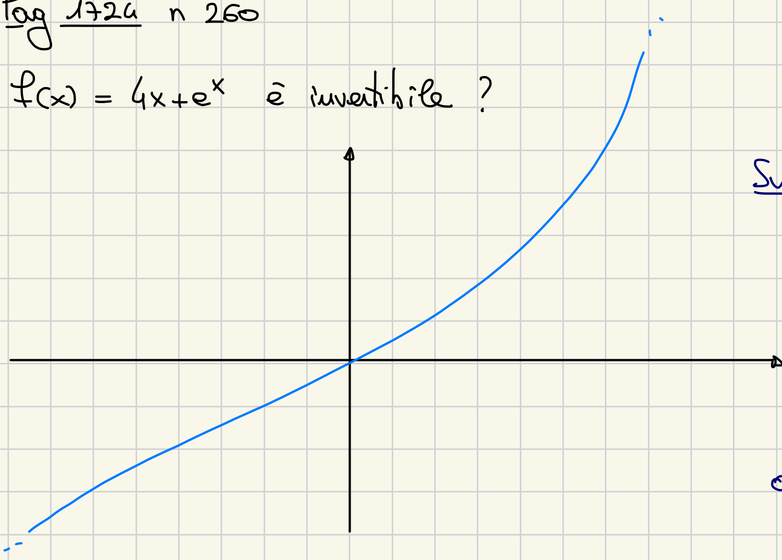


$M = (7; f(7)) =$

$= (7; \ln(14))$

Pag $\underline{1724}$ n 260

$f(x) = 4x + e^x$ è invertibile ?



Su: $\lim_{x \to +\infty} 4x + e^x = +\infty$

$\lim_{x \to -\infty} 4x + e^x = -\infty$

Fatto: Una funzione è suriettiva se il graf. interseca tutte le rette orizzontali del codominio

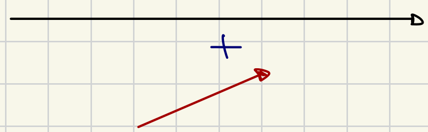
Dato che i limiti fanno $\pm\infty$ e la funzione è continua $\Rightarrow f(x)$ è suriettiva

Fatto: Una funzione è iniettiva se ogni retta orizzontale interseca il grafico al più una volta

Facciamo $f'(x) = 4 + e^x$

$f'(x) \geq 0$

$4 + e^x \geq 0$ Sempre



Se una funzione ha $f'(x) > 0$ sempre, allora è iniettiva
Pensare alle gobbe del disegno.

$\Rightarrow f(x)$ è suriettiva e iniettiva $\Rightarrow$ Invertibile.

Detta $g(y)$ la funzione inversa, calcolare $g(1)$ e $g'(1)$

Il problema chiede qualcosa di più facile rispetto a calcolare tutta la fz inversa.

$g(1) = x$ Applico f da entrambe le parti

$$\underbrace{f(g(1))}_{=1} = f(x)$$

$\Rightarrow$ Risolvere il problema vuol dire trovare x tale che

$$f(x) = 1$$

$$4x + e^x = 1 \rightsquigarrow x = 0$$

Ed è unica per corrisp. biunivoca

$$\boxed{g(1) = 0}$$

$g'(1) = ?$ Abbiamo 1 teorema per derivata fz inversa

$$g'(y) = \frac{1}{f'(x)} \qquad \text{con } x = g(y)$$

con $(f \circ g)(y) = y$

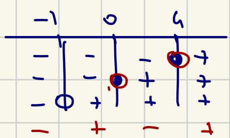
$$\boxed{g'(1) = \frac{1}{f'(g(1))} = \frac{1}{f'(0)} = \frac{1}{5}}$$

Pag 1736 n 38

$f(x) = \ln \frac{x^2-4x}{x+1}$ studio di fz

1) Dom f:

$$\begin{cases} x+1 \neq 0 \\ \frac{x^2-4x}{x+1} > 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x \neq -1 \\ \end{cases}$$



$$\begin{cases} x \neq -1 \\ -1 < x < 0 \quad \vee \\ \quad x > 4 \end{cases}$$

$f: (-1;0) \cup (4;+\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$

2) Asse x $\quad y=0 \quad \ln\left(\frac{x^2-4x}{x+1}\right) = 0$

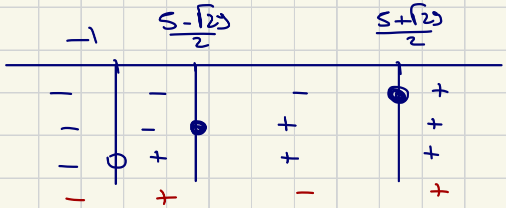
$$\frac{x^2-4x}{x+1} = 1 \qquad x^2-4x = x+1$$
$$x^2-5x-1 = 0$$

$\Delta = 25 + 4 = 29 \quad \rightsquigarrow \quad x_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{29}}{2}$

$A = \left(\frac{5-\sqrt{29}}{2}; 0\right) \qquad B = \left(\frac{5+\sqrt{29}}{2}; 0\right)$

Asse y: $\quad x=0 \quad$ Non lo posso fare

3) Segno: $\ln\left(\frac{x^2-4x}{x+1}\right) \geq 0 \rightsquigarrow \frac{x^2-5x-1}{x+1} \geq 0$

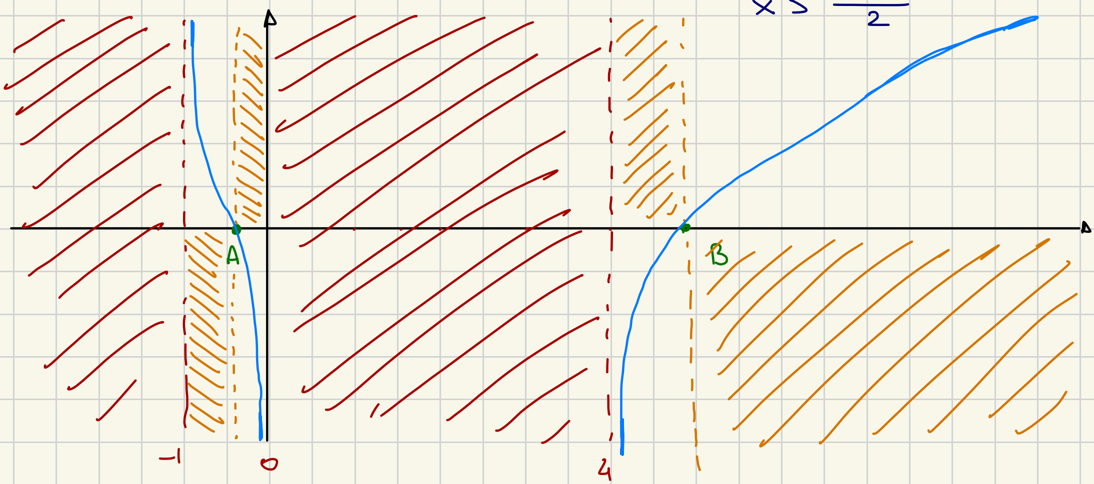


f(x) positiva in

$-1 < x < \frac{5-\sqrt{29}}{2}$

$\lor$

$x > \frac{5+\sqrt{29}}{2}$



Limiti: $\lim_{x\to -1^+} \ln\left(\frac{x^2-4x}{x+1}\right) = +\infty$ $\qquad \lim_{x\to 4^+} \ln\left(\frac{x^2-4x}{x+1}\right) = -\infty$

$\lim_{x\to 0^-} \ln\left(\frac{x^2-4x}{x+1}\right) = -\infty$ $\qquad \lim_{x\to +\infty} \ln\left(\frac{x^2-4x}{x+1}\right) = \infty$

5) Derivata $\quad f(x) = \ln\left(\frac{x^2-4x}{x+1}\right)$

$$f'(x) = \frac{1}{\frac{x^2-4x}{\cancel{x+1}}} \cdot \frac{(2x-4)(x+1) - (x^2-4x)\cdot 1}{(x+1)^{\cancel{2}}}$$

$$= \frac{2x^2-4\cancel{x}+2x-4-x^2+\cancel{4x}}{(x^2-4x)(x+1)} = \frac{x^2+2x-4}{(x^2-4x)(x+1)}$$

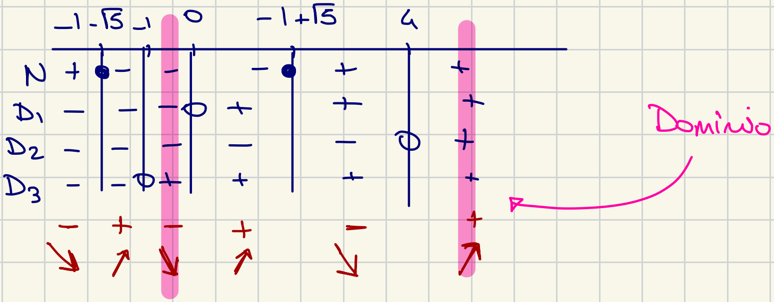
$f'(x) \geq 0$

$N: \ x^2+2x-4 \geq 0 \qquad \frac{\Delta}{4} = 1+4 = 5 \qquad x_1/x_2 = -1 \pm \sqrt{5}$

$D_1: \ x > 0$

$D_2: \ x > 4$

$D_3: \ x > -1$



Pag 1742 n68

$$f(x) = \begin{cases} be^{ax} + a & x \leq 0 \\ 2b + \operatorname{arctg}(ax) & x > 0 \end{cases} \qquad a, b \in \mathbb{R} \qquad a > 0$$

(1) Trova a, b in modo che f continua e derivabile

Continuità: $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^-} (be^{ax} + a) = a+b$

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} (2b + \operatorname{arctg}(ax)) = 2b$$

$$\rightsquigarrow a+b = 2b \rightsquigarrow \boxed{a=b}$$

Faccio la funzione derivata da sinistra e da destra e poi le pongo uguali: Warning!: Questo procedimento NON funziona il 100% dei casi, ma è quello più veloce. $\rightsquigarrow$ Funzione con Hp sensate, ma non sempre vero.

Derivo la f_2 a sx: $f'(x) = ab\,e^{ax} \qquad x \leq 0$

" " a dx: $f'(x) = \dfrac{a}{1+(ax)^2} \qquad x > 0$

Impongo che $\lim_{x\to 0^-} abe^{ax} = \lim_{x\to 0^+} \frac{a}{1+(ax)^2}$

$$\cancel{a}b = \cancel{a} \rightsquigarrow \boxed{b=1}$$

$$\rightsquigarrow \boxed{a=1}$$

$\rightsquigarrow$ Il metodo corretto sempre è usare la definizione e cioè:

$$\lim_{h\to 0^-} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

$$f'_-(x_0) = f'_+(x_0)$$

b) $$f(x) = \begin{cases} e^x+1 & x \leq 0 \\ 2+\operatorname{arctg}(x) & x>0 \end{cases}$$

Trova la retta tg a f nel punto di int. con asse y

$x=0 \rightsquigarrow f(0)=2$ $\quad A=(0;2)$

$f'(x) = e^x \quad x\leq 0 \quad \rightsquigarrow f'(0)=e^0=1$

$$y-2 = 1(x-0) \qquad y-y_0 = f'(x_0)(x-x_0)$$

$$\boxed{y=x+2}$$

$$f(x) = \begin{cases} e^x+1 & x \leq 0 \\ 2+\operatorname{arctg}(x) & x>0 \end{cases}$$

Problema	Quesiti	
1) Parametri	1) Calc. der.	5) Limiti
2) Studio	2)	6) Passato
3)	3)	
4)	4)	
5)		

$$f'(x) = \begin{cases} e^x & x \leq 0 \\ \operatorname{arctg}(x) & x > 0 \end{cases}$$

$$f''_-(0) = \lim_{h \to 0^-} \frac{f'(0+h) - f'(0)}{h} = \lim_{h \to 0^-} \frac{e^h - 1}{h} = 1$$

$$f''_+(0) = \lim_{h \to 0^+} \frac{f'(0+h) - f'(0)}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{\operatorname{arctg}(h) - 1}{h} = -\infty$$

$\Rightarrow$ Non esiste la derivata II in 0.