

Settimana: 2

Materia: Matematica
Classe: 5C
Data: 22/03/25

Argomenti: Esercizi in classe. Richiami e spiegazioni di "Immagine". Funzione o tratti, controimmagine di un punto. Esempi. Esercizi fz, trig. fz inj, su, big. Grafici associati. Funzione inversa e compos. fz. peri, disegni, Grafici ammessi. Esercizi

Pag 134to n. 255

$$f(x) = e^{\frac{1}{x}} - 1$$

$$\Rightarrow \text{Dom}(f) = \{x \neq 0\}$$

» Esempio: $3 \in \text{Im } f$? Devo risolvere $3 = e^{\frac{1}{x}} - 1$

Se trovo x tale che $3 = e^{\frac{1}{x}} - 1$ Allora $3 \in \text{Im } f$; Altrimenti 3 NON sta in $\text{Im } f$

$$3 = e^{\frac{1}{x}} - 1 \Rightarrow 4 = e^{\frac{1}{x}} \rightarrow$$
 passo al log naturale

$$\ln 4 = \ln(e^{\frac{1}{x}}) = \frac{1}{x} \Rightarrow x = \frac{1}{\ln(4)}$$
 Dato che ho trovato la soluzione, $3 \in \text{Im } f$

» In generale, quando $y \in \text{Im } f$?

Devo trovare x in modo che $y = e^{\frac{1}{x}} - 1$.

Operativamente devo ricavare le x in funzione delle y e vedere quando le case hanno senso.

$$\text{Facciamoli: } y = e^{\frac{1}{x}} - 1 \Rightarrow y + 1 = e^{\frac{1}{x}} \rightarrow$$
 passo al log

$$\ln(y+1) = \frac{1}{x} \Rightarrow x = \frac{1}{\ln(y+1)}$$

L'immagine corrisponde alle possibilità di fare l'operazione sopra, cioè corrisponde alle C.E. su y .

$$\text{Im}(f): \begin{cases} y+1 > 0 \\ \ln(y+1) \neq 0 \end{cases} \quad \begin{cases} y > -1 \\ y \neq 0 \end{cases}$$

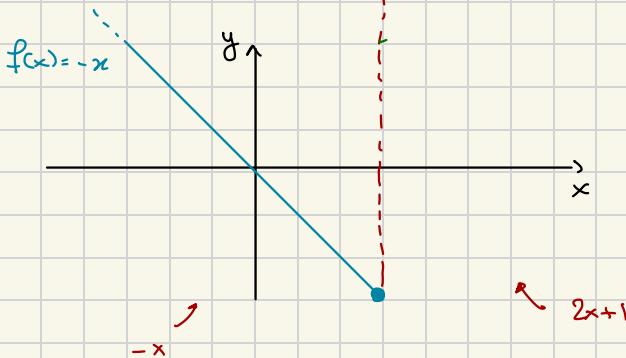
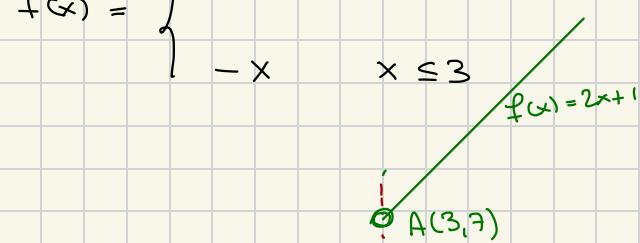
$$\boxed{\text{Im}(f) = \{ y > -1, y \neq 0 \}}$$

Def.: Una funzione è detta a tratti se fa cose diverse in zone diverse del dominio. Si scrive

$$f(x) = \begin{cases} f_1(x) & \text{se } x \in A_1 \\ f_2(x) & \text{se } x \in A_2 \\ \vdots & \end{cases} \quad A_i \subseteq \text{Dom}(f)$$

↑
contenuto
tra insiemi

Esempio: $f(x) = \begin{cases} 2x+1 & x > 3 \\ -x & x \leq 3 \end{cases} \quad f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$



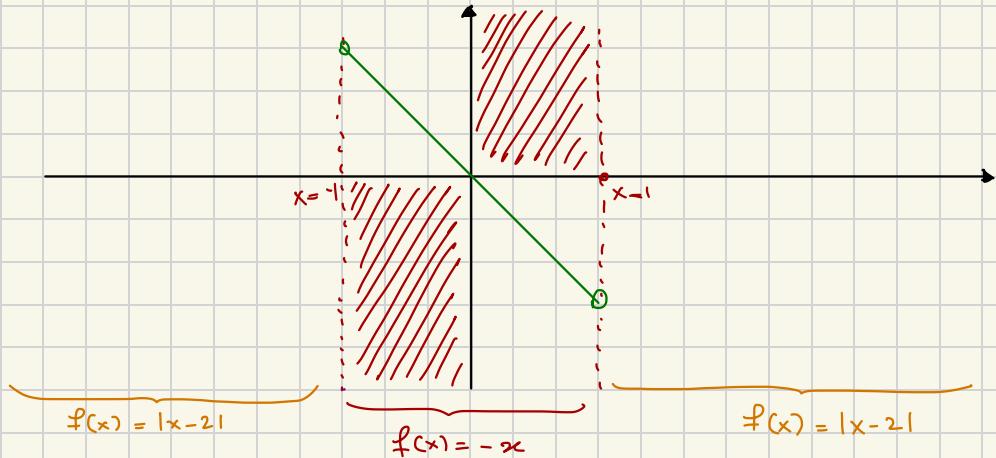
Consiglio:
Rivedere come
si disegna le
rette con
Simone

3G7:

$$f(x) = \begin{cases} -x & \text{se } |x| < 1 \\ |x-2| & \text{se } |x| \geq 1 \end{cases}$$

$|x| < 1 \rightsquigarrow -1 < x < 1$

$|x| \geq 1 \rightsquigarrow x \leq -1 \vee x \geq 1$



$f_1 : \{-1 < x < 1\} \rightarrow \mathbb{R}$

$$f_1(x) = -x$$

(1) Dom(f₁) = $\{-1 < x < 1\}$

(2) Im(f): $y = -x$ e si ricava le x in funzione delle y :

$$\boxed{x = -y}$$

Non ci sono C.E. \Rightarrow Im(f)
non ha restrizioni nel dominio

Dobbiamo scrivere di y è "uguale" a quello di x

$$\text{Im}(f) = \{-1 < y < 1\}$$

\hookrightarrow Eredita le C.E. di Dom(f)

$f_2 : \{x \leq -1 \vee x \geq 1\} \rightarrow \mathbb{R}$

$$f_2(x) = |x-2|$$

mostrarlo per caso

(3) Segno: $f(x) > 0 \quad -x > 0 \quad \boxed{x \leq 0}$

Vi dice dove cancellare sotto

(b) Calcolo

$$f(-1) = |-1 - 2| = |-3| = 3$$

$$f(3) = |3 - 2| = 1$$

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2}$$

Basta stare attenti al tratto in cui sono.

Def: Data $f: A \rightarrow B$ e $b \in B$, la controimmagine di b tramite f è

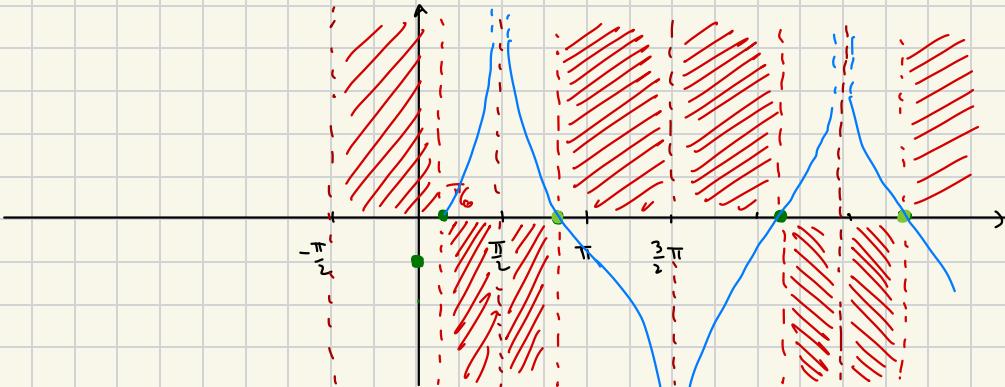
$$f^{-1}(b) = \{a \in A \mid f(a) = b\}$$

Sono tutte le cose di A che vanno a finire in b .

n. 288

$$\operatorname{sc}(x) = \frac{2\sin x - 1}{\cos^2 x}$$

1) Dom(s): $\cos^2 x \neq 0 \Rightarrow x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$



2) Asse y : $x=0$ $A = (0, -1)$

Asse x : $y=0$

$$\frac{2\sin x - 1}{\cos^2 x} = 0$$

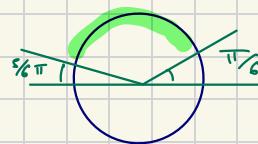
$$\sin x = \frac{1}{2}$$

$$x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$$

$$x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$$

$$3) \frac{2\sin x - 1}{\cos^2 x} \geq 0$$

$$\text{N. } 2\sin x \geq 1 \quad \sin x \geq \frac{1}{2}$$



$$\frac{\pi}{6} + 2k\pi \leq x \leq \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$$

D. $\cos^2 x > 0$ Sempre vero, è un \square (nel C.E.)

Sol segnala:

$$\frac{\pi}{6} + 2k\pi \leq x \leq \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$$

Concetto di sotto in queste zone

Def: Una f_g $f: A \rightarrow B$ si dice

(1) Iniettiva se ogni elemento di B è raggiunto da al più un elemento di A . In formule

$$f(a_1) = f(a_2) \Rightarrow a_1 = a_2$$

(2) Suriettiva se ogni elemento di B è raggiunto da almeno un elemento di A . In formule.

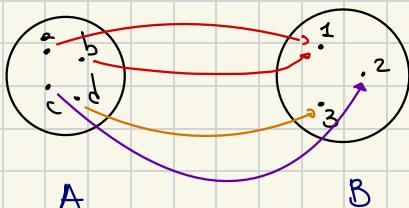
$$\begin{aligned} &\Rightarrow \text{Im}(f) = B \\ &\Rightarrow \forall b \in B, \exists a \in A \text{ t.c. } f(a) = b \end{aligned}$$

Modi equivalenti

(3) Biunivoca o biettiva se è sia iniettiva sia suriettiva.

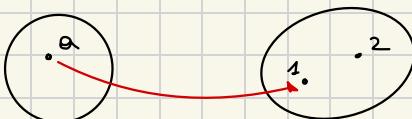
Esempi:

(1)



- ⇒ Non iniettivo perché 1 è raggiunto da 2 cose
- ⇒ È suriettiva
- ⇒ Non è biettiva

(2)



- ⇒ È iniettiva, NON è suriettiva
- ⇒ NON è biunivoca

Esempio: $f(x) = \ln(x+1)$. È iniettiva?

Uso la definizione di iniettività: f è iniettiva se

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2 \quad \forall x_1, x_2 \in \text{Dom}(f)$$

Porto da queste, faccio conti e, se arrivo a , allora la funzione è INIETTIVA

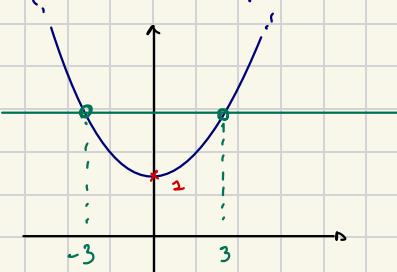
$$\ln(x_1 + 1) = \ln(x_2 + 1) \rightsquigarrow x_1 + 1 = x_2 + 1$$
$$\rightsquigarrow x_1 = x_2$$

Dato che sono arrivato a $x_1 = x_2$, la f_g è iniettiva

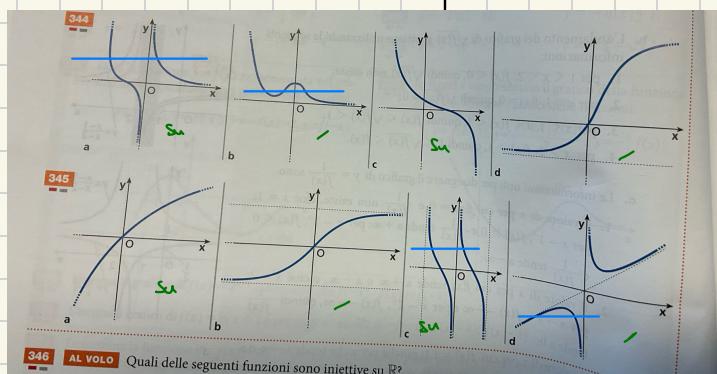
Esempio: $a(x) = x^2 + 1$. È iniettiva?

$$x_1^2 + 1 = x_2^2 + 1 \rightsquigarrow x_1^2 = x_2^2 \text{, ma NON è iniettiva perché potrebbe essere } x_1 = 3, x_2 = -3$$

Graficamente:



Si può vedere l'iniettività graficamente. Se esiste una retta orizzontale che interseca il grafico in più di 1 pto; Allora la f_g NON è iniettiva



con discussione
iniettività del
grafico.



Pag 1369 n. 243

$$f(x) = e^{\frac{1}{x^2-a}}$$

Dobbiamo imporre che $\text{Dom}(f) = \mathbb{R}$ trovando condizioni su a

$x^2 - a \neq 0$ Non voglio che sia risolubile, impiego $\Delta < 0$

$$\Delta = b^2 - 4ac = 0 + 4a < 0 \Rightarrow a < 0$$

n 247

$$f(x) = \frac{a-5}{2^x - 2^{b-1}}$$

(1) interseca osse y in $(0, 1)$

a, b ?

(2) $\text{Dom}(f) : x \neq 3$

$$(1) 1 = \frac{a-5}{2^0 - 2^{b-1}}$$

$$(2) 2^x - 2^{b-1} \neq 0 \\ 2^x \neq 2^{b-1} \Rightarrow x \neq b-1 \Rightarrow 3 = b-1$$

$$\begin{cases} 1 = \frac{a-5}{1-8} \\ b = 4 \end{cases} \quad \begin{cases} -7 = a-5 \\ b = 4 \end{cases}$$

$$a = -2, b = 4$$

248: $f(x) = \frac{a-x}{2 \log_2 x - b}$

1) Attraverso osse x in ascisse 1 ms $(1, 0)$

2) $\text{Dom}(f) : x > 0 \wedge x \neq 2$

$$(1) 0 = \frac{a-1}{2 \log_2 1 - b}$$

2) $\text{Dom}(f) :$

$$2 \log_2 x - b \neq 0 \Rightarrow \log_2 x \neq \frac{b}{2} = \log_2 2^{b/2}$$

$$2^{b/2} = 2$$

$$x > 0$$

$$x \neq 2$$

$$\begin{cases} a-1=0 \\ b/2=1 \end{cases}$$

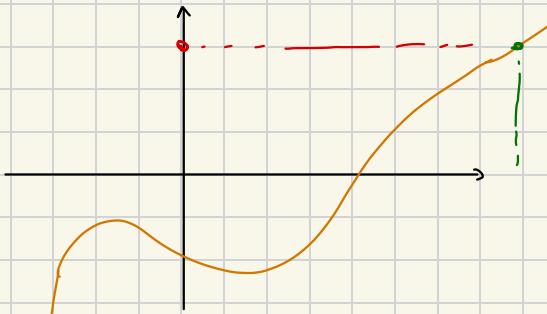
$$\begin{cases} a=1 \\ b=2 \end{cases}$$

$$a=1, b=2$$

f_3 suriettive graficamente

$f: D \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

Contenuto

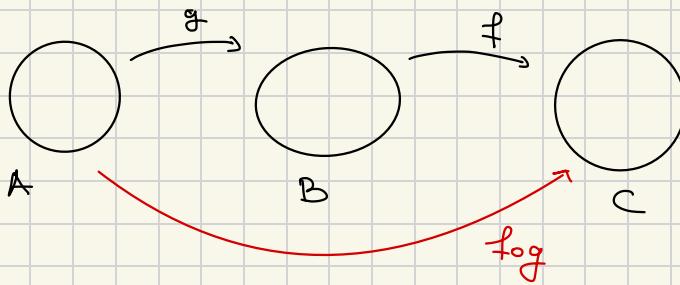


Se verticalmente c'è un pezzo di grafico che copre ogni zone del codominio allora le f_3 è suriettive

Def. Date due funzioni $g: A \rightarrow B$ e $f: \text{Im}(g) \subseteq B \rightarrow C$ definiamo la funzione composta

$$f \circ g: A \rightarrow C \quad (\text{f composto } g)$$

che consiste nell'applicare prima g e poi f .



Esempio: $f(x) = 3x + 7$, $g(x) = x^2 + 2$

$$\begin{aligned} (\text{fog})(x) &= f(g(x)) = f(x^2 + 2) = 3(x^2 + 2) + 7 \\ &= 3x^2 + 13 \end{aligned}$$

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(3x+7) = (3x+7)^2 + 2$$

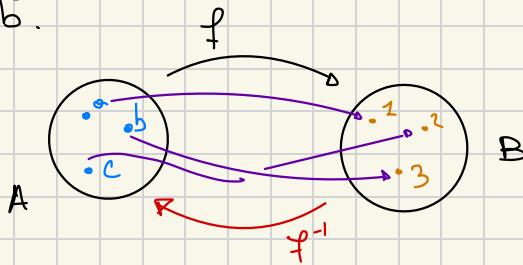
$$= 9x^2 + 42x + 51$$

Oss.: La composizione NON è commutativa

Def.: Sia $f: A \rightarrow B$ una funzione biunivoca. Definiamo la funzione inversa

$$f^{-1}: B \longrightarrow A$$

quello f^{-1} che associa a $b \in B$, l'elemento $a \in A$ t.c.
 $f(a) = b$.



Inj e Surj determinano
 le corrisp. 1-1.
 la funzione inversa
 torna indietro lungo
 le frecce

Oss / esercizio.: f biunivoco, f^{-1} inversa

$$(f \circ f^{-1})(x) = f^{-1}(f(x)) = x$$

$$(f^{-1} \circ f)(x) = f^{-1}(f(x)) = x$$

Def.: Sia $f: D \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, f è detta

▷ funzione pari: se $\forall x \in D$, $f(x) = f(-x)$ (se possibile)

▷ funzione dispari: se $\forall x \in D$, $f(x) = -f(-x)$

Esempio: $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$ è pari?

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} \quad f(-x) = \frac{(-x)^2 - 1}{(-x)^2 + 1} = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$$

\rightsquigarrow Dunque la f_3 è pari

$\triangleright f(x) = \sin(x)$ è dispari?

$$f(x) = \sin x \quad -f(-x) = -[\sin(-x)] = -[-\sin x] = \sin x$$

\rightsquigarrow quindi $f(x) = \sin x$ è dispari

Oss: Se f è dispari, $0 \in \text{Dom}(f) \Rightarrow f(0) = 0$, cioè le funzioni dispari passano per l'origine

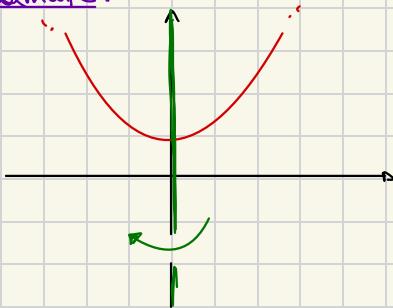
Dim: Se f è dispari allora $f(x) = -f(-x)$. Metto 0 al posto di x

$$f(0) = -f(0)$$

$$2 \cdot f(0) = 0$$

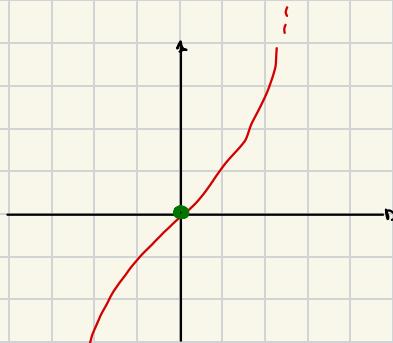
$$f(0) = 0$$

Graficamente:



PARI

Grafico simmetrico rispetto a
asse y



DISPARI

Grafico simmetrico rispetto
all'origine 0

Pag 16og n 108

$$f_1(x) = \frac{3}{x}, \quad f_2(x) = \frac{1}{x}, \quad f_3(x) = x+1$$

$$\begin{aligned} h(x) &= (f_3 \circ f_2 \circ f_1)(x) = f_3(f_2(f_1(x))) = \\ &= f_3\left(f_2\left(\frac{3}{x}\right)\right) = f_3\left(\frac{1}{\frac{3}{x}}\right) = f_3\left(\frac{x}{3}\right) = \frac{x}{3} + 1 \end{aligned}$$

112 $p(x) = x^2 + bx + c$ $\begin{cases} p(p(1)) = p(p(2)) = 0 \\ p(1) \neq p(2) \end{cases}$

Calcolare $p(0)$

$$p(p(1)) = p(1+b+c) = (1+b+c)^2 + b(1+b+c) + c = 0$$

$$p(p(2)) = p(4+2b+c) = (4+2b+c)^2 + b(4+2b+c) + c = 0$$

$$\begin{cases} 1+b^2+c^2+2bc+2b+2c+b+b^2+bc+c = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 16+4b^2+c^2+16b+8c+4bc+4b+2b^2+bc+c = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2b^2+c^2+3bc+3b+3c+1 = 0 \\ 6b^2+c^2+5bc+20b+9c+16 = 0 \end{cases} \quad \rightarrow \text{BRUTTO}$$

Dato che $p(1)$ e $p(2)$ sono soluzioni, vale che

$$(x-p(1))(x-p(2)) = p(x) \Rightarrow p(1)+p(2) = -b \quad \text{cond. più facile} \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Seguono da} \\ (\text{suppongo } p_2 > p_1; \text{l'altro caso} \\ \text{non va, ma andrebbe contraccato.}) \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 1+b+c+4+2b+c = -b \\ 4+2b+c-(1+b+c) = \sqrt{b^2-4c} \end{cases} \quad \begin{cases} 4b+2c = -5 \\ (b+3)^2 = b^2-4c \end{cases} \quad \begin{cases} 4b+2c = -5 \\ b^2+6b+9 = b^2-4c \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2c = -5-4b \\ b^2+6b+9 = b^2+10+8b \end{cases}$$

$$b^2 + 6b + 9 = b^2 + 8b + 10$$

$$2b = -1 \quad \Rightarrow \quad b = -\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow c = -\frac{5+4b}{2} = -\frac{3}{2}$$

$$\boxed{\varphi(0) = c = -\frac{3}{2}}$$