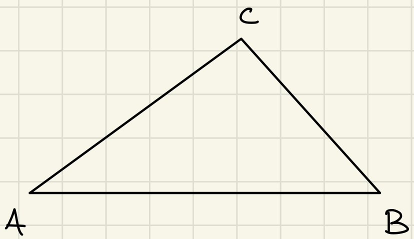
Teorema 16 (Disuguaglianza triangolare): In un triangolo;



(1) Ogni lato è minore della somma degli altri due

$AC < AB + BC$

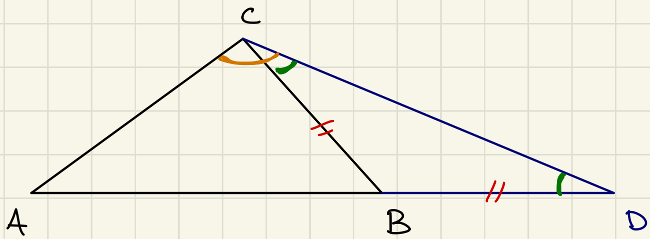
$AB < AC + CB$

$BC < AC + AB$

(2) Ogni lato è maggiore della differenza degli altri due

$AC > AB - BC$

Dim: Mostriamo che $AC < AB + BC$. Prolungo AB dalla parte di B di un segmento $BD \simeq BC$



Per ottenere la tesi mi basta dire che l'angolo $A\hat{D}C$ è più piccolo dell'angolo $A\hat{C}D$

L'angolo $D\hat{C}A > A\hat{D}C$ poiché $D\hat{C}A = D\hat{C}B + B\hat{C}A$ e $D\hat{C}B \simeq A\hat{D}C$ poiché il triangolo $D\hat{B}C$ è isoscele.

Dunque

$$D\hat{C}A = D\hat{C}B + B\hat{C}A = A\hat{D}C + B\hat{C}A > A\hat{D}C$$

Per il teorema angolo maggiore $\longleftrightarrow$ lato maggiore si ha

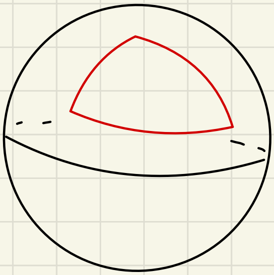
$$AC < AB + BD = AB + BC$$

(2) Conseguenza di (1) riarrangiando le equazioni.

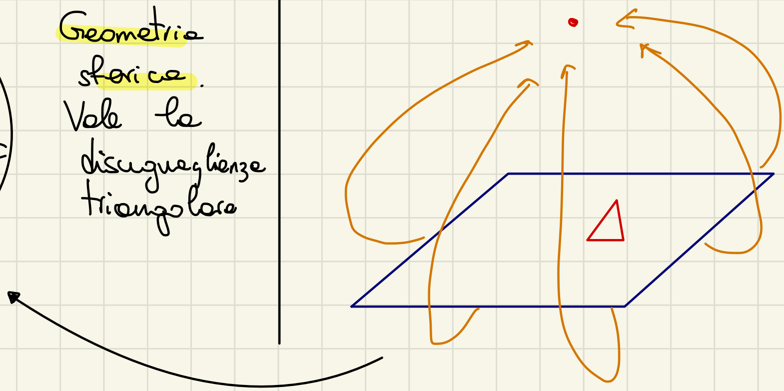
$\square$

Il prof ci tiene: Il teorema sopra è importante: tutti i tipi di geometrie "interessanti" verificano la disuguaglianza triangolare

Esempio 1 :

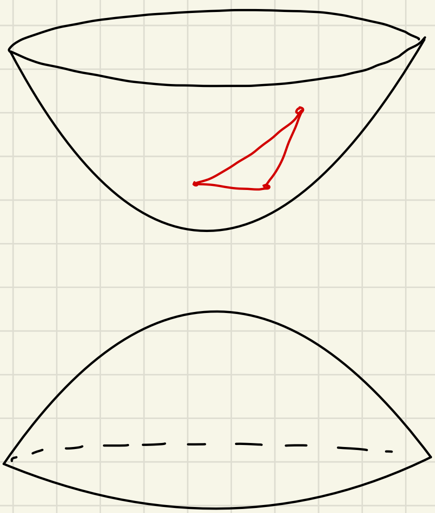


Geometria sferica. Vale la disuguaglianza triangolare



Compattificazione di Alexandroff, per noi Alex

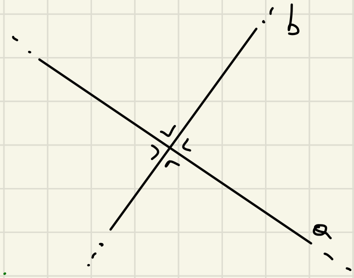
Esempio 2 : Geometria iperbolica



Capitolo G3 - Rette perpendicolari e parallele

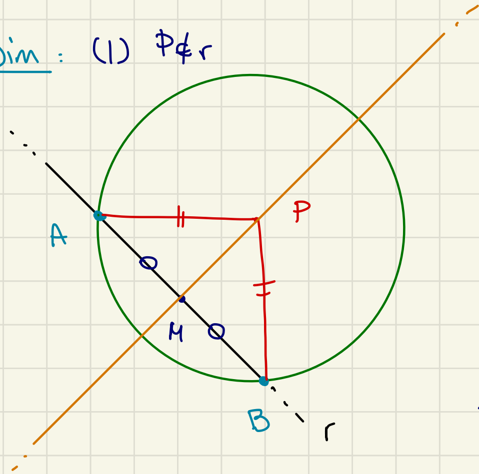
Def: Due rette a, b sono perpendicolari se sono incidenti e formano quattro angoli retti. Si può dire anche ortogonali e la perpendicolarità si indica $\underbrace{a \perp b}$

a perpendicolare a b.



Proposizione 17: Data una retta r e un punto P ~~su essa~~ esiste ed è unica la retta $\perp$ a r passante per P.

Dim: (1) $P \notin r$



i) Traccio una circonferenza di centro P e raggio R tale che la circonf. interseca la retta nei punti A e B.

ii) Prendo il pto medio di AB e lo chiamo M.

iii) La retta PM è la mediana del triangolo isoscele $A\hat{P}B$ dunque è anche altezza. Di conseguenza $PM \perp r$

iv) La retta trovata è unica poiché è determinata dal passaggio per M e P con M univocamente determinato.

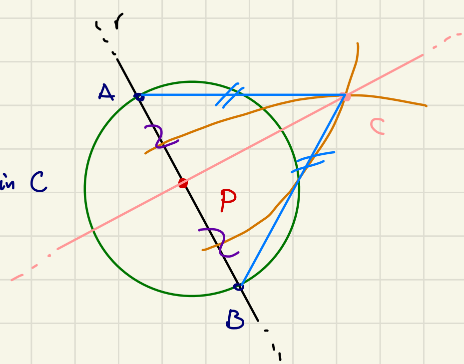
(2) $P \in r$

(i) Traccio circonf. partente da P

(ii) Dai punti A e B traccio circonferenze con raggio $R > AP$ che si intersecano in C

(iii) Traccio la retta PC

(iv) $A\hat{B}C$ è isoscele ($AC \cong CB$) per costruzione e P pto medio AB per costruzione.

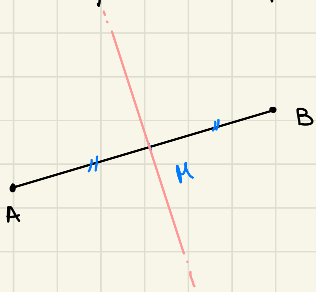


(v) CP è mediana di $\hat{ABC}$ e di conseguenza altezza. Ottengo quindi la perpendicolarità

(vi) Unicità come sopra.

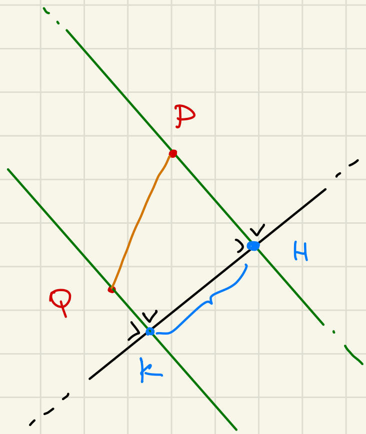
□

Def: Dato un segmento, l'asse del segmento è la retta perpendicolare ad esso passante per il pto medio



Oss: Per la proposizione 17 l'asse esiste ed è unico.

Def: Dati un punto P e una retta r con $P \notin r$, la proiezione ortogonale di P su r è il punto H di intersezione tra la retta r e la perpendicolare a r passante per P.



La distanza tra P e la retta r è la lunghezza del segmento PH.

Se Q è un altro punto, $Q \notin r$, la proiezione del segmento PQ è il segmento HK con K proiezione di Q su r