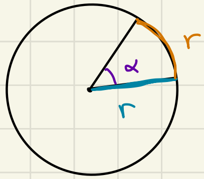
Goniometria

Def: Data una circonferenza, chiamiamo ==Radiante== l'angolo al centro che insiste su un arco di lunghezza uguale al raggio



Nel disegno α misura 1 radiante.
In fisica $\alpha = 1$ rad
In matematica $\alpha = 1$ significa $\alpha = 1$ rad.

Oss: L'angolo giro corrisponde a 2π infatti:

$$1\ \text{rad} : \underbrace{r}_{\text{Arco}} = x : \underbrace{2\pi r}_{\text{Circonferenza}}$$

$$x = \frac{2\pi r \cdot 1\ \text{rad}}{r} = 2\pi$$

Oss. Si può trasformare gli angoli da gradi in radianti e viceversa mediante una proporzione:

$$\alpha_{gradi} : \alpha_{rad} = 360° : 2\pi \qquad (180° : \pi)$$

Esempio:

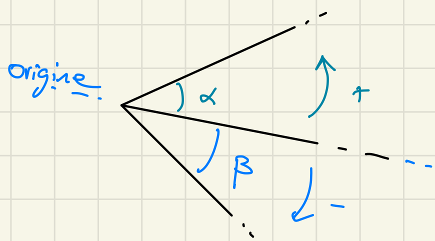
$\alpha = 60° \longleftrightarrow \alpha = \frac{\pi}{3}$ $\qquad$ $\alpha = 180° \longleftrightarrow \alpha = \pi$

$\alpha = 30° \longleftrightarrow \alpha = \frac{\pi}{6}$ $\qquad$ $\alpha = 45° \longleftrightarrow \alpha = \frac{\pi}{4}$

$\alpha = 90° \longleftrightarrow \alpha = \frac{\pi}{2}$

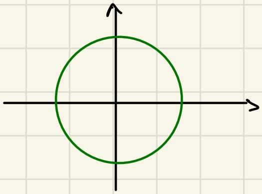
Def: Un ==angolo è orientato== se si sceglie uno dei due lati come origine e si sceglie anche un senso di rotazione

In senso antiorario l'angolo è positivo
In senso orario l'angolo è negativo



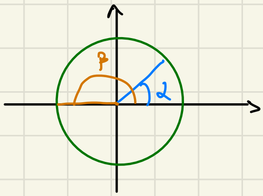
Esempio $\alpha = \frac{\pi}{4}$, $\beta = -\frac{\pi}{4}$

Def: La circonferenza Goniometrica è la circonferenza di raggio 1 centrata nell'origine di un piano cartesiano

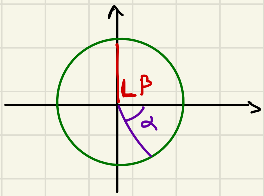


$$\boxed{x^2 + y^2 = 1}$$

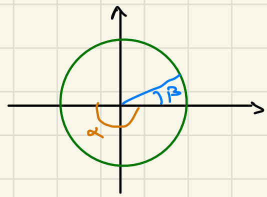
Esempi: Convenzione: Si considerano gli angoli orientati a partire dal verso positivo dell'asse x



$\alpha = \frac{\pi}{4}$
$\beta = \pi$

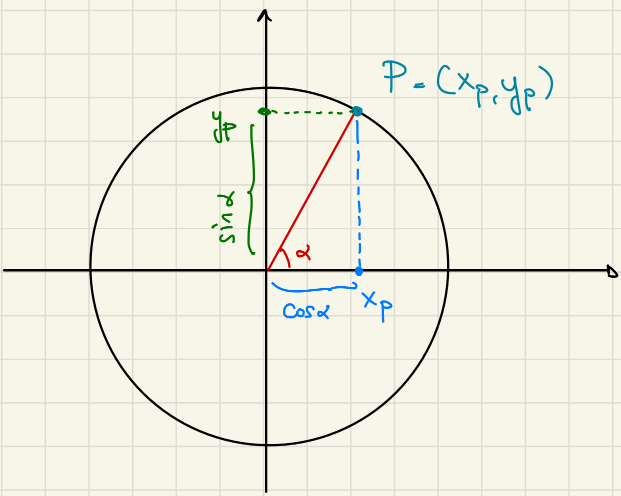


$\alpha = -\frac{\pi}{3}$
$\beta = \frac{\pi}{2}$



$\alpha = -\pi$
$\beta = \frac{\pi}{6}$

Def: Dato $x^2+y^2=1$ e α angolo, definiamo $\sin\alpha$ (seno di α) e $\cos\alpha$ (coseno di α) nel seguente modo:



Considero il punto P individuato dall'angolo α

$\sin\alpha = y_P$

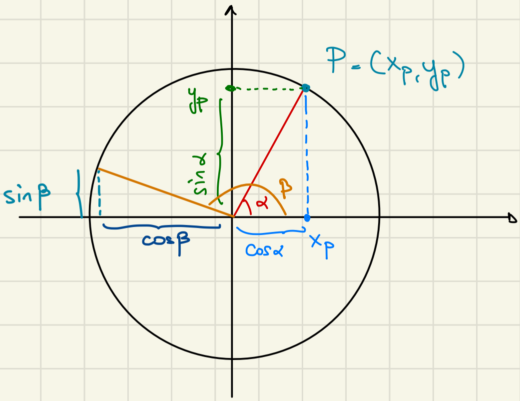
$\cos\alpha = x_P$

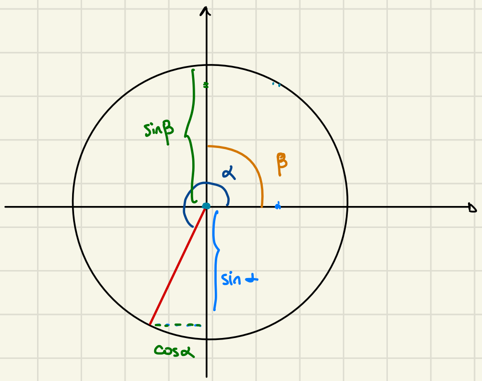
Relazione fondamentale: $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \quad \forall \alpha$ angolo

Dim: Dato che $P \in$ Circonferenza goniometrica $x_P^2 + y_P^2 = 1$
cioè $\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$

$\square$

Esempi.

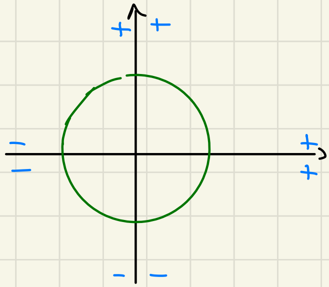




Esempi:

	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3}{2}\pi$	2π
$\cos\alpha$	1	0	-1	0	1
$\sin\alpha$	0	1	0	-1	0

Segni di sin e cos

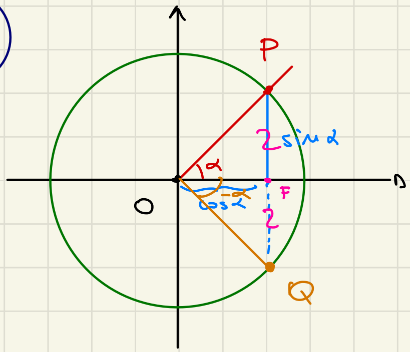


	$0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$	$\pi < \alpha < \frac{3}{2}\pi$	$\frac{3}{2}\pi < \alpha < 2\pi$
$\cos\alpha$	+	−	−	+
$\sin\alpha$	+	+	−	−

Calcolo di $\sin\alpha$ e $\cos\alpha$ di angoli famosi

	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$
$\cos\alpha$	$\frac{1}{2}$	Esercizio	$\frac{\sqrt{2}}{2}$
$\sin\alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	Esercizio	$\frac{\sqrt{2}}{2}$

$\frac{\pi}{4}$



$\alpha = \frac{\pi}{4}$, Disegno il segmento OQ

Angolo $P\hat{O}Q = \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4}$

$\Rightarrow \overset{\triangle}{POQ}$ è triangolo rettangolo
OP, OQ cateti e $OP = OQ = 1$
Perché sono i raggi

Per calcolare PQ uso il teorema di Pitagora. Vale che

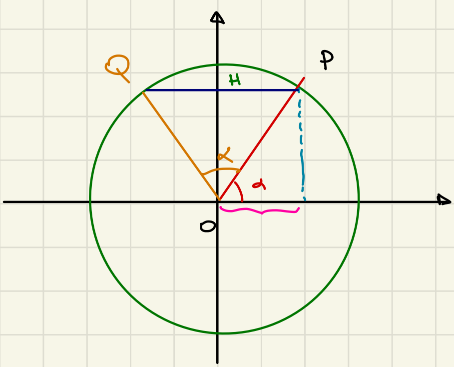
$$PQ^2 = OP^2 + OQ^2 = 1 + 1 = 2 \Rightarrow PQ = \sqrt{2}$$

Ora $PF = \sin\alpha = FQ \quad \Rightarrow \quad \sin\alpha = \frac{PQ}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

E per la relazione fondamentale $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \Rightarrow \cos\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$ $\square$

$\frac{\pi}{3}$

Disegno il segmento OQ come in figura.



Guardo il triangolo OPQ
È isoscele $(OP = OQ)$
Angolo in O di $\frac{\pi}{3}$
$\Rightarrow$ OPQ è Equilatero

Dunque $PQ = \text{raggio} = 1$
Calcolo OH che è l'altezza del triangolo equilatero e corrisponde a $\sin\frac{\pi}{3}$

Faccio teorema di Pitagora. $OP^2 = PH^2 + OH^2$

$$\Rightarrow OH^2 = OP^2 - PH^2 = 1^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{4}$$

$$\Rightarrow OH = \sin\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

$\cos\alpha = PH = \frac{1}{2}$ $\square$

Def: Le funzioni seno e coseno sono definite come sopra ovvero.

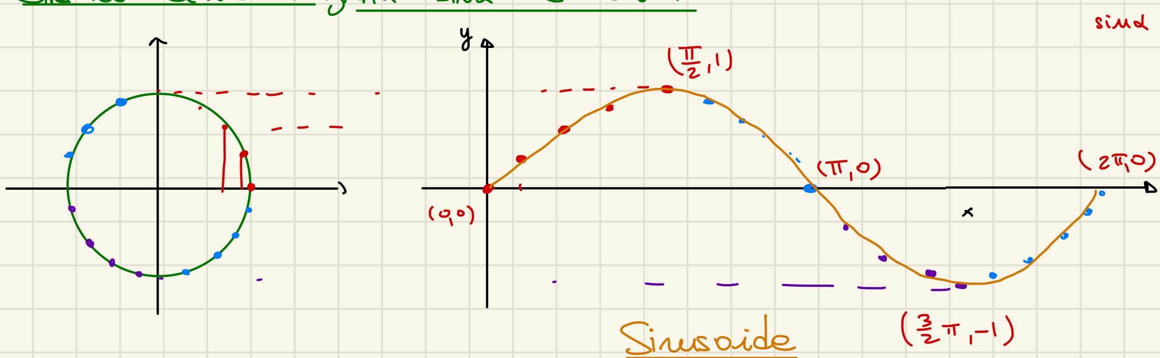
$$\sin : \underset{\text{(angolo)}}{\mathbb{R}} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$\alpha \longmapsto \sin\alpha$$

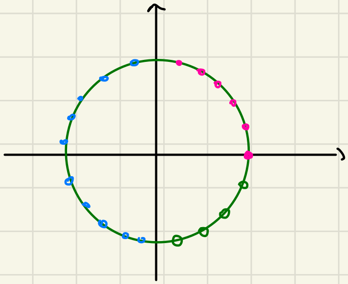
$$\cos : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$\alpha \longmapsto \cos\alpha$$

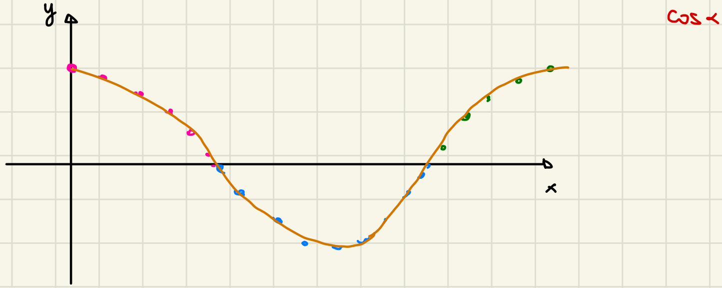
si fa il procedimento sopra

Oss: L'immagine delle funzioni seno e coseno è $[-1; 1]$
(cioè $\sin\alpha$ e $\cos\alpha$ hanno valori compresi tra -1 e 1)
Dim: $\sin\alpha$ e $\cos\alpha$ sono le coordinate di un punto della circonferenza goniometrica e la circonf. gon. ha raggio 1.

Grafico delle funzioni $\sin\alpha$ e $\cos\alpha$







Sinusoide Traslata o Cosinusoide

Oss: Le funzioni sin, cos sono periodiche (vedere As 2023/24) di periodo 2π, ovvero: $\sin(\alpha+2\pi)=\sin(\alpha)$

$\cos(\alpha+2\pi)=\cos(\alpha)$

Dim: Dato che gli angoli α e $2\pi+\alpha$ individuano lo stesso punto P nella circonf. goniometrica $\sin(\alpha+2\pi)=\sin(\alpha)$

$\cos(\alpha+2\pi)=\cos(\alpha)$

Pag 732 n 106

Trova condizioni su k affinché $\cos x = k-2$ sia possibile

Dato che $\cos x \in [-1,1] \Rightarrow -1 \le k-2 \le 1$

$$\Rightarrow \boxed{1 \le k \le 3}$$

log: $(k-1)\sin x = k \rightsquigarrow \sin x = \dfrac{k}{k-1}$

$$\overbrace{-1 \le \frac{k}{k-1}}^{(I)}\!\!\!\!\underbrace{\phantom{\frac{k}{k-1}} \le 1}_{(II)}$$

(I) $\dfrac{k+k-1}{k-1} \ge 0 \rightsquigarrow \dfrac{2k-1}{k-1} \ge 0 \quad k \le \frac{1}{2} \vee k > 1$

(II) $\dfrac{1}{k-1} \le 0 \rightsquigarrow k < 1$

$\xrightarrow{\text{sistema}} \boxed{k \le \frac{1}{2}}$