Settimana: 6

Materia: Matematica
Classe: 5A
Data: 20 / 10 /25

**Argomenti:** esercizi di riepilogo in oreoarazione al compito.
Quesiti tratti dai testi della maturità e problemi verso l'esame

## Quesito 116

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{|x^2+x|}{x} & x \neq 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases}$$

(1) È continua in $x=0$?
(2) $\lim_{x \to 0} f(x) \cdot \ln(x+1)$ se esiste

Faccio

da sx

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} \frac{|x^2+x|}{x} = \lim_{x \to 0^-} \frac{|x||x+1|}{x} = \lim_{x \to 0^-} \left[-|x+1|\right] = -1$$

da dx

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} \frac{|x^2+x|}{x} = \lim_{x \to 0^+} \frac{|x|\,|x+1|}{x} = 1$$

$f(0) = 1$ NON è continua

$$(2) \lim_{x \to 0} \frac{\overset{\to 0}{|x^2+x|}}{x} \overset{\to 1}{\ln(x+1)} = 0$$

## Quesito 118

$$f(x) = \sqrt[3]{x^3 - x}$$

Ha asintoti?

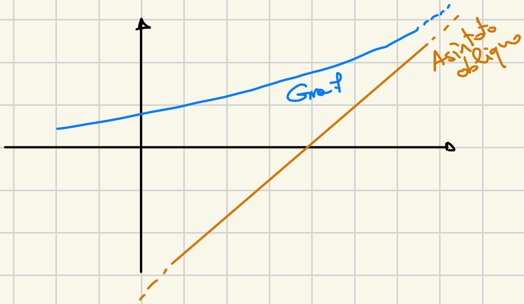
CE: non c'è C.E. $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ no asintoti verticali

Per gli asintoti orizzontali si fanno i limiti a $\pm\infty$

$$\lim_{x\to+\infty}\sqrt[3]{x^3-x} = \lim_{x\to+\infty}\sqrt[3]{x^3\left(1-\frac{1}{x^2}\right)} = \lim_{x\to+\infty}\underbrace{x}_{+\infty}\,\underbrace{\sqrt[3]{1-\frac{1}{x^2}}}_{1} = +\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty}\sqrt[3]{x^3-x} = \ldots\ldots = -\infty$$

Potrebbero esistere gli asintoti obliqui: è una retta su cui si spiaccica la $f_2$. Una retta è della forma




$$y = mx + q$$

Per trovare $m$ si calcola, se esiste

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x} = m$$

Per trovare $q$, se $m$ esiste, si calcola $\lim_{x\to\pm\infty}\left(f(x)-mx\right)=q$

L'asintoto obliquo, per esistere, deve avere $m$ e $q$ finiti. Altrimenti NON esiste

$$f(x) = \sqrt[3]{x^3-x}$$

Provo asintoto obliquo:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt[3]{x^3-x}}{x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\cancel{x}\sqrt[3]{1-\frac{1}{x^2}}}{\cancel{x}} = 1 = m$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left[f(x)-mx\right] = \lim_{x\to+\infty}\left[\sqrt[3]{x^3-x}-x\right]\cdot\frac{\sqrt[3]{(x^3-x)^2}+x^2+x\sqrt[3]{x^3-x}}{\sqrt[3]{(x^3-x)^2}+x^2+x\sqrt[3]{x^3-x}}$$

$$a^3-b^3 = (a-b)(a^2+b^2+ab)$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\cancel{x^3}-x-\cancel{x^3}}{\sqrt[3]{(x^3-x)^2}+x^2+x\sqrt[3]{x^3-x}} = 0 = q$$

Asintoto obliquo

$$\boxed{y=x}$$

Pag 1581 n95

$$f(x) = \frac{(x-a)(x-b)}{x-c} \qquad a,b,c \in \mathbb{R}, \quad a>0, \quad x \neq c$$

Trova $a,b,c$ (i) Asintoto verticale $x=2$
(ii) Passa per $A=(1,0)$
(iii) Un asintoto obliquo passa per $B=(0,3)$

(i) C.E.: $x \neq c \implies \boxed{c=2}$ Unico asintoto vert. poss.

(ii) $\boxed{0 = (1-a)(1-b)}$

(iii) Per asintoto obliquo:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{(x-a)(x-b)}{x(x-2)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\cancel{x^2}\left(1-\frac{a}{x}\right)\left(1-\frac{b}{x}\right)}{\cancel{x^2}\left(1-\frac{2}{x}\right)} = 1 = m$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) - x = \lim_{x\to+\infty} \frac{(x-a)(x-b)}{x-2} - x =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{\cancel{x^2} - ax - bx + ab - \cancel{x^2} + 2x}{x-2} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{\cancel{x}\left[(2-a-b) + \frac{ab}{x}\right]}{\cancel{x}\left(1-\frac{2}{x}\right)} = 2-a-b = q$$

Asintoto obliquo: $y = x + (2-a-b)$
$\cup$
$B \rightsquigarrow \boxed{3 = 2-a-b}$

$$\begin{cases} (1-a)(1-b) = 0 \\ a+b = -1 \end{cases} \quad \begin{cases} (1-a)(1+1+a) = 0 \\ b = -1-a \end{cases} \rightsquigarrow (1-a)(2+a) = 0$$

$a = 1 \longleftarrow$ Accettabile
$a = -2$

$\Downarrow$

$b = -2$

$$f(x) = \frac{(x-1)(x+2)}{x-2}$$

Disegnare grafico $f(x)$ (e di $g(x) = \frac{1}{f(x)}$ Per casa)

(1) Dom(f) : $x \neq 2$

$$f: \mathbb{R} \setminus \{2\} \longrightarrow \mathbb{R}$$

(2) Inters Asse x $y=0$ $\frac{(x-1)(x+2)}{x-2} = 0$ $x=1, -2$

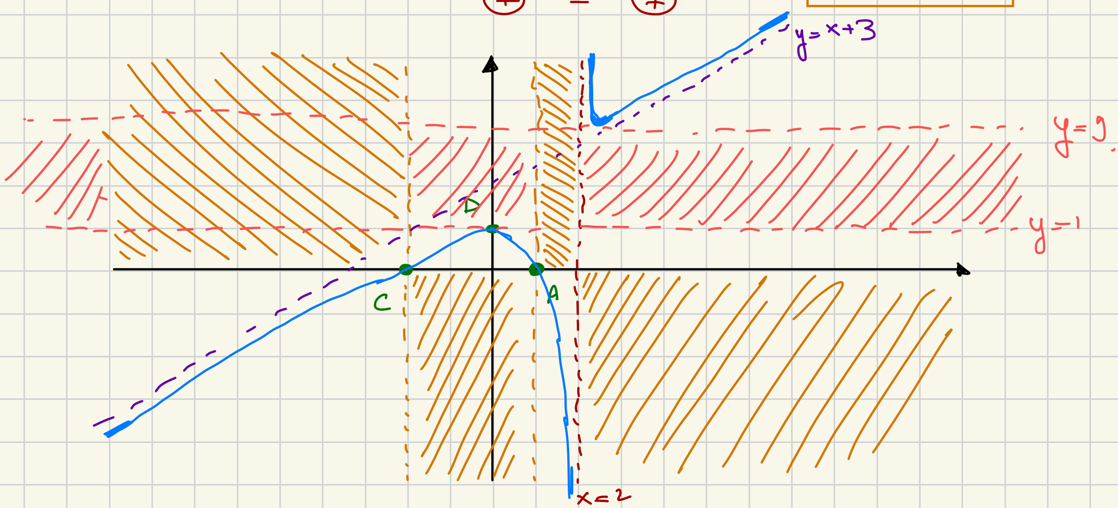
$A=(1,0)$ , $C=(-2,0)$

Asse y: $x=0$ $y = \frac{(-1)(2)}{-2} = 1$ $D=(0,1)$

(3) Segno: $f(x) \geq 0$ $\frac{(x-1)(x+2)}{x-2} \geq 0$

| | | | $-2$ | | $1$ | | $2$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $N1 \geq 0$ | $x \geq 1$ | $-$ | | $-$ | $\bullet$ | $+$ | | $+$ |
| $N2 \geq 0$ | $x \geq -2$ | $-$ | $\bullet$ | $+$ | | $+$ | | $+$ |
| $D > 0$ | $x > 2$ | $-$ | | $-$ | | $-$ | $\not\circ$ | $+$ |
| | | $-$ | | $+$ | | $-$ | | $+$ |

$$\boxed{\begin{gathered} -2 \leq x \leq 1 \\ \vee \\ x > 2 \end{gathered}}$$




(4) Limiti. $\lim_{x \to 2^+} f(x) = +\infty$ $\lim_{x \to 2^-} f(x) = -\infty$ Asintoto obliquo: $y = x+3$
$\pm\infty$

(3bis) Im(f): $y = \frac{(x-1)(x+2)}{x-2}$ e si ricava $x$ in fz di $y$.

$$xy - 2y = x^2 - x + 2x - 2$$

$$x^2 + x(1-y) + 2y - 2 = 0$$

Per avere soluzione devo imporre $\Delta \geq 0$

$$(1-y)^2 - 4(2y-2) \geq 0$$

$$y^2 - 2y + 1 - 8y + 8 \geq 0$$

$$y^2 - 10y + 9 \geq 0 \qquad (y-9)(y-1) \geq 0 \qquad y = 1, 9$$

$$y \leq 1 \quad \vee \quad y \geq 9$$

$$\text{Im}(f) = (-\infty; 1] \cup [9; +\infty)$$

Es 510 (Linda Request)

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{4}} \frac{\sin x - \cos x}{tg\left(\frac{\pi}{8} - \frac{x}{2}\right)}$$

$\left(\text{Sost: } x - \frac{\pi}{4} = t \quad x \to \frac{\pi}{4}\right.$
$\left. x = t + \frac{\pi}{4} \quad t \to 0 \right)$

$$\lim_{t \to 0} \frac{\sin\left(t + \frac{\pi}{4}\right) - \cos\left(t + \frac{\pi}{4}\right)}{tg\left(-\frac{t}{2}\right)} = \lim_{t \to 0} \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}(\sin t + \cos t) - \frac{\sqrt{2}}{2}(\cos t - \sin t)}{-tg(t/2)}$$

$$= \lim_{t \to 0} - \frac{\sqrt{2} \sin(t)}{\sin(t/2)} \cdot \cos(t/2) \cdot \frac{\frac{t}{2}}{\frac{t}{2}}$$

$$= \lim_{t \to 0} -\sqrt{2} \underbrace{\frac{\sin t}{t}}_{\downarrow\, 1} \cdot \underbrace{\frac{t/2}{\sin t/2}}_{\downarrow\, 1} \cdot 2 \cdot \underbrace{\cos(t/2)}_{\downarrow\, 1} = -2\sqrt{2}$$