Settimana: 5

Materia: Matematica
Classe: 3D
Data: 13/10/2025

Argomenti: Es dettagliato studio di funzione. Composizione di fz. Intro ed esempi.

Pag 115 n201

$$y = \sqrt{\frac{x^2-2x}{x^3}}$$

$f: Dom(f) \longrightarrow \mathbb{R}$

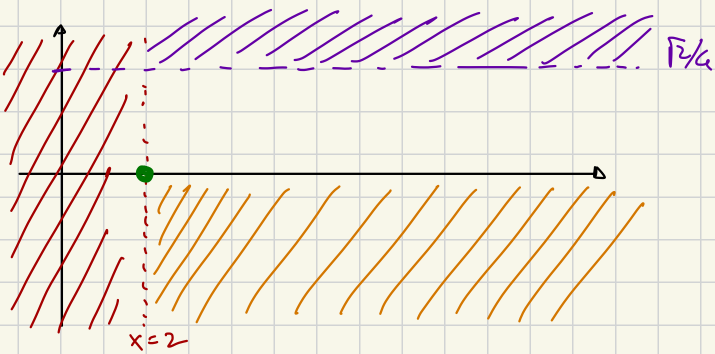
1) Dom(f) : $\frac{x^2-2x}{x^3} \geq 0$

N: $x(x-2) \geq 0 \leadsto$ $x \leq 0 \lor x \geq 2$

D: $x^3 > 0 \leadsto$ $x > 0$

		0		2	
N	+	•	−	•	+
D	−	o	+		+
	−		−		+

$Dom(f) = \{x \geq 2\} = [2; +\infty)$



Non può andare sopra per Im f

2) Int assi (a) $x = 0$: Impossibile perché $x \geq 2$ Dom(f)

(b) $y = 0 \leadsto \sqrt{\frac{x^2-2x}{x^3}} = 0 \leadsto \frac{x^2-2x}{x^3} = 0 \quad x^2-2x=0$

$\leadsto \boxed{x=0} \lor x = 2$ $\quad A = (2, 0)$

Non Accett. $\quad$ Accett.

3) Segno: $f(x) \geq 0$ $\quad \sqrt{\frac{x^2-2x}{x^3}} \geq 0$ Sempre vero nel dominio

e dunque $\boxed{x \geq 2}$ ⇝ Cancellate le zone sotto

(4) Im(f): $\quad y = \sqrt{\frac{x^2-2x}{x^3}}$ e si ricava la x in funzione di y.

Posso elevare al □ imponendo $\boxed{y \geq 0}$

$y^2 = \frac{x^2-2x}{x^3}$ Risolvo $y^2 = \frac{\cancel{x}(x-2)}{x^{\cancel{3}2}}$ $\quad x \neq 0$

$y^2x^2 - x + 2 = 0$ Affinché possa risolvere devo imporre $\Delta \geq 0$

$\Delta = b^2 - 4ac = 1 - 8y^2 \geq 0$

$8y^2 - 1 \leq 0$ $\quad y^2 = \frac{1}{8}$ $\quad y = \pm \frac{1}{2\sqrt{2}} = \pm \frac{\sqrt{2}}{4}$

$\boxed{-\frac{\sqrt{2}}{4} \leq y \leq \frac{\sqrt{2}}{4}}$ ⇝ la metto a sistema con $y \geq 0$.

Dunque $\text{Im}(f) = \{0 \leq y \leq \frac{\sqrt{2}}{4}\} = [0; \frac{\sqrt{2}}{4}]$

(5) $f: \text{Dom}(f) \longrightarrow \mathbb{R}$ $\quad \text{Im}(f) = [0; \frac{\sqrt{2}}{4}]$
$\text{Dom}(f) = [2; +\infty)$

NON è suriettiva $\text{Im}(f) \neq \mathbb{R}$

È iniettiva se $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$. Ci provo

$\sqrt{\frac{x_1^2-2x_1}{x_1^3}} = \sqrt{\frac{x_2^2-2x_2}{x_2^3}}$ ⇝ $\frac{x_1-2}{x_1^2} = \frac{x_2-2}{x_2^2}$ ⇝ $x_2^2x_1 - 2x_2^2 = x_1^2x_2 - 2x_1^2$

$$x_1^2x_2 - x_1x_2^2 + 2x_2^2 - 2x_1^2 = 0$$

$$x_1x_2(x_2-x_1) - 2(x_2-x_1)(x_2+x_1) = 0$$

$$(x_2-x_1)[x_1x_2 - 2x_2 - 2x_1] = 0$$

Per essere certi che sia iniettiva doveva essere presente solo x_2-x_1. Dato che c'è un altro termine devo analizzare se quel termine può essere 0 violando inj

$x_1x_2 - 2x_2 - 2x_1 = 0 \rightsquigarrow$ Ricavo x_1 in funzione di x_2

$$x_1(x_2-2) = 2x_2$$

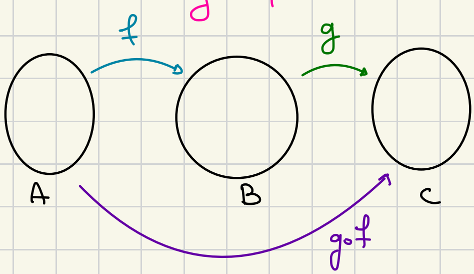
$$x_1 = \frac{2x_2}{x_2-2} = \frac{2x_2-4+4}{x_2-2} = 2+\frac{4}{x_2-2}$$

Oss: Da qua si deduce il max: Basta imporre $x = 2+\frac{4}{x-2}$ per simmetria $\rightsquigarrow$ $x=4$ è dove si ha il max

---

Composizione di funzioni

Def: Sia $f: A \to B$, $g: B \to C$, definiamo la composizione $\underbrace{g \circ f}_{g \text{ composto } f}$ l'applicazione successiva di due funzioni



$$(g \circ f)(x) = g(f(x))$$

Esempio: $f(x) = x^2+2$ $\qquad f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$g(x) = \frac{1}{x+3}$ $\qquad g: \mathbb{R}\setminus\{-3\} \to \mathbb{R}$

$$(g \circ f)(x) \overset{\text{Def}}{=} g(f(x)) = g(x^2+2) = \frac{1}{(x^2+2)+3} = \frac{1}{x^2+5}$$

Fare f e poi g è come fare $g \circ f$

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f\left(\frac{1}{x+3}\right) = \left(\frac{1}{x+3}\right)^2 + 2$$

$$= \frac{1+2x^2+18+12x}{(x+3)^2} = \frac{2x^2+12x+19}{x^2+6x+9}$$

La composizione <u>NON</u> è commutativa (se possibile in entrambi i sensi)

$$= \sqrt{x+2}$$

$$\frac{a+2}{a^2} = \frac{b+2}{b^2}$$

$$ab^2 - 2b^2 = a^2b - 2a^2$$

$$ab(b-a) - 2(b-a)(b+a) = 0$$

$$(b-a)(ab - 2b - 2a) = 0$$