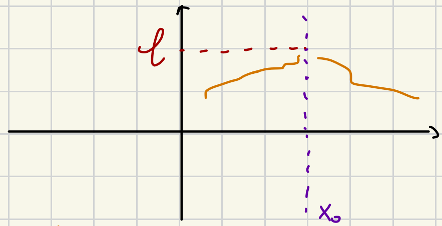
**Settimana:** 3

**Materia:** Matematica
**Classe:** 5A
**Data:** 29/09/25

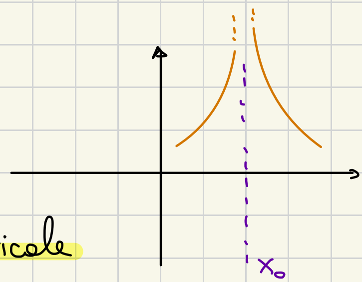
**Argomenti:** Remind su def. limite e limiti $x \to +\infty$. Esercizio guida st. di funzione. Teoremi sui Limiti. Teo dei carabinieri per $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$. Applicazioni. Esercizi in classe. Verifiche di limiti. Def. di continuità, esempi. Limiti fz elementari, teorema somme limiti, prodotto $k \cdot \lim_{x\to x_0} f(x)$

## Back to Limiti:

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \ell \qquad \ell \text{ finito}$$



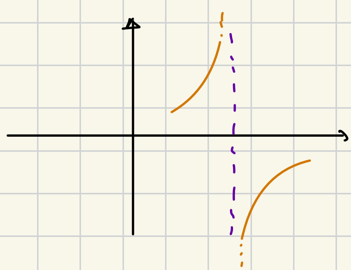

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = +\infty$$




**Def:** $x = x_0$ è asintoto verticale

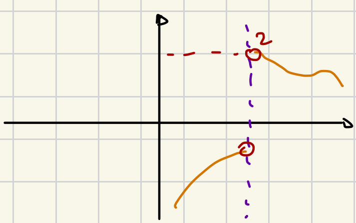
$$\lim_{x\to x_0^+} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x\to x_0^-} f(x) = +\infty$$



Anche nella situazione in cui solo limite destro o sinistro è $\pm\infty$, diciamo che c'è un asintoto

**Oss:** Potrebbero esistere limite destro e sinistro, ma <u>non</u> esistere il limite globale




$$\lim_{x\to x_0^+} f(x) = 2$$

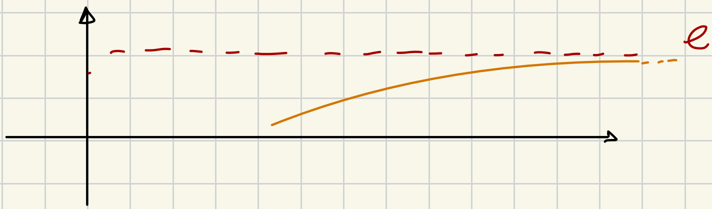
$$\lim_{x\to x_0^-} f(x) = -1$$

Non esiste $\lim_{x\to x_0} f(x)$

**Def:** Data $f: D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\infty$ un punto di acc. per $D$ (cioè $D$ contiene un sottoinsieme della forma $(a,+\infty)$), il ==limite per $x \to +\infty$ di $f(x)$== è $\ell$ numero finito e si scrive

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \ell$$

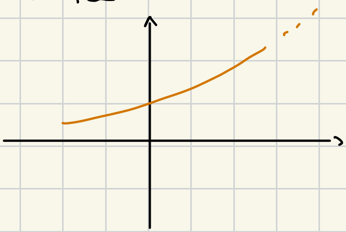
Se $\forall \varepsilon > 0$, $\exists M > 0$ t.c. $x > M \implies |f(x) - \ell| < \varepsilon$

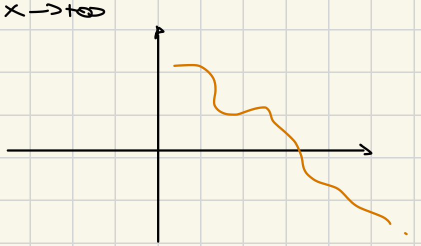



**Def:** Nel caso sopra, la retta $y = \ell$ è detta ==asintoto orizzontale==

**Nota:** Si può, in maniera analoga, dare la definizione di limite a $\pm\infty$ e si scrive

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty \qquad\qquad \lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$$





**Nota:** Si può fare tutto in maniera analoga per $x \to -\infty$

**Esercizio:** Scrivere le definizioni.

**Esempio di calcolo** (Un po' tuffato).

$$f(x) = \frac{e^x}{x-1}$$

1) $\mathrm{Dom}(f) = \{x \neq 1\}$ $\qquad f: \{x \neq 1\} \longrightarrow \mathbb{R}$

2) Asse y: $x = 0$ $\qquad \frac{e^0}{-1} = -1$ $\qquad A = (0, -1)$

Asse x: $f(x) = 0$ $\qquad \frac{e^x}{\cancel{x-1}} = 0$ $\qquad$ Impossibile


3) Segno: $f(x) \geq 0$ $\qquad \frac{e^x}{x-1} \geq 0$ $\qquad N \geq 0 \quad e^x \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$D > 0 \quad x > 1$

Grafico segni $\rightsquigarrow$ $\boxed{x > 1}$

4) Limiti

Ricetta (1) Limiti agli estremi delle C.E.
(2) Limiti a $\pm\infty$ se possibile

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} \frac{e^x}{x-1} = +\infty$$

→ Provo numeri vicini a 1 in calcolatrice
- Se divido per un numero molto piccolo, il valore della funzione esplode
- Se ho fatto il segno bene, so dire il segno del limite
- Nel grafico faccio segno

$$\lim_{x \to 1^-} \frac{e^x}{x-1} = -\infty$$ $\rightsquigarrow$ Come sopra

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x-1} = +\infty$$ $\rightsquigarrow$ C'è una gerarchia degli infiniti che vedremo. Segno nel grafico

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{e^x}{x-1} = 0$$ $\rightsquigarrow$ Al numeratore molto piccolo, al denom. molto grande $\rightsquigarrow$ fa 0

Segno nel grafico

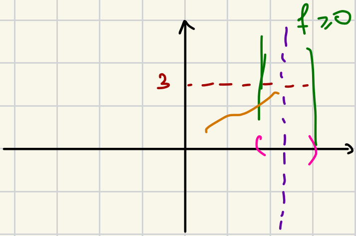
## Teoremi sui limiti:

**Teorema di unicità del limite.** Sia $f: D \to \mathbb{R}$ funzione. Se $f(x)$ ammette limite per $x \to x_0$, allora tale limite è unico

**Teorema di Permanenza del segno:** Sia $f: D \to \mathbb{R}$ funzione. Se esiste il limite

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell \neq 0$$

allora in un intorno sufficientemente piccolo di $x_0$, la funzione ha lo stesso segno di $\ell$.




$$\lim_{x \to x_0} f(x) = 3$$

**Teorema dei Carabinieri (o del confronto)** Siano $h, g, f: D \to \mathbb{R}$. Sia $I(x_0)$ intorno di $x_0$, supponiamo che

$$\underbrace{h(x)}_{\text{carabiniere 1}} \leq \overbrace{f(x)}^{\text{incriminato}} \leq \underbrace{g(x)}_{\text{carabiniere 2}} \qquad \forall x \in I(x_0) \setminus \{x_0\}$$

Se esiste $\lim_{x \to x_0} h(x)$ e $\lim_{x \to x_0} g(x)$ e sono uguali, allora

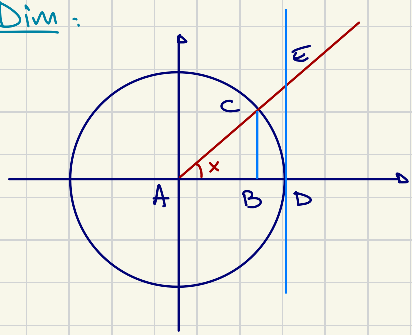
Esiste $\lim_{x \to x_0} f(x)$ e vale come gli altri.

$$\ell = \lim_{x \to x_0} h(x) \leq \lim_{x \to x_0} f(x) \leq \lim_{x \to x_0} g(x) = \ell$$

N.B.: Questi teo si applicano anche per $x \to \pm\infty$ (Chi vuole faccia i dettagli

**Es/Teorema:** Calcola $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x}$ se esiste.

**Dim:**




**Obiettivo:** Scrivere le aree di
$\overset{\triangle}{ABC}$
$ADC$ settore circolare
$\overset{\triangle}{ADE}$
e vedere che succede passando al limite.

$$\frac{\pi r^2}{2\pi} = \frac{A_{ADC}}{x}$$ Area / Angolo

$$A_{ADC} = \frac{x}{2}$$

Dato che è circonferenza goniometrica

$$A_{ABC} \leq A_{ADC} \leq A_{ADE}$$

$$\frac{\sin x \cdot \cos x}{2} \leq \frac{x}{2} \leq \frac{1 \cdot tg(x)}{2}$$

$\cdot \frac{1}{2}$

$$\sin x \cdot \cos x \leq x \leq \frac{\sin(x)}{\cos x}$$

$\frac{1}{\sin x}$ $(x \neq 0)$

$$\cos x \leq \frac{x}{\sin x} \leq \frac{1}{\cos x}$$

Reciproco

$$\frac{1}{\cos x} \geq \frac{\sin x}{x} \geq \cos x$$

$$\cos x \leq \frac{\sin x}{x} \leq \frac{1}{\cos(x)}$$

$\lim_{x \to 0} \cos x = 1$

Passando al limite per il teo dei carabinieri

$$\lim_{x \to 0} \frac{1}{\cos(x)} = 1$$

$$1 \leq \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} \leq 1$$

$$\Longrightarrow \boxed{\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1}$$ ← Limite Notevole

Esempio (un po' tutto): Calcolare

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{2x} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{2} \cdot \frac{\sin x}{x} = \frac{1}{2}$$

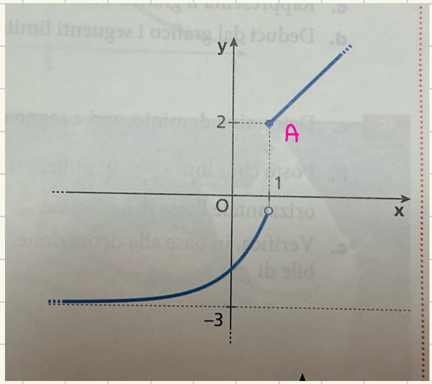
$5x = t$

$x \to 0 \Rightarrow t \to 0$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin 5x}{3x} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{3} \cdot \frac{\sin 5x}{5x} \cdot 5 = \frac{5}{3}$$

Pag 1473 n 41

$$f(x) = \begin{cases} e^x + a & x < 1 \\ x + b & x \geq 1 \end{cases}$$




1) trova a, b con grafico

$A \in \text{Graf}(f)$ $\quad A = (1, 2)$

$1 + b = 2 \rightsquigarrow \boxed{b = 1}$

Info: $\lim_{x\to -\infty} f(x) = -3$ (Dal grafico)

$$\underbrace{\lim_{x\to -\infty} (e^x + a)}_{= a} = -3 \qquad \boxed{a = -3}$$

$e^x \to 0$, a è costante

$$f(x) = \begin{cases} e^x - 3 & x < 1 \\ x + 1 & x \geq 1 \end{cases}$$

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = e - 3$$

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = 2$$

$$\lim_{x\to 0} f(x) = -2$$

(c) Verifiche dei limiti. Ne faccio uno

$\lim_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$ $\quad$ Ricordo la def.

$\forall M > 0, \ \exists N > 0$ t.c. $x > N \Rightarrow f(x) > M$

Faccio prima con i numeri: Sia $M=50$, devo trovare $N$ in modo che se $x > N \Rightarrow f(x) > 50$

La mia funzione è $f(x) = x+1$

Voglio che $f(x) > 50 \Rightarrow x+1 > 50$

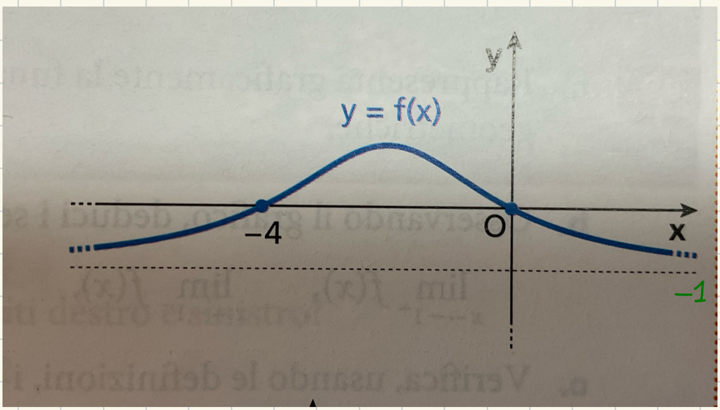
$\Rightarrow x > 49$

Pongo $N = 49$

Sostituendo con le lettere $f(x) > M \Rightarrow x+1 > M \Rightarrow x > M-1$

Pongo $N = M-1$ e funzione.

<u>n 62</u>




$$f(x) = \frac{a}{(x+b)^2+4} - 1$$

1) Trovo $a$ e $b$

$O \in Graf(f)$ $\quad O=(0,0)$

$A \in Graf(f)$ $\quad A=(-4,0)$

$$\begin{cases} 0 = \dfrac{a}{b^2+4} - 1 \\ 0 = \dfrac{a}{(-4+b)^2+4} - 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} 0 = a - b^2 - 4 \\ 0 = a - (b-4)^2 - 4 \end{cases} \qquad a = b^2+4$$

$\rightsquigarrow \quad 0 = b^2+4-(b^2+16-8b)-4$

$0 = \cancel{b^2}+4-\cancel{b^2}-16+8b-4$

$8b = 16 \quad \rightsquigarrow b=2 \quad \rightsquigarrow \quad a=8$

$$f(x) = \frac{8}{(x+2)^2+4}-1 \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{8}{(x+2)^2+4}-1 = -1$$

Verifico il limite

$\forall \varepsilon>0, \ \exists N>0$ t.c. $x>N \implies |f(x)-(-1)| < \varepsilon$

Vittoria mi fornisce $\varepsilon$, e io ricavo la $x$ e quindi $N$, in funzione di $\varepsilon$.

$$\left|\frac{8}{(x+2)^2+4} - \cancel{1} + \cancel{1}\right| < \varepsilon \quad \rightsquigarrow \left|\frac{8}{(x+2)^2+4}\right| < \varepsilon$$

Faccio solo <u>caso A</u> perché arg. val assoluto $>0$ sempre

$$\frac{8}{(x+2)^2+4} - \varepsilon < 0$$

$$\frac{8-\varepsilon[x+2]^2-4\varepsilon}{(x+2)^2+4} < 0 \qquad \frac{8-\varepsilon x^2-4\varepsilon-4\varepsilon x-4\varepsilon}{(x+2)^2+4} < 0$$

$$\frac{\varepsilon x^2+4\varepsilon x+8\varepsilon-8}{(x+2)^2+4} > 0$$

$$\frac{\Delta}{4} = 2\varepsilon^2-8\varepsilon^2+8\varepsilon = 8\varepsilon-6\varepsilon^2 = 2\varepsilon(4-3\varepsilon)$$

Per $\varepsilon>0$, $\frac{\Delta}{4}>0 \implies$ Trovo soluzioni

$$x_1/x_2 = \frac{-2\varepsilon \pm \sqrt{2\varepsilon(4-3\varepsilon)}}{\varepsilon} \implies x < -2-\frac{\sqrt{2\varepsilon(4-3\varepsilon)}}{\varepsilon} \ \vee \ x > -2+\frac{\sqrt{2\varepsilon(4-3\varepsilon)}}{\varepsilon}$$

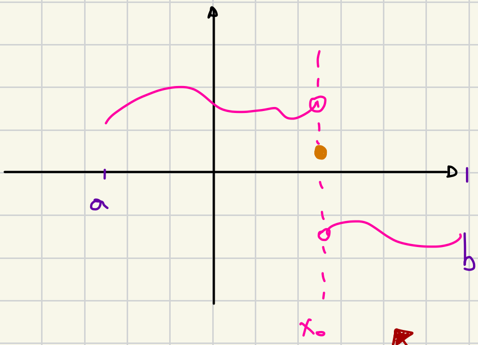
$\rightsquigarrow$ Basta scegliere $\boxed{x > -2+\frac{\sqrt{2\varepsilon(4-3\varepsilon)}}{\varepsilon}}$

# Calcolo dei Limiti:

**Def:** Una funzione $f: (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$ è continua nel punto $x_0 \in (a,b)$ se

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

Diremo che $f$ è continua, se è continua in ogni punto

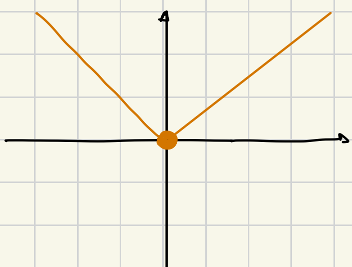



Concretamente: Il valore della $f_z$ coincide con il limite di essa in quel punto

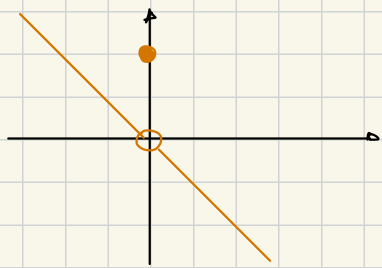
"Riesco a tracciare il grafico" senza staccare la penna dal foglio

NON è continua

Esempio:



Continua



$$\left.\begin{array}{l} f(0) = 2 \\ \lim_{x \to 0} f(x) = 0 \end{array}\right\} \text{NON è continua}$$

**Oss:** Le funzioni che conosciamo senza C.E. sono continue in tutto il loro dominio di definizione (Andrebbe dimostrato, magari potrebbe essere spicy)

## Limiti funzioni elementari: (Si dovrebbe fare la verifica)

1) $y = x^n$ $\quad$ $n$ pari $\geq 2$

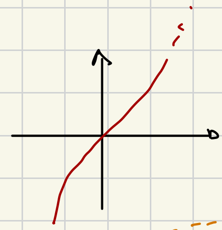
$$\lim_{x \to +\infty} x^n = +\infty$$

$$\lim_{x \to -\infty} x^n = +\infty$$

$n$ dispari $\geq 1$

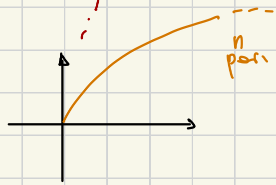
$$\lim_{x \to +\infty} x^n = +\infty$$

$$\lim_{x \to -\infty} x^n = -\infty$$



2) $y = \sqrt[n]{x}$ $\quad$ $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$

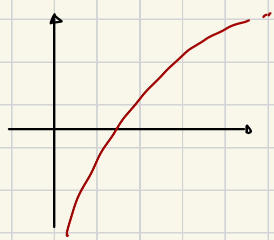
$$\lim_{x \to +\infty} \sqrt[n]{x} = +\infty$$




3) $y = \log_a x$ $\quad$ $a > 1$

$$\lim_{x \to +\infty} \log_a x = +\infty$$

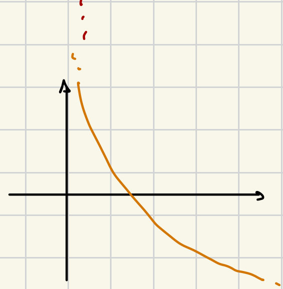
$$\lim_{x \to 0} \log_a x = -\infty$$



$0 < a < 1$

$$\lim_{x \to +\infty} \log_a x = -\infty$$

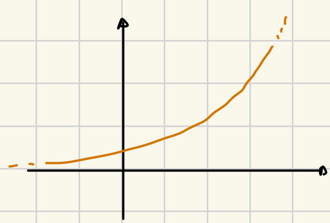
$$\lim_{x \to 0} \log_a x = \infty$$



4) $y = a^x$ $\quad$ $a > 1$

$$\lim_{x \to +\infty} a^x = +\infty$$

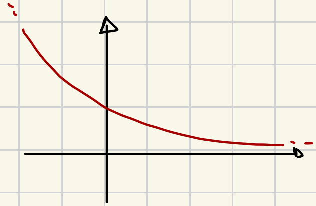
$$\lim_{x \to -\infty} a^x = 0$$



$0 < a < 1$

$$\lim_{x \to +\infty} a^x = 0$$

$$\lim_{x \to -\infty} a^x = +\infty$$



## Teoremi per il calcolo dei limiti:

**Somma:** Siano $f, g : D \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x_0$ di accumulazione per $f$ e $g$.
Quanto vale

$$\lim_{x \to x_0} [f(x) + g(x)] = \, ?$$

(1) $\lim_{x \to x_0} f(x)$ e $\lim_{x \to x_0} g(x)$ esistono finiti. Allore

$$\lim_{x \to x_0} [f(x) + g(x)] = \lim_{x \to x_0} f(x) + \lim_{x \to x_0} g(x)$$

Esempio: $\lim_{x \to -\infty} \left(e^x + \frac{1}{x}\right) \overset{\text{Teo}}{\boxed{=}} \underbrace{\lim_{x \to -\infty} e^x + \lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x}}_{\text{lo potrete omettere}} = 0 + 0 = 0$

(2) Un limite finito e uno infinito:

WLOG. $\lim_{x \to x_0} f(x)$ finito e $\lim_{x \to x_0} g(x) = \pm\infty$

$$\lim_{x \to x_0} [f(x) + g(x)] = \lim_{x \to x_0} g(x) = \pm\infty$$

Esempio: $\lim_{x \to +\infty} \left(e^x + \frac{1}{x}\right) = \underbrace{\lim_{x \to +\infty} e^x}_{\text{lo potrete omettere}} = \infty$

(3) WLOG: $\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \to x_0} g(x) = -\infty$

⇝ NON si può dire niente a priori! Si dice che è una forma INDETERMINATA

Esempio: $\lim_{x \to +\infty} (e^x - x^2)$ = Gerarchia = $+\infty$

$$\lim_{x \to +\infty} [x - (x-1)] = \lim_{x \to +\infty} 1 = 1$$ (a priori è $\infty - \infty$)

Prodotto per un numero: Sia $k \in \mathbb{R}$ un numero $f: D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x_0$ di accum.
Se $\lim_{x \to x_0} f(x)$ è finito, allora

$$\lim_{x \to x_0} k \cdot f(x) = k \cdot \lim_{x \to x_0} f(x)$$