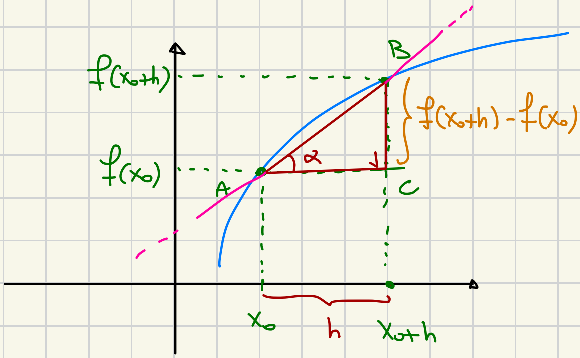
Settimana: 9

Materia: Matematica
Classe: 5C
Data: 10/11/25

Derivate

Def. Data $f: (a,b) \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, sia $x_0 \in (a,b)$ e sia $A = (x_0, f(x_0))$. Consideriamo poi il punto $B = (x_0 + h\,;\, f(x_0+h))$.



Il RAPPORTO INCREMENTALE in x_0 (di ampiezza h) è

$$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{(x_0+h)-x_0} = \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

In effetti il rapporto incrementale è $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$

Oss.: $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \dfrac{\cancel{AB}\cdot \sin\alpha}{\cancel{AB}\cdot\cos\alpha} = \operatorname{tg}\alpha$

Quindi il rapp. incrementale è la tg dell'angolo che si forma.

Discorso: Voglio far collassare il punto B verso il punto A in modo che la retta secante AB diventi al limite la tangente alla curva.

Def. Sia $f: (a,b) \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ funzione $x_0 \in (a,b)$ diremo che f è derivabile in x_0 se esiste finito il limite

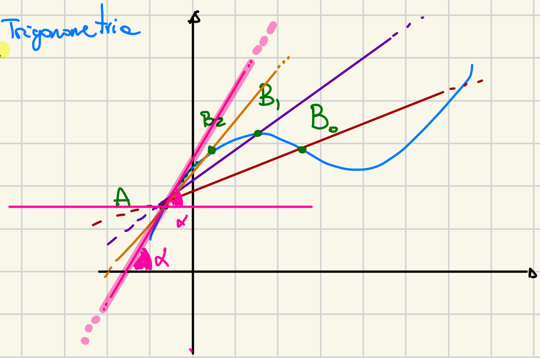
$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

faccio collassare B su A

Se tale limite esiste finito lo indicheremo con

$f'(x_0)$	$Df(x_0)$	$\dfrac{df}{dx}(x_0)$	$\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0)$
f primo in x_0	De f in x_0	de f su de x in x_0	de f su de x in x_0

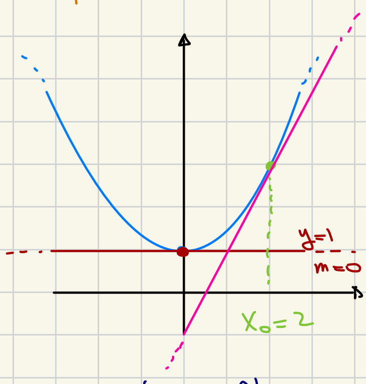
Oss.: La derivata è il valore della tangente dell'angolo α (Trigonometria) dove α è l'angolo che la tangente alla curva (Geometria) forma con il verso pos. dell'asse x



Dovreste sapere che $tg\,\alpha$ non è altro che m coeff. angolare della retta

Dunque la derivata di una funzione in un punto non è altro che il coeff. angolare della retta tangente al grafico in quel punto

Esempio: $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\quad f(x) = x^2+1$



$X_0 = 0$

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} =$$

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(0+h)-f(0)}{h} =$$

$$\lim_{h\to 0} \frac{h^{\cancel{2}}+\cancel{1}-\cancel{1}^2}{\cancel{h}} = \lim_{h\to 0} h = 0$$

Calcola anche, se esiste, $f'(2)$ come esercizio.

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \overset{X_0=2}{=} \lim_{h\to 0} \frac{f(2+h)-f(2)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(\cancel{4}+h^2+4h+\cancel{1})-(\cancel{4}+\cancel{1})}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} (h+4) = 4$$

Coeff. angolare della retta tg al grafico in $X_0=2$ è 4.

Teorema (Esercizio): Sia $f:(a,b)\longrightarrow\mathbb{R}$ e sia $x_0\in(a,b)$. Supponiamo che f sia derivabile in x_0 con derivata $f'(x_0)$. Allora la retta tangente al grafico di f nel punto x_0 è:

$$[y-f(x_0)] = f'(x_0)\,[x-x_0]$$

Dim: In passato avete visto che se m è il coeff. angolare di una retta e la retta passa per $A=(x_A,y_A)$ tale retta ha equazione

$$(y-y_A) = m(x-x_A)$$

Nel nostro caso la retta ha $m=f'(x_0)$ per def e la retta passa per $A=(x_0,f(x_0))$ perché A sta nel grafico. Usando la formula sopra si ha la tesi.

$\square$

Back to esempio: $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ $\quad f(x)=x^2+1$

(1) Retta tg al grafico in $x_0=0$
Per la formula

$$[y-f(x_0)] = f'(x_0)\,(x-x_0)$$

$$[y-\overbrace{f(0)}^{=1}] = \overbrace{f'(0)}^{=0}\,(x-0)$$

$$y-1=0 \rightsquigarrow \boxed{y=1}$$

(2) Retta tg al grafico in $x_0=2$
Per la formula

$$[y-f(2)] = f'(2)\cdot(x-2)$$

$$y-5 = 4(x-2)$$

$$\boxed{y = 4x-3}$$

Domanda: C'è un modo di fare la derivata di tutta la funzione insieme?

Def: Sia $f:(a,b)\longrightarrow\mathbb{R}$ derivabile in ogni pto $x_0\in(a,b)$. Definiamo la funzione derivata

$$f':(a,b)\longrightarrow\mathbb{R}$$

Tale che $f'(x)$ è la derivata della funzione nel punto x.

Esempio: $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ $\quad f(x) = x^2+1$

Per calcolare la funzione derivata, faccio il limite del rapporto increm. in un pto generico x.

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{[(x+h)^2+1]-(x^2+1)}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{[\cancel{x^2}+h^2+2xh\cancel{+1}]-(\cancel{x^2}\cancel{+1})}{h} = \lim_{h \to 0}(h+2x) = 2x$$

Dunque la funzione derivata è $f'(x) = 2x$ (si fanno tutte le deriv. insieme)

Derivate delle funzioni elementari (mattoncini per costruire)

(1) $f(x) = k$ costante $\qquad f'(x) = 0$

(2) $f(x) = x^n \quad n \geq 1, n \in \mathbb{N}$ $\qquad f'(x) = n \cdot x^{n-1}$

(3) $f(x) = \sin x$ $\qquad f'(x) = \cos x$

(4) $f(x) = \cos x$ $\qquad f'(x) = -\sin x$

(5) $f(x) = e^x$ $\qquad f'(x) = e^x$

(6) $f(x) = a^x \quad a>0, a \neq 1$ $\qquad f'(x) = a^x \ln a$

(7) $f(x) = \ln x$ $\qquad f'(x) = 1/x$

(8) $f(x) = \log_a x \quad a>0, a\neq 1$ $\qquad f'(x) = \frac{1}{x} \cdot \log_a e$

(2bis) $f(x) = x^\alpha, \quad \alpha \neq 0, \alpha \in \mathbb{R}$ $\qquad f'(x) = \alpha \cdot x^{\alpha-1}$