Settimana: 12

Materia: Matematica
Classe: 5A
Data: 1/12/25

Pag 1686 n 117

$g(x)$

$g(0) = 0$
$g'(0) = 0$
$g''(0) = 0$

$g'''(0) = 1$
$g^{(4)}(0) = 1$
$g^{(5)}(0) = 1$

Bones Chiara

Hip: $\boxed{g(x) = \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \frac{x^5}{120}}$

$$g'(x) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{4x^3}{24} + \frac{5}{120}x^4$$

$$g''(x) = x + \frac{12x^2}{24} + \frac{20}{120}x^3$$

$$g'''(x) = 1 + \frac{24x}{24} + \frac{60}{120}x^2$$

$$g^{(4)}(x) = 1 + x$$

$$g^{(5)}(x) = 1$$

n 121

$g(x) = f(x) - f(2x)$

$g'(1) = 5$
$g'(2) = 7$

Definisco $h(x) = f(x) - f(4x)$ Quanto fa $h'(1) = ?$

$$g'(x) = f'(x) - f'(2x) \cdot 2$$

$$5 = f'(1) - 2f'(2)$$

$$7 = f'(2) - 2f'(4)$$

$$\boxed{f'(1)} = 5 + 2f'(2)$$

$$\boxed{2f'(4)} = f'(2) - 7$$

$$h'(x) = f'(x) - f'(4x) \cdot 4$$

$$h'(1) = \boxed{f'(1)} - \boxed{4f'(4)}$$

$$= 5 + 2f'(2) - 2\left(f'(2) - 7\right)$$

$$= 5 + 2\cancel{f'(2)} - 2\cancel{f'(2)} + 14 = 19$$

n 118

$$y = -4x + k$$

$$f(x) = x^3 - 4x^2 + 5$$

Trova k t.c. la retta è tangente alla curva.

$$f'(x) = 3x^2 - 8x$$

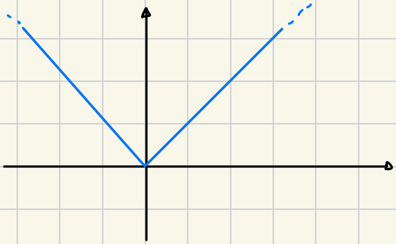
Derivata = coeff angolare dato

$$\boxed{f'(x) = -4}$$

$$-4 = 3x^2 - 8x$$

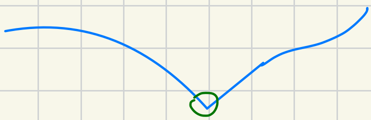
$$3x^2 - 8x + 4 = 0$$

Remind: A volte le funzioni <u>NON</u> sono derivabili



$f(x) = |x|$ Non è derivabile in $x = 0$

(1) Punto Angoloso (a)



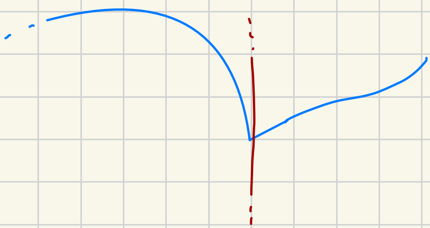
Punto angoloso

$$f'_-(x_0) = \ell$$

$$f'_+(x_0) = m$$

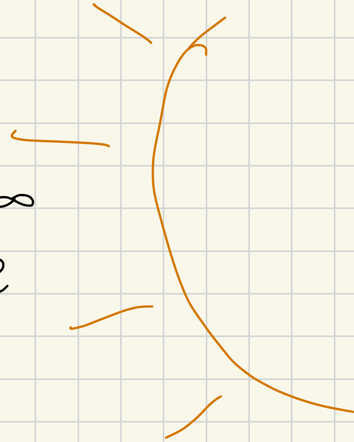
$$m \neq \ell$$

(b) Punto angoloso



$$f'_-(x_0) = \pm\infty$$

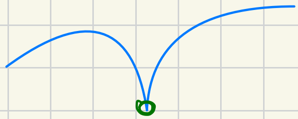
$$f'_+(x_0) = \ell$$



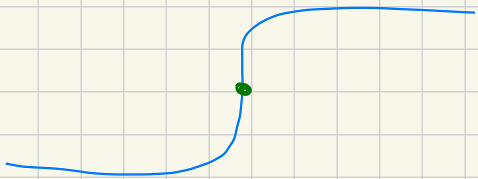
2) Cuspide (Cuore)

$$f'_-(x_0) = -\infty$$

$$f'_+(x_0) = +\infty$$



3) Flesso a tangente verticale

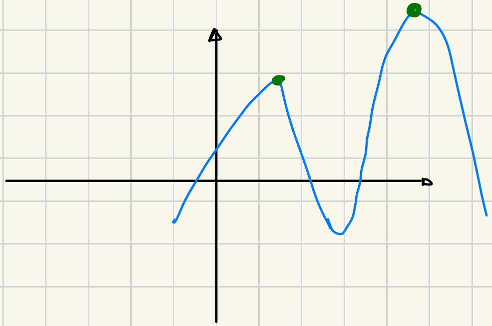


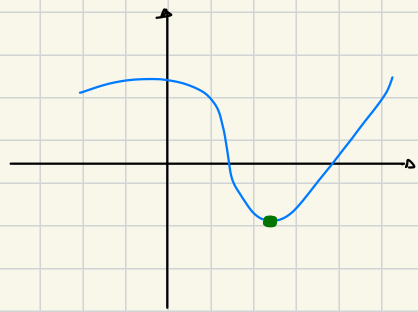
$f'_-(x_0) = +\infty$

$f'_+(x_0) = +\infty$

Def: Data $f: (a;b) \longrightarrow \mathbb{R}$, x_0 è detto punto di massimo locale se $\exists I(x_0) \subseteq (a;b)$ t.c. $f(x_0) \geq f(c)$ $\forall c \in I(x_0)$.

x_0 è detto di minimo locale se $\exists I(x_0) \subseteq (a;b)$ t.c. $f(x_0) \leq f(c)$ $\forall c \in I(x_0)$





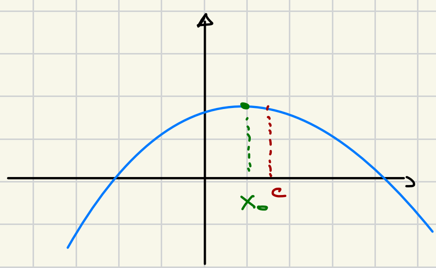
Teorema Luca Bruni (feat Fermat)

Sia $f: (a;b) \longrightarrow \mathbb{R}$ una funzione derivabile e sia x_0 un massimo locale. Allora $f'(x_0) = 0$

Dim: So che $\forall c \in I(x_0)$ $f(x_0) \geq f(c)$. Devo dimostrare che la derivata in x_0 è 0.

Posso scrivere $c = x_0 + h$

$f(x_0) \geq f(c) = f(x_0 + h)$



$$f(x_0) \geq \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} \cdot h + f(x_0)$$

Suppongo per assurdo che $\boxed{f'(x_0) > 0}$. Allora, per il teo di permanenza del segno della f_z

$$g(h) = \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$$

$g(h) > 0$ in un intorno di 0. Ma allora ho:

$$\cancel{f(x_0)} \geq g(h) \cdot h + \cancel{f(x_0)}$$

$$g(h) \cdot h \leq 0$$

Ma questo è assurdo in quanto $g(h) > 0$ e $h > 0$

Esercizio: Sistemare il caso $f'(x_0) < 0$.

Conclusione: Dato che $\left.\begin{array}{l} f'(x_0) > 0 \\ f'(x_0) < 0 \end{array}\right\}$ Danno Assurdi $\Rightarrow f'(x_0) = 0$

$\square$

Pag 1708 n 20

$$f(x) = -\sqrt[3]{x^2} = -x^{2/3}$$

(1) Faccio la derivata classica: $f'(x) = -\frac{2}{3} x^{-1/3} = -\frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$

(2) Trovo i problemi $x = 0$

(3) Devo vedere "a mano" con la definizione la derivata in $x = 0$

(4) fare derivate sx e dx in 0 e vedere cosa accade

$$f'_-(0) = \lim_{h \to 0^-} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} =$$

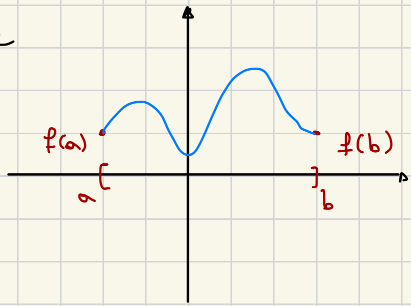
$$= \lim_{h \to 0^-} \frac{-\sqrt[3]{h^2}}{h} = \lim_{h \to 0^-} -\frac{1}{h^{1/3}} = +\infty$$

$$f'_+(0) = \lim_{h \to 0^+} -\frac{1}{h^{1/3}} = -\infty$$

$\Rightarrow$ È cuspide

Teorema di Rolle:

Sia $f : [a;b] \longrightarrow \mathbb{R}$ una funzione



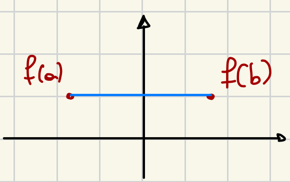
1) f è continua in $[a;b]$
2) f è derivabile in $(a;b)$
3) $f(a) = f(b)$

$\Rightarrow \exists c \in (a;b)$ t.c. $f'(c) = 0$

Oss: I punti con derivata 0 sono i massimi o i minimi

Dim.

Caso 1:

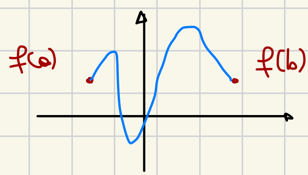


La funzione è costante

Dunque la derivata in ogni punto è 0 e ho vinto

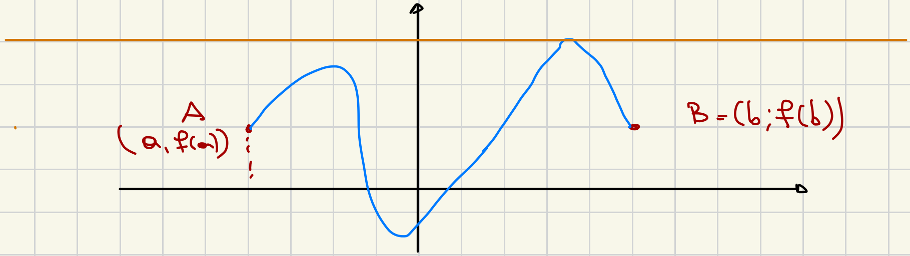
Caso 2:

La funzione NON è costante



Per Teorema Weiers ammette max e min.
Per Teorema di Fermat, nei punti di max e min la derivata è 0

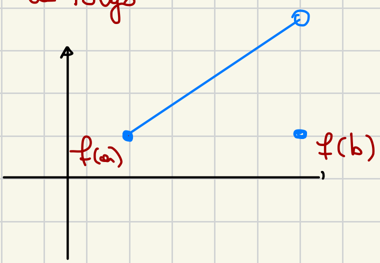
Idea geometrica: Il teorema di Rolle può essere pensato così: Faccio la retta che congiunge punto iniziale e finale e poi DEVE esistere una parallela a quella retta tangente alla curva



Controesempi al teorema di Rolle

1) f continua in $[a;b]$

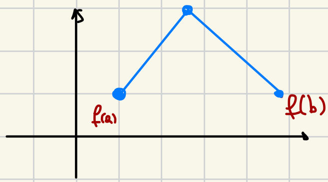
la tolgo



⇝ Non c'è pto in cui la derivata è 0

2) f derivabili in (a,b)

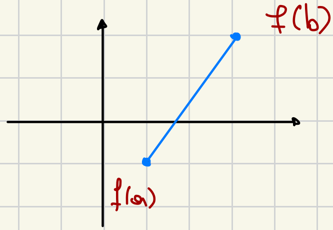
la tolgo



⇝ Non c'è pto in cui la derivata è 0

3) $f(a) = f(b)$

la tolgo



⇝ Non c'è pto in cui la derivata è 0

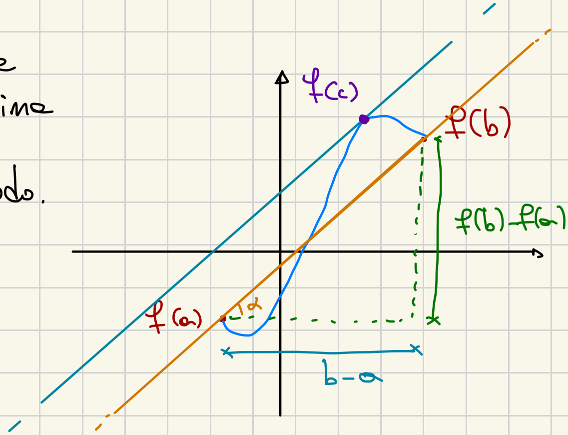
Teorema di Lagrange (o teorema del valor medio)

Sia $f: [a;b] \longrightarrow \mathbb{R}$ funzione t.c.

1) f continua in $[a;b]$
2) f derivabile in $(a;b)$

Allora esiste $c \in (a;b)$ t.c. $f'(c) = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$

Geometricamente: È esattamente la stessa interpretazione di prima dove però la retta adesso può essere in qualsiasi modo.



Dim: Segue dal Teorema di Rolle in questo senso:

Definisco la funzione

$$g(x) = f(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a} x$$

1) $g(x)$ è continua perché f è continua in $[a;b]$
2) $g(x)$ è derivabile poiché f è derivabile in $(a;b)$
3)

$$g(a) = f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \cdot a =$$

$$= \left[b f(a) - a\cancel{f(a)} - a f(b) + a \cancel{f(a)}\right] \cdot \frac{1}{b-a}$$

$$= \left[b f(a) - a f(b)\right] \cdot \frac{1}{b-a}$$

$$g(b) = f(b) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \cdot b$$

$$= \left[b \cancel{f(b)} - a f(b) - b \cancel{f(b)} + b f(a)\right] \cdot \frac{1}{b-a}$$

$$= \left[b f(a) - a f(b)\right] \frac{1}{b-a}$$

Dato che $g(a) = g(b)$ vale Rolle, dunque $\exists c \in (a;b)$ t.c

$$g'(c) = 0 \implies f'(c) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = 0 \implies f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

□

Esercizio: Fare i controesempi al teorema di Lagrange

Conseguenze del teorema di Lagrange

Corollario 1: Sia $f: [a;b] \longrightarrow \mathbb{R}$ continua e derivabile in $(a;b)$ e tale che $f'(x) = 0 \quad \forall x \in (a;b)$. Allora f è una funzione costante

Dim: Voglio che $f(x)$ sia sempre lo stesso valore. Considero la funzione definita in $[a;x]$, cioè restringo l'intervallo. Per Lagrange $\exists c \in [a;x]$ t.c.

$$\underbrace{f'(c)}_{=0} = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

per Hip

$$\Longrightarrow \quad f(x) = f(a)$$

Dunque $f(x) = f(a) \quad \forall x \in [a;b]$ cioè f è costante $\square$

Coroll. 2: Siano $f, g : [a;b] \longrightarrow \mathbb{R}$ continue, derivabili in $(a;b)$ tali che

$$f'(x) = g'(x) \qquad \forall x \in [a;b]$$

$\Longrightarrow f(x) - g(x)$ è costante

Dim: Per esercizio (Usare il corollario precedente)

Coroll 3: Data $f: [a;b] \longrightarrow \mathbb{R}$ derivabile in $(a;b)$ vale che

(1) Se $f'(x) > 0 \quad \forall x \in (a;b) \Rightarrow f(x)$ è crescente
(2) Se $f'(x) < 0 \quad \forall x \in (a;b) \Rightarrow f(x)$ è decrescente

Dim: (1) f è crescente in $(a;b)$ se $\forall x_1, x_2 \in (a,b) \quad x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$

Usiamo il teorema di Lagrange per la restrizione di f all'intervallo $[x_1;x_2]$ con $x_1 < x_2$. Dunque $\exists c\ (x_1;x_2)$ t.c.

$$f'(c) = \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$$

cioè

$$\underbrace{(x_2-x_1)}_{\substack{>0 \\ \text{Per Hip}}}\ \underbrace{f'(c)}_{\substack{>0 \\ \text{Derivata positiva}}} = f(x_2)-f(x_1)$$

$$\Rightarrow f(x_2)-f(x_1) > 0 \Rightarrow f(x_2) > f(x_1)$$

(2) Per Esercizio

□

↳ Conseguenze del Lemma dei 3 rapporti

Teorema: Vale il viceversa della conseguenza 3:

(1) Se f è una funzione crescente in $(a;b)$, allora $f'(x) \geq 0$ $\forall x \in (a;b)$

(2) Stesso enunciato per f_3 decrescente.

Dim: Non richiesto.

Pag 1737 n 36

$f(x) = \ln\sqrt{3x+x^2}$ Fare studio di f_3.

(1) Dominio: $3x+x^2 > 0$

$x(x+3) > 0 \rightsquigarrow \boxed{x<-3 \ \vee \ x>0}$

$f: Dom(f) \longrightarrow \mathbb{R}$

(2) Assi: $x=0$ IMP

$y=0$ $\ln\sqrt{3x+x^2} = 0 \Rightarrow \sqrt{3x+x^2} = 1$ $x^2+3x = 1$

$x^2+3x-1 = 0$

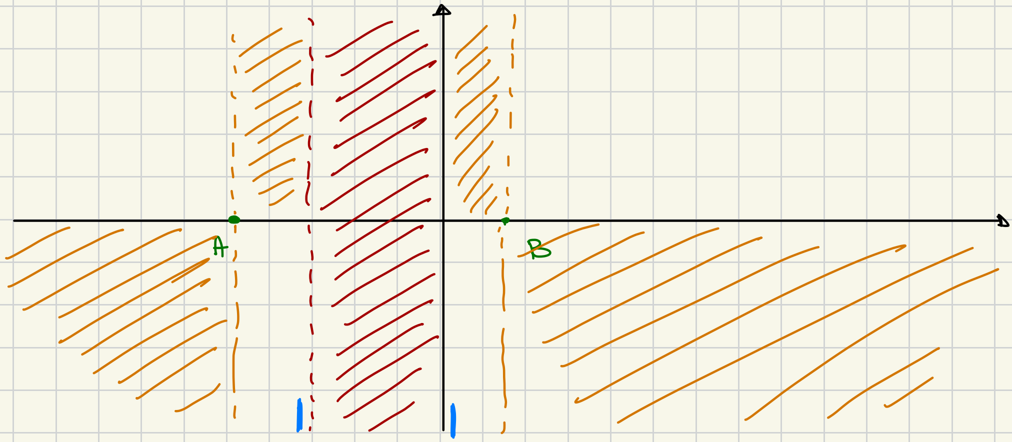
$$x_1/x_2 = \frac{-3 \pm \sqrt{13}}{2} \begin{cases} \frac{-3+\sqrt{13}}{2} \\ \frac{-3-\sqrt{13}}{2} \end{cases}$$

$B = \left(\frac{-3+\sqrt{13}}{2}; 0\right)$

$A = \left(\frac{-3-\sqrt{13}}{2}; 0\right)$

(3) Segno: $\ln\sqrt{3x+x^2} \geq 0$ $\quad \cancel{\frac{1}{2}} \ln(3x+x^2) \geq 0$

$3x+x^2 \geq 1 \quad \rightsquigarrow \quad x < \frac{-3-\sqrt{13}}{2} \quad \vee \quad x > \frac{-3+\sqrt{13}}{2}$



(4) $\lim_{x\to -3} \ln\sqrt{3x+x^2} = -\infty$ $\qquad \lim_{x\to 0} f(x) = -\infty$

$\lim_{x\to \pm\infty} \ln\sqrt{3x+x^2} = +\infty$ $\qquad$ La funzione NON ha poi asint. obliqui (Da verificare)

(5) DERIVATA PRIMA: Si calcola la derivata prima $f'(x)$ e la si pone ≥ 0

- Quando la derivata è esattamente 0, quello sarà un punto stazionario È una Def. . Potrebbero poi essere
  1) Minimo
  2) Massimo
  3) Flesso (spiego più avanti cosa è)

- Le parti in cui $f'(x) > 0$ la funzione è crescente