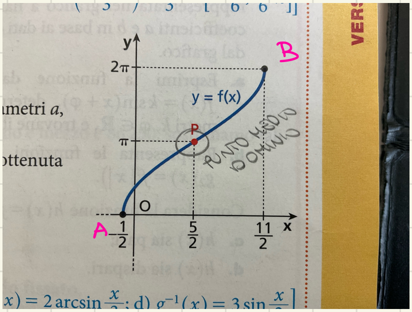
Pag 775 n 86

$f(x) = a + b \arcsin[c(x+d)]$ $\qquad b, c > 0$

$Dom(f) = [-\frac{1}{2}; \frac{11}{2}]$ valori sulla x del grafico



$Im(f) = [0; 2\pi]$ valori sulla y del grafico

$A = (-\frac{1}{2}; 0)$, $P = (\frac{5}{2}; \pi)$, $B = (\frac{11}{2}; 2\pi)$

$$\begin{cases} 0 = a + b \arcsin\left[c\left(-\frac{1}{2} + d\right)\right] \\ \pi = a + b \arcsin\left[c\left(\frac{5}{2} + d\right)\right] \\ 2\pi = a + b \arcsin\left[c\left(\frac{11}{2} + d\right)\right] \end{cases}$$

Dato che $\arcsin : [-1; 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ il suo dominio è $[-1; 1]$ e dunque deve valere che

$$\boxed{-1 \leq c(x+d) \leq 1}$$

Nei punti estremali vale quindi che

$$\begin{cases} -1 = c\left(-\frac{1}{2} + d\right) & \rightsquigarrow \text{Val estremale a sx} \\ 1 = c\left(\frac{11}{2} + d\right) & \rightsquigarrow \text{Val estremale a dx} \end{cases}$$

$$\begin{cases} -1 = -\frac{c}{2} + cd \\ 1 = \frac{11}{2}c + cd \end{cases} \uparrow - \qquad 2 = 6c \rightsquigarrow c = \frac{1}{3}$$

$$1 = \frac{11}{2} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{3}d \rightsquigarrow 6 = 11 + 2d \rightsquigarrow d = -\frac{5}{2}$$

Metto c, d trovati nelle equazioni sopra e calcolo a, b.

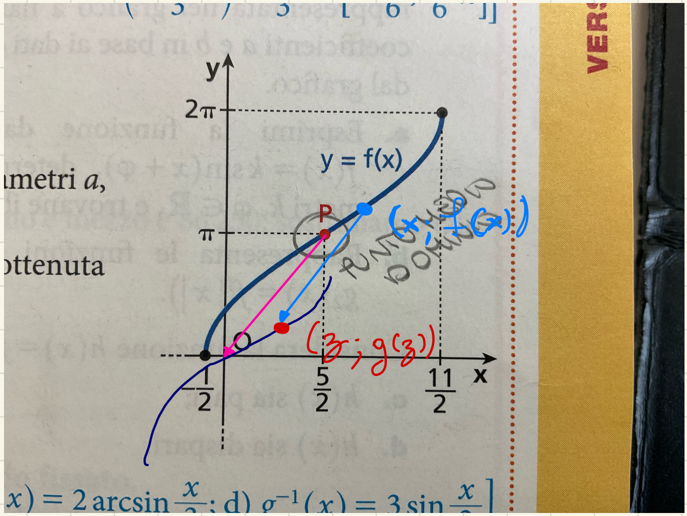
$$\begin{cases} \pi = a + b \arcsin\left(\frac{1}{3}\left(\frac{5}{2}-\frac{5}{2}\right)\right) \\ 0 = a + b \arcsin\underbrace{\left(\frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}-\frac{5}{2}\right)\right)}_{-1} \end{cases}$$

$\sin(\alpha) = -1$

$$\begin{cases} \pi = a + 0 \\ 0 = \pi + b\left(-\frac{\pi}{2}\right) \end{cases} \qquad \begin{cases} a = \pi \\ b = 2 \end{cases}$$

$$f(x) = \pi + 2\arcsin\left(\frac{1}{3}\left(x-\frac{5}{2}\right)\right)$$

(b) Traslo il grafico e fallo diventare una funzione $g(z)$ tale che $g(z)$ ha centro di simmetria nell'origine.



$P = \left(\frac{5}{2}; \pi\right)$

Per portare il pto P nell'origine devo togliere $\left(\frac{5}{2}; \pi\right)$

e devo fare la stessa cosa per ogni punto. Per ottenere $(z, g(z))$ a partire da $(x, f(x))$ deve valere che:

$$\begin{cases} z = x - \frac{5}{2} \\ g(z) = f(x) - \pi \end{cases} \quad \rightsquigarrow \quad x = z + \frac{5}{2}$$

$$g(z) = f\left(z+\frac{5}{2}\right) - \pi$$

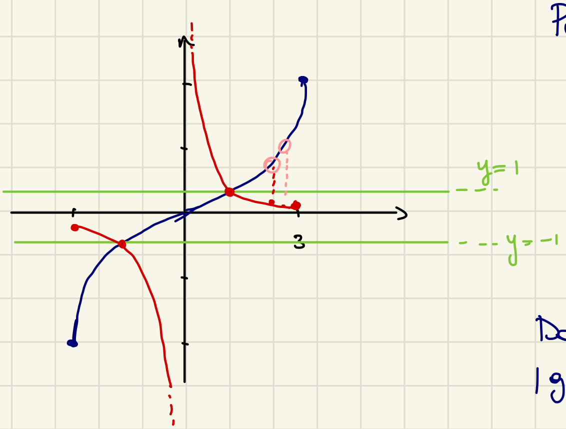
$$= \cancel{\pi} + 2\arcsin\left(\frac{1}{3}\left(z+\cancel{\frac{5}{2}}-\cancel{\frac{5}{2}}\right)\right) - \cancel{\pi}$$

$$= 2\arcsin\left(\frac{1}{3}z\right)$$

$$\rightsquigarrow \quad g(x) = 2\arcsin\left(\frac{x}{3}\right)$$

(c) Traccia il grafico di $\frac{1}{g(x)} = \frac{1}{2\arcsin\left(\frac{x}{3}\right)}$

Si, ma $2\arcsin\left(\frac{x}{3}\right) \neq 0$, cioè $x \neq 0$



Prendo la retta $y=1$

$$g(x) \cdot \frac{1}{g(x)} = 1$$

Nel punto in cui $g(x)=1$, anche $\frac{1}{g(x)} = 1$

Dato che il prodotto è 1, se $|g(x)| \geq 1 \Rightarrow \frac{1}{|g(x)|} \leq 1$

Dato $g(x) \to 0$, $\frac{1}{g(x)} \to +\infty$ "$\to$" = limite

Per simmetria si ottiene il ramo nel III quadrante

(d) Trova l'equazione di $g^{-1}(x)$ e disegna il grafico.

Verifico big: $\boxed{\text{inj}}$ $g(x_1) = g(x_2)$

$$\cancel{2}\arcsin\left(\frac{x_1}{3}\right) = \cancel{2}\arcsin\left(\frac{x_2}{3}\right) \leadsto \text{Per iniettività di } \arcsin(\cdot)$$

$$\frac{x_1}{3} = \frac{x_2}{3} \leadsto x_1 = x_2 \quad \underline{\text{Iniettiva}}$$

$\boxed{\text{Sur}}$ $g: [-3;3] \longrightarrow [-\pi;\pi]$

Dal grafico iniziale

Sia $y \in [-\pi, \pi]$ $\quad y = 2\arcsin\left(\frac{x}{3}\right) \quad \frac{y}{2} = \arcsin\left(\frac{x}{3}\right)$

$\leadsto \sin\frac{y}{2} = \frac{x}{3} \leadsto 3\sin\left(\frac{y}{2}\right) = x$. Dato che non ci sono C.E. la funzione è suriettiva e vale

$$g^{-1}: [-\pi;\pi] \longrightarrow [-3;3] \qquad g^{-1}(y) = 3\sin\left(\frac{y}{2}\right)$$