Settimana: 2

Materia: Matematica
Classe: 5A
Data: 22/09/25

Argomenti: Es. funzioni e concept limite. Definizioni intorni, sup, inf, punti isolati, punti di acc. Esempi. Teo compl. reali: Esercizi su inf, sup, max, min. limitato, illimitato

Pag 1404 n. 91

$$f(x) = \frac{x^2+ax}{x^2+b} \qquad a,b \in \mathbb{R}$$

(a) Trova a,b in modo che $A=\left(1;-\frac{1}{2}\right)$ $B=\left(-2;\frac{8}{5}\right)$ stiano nel graf.

Impongo il passaggio per i punti

$$\begin{cases} -\frac{1}{2} = \frac{1+a}{1+b} \\ \frac{8}{5} = \frac{4-2a}{4+b} \end{cases} \qquad \begin{cases} -1-b = 2+2a \\ 32+8b = 20-10a \end{cases} \qquad \begin{cases} 2a+b=-3 \\ 10a+8b=-12 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2a+b=-3 \quad \cdot 4 \\ 5a+4b=-6 \end{cases} \quad \downarrow -$$

$$3a=-6 \rightsquigarrow \boxed{a=-2} \rightsquigarrow -2\cdot 2+3=-b \rightsquigarrow \boxed{b=1}$$

$$\boxed{f(x) = \frac{x^2-2x}{x^2+1}}$$

(b) Studio $f(x)$:

(1) Dom(f): $\quad x^2+1 \neq 0$ Sempre $\quad \mathrm{Dom}(f)=\mathbb{R}$

$$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

(2) Int con gli assi Asse y: $x=0$ $f(0)=0$ $C=(0,0)$

Asse x: $y=0$ $\dfrac{x^2-2x}{x^2+1}=0 \rightsquigarrow x^2-2x=0 \rightsquigarrow x(x-2)=0$

$x=0\ ,\ 2$

$C=(0,0)$ $D=(2,0)$

Ti dice dove cancellare il sotto

(3) Segno: $f(x)\geq 0$ $\dfrac{x^2-2x}{x^2+1}\geq 0$

N: $x^2-2x\geq 0$ $x=0,2$ $x\leq 0 \ \vee \ x\geq 2$

D: $x^2+1>0$ $\forall x\in\mathbb{R}$

$\boxed{x\leq 0 \ \vee \ x\geq 2}$

(3.5) Im(f): $y=\dfrac{x^2-2x}{x^2+1}$

$(x^2+1)y = x^2-2x \rightsquigarrow x^2y+y=x^2-2x \rightsquigarrow$

$x^2(y-1)+2x+y=0$

$\Delta = 4-4(y-1)(y) = 4-4y^2+4y = -4y^2+4y+4$

Oss: L'eq. di II grado in x ha soluzione solo se $\Delta\geq 0$

Dunque per trovare l'Im(f) impongo $\Delta\geq 0$

$-4y^2+4y+4\geq 0 \overset{\cdot\frac{1}{-4}}{\rightsquigarrow} y^2-y-1\leq 0$

$\Delta = 1 + 4 = 5 \leadsto y_{1/2} = \frac{1 \mp \sqrt{5}}{2}$

È proprio = . Scelto y là dentro, trovo x che ci va che è una delle sol. dell'eq di II grado

$\frac{1-\sqrt{5}}{2} \le y \le \frac{1+\sqrt{5}}{2} \leadsto Im(f) = \left[\frac{1-\sqrt{5}}{2} ; \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right]$

(c) Se $x \neq 0$ posso riscrivere la $f(x) = \frac{x^2+ax}{x^2+b}$ come

$$f(x) = \frac{1+\frac{a}{x}}{1+\frac{b}{x^2}}$$

Ho diviso per x^2 sia al num che al denom.

Se $\underbrace{x \text{ diventa molto grande}}_{x \to +\infty}$, cosa succede alla funzione? Traccia un grafico

$$f(x) = \frac{1-\frac{2}{x}}{1+\frac{1}{x^2}}$$

$f(10) = 0,79$
$f(10^2) = 0,979902...$
$f(10^3) = 0,99799...$
$f(10^4) = 0,999799...$
$\vdots$

Idea: Per x che diventa molto grande $(x \to +\infty)$ ci sono dei modi per calcolare il comportamento delle funzioni. Nel caso sopra la funzione si appiattisce alla retta $y = 1$. Si scrive

$$\boxed{\lim_{x \to +\infty} f(x) = 1}$$

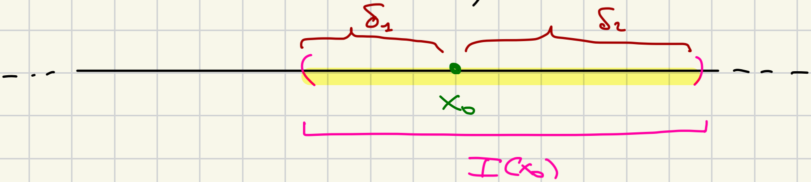
Warning: Si appiattisce, MA non tocca mai $y=1$ in questo caso.

Setting: Parliamo di numeri reali ($\mathbb{R}$), parleremo di funzioni di variabile reale a valori reali (Dominio e Codominio sottoinsiemi di $\mathbb{R}$). Facciamo Analisi 1

Def: Dato un punto $x_0 \in \mathbb{R}$, un intorno (completo) di x_0 è un qualsiasi intervallo aperto che contiene x_0. Si indica

↳ Estremi NON compresi

$$I(x_0) = \left]x_0 - \delta_1 \,;\, x_0 + \delta_2\right[\qquad \delta_1, \delta_2 \in \mathbb{R}^+$$

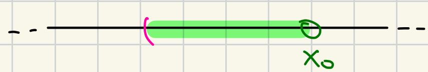


"δ" = delta

Diremo che un intorno è circolare se $\delta_1 = \delta_2$ (vuol dire che x_0 sta al centro dell'intervallo

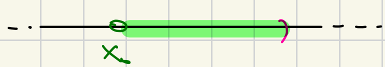
Def: Chiameremo Intorno sinistro di x_0 un qualsiasi insieme della forma

$$I^-(x_0) = \left]x_0 - \delta \,;\, x_0\right[\qquad \delta > 0$$



e analogamente un intorno destro di x_0

$$I^+(x_0) = \left]x_0 \,;\, x_0 + \delta\right[\qquad \delta > 0$$

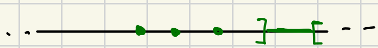


Def: Un sottoinsieme $F \subseteq \mathbb{R}$ è superiormente limitato se $\exists \alpha \in \mathbb{R}$ t.c. $\forall x \in F$, $x \leq \alpha$

↝ Cioè c'è un elemento nei Reali più grande di tutti gli elementi del mio insieme

Un elemento α che fa questa cosa è detto maggiorante per F

Esempio: $F = \{1, 2, 3\} \cup \left]4, 5\right[$



Def / Esercizio: Scrivere la def di inferiormente limitato e di minorante per $F \subseteq \mathbb{R}$

Def: $F \subseteq \mathbb{R}$ è illimitato se non ha maggioranti o minoranti
(Da una delle due parti va all'infinito)

Esempio: $F =]0,1[$ è inf. limitato
sup. limitato
ma comunque ha infiniti elementi

Def: Dato $F \subseteq \mathbb{R}$ sup. limitato, chiamo **Estremo superiore** il più piccolo dei maggioranti. Si indica con $\sup(F)$

Dato $F \subseteq \mathbb{R}$ inf. limitato, chiamo **Estremo inferiore** il più grande dei minoranti. Si indica con $\inf(F)$

Es. Aurore: $F = \{1,2,3\} \cup]4,5[$ $\quad \sup(F) = 5$
$\inf(F) = 1$

Teorema - Completezza dei numeri Reali: Dato $F \subseteq \mathbb{R}$ sup. limitato (inf limitato), l'estremo superiore (l'estremo inferiore) esiste sempre in $\mathbb{R}$ ed è unico.

Esempio: $F = \{x \in \mathbb{Q} \mid x^2 < 2\} \subseteq \mathbb{Q}$

↳ Frazioni che al □ sono minori di 2

⇝ $\sup(F) = \sqrt{2}$ se vedessi $F \subseteq \mathbb{R}$. Dato che penso $F \subseteq \mathbb{Q}$ non c'è estremo superiore

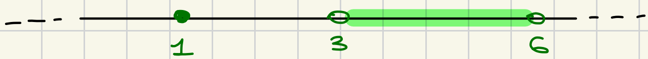
Def: Data $f: A \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, chiamiamo

$$\sup(f) = \sup(\mathrm{Im}(f))$$

$$\inf(f) = \inf(\mathrm{Im}(f))$$

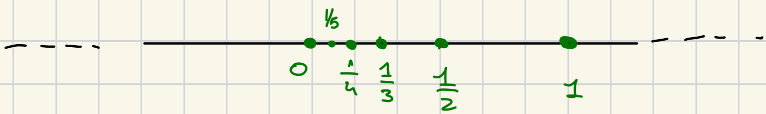
Def: Sia $x_0 \in A \subseteq \mathbb{R}$. x_0 è detto PUNTO ISOLATO di A se esiste un intorno di x_0 che NON contiene altri punti di A eccetto x_0

Esempio: ▷ $A = \{1\} \cup \,]3,6[$



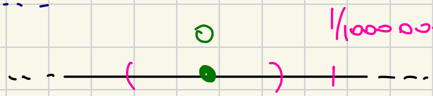
⇝ $\{1\}$ è isolato, basta prendere l'intorno $]\frac{1}{2};\frac{3}{2}[$

▷ $B = \{0, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \dots\} = \{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\} \cup \{0\}$



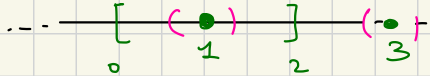
⇝ $\frac{1}{2}$ è isolato, $\frac{1}{3}$ è isolato ...

⇝ 0 <u>Non</u> è un pto isolato
perché quell'insieme di numeri si avvicina a 0 sempre di più.



Def: Dato x_0 pto di $\mathbb{R}$, x_0 è detto pto di Accumulazione di un sottoinsieme A se ogni intorno di x_0 contiene infiniti punti di A.

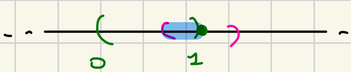
Esempio: $1 \in [0,2]$



è pto di Acc. per $A = [0,2]$ (ovvio)

Invece 3 <u>non</u> è di accumulazione per $[0,2]$

Esempio: $1 \in \mathbb{R}$ $A = (0,1)$

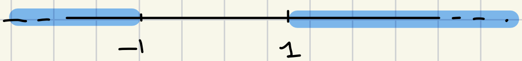


$1 \notin A$, ma è di Accum. per A. Infatti un intorno $(1-\delta, 1+\delta)$ di 1 conterrà infiniti numeri di A che sono quelli in $(1-\delta, 1)$

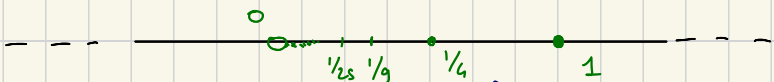
Pag 1444 n 11

a) $y = 1 + \sqrt{x^2 - 1}$ Dominio $= \{x \leq -1 \lor x \geq 1\}$

$= (-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$



n40: $E = \{x \mid x = \frac{1}{n^2}, n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\}$ $\inf(E) = 0$, $\sup(E) = 1$



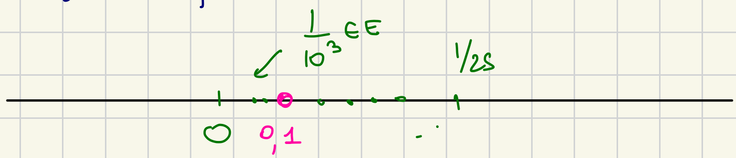
$E = \{1, \frac{1}{4}, \frac{1}{9}, \frac{1}{16}, \frac{1}{25}, \dots\}$

$\sup(E) = 1$ poiché $1 \in E$ ed è più grande di $\frac{1}{n^2}$ $\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$

Def: Se il $\sup(E)$ appartiene a E, prende il nome di Massimo e si indica con $\mathrm{Max}(E)$

Se l'$\inf(E)$ appartiene a E, si chiama minimo e si indica con $\min(E)$

Nell' esercizio $\sup(E) = \mathrm{Max}(E) = 1$



euristica

Mostro queste cose dette a parole matematicamente.

1) Devo mostrare che 0 è un minorante (cioè è più piccolo di tutti gli elementi di E). Ovvio perché in E ci sono solo num. positivi

Epsilon

2) $\forall \varepsilon > 0$ $\quad 0+\varepsilon$ NON può essere più piccolo di tutti i numeri di E.

Oss: Nel seguito ε gioca il ruolo dello 0,1 euristico

Scelgo n in modo che il numero $\frac{1}{n^2}$ sia più piccolo di ε. Impongo quindi

$$0 < \frac{1}{n^2} < \varepsilon$$

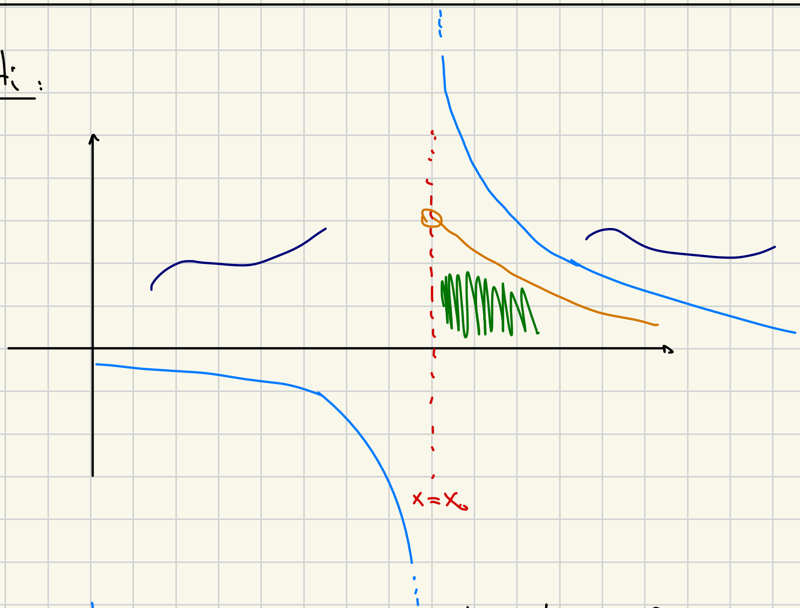
Dunque $n^2 > \frac{1}{\varepsilon}$, cioè $n > \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$.

Con i numeri: $\varepsilon = 0,1$ $\rightsquigarrow$ $n > 3,16$ $\rightsquigarrow$ dunque $\frac{1}{4^2} \in (0; 0,1)$

Ho scoperto che $\inf(E) = 0$, MA <u>NON</u> è un minimo perché non sta nell'insieme

---

Limiti:



Esempio:

$$f(x) = \frac{3}{x-1}$$

x	$f(x)$
1,5	6
1,1	30
1,01	300
1,001	3000

0,99	-300
0,999	-3000

Euristicamente: Il concetto di limite di una funzione permette di studiare il comportamento di una funzione in un punto avvicinandosi a piacere a quel punto. Warning: A volte quel punto NON sta nel Dominio (Esempio sopra $0, \pm\infty$)

Def: Sia $f: D \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ sia x_0 un punto di accumulazione per D. Diremo che il limite per f che tende a x_0 vale ℓ se

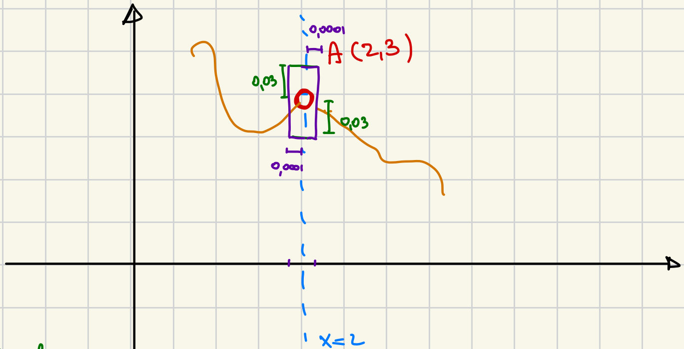
$x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ $\qquad$ $f(x) \in (\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon)$

$$\forall \varepsilon > 0, \ \exists \delta > 0 \ \text{ t.c. se } |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon$$

Si dice che f ha limite finito ℓ e si scrive

$$\boxed{\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell}$$

Oss: Non è detto che il limite esista in generale



$f: D \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

Suppongo che

$$\lim_{x \to 2} f(x) = 3$$

Mi avvicino a 2

Lungo f

e il ris sarà 3

Mi voglio avvicinare con dist 0,03 max y di 0,03

prova a vedere se 0,0001 funziona

$$\forall \varepsilon > 0, \ \exists \delta > 0 \ \text{ t.c. se } \underbrace{|x - x_0| < \delta}_{\text{Sono vicino sulla } x \text{ al più } \delta} \Rightarrow \underbrace{|f(x) - \ell| < \varepsilon}_{\text{Sono vicino sulla } y \text{ al più } \varepsilon}$$

quantifica la vicinanza su y

quantifica la vicinanza su x

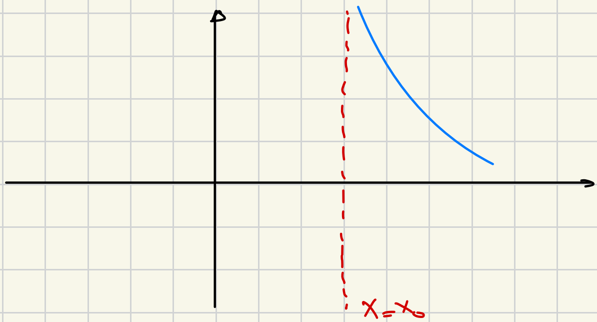
Def: Sia $f: D \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$; x_0 pto di accumulazione per D

Diremo che

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty$$

se $\forall M > 0$, $\exists \delta > 0$ t.c. $|x - x_0| < \delta \Rightarrow f(x) > M$

$x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$



Def: Sia $f: D \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, x_0 pto di acc. per D Diremo che

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = -\infty$$

se $\forall M < 0$, $\exists \delta > 0$ t.c. $|x - x_0| < \delta \Rightarrow f(x) < M$

Warning: Occhio che nella definizioni sopra il limite deve essere uguale sia venendo da destra che venendo da sinistra. Possiamo formalizzare questa cosa:

Def: Sia $f: D \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, x_0 pto di acc. per D. Chiamano

limite destro $\lim_{x \to x_0^+} f(x) = \begin{matrix} \ell \\ +\infty \\ -\infty \end{matrix}$ numero

se (caso ℓ): $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ t.c. $x \in (x_0, x_0 + \delta) \Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon$

limite sinistro $\lim_{x \to x_0^-} f(x) = \begin{matrix} \ell \\ +\infty \\ -\infty \end{matrix}$

se (caso ℓ): $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ t.c. $x \in (x_0 - \delta, x_0) \Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon$