Settimana: 1

Materia: Matematica
Classe: 5C
Data: 15/09/25

Argomenti:

Studio di funzione

$f(x) = \ln(2x+1)$ → Rappresenta la coordinata y

(1) Dom(f) = "argomento log > 0"

$2x+1>0 \leadsto x>-\frac{1}{2}$

$\text{Dom}(f) = \{x>-\frac{1}{2}\}$

⇒ La funzione ha senso solo se $x>-\frac{1}{2}$

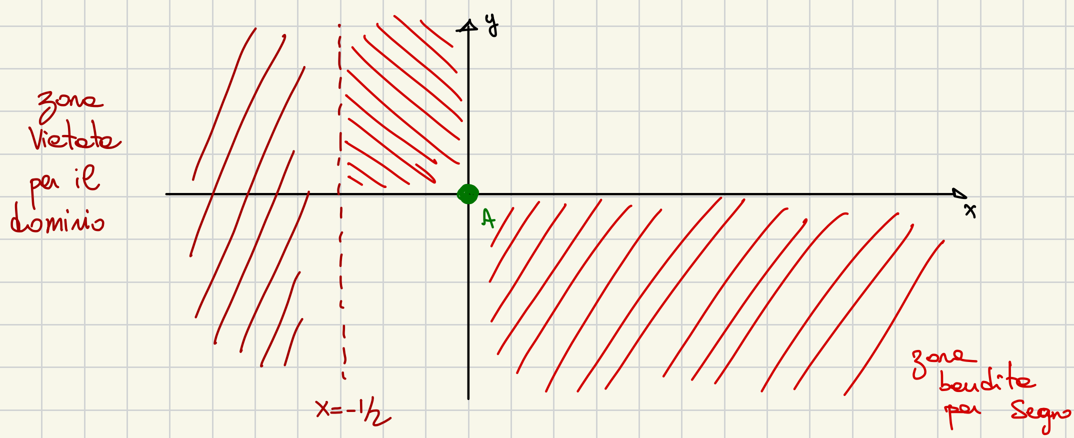
$f: \{x>-\frac{1}{2}\} \longrightarrow \mathbb{R}$] Scrittura formale di una funzione

Ricetta:

1) Dominio
2) Intersezione con assi
3) Segno della fz

}

Disegno



(2) Int con assi:

Asse x: $\begin{cases} y = \ln(2x+1) \\ y = 0 \end{cases}$ $\rightsquigarrow$ $\underbrace{\ln(2x+1) = 0}_{}$ $\quad 0 = \ln(1)$

$\downarrow$

$2x+1 = 1 \rightsquigarrow 2x = 0 \quad x = 0$

Non sbarrare i log, mi sento male

La funzione interseca asse x nel punto $A(0,0)$

Asse y: $\begin{cases} y = \ln(2x+1) \\ x = 0 \end{cases}$ $\rightsquigarrow$ $y = 0$

(3) Segno: $f(x) \geq 0$ Per i valori della soluzione che troviamo il grafico della funzione starà SOPRA l'asse x

$\ln(2x+1) \geq 0$
$\ln(2x+1) \geq \ln(1)$
$2x+1 \geq 1$
$x \geq 0$

Oss: Le zone possono cambiare solo quando il grafico passa per i punti trovati nel pto (2) della ricetta.

$$g(x) = \frac{(x^2-1)\log_3(x^3+x^2+x+1)\cdot 2^{x+1}}{2x}$$

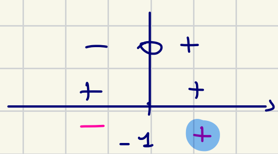
(1) Dominio

$x \neq 0$

$x^3+x^2+x+1 > 0 \quad \rightsquigarrow \quad x^2(x+1) + (x+1) > 0$

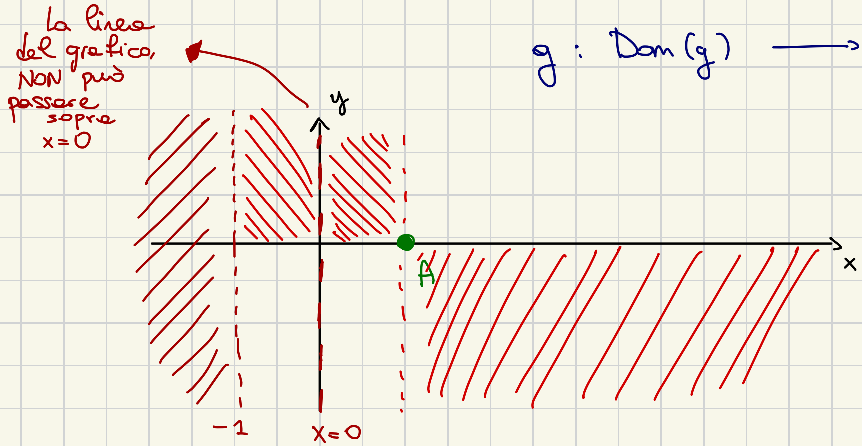
$(x+1)(x^2+1) > 0$

$x+1 > 0 \quad \rightsquigarrow \quad x > -1$
$x^2+1 > 0 \quad \rightsquigarrow \quad \forall x \in \mathbb{R}$



$\rightsquigarrow$ $\boxed{\text{Sol: } x > -1}$

$\text{Dom}(g) = \{x > -1 \,;\, x \neq 0\}$



$g : Dom(g) \longrightarrow \mathbb{R}$

(2) Asse y: $\begin{cases} x=0 \\ y = \dfrac{(x^2-1)\log_3[(x^2+1)(x+1)] \cdot 2^{x+1}}{2x} \end{cases}$ Impossibile perché $x=0$ NON è nel dominio

Asse x: $y=0$

$$\frac{(x^2-1)\cdot\log_3[(x^2+1)(x+1)]\ 2^{x+1}}{\cancel{2x}} = 0$$

Uno dei 3 fattori deve essere 0.

(1) $x^2-1=0 \leadsto x=\pm 1$ A $(1,0)$ B $(-1,0)$ ← Non Acc. x non può essere -1

(2) $\log_3(x^3+x^2+x+1) = \log_3(1)$

$x^3+x^2+x+\cancel{1} = \cancel{1}$

$x(x^2+x+1)=0 \leadsto x=0$ Non Accettabile per Dominio

$\leadsto x^2+x+1=0$ $\Delta = b^2-4ac = -3$

$\Delta<0 \Rightarrow$ Non c'è soluzione

(3) $2^{x+1}=0$ Impossibile: Gli esponenziali sono sempre positivi

$\leadsto$ Finito a caso

Pag 1363 n. 116

$$f(x) = \frac{\ln|3^x - 9|}{1 - e^{x^2-6x}}$$

(1) Dominio: $\begin{cases} 1 - e^{x^2-6x} \neq 0 \\ |3^x - 9| > 0 \end{cases}$

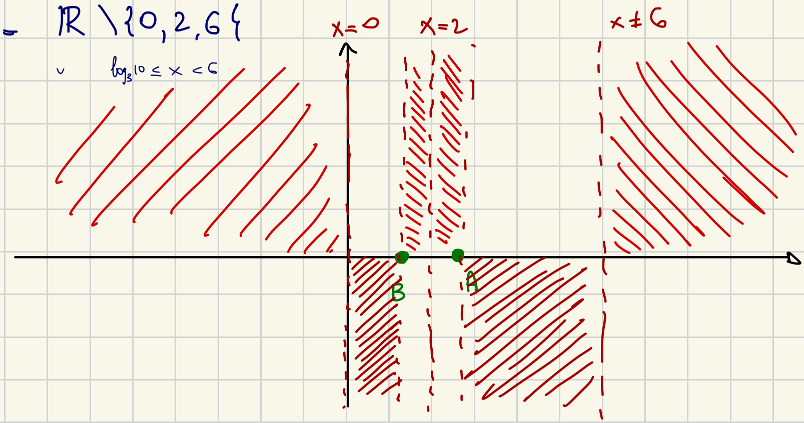
I) $e^{x^2-6x} \neq 1 = e^0 \leadsto x^2 - 6x \neq 0 \qquad x(x-6) \neq 0 \qquad x \neq 0, \; x \neq 6$

II) $|3^x - 9| > 0 \leadsto$ Val. assoluto sempre ≥ 0. Devo imporre solo $3^x - 9 \neq 0 \leadsto x \neq 2$

$3^x \neq 9 = 3^2$

Dom(f) = $\mathbb{R} \setminus \{0, 2, 6\}$

$0 < x \leq \log_3 8 \;\vee\; \log_3 10 \leq x < 6$



2) Int assi   Asse y. niente da fare perché $x \neq 0$ dominio

Asse x $\begin{cases} y = 0 \\ \dfrac{\ln|3^x - 9|}{1 - e^{x^2-6x}} = 0 \end{cases} \leadsto \ln|3^x - 9| = \boxed{0 = \ln(1)}$

$\leadsto |3^x - 9| = 1$

Caso a: $3^x - 9 \geq 0$

$x \geq 2$

$3^x - 9 = 1$

$3^x = 10$

$x = \log_3 10$

Verifico che la soluzione sta nel caso a.
E va bene!

$2 = \log_3 9 < \log_3 10$

$A\ (\log_3 10\ ;\ 0)$

Caso b: $3^x - 9 \leq 0$

$x \leq 2$

$-(3^x - 9) = 1$

$-3^x + 9 = 1$

$3^x = 8$

$x = \log_3 8$

Va bene $B\ (\log_3 8\ ;\ 0)$

3) Segno: $\dfrac{\ln|3^x - 9|}{1 - e^{x^2-6x}} \geq 0$

$N \geq 0 \qquad \ln|3^x - 9| \geq 0 = \ln(1)$

$|3^x - 9| \geq 1$

Caso a: $x \geq 2$

$3^x - 9 \geq 1$

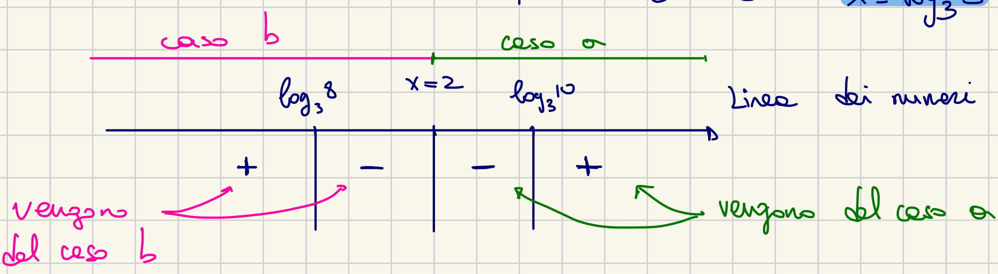
$3^x \geq 10 \qquad x \geq \log_3 10$

Caso b $x \leq 2$

$-(3^x - 9) \geq 1$

$-3^x + 9 \geq 1$

$3^x \leq 8 \qquad x \leq \log_3 8$

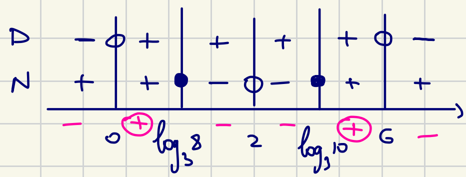


$D > 0 \qquad 1 - e^{x^2-6x} > 0 \qquad e^{x^2-6x} < 1 = e^0$

$x^2 - 6x < 0 \qquad x(x-6) < 0 \qquad x = 0, 6$

Sol: $\quad 0 < x < 6$

Graf. segni num e denom:



$$0 < x \leq \log_3 8 \quad \vee \quad \log_3 10 \leq x < 6$$

Goniometria:

$$f(x) = \sin^2(3x) + 7\sin(3x)\cos(3x) - 3$$

Ricetta senza disegno oppure col disegno nel periodo

0) Periodo: (domani)

1) Dom(f): $\mathbb{R}$

2) Int assi: $\quad x = 0$

$f(0) = 0 + 0 - 3 = -3$

$A = (0; -3)$

$y = 0$

$\sin^2(3x) + 7\sin(3x)\cos(3x) - 3 = 0$

$3x = t$

$\sin^2(t) + 7\sin(t)\cos(t) - 3 = 0$

Eq. omogenee di II grado

Lo porto al grado 2 con Rel fond.

$\sin^2 t + \cos^2 t = 1$

Compaiono sin e cos esattamente al grado 2 in ogni pezzo

$\leadsto \quad \sin^2(t) + 7\sin(t)\cos(t) - 3\sin^2(t) - 3\cos^2(t) = 0$

$2\sin^2 t - 7\sin t\cos t + 3\cos^2 t = 0$ ⇝ Divido tutto per $\cos^2(t)$ [Attenzione che $\cos(t)$ non sia 0]

$2\tan^2(t) - 7\tan(t) + 3 = 0$ $\tan(t) = z$

$2z^2 - 7z + 3 = 0$

$$z_1/z_2 = \frac{7 \pm \sqrt{49-24}}{4} \begin{cases} \frac{7+5}{4} = 3 \\ \frac{7-5}{4} = \frac{1}{2} \end{cases}$$

(1) $tg(t) = 3$ ⇝ $t = \arctan(3) + k\pi$

⇝ $3x = \arctan(3) + k\pi$ ⇝ $\boxed{x = \frac{\arctan(3)}{3} + \frac{k}{3}\pi}$

(2) $tg(t) = \frac{1}{2}$ ⇝ ... ⇝ $\boxed{x = \frac{\arctan(\frac{1}{2})}{3} + \frac{k}{3}\pi}$

Pag 1368 n 211

$f(x) = \arcsin\left(\log_2 \frac{x-1}{x}\right)$

$[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$ $\sin(\alpha) = x \longleftrightarrow \arcsin x = \alpha$

$[0; \pi]$ $\cos(\alpha) = x \longleftrightarrow \arccos x = \alpha$

$tg(\alpha) = x \longleftrightarrow \arctan x = \alpha$

(1) Dom(f) : $\boxed{\frac{x-1}{x} > 0}$

Dato che $-1 \leq \sin(\alpha) \leq 1$, nel nostro caso $\sin\alpha = \log_2 \frac{x-1}{x}$

$\Rightarrow -1 \leq \log_2 \frac{x-1}{x} \leq 1$

Remind: L'argomento di arcsin e di arccos DEVE essere compreso tra -1 e 1

$\boxed{-1 \leq \log_2 \frac{x-1}{x}}$, $\boxed{\log_2 \frac{x-1}{x} \leq 1}$

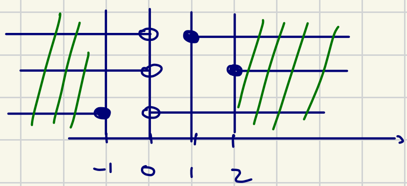
(I) $\frac{x-1}{x} > 0$ ⇝ N: $x > 1$; D: $x > 0$ $\qquad x < 0 \ \vee \ x > 1$

(II) $\log_2 \frac{x-1}{x} \geq -1$ ⇝ $\log_2 \frac{x-1}{x} \geq \log_2 2^{-1} = \log_2 \frac{1}{2}$ ⇝ iniettività

$\frac{x-1}{x} \geq \frac{1}{2} \qquad \frac{2x-2-x}{2x} \geq 0 \qquad \frac{x-2}{2x} \geq 0$ N: $x \geq 2$; D: $x > 0$ $\qquad x < 0 \ \vee \ x \geq 2$

(III) $\log_2 \frac{x-1}{x} \leq 1$ ⇝ $\log_2 \frac{x-1}{x} \leq \log_2 2$

$\frac{x-1}{x} \leq 2 \qquad \frac{x-1-2x}{x} \leq 0 \qquad \frac{x+1}{x} \geq 0$ N: $x \geq -1$; D: $x > 0$ $\qquad x \leq -1 \ \vee \ x > 0$



$\mathrm{Dom}(f) = \{ x \leq -1 \ \vee \ x \geq 2 \}$

(2) Int assi: Asse y: $x = 0$ Imp per dominio $\qquad$ nell'intervallo $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$

Asse x: $y = 0 \qquad \arcsin\left(\log_2 \frac{x-1}{x}\right) = 0 \qquad \left(\leftrightarrow \sin(0) = \log_2 \frac{x-1}{x}\right)$

$\log_2 \frac{x-1}{x} = 0$

$\log_2 \frac{x-1}{x} = \log_2 1$ ⇝ $\frac{x-1}{x} = 1$ ⇝ $\frac{x-1-x}{x} = 0$

⇝ $\frac{1}{x} = 0$ Impossibile

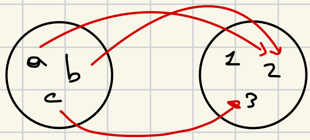
Def. Dati due insiemi A, B (non vuoti), una **funzione**

$$f: A \longrightarrow B$$

è una relazione che associa a ogni elemento di A uno e un solo el. di B.
A viene detto **Dominio** della funzione
B " " **Codominio**

Esempio: $f: \{a, b, c\} \longrightarrow \{1, 2, 3\}$ ed è definita da

$f(a) = 2$, $f(b) = 2$, $f(c) = 3$



Esempio: $g: [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$; $g(x) = 3x + 1$

Def. Data una funzione $f: A \to B$, **l'immagine di f** che denotiamo con **$Im(f)$** sono tutti gli elementi di B che sono raggiunti da un qualche elemento di A tramite f

$$Im(f) = \{ b \in B \mid \exists a \in A \text{ t.c. } f(a) = b \}$$

appartiene

Esiste

Tale che

Tale che

Esempio. Date le f, g di sopra:
- $Im(f) = \{2, 3\}$
- $Im(g) = [1, 4]$

Esempio:
$Im(\sin) = [-1, 1]$
$Im(\cos) = [-1; 1]$