Settimana: 4

Materia: Matematica
Classe: 5C
Data: 6/10/2025

Argomenti: Esercizi alla lavagna Definizione di Limiti precisa. Esercizio cardine per studio di funzione mediante limiti

n61 pag 1448

$f(x) = \dfrac{1}{|x| + 2x^2}$ (1) Dom(f): $|x| + 2x^2 \neq 0$

$\underbrace{2x^2}_{\geq 0} \neq \underbrace{-|x|}_{\leq 0} \implies x \neq 0$

$\text{Dom}(f) = \{x \neq 0\}$

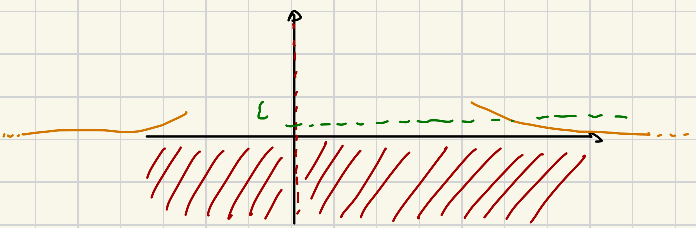
(2) f è pari o dispari? $f(x) = f(-x)$

$f(-x) = \dfrac{1}{|-x| + 2(-x)^2} = \dfrac{1}{|x| + 2x^2} = f(x)$ Pari

Dispari: $-f(-x) = -\dfrac{1}{|-x| + 2(-x)^2} = -\dfrac{1}{|x| + 2x^2}$

che è diverso da $f(x)$ perché c'è il $-$ davanti.

(3) $\inf(f) = 0$. Intuiscilo e verificalo. $f(x) = \dfrac{1}{|x| + 2x^2}$



(1) 0 è minorante

$\dfrac{1}{|x| + 2x^2} > 0$ Si sempre vero.

(2) 0 è il più grande dei minoranti

Sia $\varepsilon > 0$, Se la diseq $\frac{1}{|x|+2x^2} \geq \varepsilon$ **NON** è sempre vera, ε NON è un minorante

$$\frac{1-\varepsilon|x|-\varepsilon 2x^2}{|x|+2x^2} \geq 0$$

Per semplicità $x \geq 0$
Noto che D sempre positivo

$$1-\varepsilon x-2\varepsilon x^2 \geq 0$$

$$2\varepsilon x^2+\varepsilon x-1 \leq 0 \qquad \Delta = \varepsilon^2+8\varepsilon$$

$$x_1/x_2 = \frac{-\varepsilon \pm \sqrt{\varepsilon^2+8\varepsilon}}{4\varepsilon} \rightsquigarrow \boxed{x_1 \leq x \leq x_2}$$

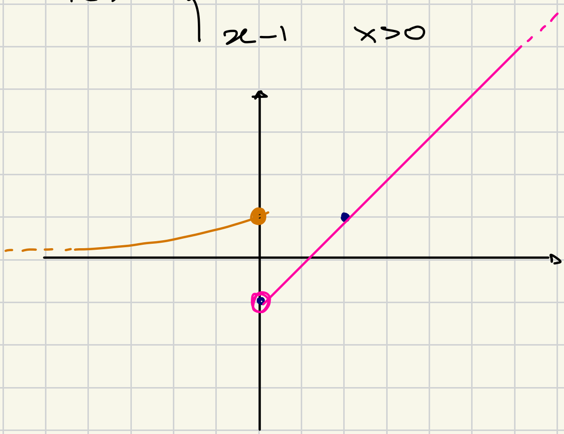
$\rightsquigarrow$ NON è sempre vera $\Rightarrow$ ε NON è minorante

---

Es 58

$$f(x) = \begin{cases} e^x & x \leq 0 \\ x-1 & x > 0 \end{cases}$$

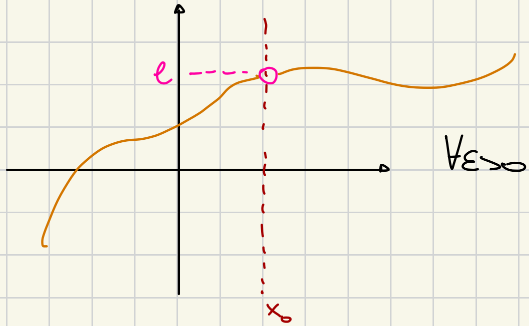
1) Limit. sup?
2) Limit inf?
3) Ha minimo?



x	y
0	-1
2	1

$\rightsquigarrow$ Non è limitata superiormente
$\rightsquigarrow$ Inf(f) = -1
$\rightsquigarrow$ Non ha minimo

Back to limiti



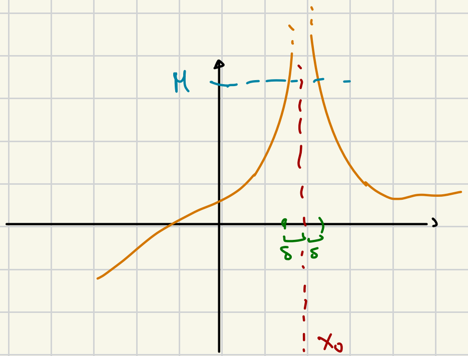
$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell \quad \text{se}$$

$$\forall \varepsilon > 0, \ \exists \delta > 0 \ \text{t.c.} \ |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon$$

Def. Diremo che $f(x)$ ha un asintoto verticale se vale che

$$\left.\lim_{x \to x_0} f(x) = \pm\infty \right]$$ si appiattisce a $x = x_0$

Scriveremo così se:



$$\forall M > 0, \ \exists \delta > 0 \ \text{t.c.} \ |x - x_0| < \delta \Rightarrow f(x) > M$$ (caso $+\infty$)

Def: Diremo che $f(x)$ ha un asintoto orizzontale (a $+\infty$) se

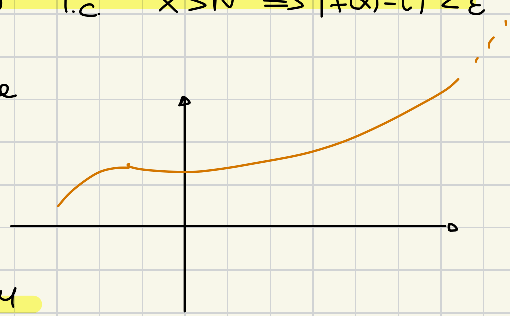
$$\left.\lim_{x \to +\infty} f(x) = \ell \right]$$ f si appiattisce alla retta $y = \ell$

Scriveremo in questo modo se:

$$\forall \varepsilon > 0, \ \exists N > 0 \ \text{t.c.} \ x > N \Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon$$

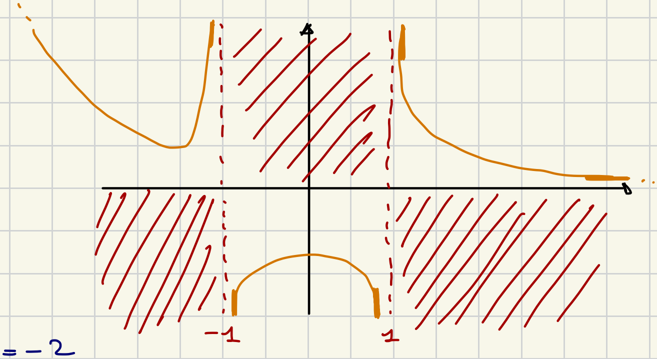
Def: Definisco il limite ∞ a $+\infty$ e scrivo

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty \quad \text{se}$$



$$\forall M > 0, \ \exists N > 0 \ \text{t.c.} \ x > N \Rightarrow f(x) > M$$

Esempio:



$$f(x) = \frac{e^{-x}+1}{x^2-1}$$

(1) $\mathrm{Dom}(f) = \{x \neq \pm 1\}$

(2) <u>Asse y</u>: $x=0 \quad f(0) = \frac{2}{-1} = -2$

$A = (0,-2)$

<u>Asse x</u>: $y = 0 \qquad \frac{e^{-x}+1}{\cancel{x^2-1}} = 0 \qquad e^{-x} = -1$ <u>Mai</u>

(3) <u>Segno</u>: $\frac{e^{-x}+1}{x^2-1} \geq 0$ N: $e^{-x}+1 \geq 0$ sempre $\rightsquigarrow$ $\boxed{x<-1 \ \vee \ x>-1}$

D: $x<-1 \ \vee \ x>1$

(4) <u>Limiti</u>: Si fanno agli estremi del C.E. e a $\pm\infty$

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} \frac{e^{-x}+1}{x^2-1} = +\infty$$

↳ Mi sto avvicinando da destra e il limite si chiama limite destro

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} \frac{e^{-x}+1}{x^2+1} = -\infty$$

↳ Limite sinistro

$$\lim_{x\to (-1)^+} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x\to (-1)^-} f(x) = +\infty$$

Per casa

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = \lim_{x\to +\infty} \frac{e^{-x}+1}{x^2+1} \boxed{=} 0$$

→ Lo intuisco

$$\lim_{x\to -\infty} f(x) = \lim_{x\to -\infty} \frac{e^{-x}+1}{x^2+1} = \text{Forma ind } \frac{\infty}{\infty} = +\infty$$

(Gerarchia degli infiniti)

Calcolo dei limiti:

(1) $\lim_{x \to 1} 12(x-3) = -24$ (Non ci sono problemi a mettere dentro 1)

(2) $\lim_{x \to 7} \left[(x-7) \cdot 12x \right] = 0$

(3) $\lim_{x \to 7} \frac{1}{x-7} =$ NON esiste

$$\lim_{x \to 7^+} \frac{1}{x-7} = +\infty$$

$$\lim_{x \to 7^-} \frac{1}{x-7} = -\infty$$

(4) $\lim_{x \to +\infty} \frac{x^3 + 6x^2 + 1}{x^2 - 4}$ (Forma indeterminata $\frac{\infty}{\infty}$) $=$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^3\left(1 + \frac{6}{x} + \frac{1}{x^3}\right)}{x^2\left(1 - \frac{4}{x^2}\right)} = \lim_{x \to +\infty} \underbrace{x}_{\infty} \cdot \frac{\overbrace{\left(1 + \frac{6}{x} + \frac{1}{x^3}\right)}^{1}}{\underbrace{\left(1 - \frac{4}{x^2}\right)}_{1}} = \infty$$

(5) $\lim_{x \to +\infty} \frac{16x^4 + 1}{7x^4 + x^2} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^4\left(16 + \frac{1}{x^4}\right)}{x^4\left(7 + \frac{1}{x^2}\right)} =$

(F.I. $\frac{\infty}{\infty}$)

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{16 + \frac{1}{x^4}}{7 + \frac{1}{x^2}} = \frac{16}{7}$$

(6) $\lim_{x \to +\infty} \frac{x^3 + 1}{2x^3 + x^2} =$ ….. Confronto tra le potenze più alte … $= \frac{1}{2}$

(7) $\lim_{x \to +\infty} \frac{x^3}{2x^{20} + x^2} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^3\,(1)}{x^{20}\left(2 + \frac{1}{x^{18}}\right)} = \lim_{x \to +\infty} \overbrace{\frac{1}{x^{17}}}^{0} \cdot \overbrace{\frac{1}{\left(2 + \frac{1}{x^{18}}\right)}}^{\frac{1}{2}} = 0$

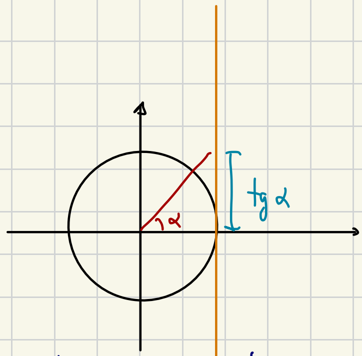
(8) $\lim_{x\to+\infty}\left(x-\sqrt{x^2+3x+1}\right) = \left(F.I.\ \ \infty-\infty\right)$ (Eccoci! Proviamo a Razionaliz)

$$\lim_{x\to+\infty}\left(x-\sqrt{x^2+3x+1}\right)\frac{x+\sqrt{x^2+3x+1}}{x+\sqrt{x^2+3x+1}}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2-x^2-3x-1}{x+\sqrt{x^2+3x+1}} = \lim_{x\to+\infty}\frac{-3x-1}{x+\underbrace{\sqrt{x^2+3x+1}}_{=\sqrt{x^2\left(1+\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}}} =$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\cancel{x}\overbrace{\left(-3-\frac{1}{x}\right)}^{\to -3}}{\cancel{x}\underbrace{\left(1+\underbrace{\sqrt{1+\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}}}_{\to 1}\right)}_{\to 2}} = -\frac{3}{2}$$

(9) $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-}(1-\sin x)\cdot tg\,x = \left(F.I.\ \ 0\cdot\infty\right)$



$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-}(1-\sin x)\frac{\sin x}{\cos x}$$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\frac{\sin x}{\cos x}\,\frac{\overbrace{(1-\sin x)(1+\sin x)}^{1-\sin^2 x}}{(1+\sin x)}$$

Idea 1: Espando

Idea 2: Manipolazione con form. trig. oppure nel fond.

Penso anche alla razionaliz.

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\frac{\sin x}{\cancel{\cos x}}\,\frac{\cos^{\cancel{2}} x}{1+\sin x} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\frac{\overbrace{\sin x\cos x}^{0}}{\underbrace{1+\sin x}_{2}} = 0$$