Settimana: 4

Materia: Matematica
Classe: 5C
Data: 6/10/2025

Argomenti: Esercizi alla lavagna. Definizione di Limiti precisa. Esercizio cardine per studio di funzione mediante limiti. Ancora esercizi di calcolo dei limiti. Teoremi fond. per i limiti, teo confronto e applicazioni, lim notevole $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x}$

n61 pag 1448

$f(x) = \frac{1}{|x| + 2x^2}$ (1) Dom(f): $|x| + 2x^2 \neq 0$

$\underbrace{2x^2}_{\geq 0} \neq \underbrace{-|x|}_{\leq 0} \Rightarrow x \neq 0$

$\text{Dom}(f) = \{x \neq 0\}$

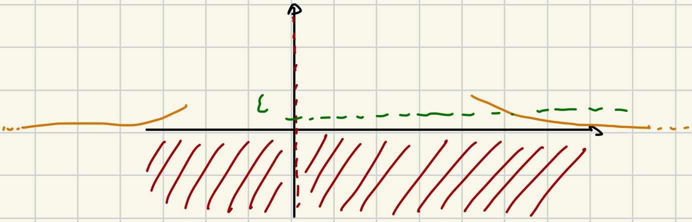
(2) f è pari o dispari? $f(x) = f(-x)$

$f(-x) = \frac{1}{|-x| + 2(-x)^2} = \frac{1}{|x| + 2x^2} = f(x)$ Pari

Dispari: $-f(-x) = -\frac{1}{|-x| + 2(-x)^2} = -\frac{1}{|x| + 2x^2}$

che è diverso da $f(x)$ perché c'è il $-$ davanti.

(3) $\inf(f) = 0$. Intuiscilo e verificalo. $f(x) = \frac{1}{|x| + 2x^2}$



(1) 0 è minorante

$\frac{1}{|x| + 2x^2} > 0$ Si sempre vero.

(2) 0 è il più grande dei minoranti

Sia $\varepsilon > 0$, Se la diseq $\frac{1}{|x|+2x^2} \geq \varepsilon$ NON è sempre vera, ε NON è un minorante

$$\frac{1-\varepsilon|x|-\varepsilon 2x^2}{|x|+2x^2} \geq 0$$

Per semplicità $x \geq 0$
Noto che D sempre positivo

$$1-\varepsilon x - 2\varepsilon x^2 \geq 0$$

$$2\varepsilon x^2 + \varepsilon x - 1 \leq 0 \qquad \Delta = \varepsilon^2 + 8\varepsilon$$

$$x_1/x_2 = \frac{-\varepsilon \pm \sqrt{\varepsilon^2+8\varepsilon}}{4\varepsilon} \rightsquigarrow \boxed{x_1 \leq x \leq x_2}$$

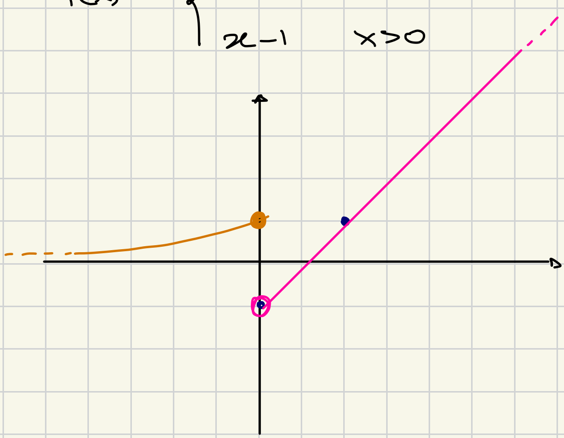
$\rightsquigarrow$ NON è sempre vera $\Rightarrow$ ε NON è minorante

---

Es 58

$$f(x) = \begin{cases} e^x & x \leq 0 \\ x-1 & x > 0 \end{cases}$$

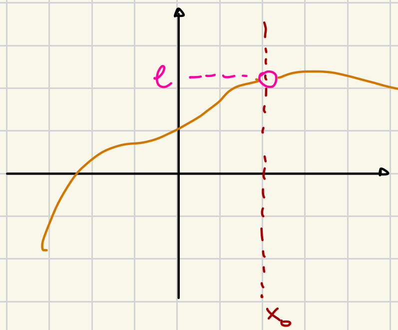
1) Limit. sup?
2) Limit inf ?
3) Ha minimo?



x	y
0	-1
2	1

$\rightsquigarrow$ Non è limitata superiormente
$\rightsquigarrow$ Inf(f) = -1
$\rightsquigarrow$ Non ha minimo

Back to limiti



$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell \quad \text{se}$$

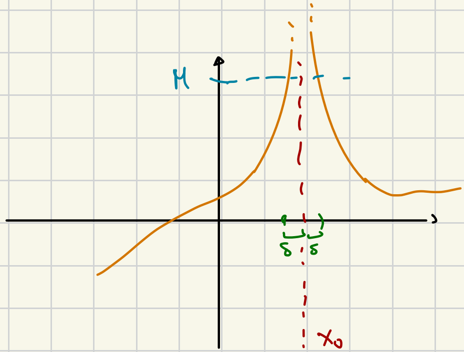
$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ t.c. $|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon$

<u>Def</u>. Diremo che $f(x)$ ha un asintoto verticale se vale che

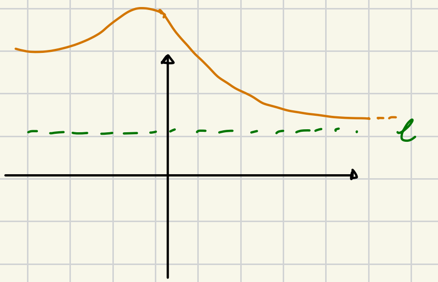
$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \pm\infty$$

si appiattisce a $x = x_0$

Scriveremo così se:



$\forall M > 0, \exists \delta > 0$ t.c. $|x - x_0| < \delta \Rightarrow f(x) > M$ (caso $+\infty$)



<u>Def</u>: Diremo che $f(x)$ ha un asintoto orizzontale (a $+\infty$) se

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \ell$$

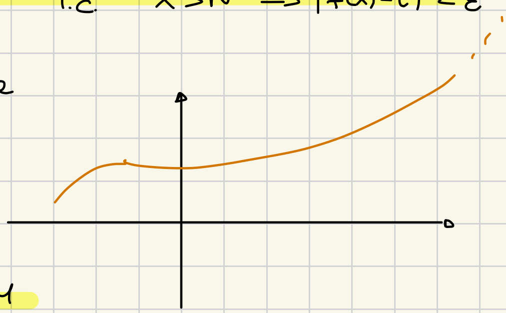
f si appiattisce alla retta $y = \ell$

Scriveremo in questo modo se:

$\forall \varepsilon > 0, \exists N > 0$ t.c. $x > N \Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon$

<u>Def</u>: Definisco il limite ∞ a $+\infty$ e scrivo

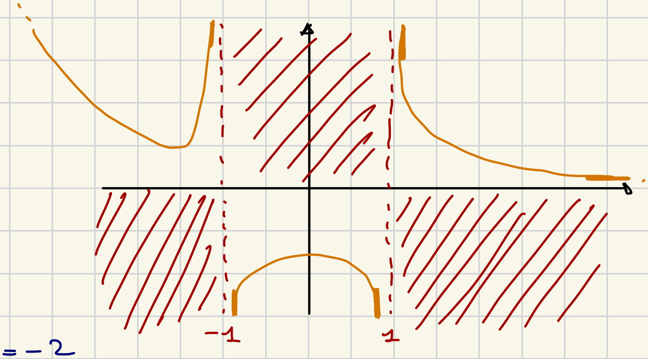
$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty \quad \text{se}$$



$\forall M > 0, \exists N > 0$ t.c. $x > N \Rightarrow f(x) > M$

Esempio:

$$f(x) = \frac{e^{-x}+1}{x^2-1}$$



(1) $Dom(f) = \{x \neq \pm 1\}$

(2) Asse y: $x=0$ $\quad f(0) = \frac{2}{-1} = -2$

$A = (0,-2)$

Asse x: $y=0$ $\quad \frac{e^{-x}+1}{\cancel{x^2-1}} = 0$ $\quad e^{-x} = -1$ $\quad$ Mai

(3) Segno: $\frac{e^{-x}+1}{x^2-1} \geq 0$ $\quad$ N: $e^{-x}+1 \geq 0$ Sempre $\quad \leadsto \boxed{x < -1 \ \vee \ x > -1}$

D: $x < -1 \ \vee \ x > 1$

(4) Limiti: Si fanno agli estremi dei C.E. e a $\pm\infty$

$$\lim_{x \to 1^{+}} f(x) = \lim_{x \to 1^+} \frac{e^{-x}+1}{x^2-1} = +\infty$$

↳ Mi sto avvicinando da destra e il limite si chiama limite destro

$$\lim_{x \to 1^{-}} f(x) = \lim_{x \to 1^-} \frac{e^{-x}+1}{x^2+1} = -\infty$$

↳ Limite sinistro

$$\lim_{x \to (-1)^+} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \to (-1)^-} f(x) = +\infty$$

Per casa

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{e^{-x}+1}{x^2+1} \overset{\text{Lo intuisco}}{\boxed{=}} 0$$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \frac{e^{-x}+1}{x^2+1} = \text{Forma ind } \frac{\infty}{\infty} = +\infty$$ (Gerarchia degli infiniti)

Calcolo dei limiti:

(1) $\lim_{x \to 1} 12(x-3) = -24$ (Non ci sono problemi a mettere dentro 1)

(2) $\lim_{x \to 7} \left[(x-7) \cdot 12x\right] = 0$

(3) $\lim_{x \to 7} \frac{1}{x-7} =$ NON esiste

$$\lim_{x \to 7^+} \frac{1}{x-7} = +\infty$$

$$\lim_{x \to 7^-} \frac{1}{x-7} = -\infty$$

(4) $\lim_{x \to +\infty} \frac{x^3+6x^2+1}{x^2-4}$ (Forma indeterminata $\frac{\infty}{\infty}$) $=$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^3\left(1+\frac{6}{x}+\frac{1}{x^3}\right)}{x^2\left(1-\frac{4}{x^2}\right)} = \lim_{x \to +\infty} \underbrace{x}_{\to\infty} \cdot \frac{\overbrace{\left(1+\frac{6}{x}+\frac{1}{x^3}\right)}^{\to 1}}{\underbrace{\left(1-\frac{4}{x^2}\right)}_{\to 1}} = \infty$$

(5) $\lim_{x \to +\infty} \frac{16x^4+1}{7x^4+x^2} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^4\left(16+\frac{1}{x^4}\right)}{x^4\left(7+\frac{1}{x^2}\right)} =$

(F.I. $\frac{\infty}{\infty}$)

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{16+\frac{1}{x^4}}{7+\frac{1}{x^2}} = \frac{16}{7}$$

(6) $\lim_{x \to +\infty} \frac{x^3+1}{2x^3+x^2} =$ ...... Confronto tra le potenze più alte ... $= \frac{1}{2}$

(7) $\lim_{x \to +\infty} \frac{x^3}{2x^{20}+x^2} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^3(1)}{x^{20}\left(2+\frac{1}{x^{18}}\right)} = \lim_{x \to +\infty} \overbrace{\frac{1}{x^{17}}}^{\to 0} \cdot \overbrace{\frac{1}{\left(2+\frac{1}{x^{18}}\right)}}^{\to \frac{1}{2}} = 0$

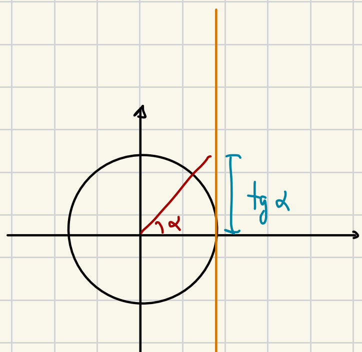
(8) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x-\sqrt{x^2+3x+1}\right) = \left(\text{F.I. } \infty-\infty\right)$ (Eccoci! Proviamo a Razionaliz)

$$\lim_{x\to+\infty}\left(x-\sqrt{x^2+3x+1}\right)\frac{x+\sqrt{x^2+3x+1}}{x+\sqrt{x^2+3x+1}}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2-x^2-3x-1}{x+\sqrt{x^2+3x+1}} = \lim_{x\to+\infty}\frac{-3x-1}{x+\underbrace{\sqrt{x^2+3x+1}}_{=\sqrt{x^2\left(1+\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}}} =$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\cancel{x}\overbrace{\left(-3-\frac{1}{x}\right)}^{\to -3}}{\cancel{x}\underbrace{\left(1+\underbrace{\sqrt{1+\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}}}_{\to 1}\right)}_{\to 2}} = -\frac{3}{2}$$

(9) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^-}(1-\sin x)\cdot \operatorname{tg} x = \left(\text{F.I. } 0\cdot\infty\right)$



$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-}(1-\sin x)\frac{\sin x}{\cos x}$$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\frac{\sin x}{\cos x}\overbrace{(1-\sin x)\cdot(1+\sin x)}^{1-\sin^2 x}\over(1+\sin x)$$

Idea 1: Espando

Idea 2: Manipolazione con form. trig. oppure nel fond.

Penso anche alla razionaliz.

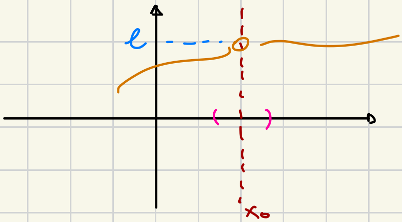
$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\frac{\sin x}{\cancel{\cos x}}\,\frac{\cos^{\cancel{2}} x}{1+\sin x} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\frac{\overbrace{\sin x\cos x}^{\to 0}}{\underbrace{1+\sin x}_{\to 2}} = 0$$

Teoria (dim. omesse, ma c'è bisogno per giustificare)

Teorema di Unicità del limite: Se $f(x)$ ha limite finito ℓ per $x\to x_0$, allora tale limite è unico.

Teorema di permanenza del segno: Sia $\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell$, $\ell \neq 0$

Allora $\exists I(x_0)$ t.c. $\forall x \in I(x_0) \setminus \{0\}$, il segno di $f(x)$ è uguale al segno di ℓ.



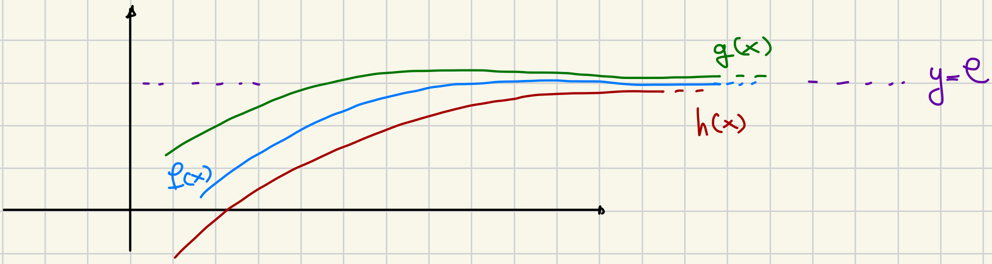
Dato che i punti sono vicini a x_0 la funzione applicata a loro ha lo stesso segno del limite

Teorema del confronto (dei Carabinieri): Siano $h(x)$, $f(x)$, $g(x)$ tre funzioni definite in un intorno di x_0 che chiamo D. Se per ogni pto di D vale

carabiniere 1 Carab. 2

$$h(x) \leq f(x) \leq g(x)$$

e vale che $\lim_{x \to x_0} h(x) = \lim_{x \to x_0} g(x) = \ell$, allora esiste il $\lim_{x \to x_0} f(x)$ e vale proprio ℓ.



Pag 1525 n. 109

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\sin x}{x} = 0$$ Per mostrarlo uso il teorema del confronto

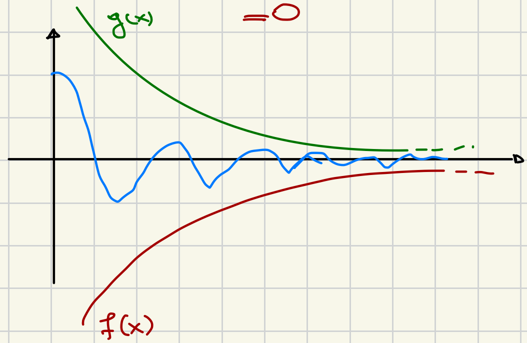
$$-1 \leq \sin x \leq 1$$ Divido per x

$$-\frac{1}{x} \leq \frac{\sin x}{x} \leq \frac{1}{x}$$

Per il teo dei carabinieri vale che

$$\underbrace{\overset{h(x)}{\lim_{x\to+\infty} -\frac{1}{x}}}_{=0} \le \lim_{x\to+\infty}\frac{\sin x}{x} \le \underbrace{\overset{g(x)}{\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}}}_{=0}$$

$$\rightsquigarrow \lim_{x\to+\infty}\frac{\sin x}{x} = 0$$



n. 111

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{2x}{3+\sin x}$$

Usiamo il teorema del confronto

$$\frac{2x}{3+\underline{1}} \le \frac{2x}{3+\underline{\sin x}} \le \frac{2x}{3\underline{-1}}$$

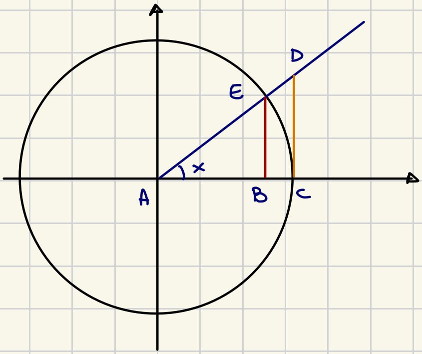
$$\frac{2x}{4} \le \frac{2x}{3+\sin x} \le \frac{2x}{2}$$

$$\downarrow_{x\to+\infty} \qquad\qquad \downarrow$$

$$\infty \le \lim_{x\to+\infty}\frac{2x}{3+\sin x} \le \infty \quad \rightsquigarrow \boxed{\lim_{x\to+\infty}\frac{2x}{3+\sin x} = +\infty}$$

Teorema: Vale il limite notevole $\boxed{\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1}$

Dim: Consideriamo la circonferenza goniometrica
Obiettivo: confrontare le aree di $A\hat{B}E$, $A\hat{C}D$, ACE sett. circol.



In ordine vale che

$$A_{ABE} \leq A_{ACE} \leq A_{ACD}$$

$$A_{ABE} = \frac{AB \cdot BE}{2} = \frac{\sin x \cdot \cos x}{2}$$

$$A_{ACD} = \frac{AC \cdot CD}{2} = \frac{1 \cdot \operatorname{tg} x}{2}$$

$$A_{ACE} : \text{Area cerchio} = x : \text{Angolo giro}$$

$$A_{ACE} = \frac{x \cdot \text{Area Cerchio}}{\text{Ang. giro}} = \frac{x \cdot \pi r^2}{2\pi} = \frac{x}{2}$$

La nostra disuguaglianza diventa:

$$\frac{\sin x \cdot \cos x}{\cancel{2}} \leq \frac{x}{\cancel{2}} \leq \frac{\operatorname{tg} x}{\cancel{2}}$$

$$\sin x \cdot \cos x \leq x \leq \frac{\sin x}{\cos x} \quad \cdot \frac{1}{\sin x} \qquad 0 < x < \frac{\pi}{2}$$

$$\cos x \leq \frac{x}{\sin x} \leq \frac{1}{\cos x}$$

Faccio il reciproco

$$\frac{1}{\cos x} \leq \frac{\sin x}{x} \leq \cos x$$

$x \to 0$ $\qquad$ $x \to 0$

$$1 \leq \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} \leq 1$$

$\leadsto$ Per teo confronto $\boxed{\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1}$