Settimana: 17

Materia: Matematica
Classe: 5C
Data: 10/02/26

Argomenti

Massimi, minimi, flessi

Remind: $f: [a;b] \longrightarrow \mathbb{R}$, $\max(f) = \max(\operatorname{Im} f)$
$\min(f) = \min(\operatorname{Im} f)$

Def: Sia $f: [a;b] \longrightarrow \mathbb{R}$ una funzione. $x_0 \in (a;b)$. Diremo che x_0 è un massimo locale per f se esiste un intorno I di x_0 tale che

↳ Relativo

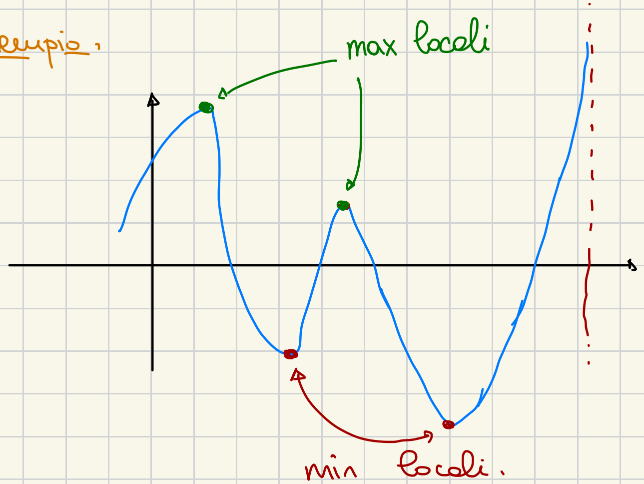
$$f(x_0) \geq f(x) \quad \forall x \in I$$

Diremo che x_0 è minimo locale per f se esiste un intorno I di x_0 tale che

↳ Relativo

$$f(x_0) \leq f(x) \quad \forall x \in I$$

Esempio:



Teorema di Fermat: Data $f: [a;b] \longrightarrow \mathbb{R}$, derivabile nell'intervallo aperto $(a;b)$; se f ha un minimo o massimo locale in x_0, allora $f'(x_0) = 0$

Dim: Sappiamo che, nel caso x_0 massimo, $f(x_0) \geq f(x) \quad \forall x \in I$
Dobbiamo dimostrare che $f'(x_0) = 0$

Suppongo per assurdo che $f'(x_0) \neq 0$, dunque dovrà valere ad esempio che $f'(x_0) > 0$ (caso $f'(x_0) < 0$ per esercizio)

$$f(x_0+h) = f(x_0) + \boxed{\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}}\, h$$

→ $g(h)$ è una funzione che dipende da h.

Sappiamo che $$\lim_{h \to 0} g(h) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = f'(x_0)$$

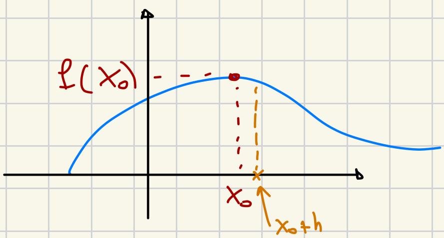
Per il teorema di Permanenza del segno la funzione $g(h)$ è positiva poiché ho supposto che $f'(x_0)$ sia positivo.

Ma allora ho

→ Se $h > 0$, allora $g(h) \cdot h > 0$

$$f(x_0+h) = f(x_0) + g(h) \cdot h$$

$$f(x_0+h) = f(x_0) + \text{qualcosa di positivo}$$



Ma questo è ASSURDO perché $f(x_0)$ è il massimo per Ipotesi

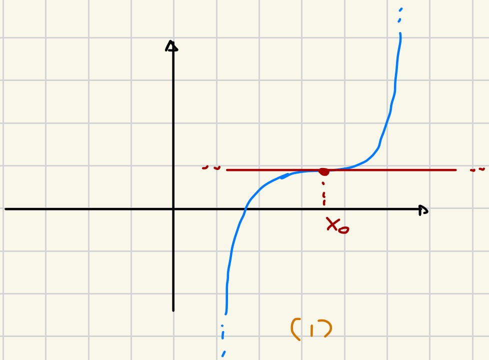
$\Rightarrow f'(x_0)$ Non può essere positivo

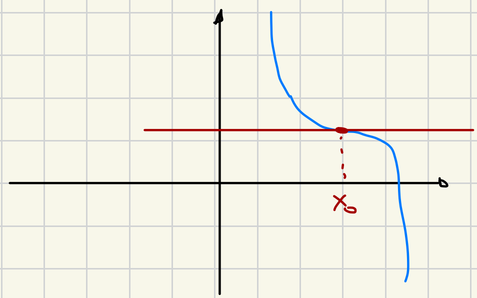
$\Rightarrow f'(x_0) = 0$ $\square$

Def: Sia $f: [a;b] \to \mathbb{R}$, derivabile in $(a;b)$. Sia $x_0 \in (a,b)$.
x_0 si dice **punto stazionario** (o **critico**) se $f'(x_0) = 0$

Warning: Max o min locale $\Rightarrow$ punto stazionario

Def: Sia $f: [a;b] \to \mathbb{R}$, derivabile in $(a;b)$. $x_0 \in (a;b)$ è un **flesso a tangente orizzontale** se è un pto stazionario e vale $f'(x) > 0$ se $x < x_0$ e $x > x_0$ (1) oppure
$f'(x) < 0$ se $x < x_0$ e $x > x_0$





Pag 1779 n 57

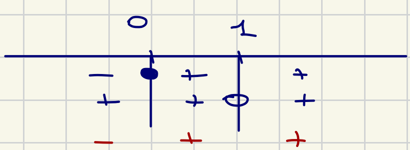
$$f(x) = \frac{x^3}{(1-x)^2}$$

(1) $Dom(f) = \{x \neq 1\}$

(2) $x = 0 \rightsquigarrow f(0) = 0$
$y = 0 \rightsquigarrow x = 0$ $\longrightarrow$ $\boxed{A = (0;0)}$

(3) Segno: $f(x) \geq 0$

N: $x^3 \geq 0 \rightsquigarrow x \geq 0$
D: $(1-x)^2 > 0 \rightsquigarrow$ sempre $x \neq 1$



$\boxed{\text{Sol: } x \geq 0,\ x \neq 1}$

(4) Limiti: $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^3}{(1-x)^2} = +\infty$ ← No asintoto orizzontale

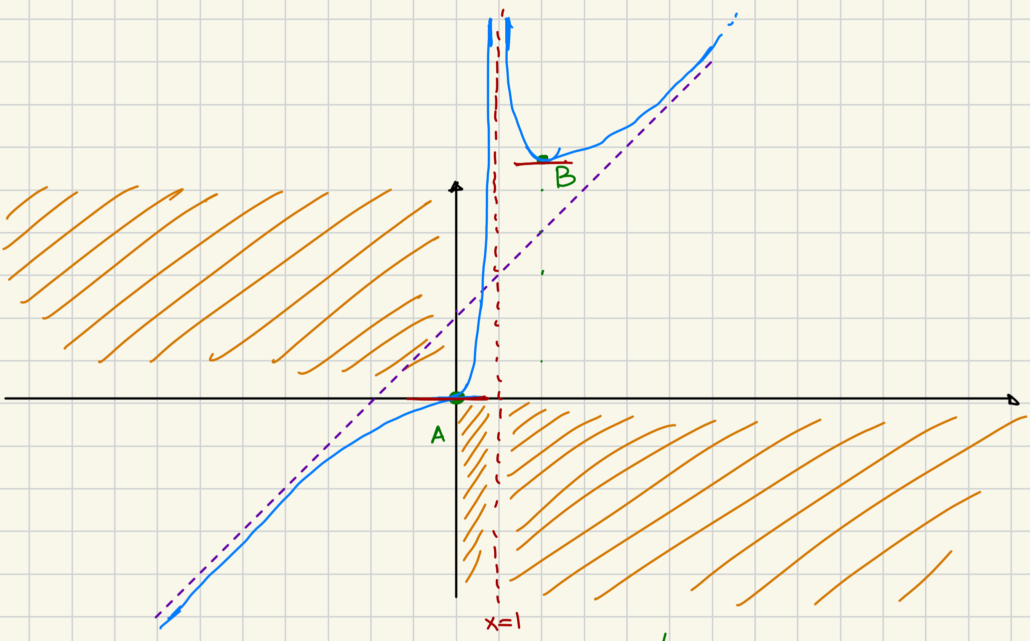
Prova asintoto obliquo: $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^3}{(1-x)^2\cdot x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^3}{x^3-2x^2+x} = 1$ (=m)

↳ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) - mx = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^3}{(1-x)^2} - x = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\cancel{x^3}-\cancel{x^3}+2x^2-x}{x^2-2x+1} = 2$ (=q)

$$\boxed{y = x+2 \quad \text{Asintoto obliquo}}$$

$x \to -\infty$ fa la stessa cosa, ⇝ $y=x+2$ (Da verificare)

$\lim\limits_{x\to 1^+} \frac{x^3}{(1-x)^2} = +\infty$ $\qquad$ $\lim\limits_{x\to 1^-} \frac{x^3}{(1-x)^2} = +\infty$



(5) $f(x) = \frac{x^3}{(1-x)^2}$ $\qquad$ $f'(x) = \frac{3x^2(1-x)^{\cancel{2}} - x^3\cdot 2\cancel{(1-x)}(-1)}{(1-x)^{\cancel{4}\,3}}$

$$f'(x) = \frac{3x^2-3x^3+2x^3}{(1-x)^3} = \frac{x^2(3-x)}{(1-x)^3}$$

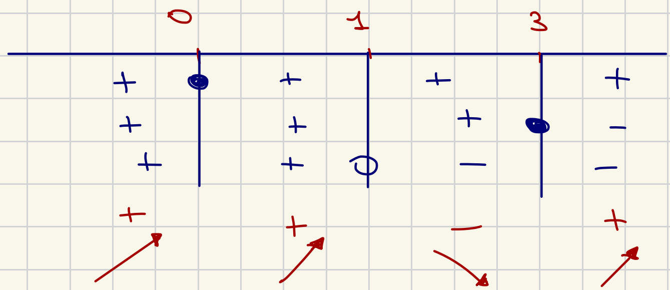
Impongo $f'(x) \geq 0$

$$\frac{x^2(3-x)}{(1-x)^3} \geq 0$$

$N_1: \ x^2 \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$ ⇝ $x=0$ pto st.

$N_2: \ 3-x \geq 0 \quad x \leq 3$ ⇝ $x=3$ pto st.

$D. \ (1-x)^3 > 0 \quad x < 1$



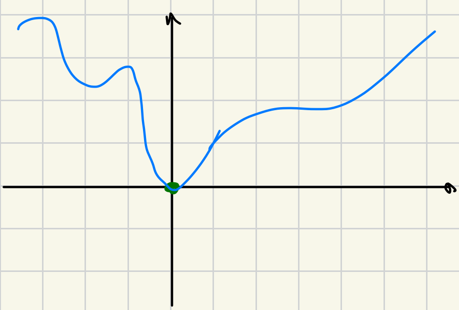
0 è flesso a tg orizzontale ⇝ $(0, f(0)) = (0;0) = A$

3 è un minimo ⇝ $(3; f(3)) = \left(3; \frac{27}{4}\right) = B$

---

n 210 pag 1789

$f(x) = x^2e^x + (a-1)x$ Trova a in modo che il grafico è tg all'asse x nell'origine



La condizione è $f'(0) = 0$

$f'(x) = 2xe^x + x^2e^x + (a-1)$

$f'(0) = 0$ cioè $a-1 = 0$

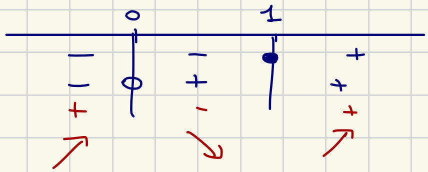
⇝ $\boxed{a = 1}$

214 $f(x) = ax^3 + 3x + b - 2$ ha un massimo coincidente con il minimo della funzione $y = x - \ln x$

(1) Trovo minimo di $g(x) = x - \ln(x)$

$g'(x) = 1 - \frac{1}{x}$ $\quad g'(x) \geq 0 \quad \frac{x-1}{x} \geq 0$

N: $x \geq 1$
D: $x > 0$



minimo: $A = (1; g(1)) = (1; 1 - \ln(1)) = (1; 1)$

(2) → Impongo che A appartenga al grafico di f
→ " " A sia massimo locale

$\cancel{1} = a \cdot 1^3 + \cancel{3} \cdot 1 + b - \cancel{2} \leadsto \boxed{a + b = 0}$

$f'(x) = 3ax^2 + 3 \leadsto f'(1) = 0 \leadsto \boxed{3a + 3 = 0}$

$\leadsto \boxed{a = -1 \quad , b = 1}$