Settimana: 5

Materia: Matematica
Classe: 5A
Data: 13/10/25

Argomenti: Esercizi sui limiti. Eq. Asintotica per infinitesimi e infiniti. Enunciato teo e dim con applicazioni.

Pag 1533 n 322

$$\lim_{x\to2}\log_2\left(\frac{\sqrt{x^2+12}-4}{3x^2-4x-4}\right)\cdot\frac{\sqrt{x^2+12}+4}{\sqrt{x^2+12}+4}$$

⤳ Manipolo la radice

$$\lim_{x\to2}\log_2\left[\frac{\overbrace{x^2+12-16}^{x^2-4}}{(3x^2-4x-4)(\sqrt{x^2+12}+4)}\right]$$

⤳ Scompongo tutto per far scomp. i prob. in 2

$$\lim_{x\to2}\log_2\left[\frac{(x+2)\cancel{(x-2)}}{(3x+2)\cancel{(x-2)}\sqrt{x^2+12}+4}\right]$$

Ruffini: $3x^2-4x-4=p(x)$

$p(2)=0$

$$\begin{array}{c|cc|c} & 3 & -4 & -4 \\ 2 & & 6 & 4 \\ \hline & 3 & 2 & 0 \end{array}$$

$(x-2)(3x+2)$

Trin. molto sp. α,β t.c. $\alpha+\beta=-4$, $\alpha\beta=-12$

$\alpha=-6,\ \beta=+2$

$3x^2-6x+2x-4$

$3x(x-2)+2(x-2)$

$(3x+2)(x-2)$

$$\lim_{x\to2}\log_2\left(\underbrace{\frac{\overset{\to 4}{\boxed{x+2}}}{\underset{\to 8}{\boxed{3x+2}}}\cdot\frac{1}{\underset{\to 8}{\boxed{\sqrt{x^2+12}+4}}}}_{\frac{1}{16}}\right)=-4$$

Pag 1535 n 369

$$\lim_{x\to 0} \frac{2x\sin x}{\cos^2 x - \cos x} =$$

Strategia: Faccio comparire cose in modo raggruppamenti diversi siano limiti notevoli

$$\lim_{x\to 0} 2 \frac{x \sin x}{\cos x(\cos x - 1)} \cdot \frac{x}{x}$$

Aggiusto lim con il sin x

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x\to 0} 2 \cdot \underbrace{\frac{\sin x}{x}}_{1} \cdot \underbrace{\frac{x^2}{(\cos x - 1)}}_{-2} \cdot \underbrace{\frac{1}{\cos x}}_{1} = -4$$

Altro metodo

$$\lim_{x\to 0} 2 \frac{x \sin x}{\cos x(\cos x - 1)} \cdot \frac{\cos x + 1}{\cos x + 1}$$

Aggiusto il -

$$\lim_{x\to 0} 2 \frac{x \sin x}{(-\sin^2 x)} \cdot \frac{\cos x + 1}{\cos x} = \lim_{x\to 0} 2\underbrace{\left(-\frac{x}{\sin x}\right)}_{-1} \cdot \underbrace{\frac{\cos x + 1}{\cos x}}_{2} = -4$$

n.275 $\lim_{x\to -\infty} \frac{-x + \sqrt{x^2-8}}{6x+7}$

$x = -t$

$x \to -\infty \quad t \to +\infty$

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{t + \sqrt{t^2-8}}{-6t+7} = \lim_{x\to +\infty} \frac{t\left(1+\sqrt{1-\frac{8}{t^2}}\right)}{t\left(-6+\frac{7}{t}\right)} = -\frac{1}{3}$$

Goal: $\lim_{x\to\infty} \dfrac{x^2+3x}{x+1} \boxed{\sim} \lim_{x\to+\infty} \dfrac{x^2}{x} = \lim_{x\to+\infty} x = \infty$

equiv asintotica

Def: Sia $f: D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funzione, α pto di accumulazione per f. diremo che f è un infinitesimo per $x \to \alpha$ se

$$\lim_{x\to\alpha} f(x) = 0$$

Diremo che f è un infinitesimo di ordine γ rispetto a $g(x)$ se

(1) $\lim_{x\to\alpha} g(x) = 0$

(2) $\lim_{x\to\alpha} \dfrac{f(x)}{[g(x)]^\gamma} = \ell \neq 0$ con ℓ numero finito

Esempio:

(1) $\lim_{x\to 2} (x-2) = 0$ $\quad$ $x-2$ è un infinitesimo $x \to 2$

(2) $\lim_{x\to 2} \dfrac{(x-2)}{\sin(x-2)} = 1$ $\quad$ $x-2$ è infinitesimo di ordine 1 rispetto a $\sin(x-2)$

Def: Diremo che f e g sono infinitesimi equivalenti, o asintoticamente equivalenti, per $x \to \alpha$ se

$$\lim_{x\to\alpha} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$$

Lo indicheremo con $f \sim g$ $\quad$ (f asint. eq. a g per $x \to \alpha$)

Esempio: $x \sim \sin x$ $\quad x \to 0$
$x \sim \ln(1+x)$ $\quad x \to 0$
$x \sim e^x - 1$ $\quad x \to 0$
} Sono i lim. Notevoli

Teorema di equivalenze asintotica

Siano f, g funzioni e supponiamo che esiste $\lim_{x \to \alpha} \frac{f(x)}{g(x)}$ e f e g infinitesimi per $x \to \alpha$.

Supponiamo esistano f_1 e g_1 tali che $f \sim f_1$, $g \sim g_1$

Allora vale che

$$\lim_{x \to \alpha} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to \alpha} \frac{f_1(x)}{g_1(x)}$$

Pag 1547 n 613

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin 2x}{\ln(1+4x)} \underset{\text{Teo}}{=} \lim_{x \to 0} \frac{2\cancel{x}}{4\cancel{x}} = \frac{1}{2}$$

Voglio usare il teorema:

vale che $\sin 2x \sim 2x$
in quanto $\lim_{x \to 0} \frac{\sin 2x}{2x} = 1$

vale che $\ln(1+4x) \sim 4x$
in quanto $\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1+4x)}{4x} = 1$

n 616

$$\lim_{x \to \infty} \frac{2x^2 + \sin x}{5x + x^4 \cos x} = \lim_{x \to \infty} \frac{\cancel{x}\overbrace{\left(2x + \frac{\sin x}{x}\right)}^{1}}{\cancel{x}\underbrace{(5 + x^3 \cos x)}_{5}} = \frac{1}{5}$$

Dim del teorema:

$$\lim_{x\to\alpha}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to\alpha}\frac{f(x)}{g(x)}\cdot\frac{f_1(x)}{f_1(x)}\cdot\frac{g_1(x)}{g_1(x)}$$

Come Hip: $\lim_{x\to\alpha}\frac{f(x)}{f_1(x)} = 1$

$\lim_{x\to\alpha}\frac{g(x)}{g_1(x)} = 1$

$$= \lim_{x\to\alpha}\frac{f_1(x)}{g_1(x)}\cdot\underbrace{\frac{f(x)}{f_1(x)}}_{\to 1}\cdot\underbrace{\frac{g_1(x)}{g(x)}}_{\to 1} = \lim_{x\to\alpha}\frac{f_1(x)}{g_1(x)}$$

$\square$

Oss: Tutte le cose fatte si possono applicare anche al caso in cui il limite NON fa 0, ma fa ∞. In quel caso si usa la parola "infiniti" al posto di infinitesimi

n 620: $\lim_{x\to -2}\frac{\ln(x^2+4x+5)}{\ln(x+3)^{100}}$

(Sost. $x+2=t$ $\quad x=t-2$

$x\to -2$ $\quad t\to 0$)

$$\lim_{t\to 0}\frac{\ln(t^2+4-\cancel{4t}+\cancel{4t}-8+5)}{\ln(t+1)^{100}} = \lim_{t\to 0}\frac{\ln(t^2+1)}{100\cdot\ln(t+1)} =$$

Eq. Asint. $\ln(t+1)\sim t$

$\ln(t^2+1)\sim t^2$ ⇝ Per lo stesso lim notevole

$$= \lim_{t\to 0}\frac{t^2}{100\,t} = \lim_{t\to 0}\frac{t}{100} = 0$$