Teorema: Dati due numeri complessi

$$r(\cos\alpha + i\sin\alpha) \qquad e \qquad s(\cos\beta + i\sin\beta)$$

Vale che

- $r(\cos\alpha + i\sin\alpha) \cdot s(\cos\beta + i\sin\beta) = rs(\cos(\alpha+\beta) + i\sin(\alpha+\beta))$
- $r(\cos\alpha + i\sin\alpha) / s(\cos\beta + i\sin\beta) = \frac{r}{s}(\cos(\alpha-\beta) + i\sin(\alpha-\beta))$
- Sia $n \in \mathbb{N}$ $\quad [r(\cos\alpha + i\sin\alpha)]^n = r^n(\cos(n\alpha) + i\sin(n\alpha))$

Formule di De Moivre

Esempio:

$$2\left(\cos\frac{\pi}{5} + i\sin\frac{\pi}{5}\right) \cdot 6\left(\cos\frac{4}{5}\pi + i\sin\frac{4}{5}\pi\right)$$

Per le formule sopra viene

$$2 \cdot 6\left[\cos\left(\frac{\pi}{5}+\frac{4}{5}\pi\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{5}+\frac{4}{5}\pi\right)\right] =$$

$$12(\cos\pi + i\sin\pi) = -12$$

Dimostrazione:

- $r(\cos\alpha + i\sin\alpha) \cdot s(\cos\beta + i\sin\beta) =$

$$rs[\cos\alpha\cos\beta + i\cos\alpha\sin\beta + i\sin\alpha\cos\beta + \overbrace{i^2\sin\alpha\sin\beta}^{-\sin\alpha\sin\beta}]$$

$$rs(\cos(\alpha+\beta) + i\sin(\alpha+\beta))$$

- Razionalizzare e fare il conto
- Conseguenza della moltiplicazione

$\square$

Notazione / Forma di Eulero: Per motivi oscuri la forma trigonometrica ha una notazione più comoda e consistente.

$$r(\cos\alpha + i\sin\alpha) = r\cdot e^{i\alpha}$$

Perché è consistente?

$$e^{i\alpha}\cdot e^{i\beta} \overset{\text{Not}}{\boxed{=}} (\cos\alpha + i\sin\alpha)(\cos\beta + i\sin\beta) \overset{\text{Form. sopra}}{\boxed{=}}$$

$$= \cos(\alpha+\beta) + i\sin(\alpha+\beta) \overset{\text{Not}}{\boxed{=}} e^{i(\alpha+\beta)}$$

$$e^{i\alpha}/e^{i\beta} = e^{i(\alpha-\beta)}$$

$$(e^{i\alpha})^n = e^{in\alpha}$$

Dunque con la forma di Eulero diventano "conticini" con le proprietà delle potenze

Pag 1025 n.333

$$\frac{\left[\sqrt[8]{2}\left(\cos\frac{\pi}{8} + i\sin\frac{\pi}{8}\right)\right]^8\left[\sqrt[9]{2}\left(\cos\frac{\pi}{36} + i\sin\frac{\pi}{36}\right)\right]^9}{\left[\sqrt[5]{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{10}\right) + i\sin\frac{\pi}{10}\right]^5} =$$

$$\frac{\left(\sqrt[8]{2}\, e^{i\frac{\pi}{8}}\right)^8\cdot\left(\sqrt[9]{2}\, e^{i\frac{\pi}{36}}\right)^9}{\left(\sqrt[5]{2}\, e^{i\frac{\pi}{10}}\right)^5} =$$

$$= \frac{2\cdot 2}{2}\,\frac{e^{i\pi}\cdot e^{i\frac{\pi}{4}}}{e^{i\frac{\pi}{2}}} = 2\,e^{i\left(\pi+\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{2}\right)} = 2e^{i\frac{3}{4}\pi}$$

Esercizio Vero: Sia z un numero complesso. Risolvere l'equazione

$$z + \overline{z} = 2 \qquad \overline{a+bi} = a - bi \quad a, b \in \mathbb{R}$$

Dato che z è complesso $z = a+bi$ con a e b da determinare

$$a + \cancel{bi} + a - \cancel{bi} = 2$$

$$2a = 2 \rightsquigarrow a = 1$$

$\rightsquigarrow$ Dunque le soluzioni sono infinite e sono della forma

$$\boxed{z = 1 + bi} \quad b \in \mathbb{R}$$