

Settimana: 9

Materia: Matematica

Classe: 5C

Data: 10/11/25

Derivate

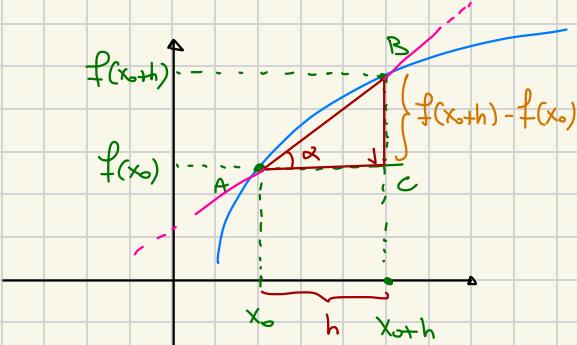
Def. Dato $f: (a, b) \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, sia $x_0 \in (a, b)$ e sia

$A = (x_0, f(x_0))$ Consideriam

poi il punto

$B = (x_0 + h; f(x_0 + h))$.

Il rapporto incrementale in x_0 (di ampiezza h) è



$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{(x_0 + h) - x_0} = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

In effetti il rapporto incrementale è $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$

Oss. $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \frac{AB \cdot \sin \alpha}{AB \cdot \cos \alpha} = \tan \alpha$

Quindi il rapp. incrementale è la \tan dell'angolo che si forma.

Discorso. Voglio far collassare il punto B verso il punto A in modo che la retta secante AB diventi al limite la tangente alla curva.

Def. Sia $f: (a, b) \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ funzione $x_0 \in (a, b)$ diremo che f è derivabile in x_0 se esiste finito il limite

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

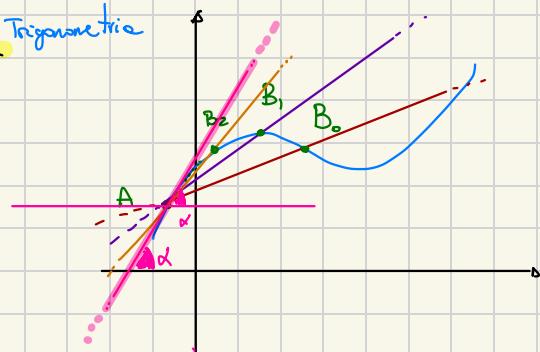
] faccio collassare B su A

Se tale limite esiste finito lo indicheremo con

$f'(x_0)$	$Df(x_0)$	$\frac{df}{dx}(x_0)$	$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0)$
f prima in x_0	Df in x_0	de f su dx in x_0	de f su ∂x in x_0

Oss. La derivata è il valore delle tangente dell'angolo α dove α è l'angolo che la tangente alla curva ^{Geometrica} forma con il verso pos. dell'asse x

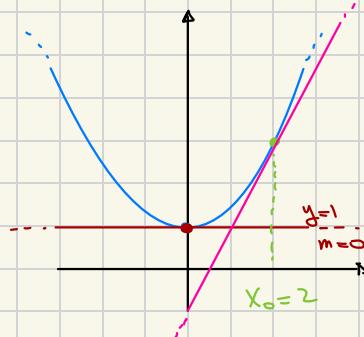
Dovreste sapere che $\operatorname{tg} \alpha$ non è altro che m coeff. angolare delle rette



Dunque la derivata di una funzione in un punto non è altro che il coeff. angolare delle rette tangente al grafico in quel punto



Esempio: $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$



$$f(x) = x^2 + 1$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = \frac{x_0=0}{=}$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} =$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^2+1 - 1^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} h = 0$$

Calcola quale, se esiste, $f'(2)$ come esercizio.

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(1+h^2+4h+1) - (1+4)}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} (h+4) = 4$$

Coeff. angolare della retta tg al grafico in $x_0=2$ è 4.

Teorema (Esercizio): Sia $f: (a,b) \rightarrow \mathbb{R}$ e sia $x_0 \in (a,b)$.

Supponiamo che f sia derivabile in x_0 con derivata $f'(x_0)$

Allora la retta tangente al grafico di f nel punto x_0 è:

$$[y - f(x_0)] = f'(x_0) [x - x_0]$$

Dim.: In passato avete visto che se m è il coeff. angolare di una retta e la retta passa per $A = (x_A, y_A)$ tale retta ha equazione

$$(y - y_A) = m(x - x_A)$$

Nel nostro caso la retta ha $m = f'(x_0)$ per def e la retta passa per $A = (x_0, f(x_0))$ perché A sta nel grafico. Usando le formule sopra si ha la tesi.

□

Back to esempio: $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ $f(x) = x^2 + 1$

(1) Retta tg al grafico in $x_0 = 0$
Per le formule

$$[y - f(x_0)] = f'(x_0) (x - x_0)$$

$$[y - f(0)] = f'(0) (x - 0)$$

$$y - 1 = 0 \Rightarrow y = 1$$

(2) Retta tg al grafico in $x_0 = 2$
Per le formule

$$[y - f(2)] = f'(2) \cdot (x - 2)$$

$$y - 5 = 4(x - 2)$$

$$y = 4x - 3$$

Domanda: C'è un modo di fare le derivate di tutte le funzioni insieme?

Def.: Sia $f: (a,b) \rightarrow \mathbb{R}$ derivabile in ogni ptò $x_0 \in (a,b)$ definisce la funzione derivata

$$f': (a,b) \rightarrow \mathbb{R}$$

Tale che $f'(x)$ è la derivata della funzione nel punto x .

Esempio: $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ $f(x) = x^2 + 1$

Per calcolare la funzione derivate, faccio il limite del rapporto incrementale in un pto generico x .

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{[(x+h)^2 + 1] - (x^2 + 1)}{h} =$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x^2 + h^2 + 2xh + 1 - x^2 - 1}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (h + 2x) = 2x$$

Dunque la funzione derivate è $f'(x) = 2x$ (si fanno tutte le deriv. insieme)

Derivate delle funzioni elementari (moltiamoci per costruire)

(1) $f(x) = k$ costante

(2) $f(x) = x^n \quad n \geq 1, n \in \mathbb{N}$

(3) $f(x) = \sin x$

(4) $f(x) = \cos x$

(5) $f(x) = e^x$

(6) $f(x) = a^x \quad a > 0, a \neq 1$

(7) $f(x) = \ln x$

(8) $f(x) = \log_a x \quad a > 0, a \neq 1$

(2bis) $f(x) = x^\alpha, \alpha \neq 0, \alpha \in \mathbb{R}$

$f'(x) = 0$

$f'(x) = n \cdot x^{n-1}$

$f'(x) = \cos x$

$f'(x) = -\sin x$

$f'(x) = e^x$

$f'(x) = a^x \ln a$

$f'(x) = \frac{1}{x}$

$f'(x) = \frac{1}{x} \cdot \log_a e$

$f'(x) = \alpha \cdot x^{\alpha-1}$

Pag 1623 n 62

$f(x) = \frac{x+1}{x}$ ns calcolare con la def. $f'(x)$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{h+x+1}{h+x} - \frac{x+1}{x}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{hx + x + 1 - h \cdot x - h - x - 1}{h \cdot (h+x)}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} -\frac{1}{h \cdot (h+x)} = -\frac{1}{x^2}$$

$$n \neq 0 \quad f(x) = x \cos x \quad \cos x \cosh - \sin x \sinh$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h) \overset{1}{\cancel{\cos(x+h)}} - x \cos x}{h} =$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x \cos x \cosh - x \sin x \sinh + h \cos x \cosh - h \sin x \sinh}{h} = x \cos x$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x \cos x (\cosh - 1)}{h} - x \sin x \frac{\sinh}{h} + \frac{1}{h} \cancel{\cos x \cosh} - \frac{1}{h} \cancel{\sin x \sinh}$$

$$= -x \sin x + \cos x$$

Regole di Derivazione (Dim successive)

- (1) $D(f+g) = Df + Dg$
- (2) $D(f \cdot g) = (Df)g + f \cdot (Dg)$ (2bis) $D(k \cdot f) = k \cdot Df$
- (3) $D\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{(Df) \cdot g - f(Dg)}{g^2}$
- (4) $[D(f \circ g)](x) = Df(g(x)) \cdot Dg(x)$ Hord

Esercizi:

$$f(x) = x \cdot \cos x$$

$$\begin{aligned} Df(x) &= [D(x)] \cdot \cos x + x D(\cos x) \\ &= 1 \cdot \cos x + x(-\sin x) \\ &= \cos x - x \sin x \end{aligned}$$

Pag 1629 159

$$f(x) = x^5 + 6x$$

$$f'(x) = 5x^4 + 6$$

160

$$f(x) = -3x^2 + 3$$

$$f'(x) = (-3) \cdot 2x = -6x$$

164

$$f(x) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2$$

$$f'(x) = x^2 + x$$

182:

$$f(x) = \sqrt[4]{x^3} + 3x - 2 = x^{\frac{3}{4}} + 3x - 2$$

$$f'(x) = \frac{3}{4}x^{\frac{3}{4}-1} + 3 = \frac{3}{4}x^{-\frac{1}{4}} + 3 = \frac{3}{4\sqrt{x}} + 3$$

199:

$$f(x) = (\ln x - 3) \cdot \ln x$$

$$f'(x) = [D(\ln x - 3)] \cdot \ln x + (\ln x - 3) \cdot D(\ln x)$$

$$= \frac{1}{x} \cdot \ln x + (\ln x - 3) \frac{1}{x} = \frac{2\ln x}{x} - \frac{3}{x} = \frac{2\ln x - 3}{x}$$

207

$$f(x) = \underbrace{2\sqrt{x}}_{2\sqrt{2}} \underbrace{x^2 \ln x}_{\ln x} - \sqrt{2}x^2$$

$$f'(x) = \cancel{2\sqrt{2}} \left[\cancel{2x} \cdot \ln x + x^2 \cdot \frac{1}{x} \right] - \cancel{\sqrt{2}} \cdot 2x$$

$$= 4\sqrt{2}x \ln x + \cancel{2\sqrt{2}x} - \cancel{2\sqrt{2}x} = 4\sqrt{2}x \ln x$$

Pag 1632 n 216

$$f(x) = x \cdot e^x \cdot \ln x$$

$$(fg)' = f'g + fg'$$

$$D(fg) = Df \cdot g + f \cdot Dg$$

$$\begin{aligned}
 f'(x) &= D(x \cdot e^x) \cdot \ln x + x \cdot e^x D(\ln x) \\
 &= [1 \cdot e^x + x \cdot e^x] \cdot \ln x + x e^x \cdot \frac{1}{x} \\
 &= e^x (\ln x + x \ln x + 1)
 \end{aligned}$$

218: $f(x) = x \sin x \cos x$

$$\begin{aligned}
 f'(x) &= D(x \sin x) \cdot \cos x + x \sin x D(\cos x) \\
 &= [1 \cdot \sin x + x \cos x] \cos x + x \sin x \cdot (-\sin x) \\
 &= \sin x \cos x + x \cos^2 x - x \sin^2 x
 \end{aligned}$$

245 $h(x) = e^{x^2-3x}$

$$h'(x) = e^{x^2-3x} \cdot (2x-3)$$

$$D(f(g(x))) = Df(g(x)) \cdot Dg(x)$$

$$\begin{aligned}
 f(x) &= e^x & g(x) &= x^2-3x \\
 f(g(x)) &= f(x^2-3x) = e^{x^2-3x}
 \end{aligned}$$

$$f'(x) = e^x \quad g'(x) = 2x-3$$

249 $f(x) = \ln(x^2-1) + 5$

$$f'(x) = \frac{1}{x^2-1} \cdot 2x$$

"Derivate delle
più esterne, volutamente
in quelle più interne"

Tip: Per riconoscere una $f \circ g$ composta
si vede una funzione elementare
con argomento che è una $f \circ g$

284: $f(x) = 5 \cdot \sin(x^4)$ interne
2bis

$$f'(x) = 5 \cdot \cos(x^4) \cdot 4x^3 = 20x^3 \cos(x^4)$$

interne

interna

$$\begin{aligned}
 292. \quad f(x) &= \sqrt{2x} + \sqrt{e^{2x}+1} = (2x)^{\frac{1}{2}} + (e^{2x}+1)^{\frac{1}{2}} \quad (e^{2x})^{\frac{1}{2}} + 1 \\
 f'(x) &= \frac{1}{2} (2x)^{\frac{1}{2}-1} \cdot 2 \quad \text{Dervative 1:} \\
 &= (2x)^{-\frac{1}{2}} + \frac{1}{2} (e^{2x}+1)^{-\frac{1}{2}} [e^{2x} \cdot 2 + 0] \\
 &= (2x)^{-\frac{1}{2}} + e^{2x} (e^{2x}+1)^{-\frac{1}{2}}
 \end{aligned}$$

$$293. \quad f(x) = \ln(2\ln x)$$

$$f'(x) = \frac{1}{2\ln x} \cdot \frac{2}{x} = \frac{1}{x \ln x}$$

1

Macchi

11

Motilde

19

Sore

21

Sofia

2