Settimana: 17

Materia: Matematica
Classe: 5A
Data: 7/02/26

Def: Sia $f: [a;b] \longrightarrow \mathbb{R}$ continua, f derivabile in $(a;b)$ e $x_0 \in (a;b)$.
Diremo che x_0 è un punto critico / stazionario se $f'(x_0) = 0$

Remind: Fermat: Massimo o minimo locale sono punti critici

Def: Sia $f: (a;b) \longrightarrow \mathbb{R}$ derivabile $x_0 \in (a;b)$, $f'(x_0) = 0$
Se vale che $f'(x) > 0$ se $x < x_0 \wedge x > x_0$
(oppure $f'(x) < 0$ se $x < x_0 \wedge x > x_0$), allora il punto è detto ~~flesso~~ a tangente orizzontale

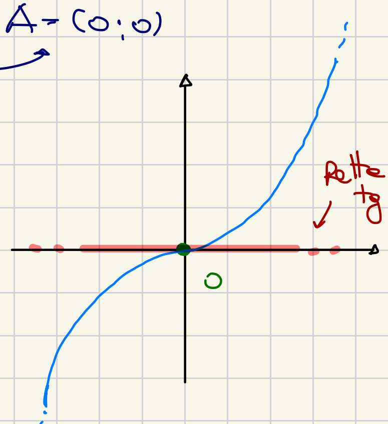
Esempio: $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ $\quad f(x) = x^3$

(1) $Dom(f) = \mathbb{R}$

(2) Int. assi: $\quad x = 0 \rightsquigarrow f(0) = 0 \qquad A = (0;0)$
$\qquad\qquad\qquad y = 0 \rightsquigarrow x^3 = 0$

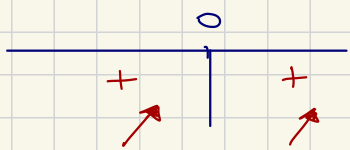
(3) Segno: $\quad x^3 \geq 0 \rightsquigarrow x \geq 0$

(4) $\lim_{x \to +\infty} x^3 = +\infty \qquad \lim_{x \to -\infty} x^3 = -\infty$



(5) $f'(x) = 3x^2$

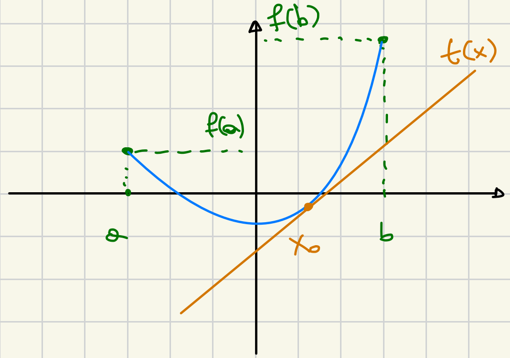
$f'(x) \geq 0 \qquad 3x^2 \geq 0 \qquad x^2 \geq 0 \qquad \forall x \in \mathbb{R}$
e $x = 0$ è un punto stazionario



Oss: I punti stazionari sono solamente queste tre tipologie
↳ $f'(x_0) = 0$

Oss: Gli altri unici pti strani sono Cuspidi, pti angolosi, flessi a tg verticale (Non esiste derivata)

Def: Sia $f:(a;b) \longrightarrow \mathbb{R}$ funzione derivabile. Sia $x_0 \in (a;b)$



Diremo che $f(x)$ è concava verso l'alto (Def del libro) in un intorno di x_0 se $\forall x$ appartenente all'intorno la funzione assume valori maggiori di quelli di $t(x)$, tangente al grafico nel punto x_0, nei punti aventi le stesse ascisse, ossia

$$f(x) > t(x) \quad \forall x \in I \setminus \{x_0\}$$

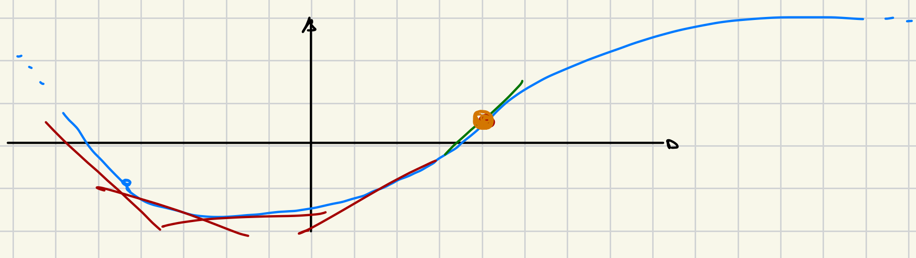
\+ Omar

Oss: Concava verso il basso è uguale solo che $\boxed{f(x) < t(x)}$

Fatto: La derivata seconda individua le zone di concavità rivolta verso l'alto e rivolta verso il basso. In particolare vale che
se $f''(x) > 0$ la concavità è rivolta verso alto
se $f''(x) < 0$ la concavità è rivolta verso basso.

Quando $f''(x) = 0$ c'è un possibile cambio di concavità

Dim: Non mi interessa formalmente



$f''(x) > 0 \boxed{\Longrightarrow} f'(x)$ crescente $\Rightarrow$ Le rette tg formano profilo 

con seguenze Lagrange

Es 265 pag 1792

$$f(x) = \ln\left(\frac{x^2+1}{x^2-1}\right)$$

(1) Dom f:

$$\begin{cases} \dfrac{x^2+1}{x^2-1} > 0 \\ x^2-1 \neq 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \cancel{N>0 \ \forall x \in \mathbb{R}} \\ x<-1 \ \vee \ x>1 \\ x \neq \pm 1 \end{cases}$$

$$\rightsquigarrow \boxed{Dom(f) = \{x<-1 \ \vee \ x>1\}}$$

(2) Assi: $x=0$ No per il dom f

$f(x)=0$

$$\ln\left(\frac{x^2+1}{x^2-1}\right) = 0 \rightsquigarrow \frac{x^2+1}{x^2-1} = 1 \rightsquigarrow \cancel{x^2}+1 = \cancel{x^2}-1 \quad \text{IMP.}$$

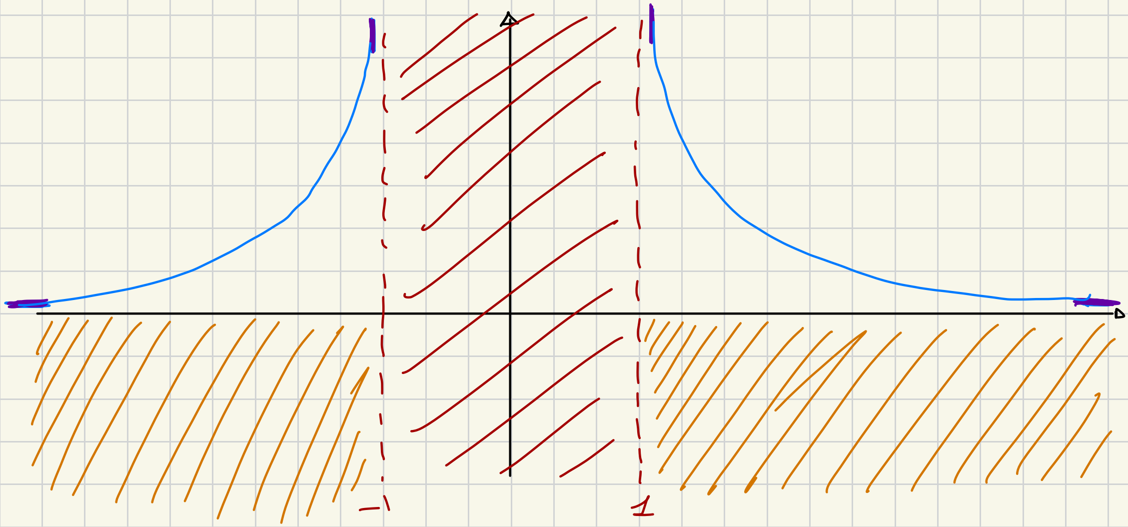
(3) Segno: $f(x) \geq 0$ $\quad \ln\left(\frac{x^2+1}{x^2-1}\right) \geq 0$

$$\frac{x^2+1}{x^2-1} \geq 1 \rightsquigarrow \frac{\cancel{x^2}+1-\cancel{x^2}+1}{x^2-1} \geq 0 \qquad \frac{2}{x^2-1} \geq 0$$

$$\boxed{\text{Sol: } x<-1 \ \vee \ x>1}$$

(4) Limiti: $\lim_{x \to +\infty} \ln\left(\frac{x^2+1}{x^2-1}\right) = 0 \qquad \lim_{x \to -\infty} \ln\left(\frac{x^2+1}{x^2-1}\right) = 0$

$$\lim_{x \to -1^-} \ln\left(\frac{x^2+1}{x^2-1}\right) = +\infty \qquad \lim_{x \to 1^+} \ln\left(\frac{x^2+1}{x^2-1}\right) = +\infty$$



(5) $f(x) = \ln\left(\frac{x^2+1}{x^2-1}\right)$

$$\cancel{2x^3} - 2x - \cancel{2x^3} - 2x$$

$$f'(x) = \frac{1}{\frac{x^2+1}{x^2-1}} \cdot \frac{2x(x^2-1) - (x^2+1)\cdot 2x}{(x^2-1)^2}$$

$$= \frac{\cancel{x^2-1}}{x^2+1} \cdot \frac{(-4x)}{(x^2-1)^{\cancel{2}}} = \frac{-4x}{(x^2+1)(x^2-1)}$$

Non ci sono problemi, quindi no pti angolosi né cuspidi ...

$f'(x) \geq 0$ $\quad N \geq 0 \quad -4x \geq 0 \quad x \leq 0$

$\quad D > 0 \quad x < -1 \ \vee \ x > 1$

		-1		0		1	
N	+		+		−		−
D	+		−		−		+
	+		−		+		−
	↗		↘		↗		↘

Non nel Dominio

(6) $f'(x) = \dfrac{-4x}{x^4-1}$

$$f''(x) = \frac{-4(x^4-1) + 4x(4x^3)}{(x^4-1)^2} = \frac{4(-x^4+1+4x^4)}{(x^4-1)^2}$$

$$= \frac{4(3x^4+1)}{(x^4-1)^2}$$

$f''(x) \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \implies$ Concavità sempre rivolta verso alto