

Settimana: 15

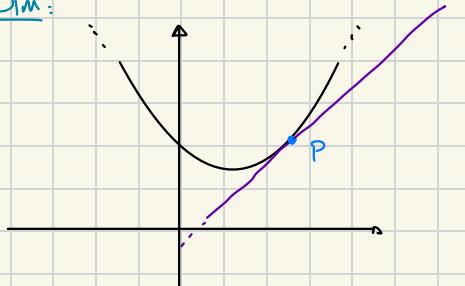
Argomenti:

Materia: Matematica
Classe: 3D
Data: 15/01/2026

! **Teorema:** Dato una parabola $y = ax^2 + bx + c$ e un punto $P \in$ Parabola $P = (x_p, y_p)$, la tangente alla parabola passante per P ha coefficiente angolare

$$m = 2ax_p + b$$

Dim:



(1) Considero il fascio di rette per P

→ Voglio determinare m

$$y - y_p = m(x - x_p)$$

Questo è
una MINACCIA

(2) Interseco la retta con la parabola

$$\left\{ \begin{array}{l} y = ax^2 + bx + c \\ y = mx - mx_p + y_p \end{array} \right. \quad \text{ms} \quad ax^2 + bx + c = mx - mx_p + y_p$$

{

$$ax^2 + x(b-m) + c + mx_p - y_p = 0$$

(3) Per avere la tangenza impongo $\Delta = 0$

$$\Delta = (b-m)^2 - 4(a)(c+mx_p - y_p) = 0$$

$$b^2 + m^2 - 2bm - 4ac - 4amx_p + 4ay_p = 0$$

Riordino /

] Ho tutto
tranne m
quindi è una
eq. di II grado

$$m^2 - 2m(b + 2ax_p) + b^2 - 4ac + 4ay_p = 0$$

con incognite m.

Per trovare m rifaccio il Δ di queste nuove equazioni. Per semplicità faccio $\frac{\Delta}{a}$

$$\frac{\Delta}{a} = [-(b + 2ax_p)]^2 - (b^2 - 4ac + 4ay_p)$$

$$= b^2 + 4a^2x_p^2 + 4abx_p - b^2 + 4ac - 4ay_p$$

$$= 4a(ax_p^2 + bx_p + c - y_p)$$

$$= 4a(y_r - y_p) = 0$$

$$P = (x_p, y_p)$$

$$y = ax^2 + bx + c$$

$$y_p = ax_p^2 + bx_p + c$$

Ora che ho calcolato il Δ, trovo le soluzioni dell'eq. di II grado

$$m_{\pm/2} = \frac{-\frac{b}{2} \pm \sqrt{\frac{\Delta}{a}}}{a} = \frac{b + 2ax_p \pm \sqrt{10}}{1} = 2ax_p + b$$

In generale

□

Fasci di Parabole:

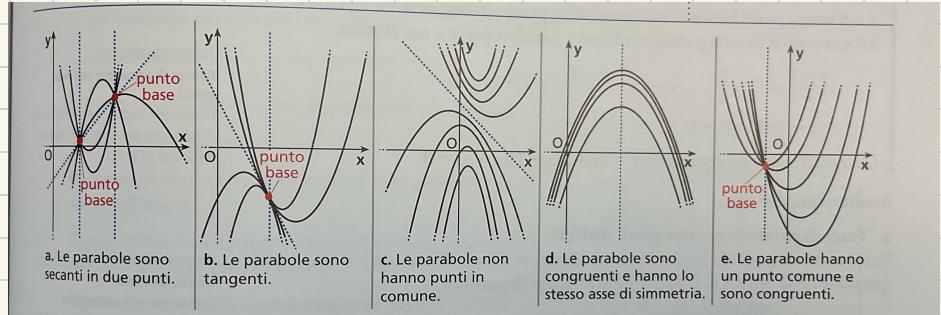
Def. Date due parabole $y = ax^2 + bx + c$, $y = a'x^2 + b'x + c'$ il fascio di parabole generato dalle due parabole è:

$$y - ax^2 - bx - c + k(y - a'x^2 - b'x - c') = 0$$

o, un altro modo per scriverlo è:

$$(k+1)y - (a + ka')x^2 - (b + kb')x - (c + c') = 0$$

A seconda delle parabole di partenza, possiamo avere fasci diversi al variare di k . Il disegno rappresenta le varietà che.



Esercizio: Trovare esempi esplicativi per ogni situazione

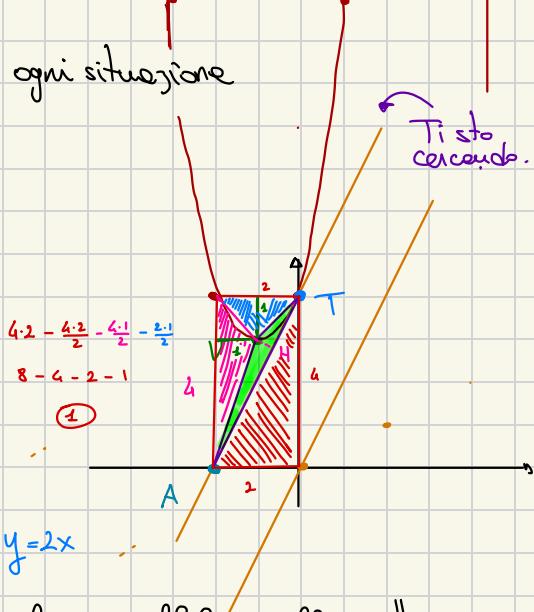
Pag 354, es 29

$$y = x^2 + 2x + 6$$

$$V = \left(-\frac{b}{2a}; -\frac{\Delta}{4a} \right) = \left(-1; -\frac{4-16}{4} \right)$$

$$V = (-1; +3)$$

x	y
0	6
2	12
4	14



Considero la retta $r: y - 2x = 0$

Trovo la retta tangente alle parabole parallela alla retta r

Prendo il fascio di rette parallelo a r :

$$y = 2x + q \quad \leftarrow \text{Fascio di rette improprio}$$

Lo interseco con le parabole e impongo tangenzialità per trovare q

$$\begin{cases} y = x^2 + 2x + 6 \\ y = 2x + q \end{cases}$$

$$\Rightarrow x^2 + 2x + 6 = 2x + q \Rightarrow x^2 = q - 6$$

Per avere una unica intersezione $q=4$ e le rette tangente è
perpendicolari

$$y = 2x + 4$$

Punto di tangenza $T = (0; 4)$ coincide con intersezione parabola e retta

Considera A pto di int. fra le rette tangente e l'asse x

Per trovare A è sufficiente $\begin{cases} y = 0 \\ y = 2x + 4 \end{cases} \Rightarrow A = (-2; 0)$

Calcolare area triangolo AVT . \Rightarrow Vedere disegno e sottrazione aree.

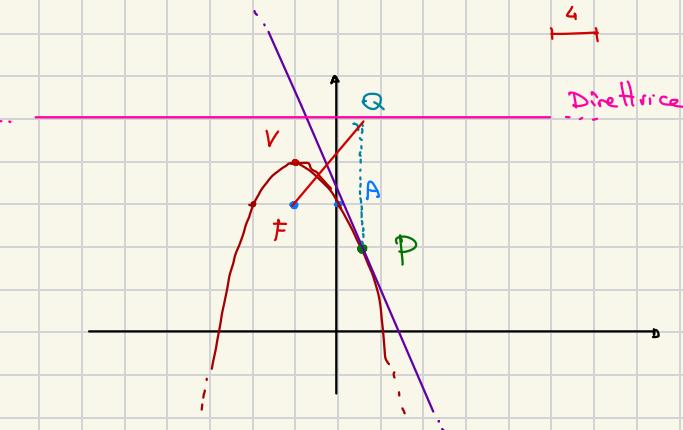
Esercizio 58

$$V = (-4; 16) \text{ vertice}$$

$$A = (0; 12)$$

Determina eq. della parabola

$$V = \left(-\frac{b}{2a}; -\frac{\Delta}{4a} \right)$$



$$\begin{cases} -\frac{b}{2a} = -4 \\ -\frac{b^2 - 4ac}{4a} = 16 \\ 12 = a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c \end{cases}$$

$$\begin{cases} b = 8a \\ -\frac{64a^2 - 48a}{4a} = 16 \\ c = 12 \end{cases}$$

$$\begin{cases} c = 12 \\ b = 8a \Rightarrow b = -2 \\ -16a + 12 = 16 \end{cases}$$

$$\hookrightarrow a = -\frac{1}{4}$$

$$y = -\frac{1}{4}x^2 - 2x + 12$$

$$\Delta = 4 - 4\left(-\frac{1}{4}\right)(12) = 16$$

Trova la tangente in $P \in$ Parabola con $x_p=2$

Trovo y_p sostituendo x_p nella parabola $y_p = -\frac{1}{a} \cdot 4 - 4 + 12 = 4$
 $P = (2; 4)$

Per il coeff. angolare della retta f_g uso la formula $m = 2ax_p + b$
 $= 2\left(-\frac{1}{a}\right) \cdot 2 - 2$
 $= -3$

Per trovare la retta $y - 4 = (-3)(x - 2)$ $[y - y_p = m(x - x_p)]$
 $r: \boxed{y = -3x + 13}$

Sia Q proiezione di P sulla direttrice

Sia F il fuoco

Calcola l'asse di FQ e verifica che coincide con r .

Direttrice: $y = k = -\frac{1+\Delta}{4a}$ $Q = \left(2; -\frac{1+16}{-1}\right) = (2; 17)$

Fuoco: $F = \left(-\frac{b}{2a}; \frac{1-\Delta}{4a}\right)$ $F = \left(-4; \frac{1-16}{-1}\right) = (-4; 15)$

Asse di FQ : Pongo uguali le distanze di un punto generico (x, y) da F e da Q .

$$(x-2)^2 + (y-17)^2 = (x+4)^2 + (y-15)^2$$

$$\cancel{x^2} + 4 - 4x + \cancel{y^2} - 36y + 289 = \cancel{x^2} + 16 + 8x + \cancel{y^2} - 30y + 225$$

$$-4y = 12x - 52 \quad \text{ma} \quad y = -3x + 13 \quad \text{che è proprio } r \quad \therefore$$

Pag 368 n°

$y = -x^2 + 3ax - 2a^3$ Per quali a il fuoco F appartiene a uno degli assi?

$$F = \left(-\frac{b}{2a}; \frac{1-\Delta}{4a} \right)$$

Caso 1: $-\frac{b}{2a} = 0 \Rightarrow -\frac{3a}{-2} = 0 \Rightarrow a = 0$

Caso 2: $\frac{1-b^2+4ac}{4a} = 0 \Rightarrow \frac{1-9a^2+4(-1)(2a^3)}{-4} = 0$

$$8a^3 - 9a^2 + 1 = 0$$

$$8a^3 - 8a^2 - a^2 + 1 = 0$$

$$8a^2(a-1) - (a-1)(a+1) = 0$$

$$(8a^2 - a - 1)(a - 1) = 0$$

$$a = 1$$

$$\Delta = 1 + 32 = 33$$

$$a_1/a_2 = \frac{-1 \pm \sqrt{33}}{16}$$

- n° 2: Fascio di parabole con asse parallelo ad asse y
» apertura costante a $\xrightarrow{\text{Coefficiente di } x^2}$ C
» passante per un pto P fisso.

Dimostra che i fuochi delle parabole del fascio appartengono a una parabola di apertura $-a$ e fuoco in P .

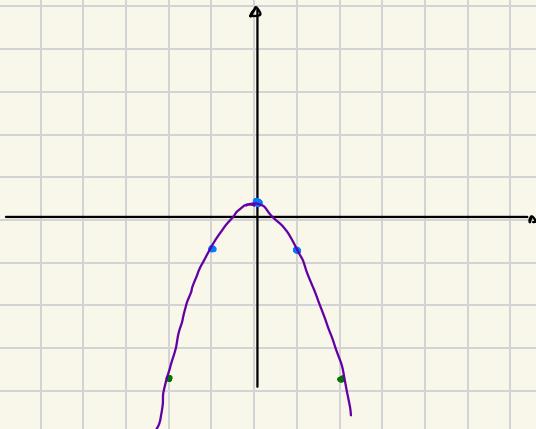
Scelgo $a = 1$
 $P = (0; 0)$

Il mio fascio di parabole è $y = x^2 + bx + c$ con b, c parametri.
So che $P \in$ Parabola $\Rightarrow c = 0$

Fascio di parabole è $y = x^2 + kx$

Premetto i fuochi delle parabole che appartengono al fascio

$$F_k = \left(-\frac{b}{2a}; \frac{1-\Delta}{4a} \right) = \left(-\frac{k}{2}; \frac{1-k^2}{4} \right)$$



Scelgo alcuni valori di k per vedere i fuochi.

k	F_k
0	(0, 1/4)
2	(-1; -3/4)
-2	(1; -3/4)
4	(-2; -15/4)
-4	(2; -15/4)

Calcolo le parabole che ha apertura -1 e Fuoco in (0;0)

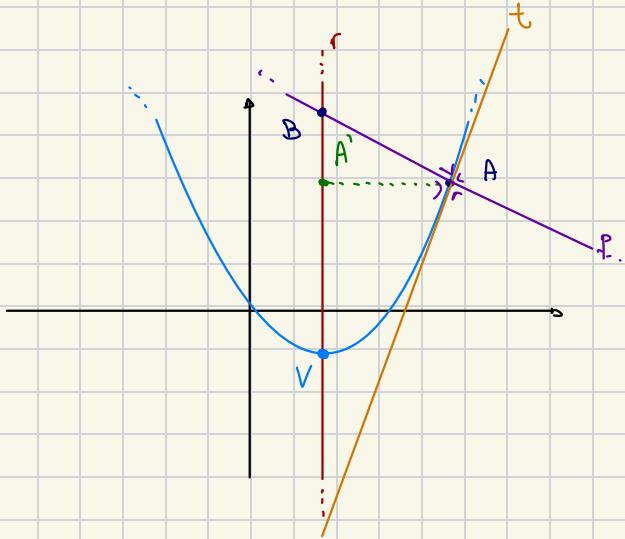
$$y = ax^2 + bx + c \quad \text{ms} \quad \begin{cases} a = -1 \\ -\frac{b}{2a} = 0 \\ \frac{1-\Delta}{4a} = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} a = -1 \\ b = 0 \\ \frac{1-b^2+4ac}{-4a} = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} a = -1 \\ b = 0 \\ 1-4c = 0 \\ c = +\frac{1}{4} \end{cases}$$

la parabola che ci dà il libro è: $y = -x^2 + \frac{1}{4}$

I punti F_k sono punti che appartengono alle parabole?
Lo verifichiamo mettendo $x = -\frac{k}{2}$ e guardando il risultato:

$$y = -\left(-\frac{k}{2}\right)^2 + \frac{1}{4} = -\frac{k^2}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1-k^2}{4} \quad \text{che è le cose giuste.}$$

n3:



$B A'$ è costante è uguale
alla distanza tra il fuoco
e la direttrice

$$y = ax^2 + bx + c$$

$$\text{Asse: } x = -\frac{b}{2a}$$

$$A = (x_A, y_A)$$

$$m_t = 2ax_A + b \quad \text{Formule}$$

$$m_p \cdot m_t = -1 \quad \Rightarrow \quad m_p = -\frac{1}{2ax_A + b} \quad \text{retta } \perp$$

$$\text{retta } p: \quad y - y_A = -\frac{1}{2ax_A + b} (x - x_A)$$

Per trovare B : Asse di p :

$$\begin{cases} x = -\frac{b}{2a} \\ y = -\frac{1}{2ax_A + b} \left(-\frac{b}{2a} - x_A \right) + y_A \end{cases}$$

$$A' = \left(-\frac{b}{2a}; y_A \right) \quad B = \left(-\frac{b}{2a}; -\frac{1}{2ax_A + b} \left(-\frac{b}{2a} - x_A \right) + y_A \right)$$

$$A'B = \left| -\frac{1}{2ax_A + b} \left(-\frac{b+2ax_A}{2a} \right) + y_A - y_A \right| = \left| \frac{1}{2a} \right|$$