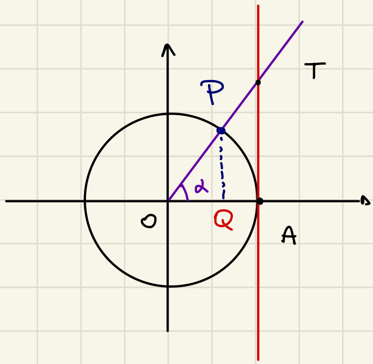
Def: Data la circonferenza goniometrica $(x^2+y^2=1)$. Traccio la retta $x=1$ che interseca la retta uscente da O che ha inclinazione α.



Chiamiamo $tg(\alpha) = Tan(\alpha) = AT$
e si legge "tangente di α"

Oss: la definizione sopra coincide con la definizione classica

$$tg(\alpha) = \frac{sin(\alpha)}{cos(\alpha)}$$

Dim: Prendiamo P in figura $P=(x_P, y_P) = (cos(\alpha), sin(\alpha))$
Considero $O\hat{P}Q$ e $O\hat{T}A$. Sono Simili (hanno tutti gli angoli congruenti)
Dunque i lati sono in proporzione:

$$AT : PQ = OA : OQ$$

$$tg(\alpha) : sin\,\alpha = 1 : cos(\alpha) \rightsquigarrow tg(\alpha) = \frac{sin(\alpha)}{cos(\alpha)}$$

$\square$

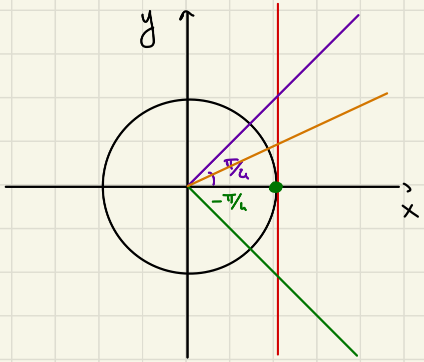
Warning: Se $\alpha = \frac{\pi}{2}$ o $\frac{3}{2}\pi$ (o anche $\frac{\pi}{2}+k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$), la tangente non esiste
(Poiché le due rette non si intersecano)

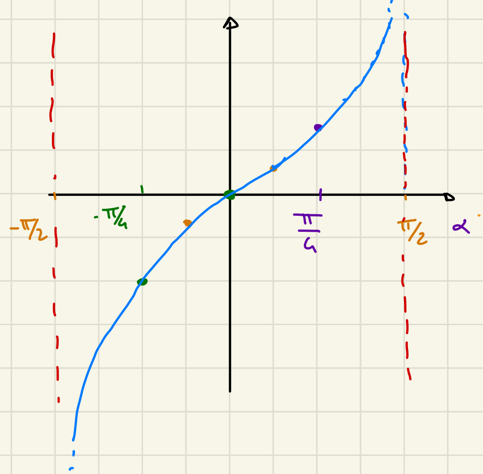
Grafico della funzione tangente: Per quanto detto, esiste una funzione

$$tg: \mathbb{R}\setminus\underbrace{\{(k+\tfrac{1}{2})\pi,\ k\in\mathbb{Z}\}}_{} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$\alpha \longmapsto tg(\alpha)$$

è un modo compatto per scrivere $\{\pm\frac{\pi}{2}, \pm\frac{3}{2}\pi, \dots\}$





$$tg(\pi/4) = \frac{\sin(\pi/4)}{\cos(\pi/4)} = \frac{\sqrt{2}/2}{\sqrt{2}/2} = 1$$

Oss: 1) $(k + \frac{1}{2})\pi$ sono asintoti verticali per la funzione tg

2) tg è una funzione periodica di periodo π (DIS - L2)

$$tg(\pi + x) = \frac{\sin(\pi + x)}{\cos(\pi + x)} = \frac{-\sin x}{-\cos x} = \frac{\sin x}{\cos x} = tg\, x$$

Oss Ettore: Il grafico di $tg: (-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}) \longrightarrow \mathbb{R}$ è simmetrico rispetto all'origine. Ciò significa che in questo dominio la funzione è Dispari: Cioè $tg(x) = -tg(-x)$
(lo dimostriamo formalmente fra poco).

Archi associati (formule con dimostrazione)

Proposizione: Valgono le seguenti formule

$\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$ $\qquad$ $\cos(-\alpha) = \cos\alpha$

$\sin(\alpha + \frac{\pi}{2}) = \cos\alpha$ $\qquad$ $\cos(\alpha + \frac{\pi}{2}) = -\sin\alpha$

$\sin(\alpha + \pi) = -\sin\alpha$ $\qquad$ $\cos(\alpha + \pi) = -\cos\alpha$

$\sin(\alpha - \frac{\pi}{2}) = -\cos\alpha$ $\qquad$ $\cos(\alpha - \frac{\pi}{2}) = \sin\alpha$

$\sin(\alpha - \pi) = -\sin\alpha$ $\qquad$ $\cos(\alpha - \pi) = -\cos\alpha$

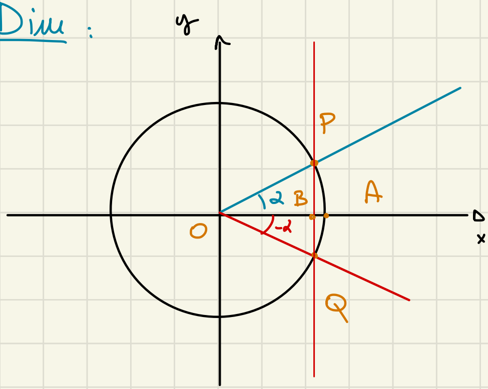
Di conseguenza

$tg(-\alpha) = -tg(\alpha)$

$tg(\alpha + \frac{\pi}{2}) = -ctg(\alpha)$

$tg(\alpha - \frac{\pi}{2}) = -ctg(\alpha)$

Dim:



$|\sin(-\alpha)| = BQ$

Considero $O\hat{P}B$ e $O\hat{B}Q$

$OP \simeq OQ$
$P\hat{O}B \simeq B\hat{O}Q$
OB in comune
$\overset{\text{I crit congr.}}{\Longrightarrow}$ $O\hat{P}B \simeq O\hat{B}Q$

Dunque $|\sin(-\alpha)| = BQ = BP = \sin\alpha$

Passando ai segni $\sin(-\alpha) = -\sin(\alpha)$
$\cos(-\alpha) = OB = \cos(\alpha)$

$\square$

Warning: All'orale vengono chieste tutte le dim.

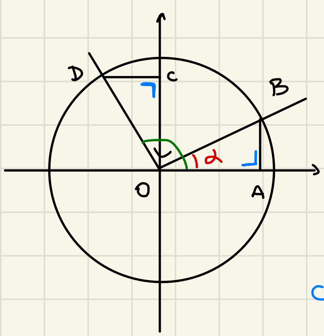
Dim di Ettore: $-\operatorname{tg}(-x) = -\dfrac{\sin(-x)}{\cos(-x)} \overset{\text{Formule}}{\underset{\text{sopra}}{=}} -\dfrac{-\sin(x)}{\cos x} = \operatorname{tg}(x)$

Dunque $\operatorname{tg}: \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right) \longrightarrow \mathbb{R}$ è dispari

$\square$

Dim: $\alpha + \frac{\pi}{2}$

$|\cos(\alpha + \frac{\pi}{2})| = CD$
$|\sin(\alpha + \frac{\pi}{2})| = OC$



Voglio dim che i triangoli $O\hat{A}B$ e $O\hat{C}D$ sono congruenti

$OD \simeq OB$ raggio
$O\hat{C}D \simeq O\hat{A}B \simeq \frac{\pi}{2}$ per costruzione
$D\hat{O}C \simeq D\hat{O}B - C\hat{O}B = \frac{\pi}{2} - C\hat{O}B = \alpha$
$\overset{\text{II crit}}{\Longrightarrow}$ $O\hat{A}B \simeq O\hat{C}D$

Di conseguenze: $\overbrace{\cos(\alpha + \frac{\pi}{2})}^{CD} = -\overbrace{\sin\alpha}^{AB}$ ⇝ segno $-$ perché cambio quadrante
$\underbrace{\sin(\alpha + \frac{\pi}{2})}_{OC} = \underbrace{\cos\alpha}_{OA}$

$\square$