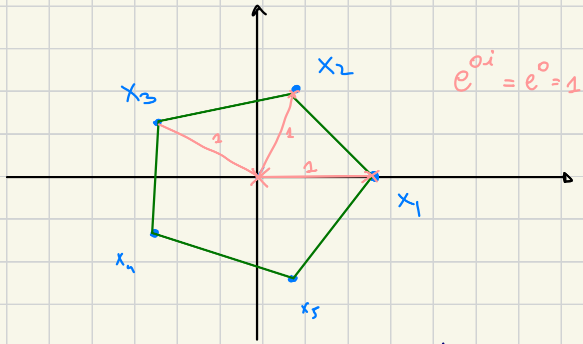
Back to Radice n-esime:

$x^5 = 1 \rightsquigarrow x = e^{\frac{2k\pi}{5} i} \qquad k \in \mathbb{N}$

Se provo a disegnarle nel piano complesso vengono



$k=0 \rightsquigarrow$ angolo 0

$k=1 \rightsquigarrow \frac{2}{5}\pi$

$k=2 \rightsquigarrow \frac{4}{5}\pi = \frac{2}{5}\pi \cdot 2$

$k=3 \rightsquigarrow \frac{2}{5}\pi \cdot 3$

$k=4 \rightsquigarrow \frac{2}{5}\pi \cdot 4$

Le soluzioni vengono un pentagono regolare

Spunti: 1) se ho $x^n = 1$, le soluzioni quali saranno e che forma definiranno?

2) Se ho $x^n = 27$, cosa cambia? (Guardare il rosa)

3) Quanto fa $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5$ nell' esempio sopra?

Teorema (Fondamentale dell' algebra) — No Dim: Dato un polinomio $p(x)$ di grado ≥ 1, il polinomio ammette almeno una soluzione complessa

Esempio: $x^5 - \pi x^4 - x^{327} + (\log_2 3) x^{471} = 0$

Corollario: Una equazione di grado n, ha esattamente n-radici complesse

Pag 1029 n 393

$$x^6 + 7x^3 - 8 = 0 \qquad x^3 = t$$

$$t^2 + 7t - 8 = 0 \quad \rightsquigarrow \quad (t+8)(t-1) = 0$$

$$t = 1, -8$$

$$x^3 = 1 \quad \rightsquigarrow \quad x = e^{\frac{2k}{3}\pi i} \quad \text{con} \quad k = 0, 1, 2$$

$$k = 0, \quad x_1 = e^{0i} = 1$$

$$k = 1, \quad x_2 = e^{\frac{2}{3}\pi i} = \cos\frac{2}{3}\pi + i\sin\frac{2}{3}\pi = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i$$

$$k = 2, \quad x_3 = e^{\frac{4}{3}\pi i} = \cos\frac{4}{3}\pi + i\sin\frac{4}{3}\pi = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i$$

$$x^3 = -8 \quad \rightsquigarrow \quad x = \sqrt[3]{-8}\; e^{\frac{2}{3}k\pi i} = -2e^{\frac{2}{3}k\pi i} \qquad k = 0, 1, 2$$

$$x_4 = -2x_1 = -2$$

$$x_5 = -2x_2 = 1 - \sqrt{3} i$$

$$x_6 = -2x_3 = 1 + \sqrt{3} i$$

Pag 1034 n 29

$$(3-2i)^3 + \frac{1 - \overbrace{i^{-21}}^{i \cdot i^{20} = i}}{-1 + \underbrace{i^{19}}_{i^3 \cdot i^{16} = -i}} - \frac{5(2+i)}{2-i} - (2+i)(2-i)$$

$$27 - 54i - 36 + \underbrace{(-2i)^3}_{-8i^3 = 8i} - \frac{1-i}{+1+i} - \frac{\cancel{5}(2+i)(2+i)}{\cancel{5}} - 5$$

$\cancel{1+(-1)-2i}$

$$-9 - 46i - \frac{(1-i)^2}{\cancel{2}} - 4 + 1 - 4i - 5 = -17 - 49i$$

26

$$\frac{3i^{10}}{(2-i^{21})^2} + \frac{\sqrt{2}\,i}{(3-i)^2}$$

$$\frac{-3}{(2-i)^2} + \frac{\sqrt{2}\,i}{(3-i)^2} = \frac{-3}{3-4i} + \frac{\sqrt{2}\,i}{8-6i}$$

$4-1-4i$ $\quad$ $9-1-6i$

$\cancel{2}(4+3i)$

$$\frac{-3(3+4i)}{9+16} + \frac{\sqrt{2}\,i(8+6i)}{64+36} =$$

$\cancel{100}$ 50

$$\frac{-9-12i}{25} + \frac{4\sqrt{2}\,i-3\sqrt{2}}{50} = \frac{-18-3\sqrt{2}}{50} + i\,\frac{-12+2\sqrt{2}}{25}$$

Pag 1038 n 65

a) Data eq. $z^4 - 2z^3 + 3z^2 - 2z + 2 = 0 = p(z)$ $z \in \mathbb{C}$

Verificare che i e $-i$ sono soluzioni.

$i^4 - 2i^3 + 3i^2 - 2i + 2 =$
$1 + 2i - 3 - 2i + 2 = 0$ $\quad$ i è soluzione

$(-i)^4 - 2(-i)^3 + 3(-i)^2 - 2(-i) + 2 =$
$1 - 2i - 3 + 2i + 2 = 0$ $\quad$ $-i$ è soluzione

b) Trova le altre soluzioni

Se i e $-i$ sono soluzioni, il polinomio è divisibile per $(z-i)(z+i) = z^2+1$

Divido quindi il polinomio di partenza per z^2+1

$$\begin{array}{rrrrr|l}
z^4 & -2z^3 & +3z^2 & -2z & +2 & z^2+1 \\ \cline{6-6}
-\;z^4 & & +z^2 & & & z^2-2z+2 \\ \cline{1-5}
 & -2z^3 & +2z^2 & -2z & +2 & \\
- & -2z^3 & & -2z & & \\ \cline{2-5}
 & & 2z^2 & & +2 & \\
 & & -\;2z^2 & & +2 & \\ \cline{3-5}
 & & / & & / &
\end{array}$$

$$p(z) = (z^2+1)(z^2-2z+2)$$

$$p(z) = (z^2+1)(z^2-2z+2) = 0$$

$z^2+1 = 0 \quad \rightsquigarrow \quad z_1 = i \;, \; z_2 = -i$

$z^2-2z+2 = 0 \qquad \frac{\Delta}{4} = \left(\frac{b}{2}\right)^2 - ac = 1-2 = -1 \qquad \sqrt{\Delta} = i$

$z_3/z_4 = 1 \pm i \qquad z_3 = 1+i \;, \; z_4 = 1-i$

c) Calcolare quanto fa $\quad z_1 \cdot z_2 \cdot z_3 \; z_4 \cdot = \dots = 2$

---

40 $\quad a,b \in \mathbb{R}$ in modo che $\quad z_1 = a-b+7 + (2a-b)i$

$z_2 = 4a-3b+5bi$

siano uguali.

Pongo parte reale e img uguale $\quad \begin{cases} a-b+7 = 4a-3b \\ 2a-b = 5b \end{cases}$

$\begin{cases} 3a-2b = 7 \\ a-3b = 0 \quad \cdot 3 \end{cases} \downarrow - \qquad 7b = 7 \rightsquigarrow b = 1 \rightsquigarrow a = 3$