Formule parametriche:
Posto $tg\left(\frac{\alpha}{2}\right) = t$, cambio di variabile, vale che

$$\sin\alpha = \frac{2t}{1+t^2} \qquad \cos\alpha = \frac{1-t^2}{1+t^2} \qquad tg(\alpha) = \frac{2t}{1-t^2}$$

Con gli opportuni campi di esistenza

Spoiler:

$$\int \sin^3\alpha \cos\alpha \, d\alpha$$ Brutto!!

Form. paramet.

$$\int \frac{t^2+t}{t^4+1} \, dt$$ "Bello!"

Dim: Uso le formule di duplicazione per far comparire $\sin\frac{\alpha}{2}$ e $\cos\frac{\alpha}{2}$

$$\sin\alpha = 2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2} \qquad \cos\alpha = \cos^2\frac{\alpha}{2} - \sin^2\frac{\alpha}{2}$$

Volendo far comparire $tg\left(\frac{\alpha}{2}\right)$ dovrò dividere e moltiplicare per qualcosa di opportuno

$$\sin\alpha = \frac{2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}{\underbrace{\sin^2\frac{\alpha}{2} + \cos^2\frac{\alpha}{2}}_{=1}} \qquad \cos\alpha = \frac{\cos^2\frac{\alpha}{2} - \sin^2\frac{\alpha}{2}}{\underbrace{\sin^2\frac{\alpha}{2} + \cos^2\frac{\alpha}{2}}_{=1}}$$

Divido sopra e sotto per $\cos^2\frac{\alpha}{2}$

$$\sin\alpha = \frac{\dfrac{2\sin\frac{\alpha}{2}\cancel{\cos\frac{\alpha}{2}}}{\cos^{\cancel{2}}\frac{\alpha}{2}}}{\dfrac{\sin^2\frac{\alpha}{2}}{\cos^2\frac{\alpha}{2}} + \dfrac{\cancel{\cos^2\frac{\alpha}{2}}}{\cancel{\cos^2\frac{\alpha}{2}}}} \qquad \cos\alpha = \frac{\dfrac{\cancel{\cos^2\frac{\alpha}{2}}}{\cancel{\cos^2\frac{\alpha}{2}}} - \dfrac{\sin^2\frac{\alpha}{2}}{\cos^2\frac{\alpha}{2}}}{\dfrac{\sin^2\frac{\alpha}{2}}{\cos^2\frac{\alpha}{2}} + \dfrac{\cancel{\cos^2\frac{\alpha}{2}}}{\cancel{\cos^2\frac{\alpha}{2}}}}$$

$$\sin\alpha = \frac{2\,tg\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{tg^2\frac{\alpha}{2}+1} \overset{tg\frac{\alpha}{2}=t}{\boxed{=}} \frac{2t}{t^2+1} \qquad \cos\alpha = \frac{1 - tg^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{tg^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)+1} = \frac{1-t^2}{t^2+1}$$

La $tg\alpha$ si fa con il rapporto. □

Formule di Prostaferesi (Giorgia)

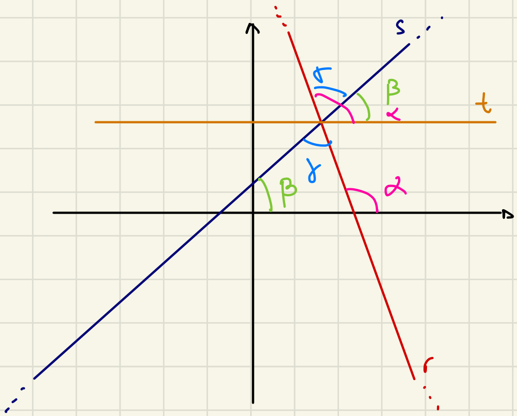
$$\sin p + \sin q = 2\sin\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2};$$
$$\sin p - \sin q = 2\cos\frac{p+q}{2}\sin\frac{p-q}{2};$$

$$\cos p + \cos q = 2\cos\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2};$$
$$\cos p - \cos q = -2\sin\frac{p+q}{2}\sin\frac{p-q}{2}.$$

Formule di Werner (Giorgia)

$$\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)];$$
$$\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)];$$
$$\sin\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)].$$

Problema che hanno tutti: Quanto vale l'angolo γ sapendo che

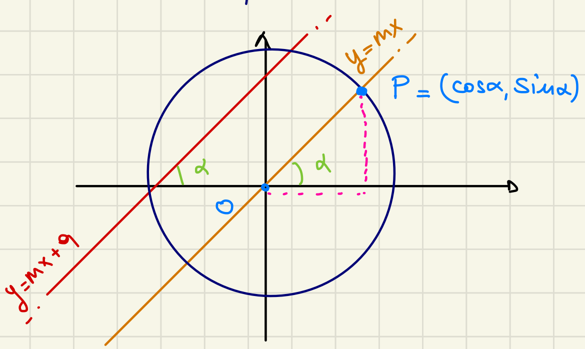


r: $y = mx + q$
s: $y = m'x + q'$

Teorema: $\boxed{\tan\gamma = \dfrac{m - m'}{1 + mm'}}$

Dim: Guardando il disegno e avendo in generale una retta $y = mx + q$ posso scrivere una relazione tra m e l'angolo tra la retta e il verso positivo dell'asse x?

Traslo la retta in modo che passi per O. m e l'angolo rimangono i soliti.
Disegno la circonferenza goniom.



P ha coordinate $P = (\cos\alpha, \sin\alpha)$ poiché $P \in$ Circ. goniom.

$$m = \frac{y_P - y_O}{x_P - x_O} = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = tg\,\alpha$$

Tornando quindi al disegno iniziale vale che

$$\operatorname{tg}(\alpha) = m, \qquad \operatorname{tg}(\beta) = m'$$

Tracciando la retta t e ragionando con il parallelismo si ottiene $\alpha - \beta = \gamma$

$$\operatorname{tg}\gamma = \operatorname{tg}(\alpha-\beta) = \frac{\operatorname{tg}(\alpha) - \operatorname{tg}(\beta)}{1+\operatorname{tg}(\alpha)\operatorname{tg}(\beta)} = \frac{m-m'}{1+mm'}$$

Pag 824 n 80

$$y = \sqrt{\frac{2(1+\sin 2x)}{1+\cos 2x}}$$ verifica che si può scrivere come $y = |\operatorname{tg}(x)+1|$

Voglio tutto in fz goniometriche

$$y^2 = \frac{2(1+2\sin x\cos x)}{1+\cos^2 x - \sin^2 x} = \frac{2+4\sin x\cos x}{1+\cos^2 x - \sin^2 x} =$$

$$= \frac{2\sin^2 x + 2\cos^2 x + 4\sin x\cos x}{\cancel{\sin^2 x} + \cos^2 x + \cos^2 x - \cancel{\sin^2 x}} = \frac{\cancel{2}(\sin^2 x + \cos^2 x + 2\sin x\cos x)}{\cancel{2}\cos^2 x}$$

$$= \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} + \frac{\cancel{\cos^2 x}}{\cancel{\cos^2 x}} + 2\frac{\sin x \cancel{\cos x}}{\cos^{\cancel{2}} x} = \operatorname{tg}^2 x + 1 + 2\operatorname{tg} x = (\operatorname{tg} x + 1)^2$$

Prendendo radice $\rightsquigarrow$ $y = |\operatorname{tg} x + 1|$

(2) Dom f e Periodo.

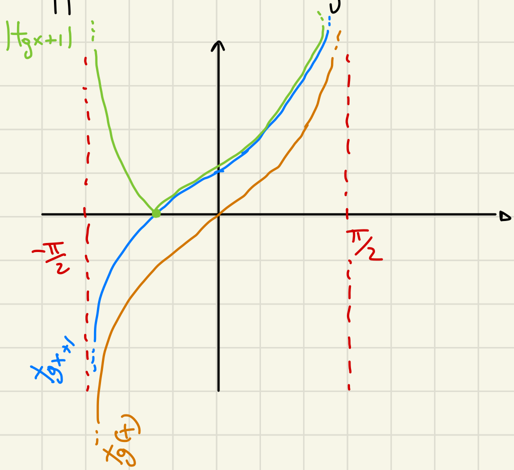
Dato che $f(x)$ è la stessa, faccio Dom f e periodo a partire da

$$f(x) = |\operatorname{tg}(x) + 1|$$

$\text{Dom} f = \text{Dom}(tg(x)) = \mathbb{R} \setminus \{ \frac{\pi}{2} + k\pi \; ; \; k \in \mathbb{Z} \}$

Periodo di f = Periodo $tg(x)$ $\qquad T = \pi$

(3) Rappresenta la funzione



$f(x) = |tg(x) + 1|$

1) Disegno $tg(x)$

2) La sposto in su di 1.

3) Dato che è valore assoluto le cose negative diventano positive

---

n81: Trova a e b in modo che

$$\frac{\cos\alpha - \sin\alpha + 1}{1 + \cos\alpha} = a \, tg\frac{\alpha}{2} + b$$

Ogni volta che vedo $tg\frac{\alpha}{2}$ ALLARME ; formule parametriche

$$\sin\alpha = \frac{2t}{t^2+1} \qquad \cos\alpha = \frac{1-t^2}{t^2+1} \qquad tg\frac{\alpha}{2} = t$$

$$\frac{\frac{1-t^2}{1+t^2} - \frac{2t}{1+t^2} + 1}{1 + \frac{1-t^2}{1+t^2}} = \frac{1 - \cancel{t^2} - 2t + 1 + \cancel{t^2}}{1 + \cancel{t^2} + 1 - \cancel{t^2}} = \frac{-2t+2}{2} = -t+1$$

Trova a,b t.c. $-t+1 = at+b$ Dato che è uguaglianza polin.
deve valere che termini noti uguali
coeff. del termine di grado 1 uguali.

Scopro che $a = -1$, $b = 1$

(2) Dominio e periodo di $f(x) = a\,tg\frac{x}{2} + b$

Dom(f) lo ricavo a partire del dominio della tangente

L'argomento della tangente $\neq \frac{\pi}{2} + k\pi$. Dunque:

$$\frac{x}{2} \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \rightsquigarrow x \neq \pi + 2k\pi$$

$\text{Dom}(f) = \mathbb{R} \setminus \{\pi + 2k\pi \,;\, k \in \mathbb{Z}\}$

Per il periodo come sopra lo ricavo dal periodo della tg.

$tg(0) = tg(\pi)$ $\qquad \frac{x}{2} = 0 \qquad \frac{x}{2} = \pi$

$x = 0 \longrightarrow x = 2\pi$ $\quad tg\frac{x}{2}$ assume lo stesso valore per $x=0$ e $x = 2\pi$

$\Rightarrow$ Periodo è 2π

In generale per capire il nuovo periodo: Sia f di periodo T_f e sia g tale che $g(x) = f(ax+b)$. Quant'è il periodo di g? Lo chiamo T_g. Deve valere che $g(x) = g(x+T_g)$

$$g(x) = f(ax+b) \overset{f \text{ periodica}}{\boxed{=}} f(ax+b+T_f)$$

$$\shortparallel$$

$$g(x+T_g) = f(a(x+T_g)+b) = f(ax+b+aT_g)$$

Uguagliando le gialle si ottiene $T_f = aT_g$.

Nel caso sopra $a = \frac{1}{2} \Rightarrow T_g = 2T_f = 2\pi$.