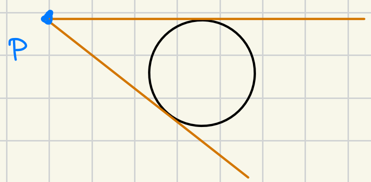
Settimana: 18

Materia: Matematica
Classe: 3D
Data: 10/02/2026

Argomenti:

Pag 398 n181

$P = \left(\frac{2}{3}; 4\right)$ $\quad C: \; x^2+y^2-18x-8y+72=0$



Fascio per P $\quad y-4 = m\left(x-\frac{2}{3}\right)$

$$y = mx - \frac{2}{3}m + 4$$

Si fa il sistema (sostituisco y sopra)

$$x^2 + \left(mx - \frac{2}{3}m + 4\right)^2 - 18x - 8\left(mx - \frac{2}{3}m + 4\right) + 72 = 0$$

$$x^2 + m^2x^2 + \frac{4}{9}m^2 + 16 - \frac{4}{3}m^2x - \cancel{\frac{16}{3}m} + \cancel{8mx} - 18x - \cancel{8mx} + \cancel{\frac{16}{3}m} - 32 + 72 = 0$$

$$x^2(m^2+1) - x\left(+\frac{4}{3}m^2 + 18\right) + \frac{4}{9}m^2 + 56 = 0$$

$$\Delta = \left(\frac{4}{3}m^2+18\right)^2 - \overbrace{4(m^2+1)}^{(4m^2+4)}\left(\frac{4}{9}m^2+56\right) = 0$$

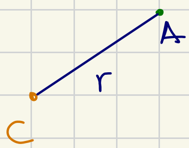
$$\cancel{\frac{16}{9}m^4} + 324 + 48m^2 - \cancel{\frac{16}{9}m^4} - \frac{16}{9}m^2 - 224m^2 - 224 = 0$$

$$m^2\left(-176 - \frac{16}{9}\right) + 100 = 0 \qquad m^2\left(\frac{16\cancel{00}}{9}\right) = 1\cancel{00}$$

$$\boxed{m = \pm\frac{3}{4}}$$

276

Centro $C = (-2; -4)$
Circonferenza passa per $A = (1; 2)$ ⇝ Trova la circonferenza



$$r^2 = AC^2 = (x_A - x_C)^2 + (y_A - y_C)^2$$
$$= (1+2)^2 + (2+4)^2 =$$
$$= 9 + 36 = 45$$

$(x - x_C)^2 + (y - y_C)^2 = r^2$ ← Formula circonferenza

$(x+2)^2 + (y+4)^2 = 45$ ⇝ svolgo

$x^2 + y^2 + 4x + 8y + 4 + 16 - 45 = 0$

$$\boxed{x^2 + y^2 + 4x + 8y - 25 = 0}$$

Modo alternativo:

$x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$

$C = \left(-\frac{a}{2}; -\frac{b}{2}\right) = (-2; -4)$

⇝ $\boxed{a = 4, \quad b = 8}$

$x^2 + y^2 + 4x + 8y + c = 0$

$A = (1; 2)$

Metto dentro; risolvo e trovo c.

$1 + 4 + 4 + 16 + c = 0$ ⇝ $\boxed{c = -25}$

$B = (2k+1; k+5)$ ⇝ Appartiene a $\mathcal{C}$. Trova k.

Sostituisco le coordinate di B in $\mathcal{C}$

$$(2k+1)^2+(k+5)^2+4(2k+1)+8(k+5)-25=0$$

$$4k^2+1+4k+k^2+\cancel{25}+10k+8k+4+8k+40-\cancel{25}=0$$

$$5k^2+30k+45=0 \qquad k^2+6k+9=0 \qquad (k+3)^2=0$$

$$\rightsquigarrow \boxed{k=-3}$$

Asse Radicale e intersezione tra circonferenze:

Def: Siano

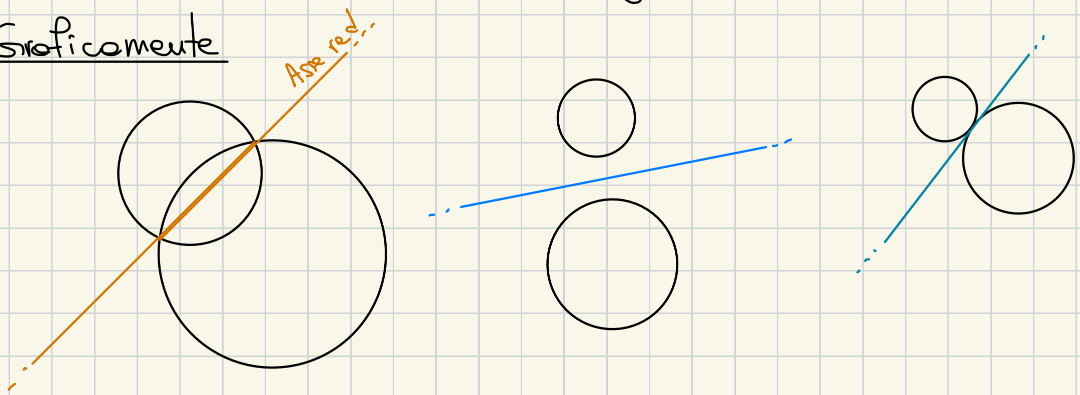
$$C_1 : \quad x^2+y^2+a_1x+b_1y+c_1=0$$

$$C_2 : \quad x^2+y^2+a_2x+b_2y+c_2=0$$

due circonferenze. L'asse radicale fra le due circonferenze è se esiste, la retta ottenuta sottraendo le equazioni delle due circonferenze. In formule

$$(a_1-a_2)x+(b_1-b_2)y+(c_1-c_2)=0$$

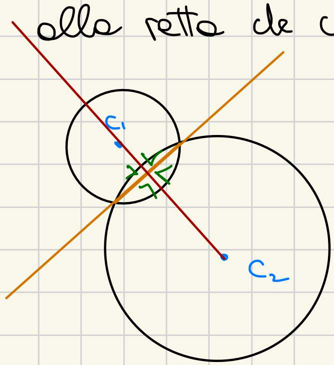
Graficamente



Oss. Intersecare C_1 e C_2 è come intersecare una delle due circonferenze con l'asse radicale Di conseguenza il numero di intersezioni tra due circonferenze è al massimo 2.

Teorema dell'Asse radicale.

L'asse radicale è perpendicolare alla retta che congiunge i due centri delle due circonferenze



Dim: Trovo i due coeff. angolari e spero che il prodotto faccia -1.

$$A.R.: (a_1-a_2)x + (b_1-b_2)y + (c_1-c_2) = 0$$

$$\rightsquigarrow y = \underbrace{\boxed{-\frac{(a_1-a_2)}{(b_1-b_2)}}}_{m_{AR}} x - \frac{c_1-c_2}{b_1-b_2}$$

Coeff angolare retta per i centri: $C_1 = \left(-\frac{a_1}{2}; -\frac{b_1}{2}\right)$ $C_2 = \left(-\frac{a_2}{2}; -\frac{b_2}{2}\right)$

Remind: Se ho due punti A, B; $m_{AB} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$

$$\rightsquigarrow m_{C_1C_2} = \frac{-\frac{b_2}{2} + \frac{b_1}{2}}{-\frac{a_2}{2} + \frac{a_1}{2}} = \boxed{\frac{b_1-b_2}{a_1-a_2}}$$

$$\text{Allora } m_{AR} \cdot m_{C_1C_2} = -\frac{\cancel{(a_1-a_2)}}{\cancel{(b_1-b_2)}} \cdot \frac{\cancel{(b_1-b_2)}}{\cancel{(a_1-a_2)}} = -1$$

$\square$

Formula di Sdoppiamento

Def: La formula di sdoppiamento della circonferenza ci fornisce dato un pto $P \in$ Circonferenza la retta tg alla circonferenza passante per P.

Data $x^2+y^2+ax+by+c=0$ circonferenza

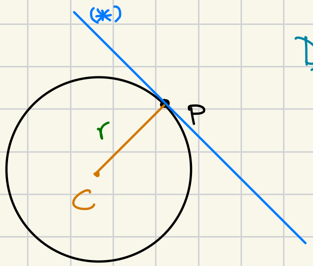
$P = (x_0, y_0)$ appartenente a $\mathcal{C}$

La retta tg è

$$\frac{ax}{2}+\frac{ax_0}{2}$$

$$(*) \quad \boxed{x x_0 + y y_0 + a\,\frac{x+x_0}{2} + b\,\frac{y+y_0}{2} + c = 0}$$

Proposizione: La formula (*) è effettivamente la tangente



Dim: Devo verificare che dist (C; retta) = r e poi ho vinto

$$C = \left(-\frac{a}{2}; -\frac{b}{2}\right)$$

Retta in forma impl.

$$x\left(x_0+\frac{a}{2}\right) + y\left(y_0+\frac{b}{2}\right) + \frac{ax_0}{2} + \frac{by_0}{2} + c = 0$$

$$\text{dist}(C,r) = \frac{\left|\left[x_0+\frac{a}{2}\right]\left(-\frac{a}{2}\right) + \left[y_0+\frac{b}{2}\right]\left(-\frac{b}{2}\right) + \frac{ax_0}{2} + \frac{by_0}{2} + c\right|}{\sqrt{\left(x_0+\frac{a}{2}\right)^2 + \left(y_0+\frac{b}{2}\right)^2}}$$

$$= \frac{\left|-\cancel{\frac{ax_0}{2}} - \frac{a^2}{4} - \cancel{\frac{by_0}{2}} - \frac{b^2}{4} + \cancel{\frac{ax_0}{2}} + \cancel{\frac{by_0}{2}} + c\right|}{\sqrt{x_0^2+y_0^2+ax_0+by_0 + \frac{a^2}{4}+\frac{b^2}{4}}}$$

Oss: $P \in$ Circ., dunque vale

$$x_0^2+y_0^2+ax_0+by_0+c = 0$$

$$= \frac{|-r^2|}{\sqrt{\frac{a^2}{4}+\frac{b^2}{4}-c}}$$

$$= \frac{r^2}{\sqrt{r^2}} = r$$

□

Esempio: $\mathcal{C}: \quad x^2+y^2-4x-2y=0$

$P=(1;-1)$

(1) Vedi se $P \in \mathcal{C}$
(2) Trova la tg in P

(1) $1^2+(-1)^2-4\cdot 1-2(-1) = 1+1-4+2 = 0$

$\Rightarrow P \in$ Circonferenza

(2) Per la formula di sdoppiamento

$$x\cdot \overset{x_0}{1} + y\overset{y_0}{(-1)} + \overset{a}{(-4)}\frac{x+\overset{x_0}{1}}{2} + \overset{b}{(-2)}\frac{y-\overset{y_0}{1}}{2} + \overset{c}{0} = 0$$

$$x-y-2x-2-y+1=0$$

$$\boxed{+x+2y+1=0}$$

Fasci di Circonferenze:

Def. Date $\mathcal{C}_1: \quad x^2+y^2+a_1x+b_1y+c_2=0$

$\mathcal{C}_2: \quad x^2+y^2+a_2x+b_2y+c_2=0$

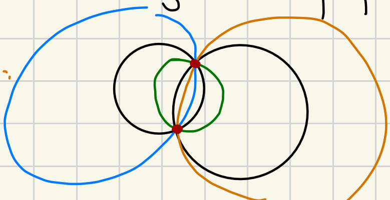
Il fascio di circonferenze generato da $\mathcal{C}_1$ e $\mathcal{C}_2$ è:

$$\underbrace{x^2+y^2+a_1x+b_1y+c_1}_{} + k\,(\underbrace{x^2+y^2+a_2x+b_2y+c_2}_{}) = 0$$

Circonferenze generatrici

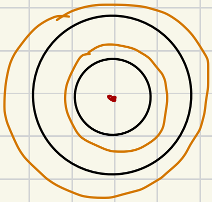
Oss: A seconda della posizione reciproca tra $\mathcal{C}_1$ e $\mathcal{C}_2$ il fascio genera circonferenze con proprietà diverse

Esempio:



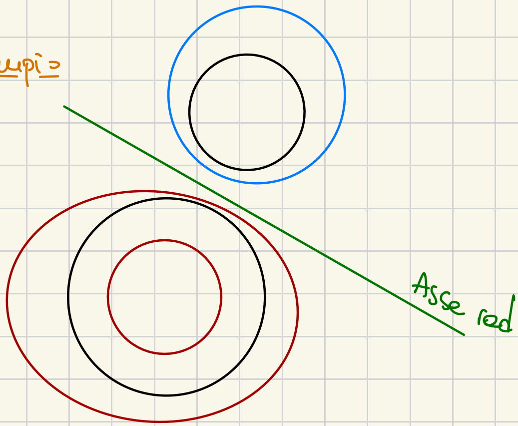
Se le nere sono generatrici e si intersecano, tutte le altre si intersecano nei soliti punti

Esempio.



Se sono concentriche le generate sono tutte concentriche

Esempio



Se sono esterne le generate **NON** intersecano l'asse radicale

End of circunference

Es 1

$$\sqrt{x(x-4)+4} > 2x+1$$

Data $f(x) = \dfrac{ax}{x^2+2x+a}$, $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

Es 2 Trova a in modo che $\mathrm{Dom}f = \mathbb{R}$

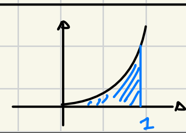
Es 3 " " che $\mathrm{Im}f = \mathbb{R}$

Es 4 " " che $\mathrm{Dom}f = \mathrm{Im}f$

Es 5

Sia C il punto in cui l'asse del segmento AB con $A=(-3;3)$ $B=(1;5)$ incontra asse x. Calcola l'area di ABC

Es 8:



$y=x^2$
Calcola Area colorata

Data $ky-2x^2+(k+1)x-3=0$

Es 6 Trova k in modo che asse $x=1$

Es 7 " " parabola passa per $P=(-1;2)$

Es 339 pag 417

$$x^2+y^2+\underbrace{4k}_{a}x\underbrace{-(4+k)}_{b}y+4+2k=0 \qquad C=\left(-2k;\ \frac{4+k}{2}\right)$$

Studiare il fascio = Prendere 2 circonferenze del fascio, intersecarle e capire tipologia

$$k=0 \quad \begin{cases} x^2+y^2-4y+4=0 \\ x^2+y^2+4x-5y+6=0 \end{cases} \quad k=1$$

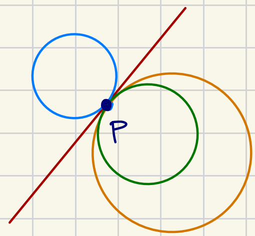
$\downarrow -$

$-4x+y-2=0$

$\boxed{y=4x+2}$ $\to$ $y=2$

$$x^2+16x^2+\cancel{4}+\cancel{16}x-\cancel{16}x-\cancel{8}+\cancel{4}=0$$

$$17x^2=0 \rightsquigarrow x=0$$



$P=(0;2)$ intersezione unica quindi fascio di circ. tangenti

(a) centro con ascissa $=4 \rightsquigarrow -2k=4 \rightsquigarrow \boxed{k=-2}$

(b) Interseca l'asse y nel $\boxed{\text{punto di ordinata } -1}$

$\to x=0$

$$\begin{cases} x=0 \\ x^2+y^2+4kx-(4+k)y+4+2k=0 \end{cases}$$

$y=-1$

$\hookrightarrow y^2-(4+k)y+4+2k=0$

$$1+4+k+4+2k=0 \rightsquigarrow 3k=-9 \rightsquigarrow \boxed{k=-3}$$

Es 345

$$x^2+y^2\underbrace{-4(k+1)x}_{a}\underbrace{-2ky}_{b}+2=0$$

a) Centro, studio del fascio con cond. esistenza

▷ $C=\left(-\frac{a}{2};-\frac{b}{2}\right)=\left(2(k+1);k\right)$

▷ $k=0$ $\quad k=-1$ $\begin{cases} x^2+y^2-4x+2=0 \\ x^2+y^2+2y+2=0 \end{cases}$ $\downarrow -$

$-4x-2y=0$

$\boxed{y=-2x}$

$x^2+4x^2-4x+2=0$

$5x^2-4x+2=0 \leadsto \frac{\Delta}{4}=4-10=-6$ Impossibile

Non ci sono pti di intersezione.

▷ $r=\sqrt{\frac{a^2}{4}+\frac{b^2}{4}-c}=\sqrt{(2k+2)^2+k^2-2}$

$\frac{a^2}{4} = \left(\frac{a}{2}\right)^2$

$=\sqrt{4k^2+4+8k+k^2-2}=\sqrt{5k^2+8k+2}$

→ Il caso = è raggio $=0$, Circ. = punto

$\leadsto$ C.E. $5k^2+8k+2\ \boxed{\geq}\ 0$

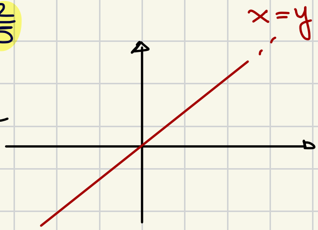
$\frac{\Delta}{4}=16-10=6 \qquad k_1/k_2=\frac{-4\pm\sqrt{6}}{5}$ $\begin{array}{l} \frac{-4-\sqrt{6}}{5} \\ \frac{-4+\sqrt{6}}{5} \end{array}$

Sol: $k\leq\frac{-4-\sqrt{6}}{5} \quad \vee \quad k\geq\frac{-4+\sqrt{6}}{5}$

(b) Trova k per cui $r=\sqrt{6}$ o $r^2=6$

$$5k^2+8k+2=6 \rightsquigarrow 5k^2+8k-4=0$$

$$\frac{\Delta}{4} = 16+20 = 36 \qquad k_1/k_2 = \frac{-4\pm 6}{5} \begin{cases} -\frac{10}{5} = -2 \\ \frac{2}{5} \end{cases}$$



(c) Centro sta nella bisettrice I-III quadrante

$2(k+1) = k$ [Impongo $x_c = y_c$]

$\hookrightarrow 2k+2=k \qquad \boxed{k=-2}.$