Settimana: 17

Materia: Matematica
Classe: 5A
Data: /01/26

**Def:** Sia $f: [a;b] \longrightarrow \mathbb{R}$ continua, $f$ derivabile in $(a;b)$ e $x_0 \in (a;b)$.
Diremo che $x_0$ è un punto critico/stazionario se $f'(x_0)=0$

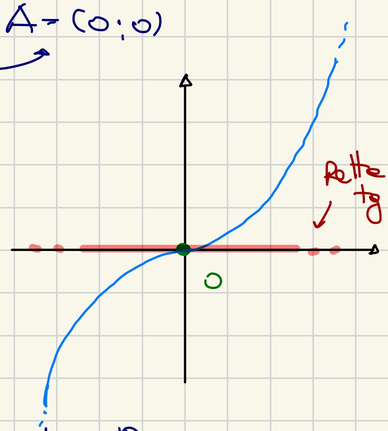
**Remind:** Fermat: Massimo o minimo locale sono punti critici

**Def:** Sia $f: (a;b) \longrightarrow \mathbb{R}$ derivabile $x_0 \in (a;b)$, $f'(x_0)=0$
Se vale che $f'(x) > 0$ se $x < x_0 \wedge x > x_0$
(oppure $f'(x) < 0$ se $x < x_0 \wedge x > x_0$), allora il punto è detto flesso a tangente orizzontale

**Esempio:** $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ $\quad f(x) = x^3$

(1) $Dom(f) = \mathbb{R}$

(2) Int. assi: $x=0 \rightsquigarrow f(0)=0$ $\quad A=(0;0)$
$y=0 \rightsquigarrow x^3=0$

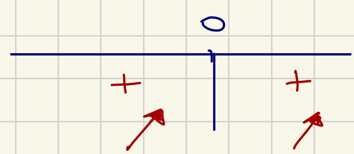



(3) Segno: $x^3 \geq 0 \rightsquigarrow x \geq 0$

(4) $\lim\limits_{x \to +\infty} x^3 = +\infty$ $\qquad \lim\limits_{x \to -\infty} x^3 = -\infty$

(5) $f'(x) = 3x^2$

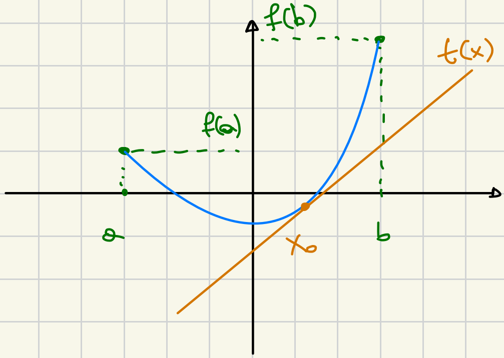
$f'(x) \geq 0 \qquad 3x^2 \geq 0 \qquad x^2 \geq 0 \qquad \forall x \in \mathbb{R}$
e $x=0$ è un punto stazionario



**Oss:** I punti stazionari sono solamente queste tre tipologie
↳ $f'(x_0) = 0$

**Oss:** Gli altri unici pti strani sono Cuspidi, pti angolosi, flessi a tg verticale (Non esiste derivata)

**Def:** Sia $f:(a;b) \longrightarrow \mathbb{R}$ funzione derivabile. Sia $x_0 \in (a;b)$




Diremo che $f(x)$ è concava verso l'alto (Def del libro) in un intorno di $x_0$ se $\forall x$ appartenente all'intorno la funzione assume valori maggiori di quelli di $t(x)$, tangente al grafico nel punto $x_0$, nei punti aventi la stessa ascissa, ossia

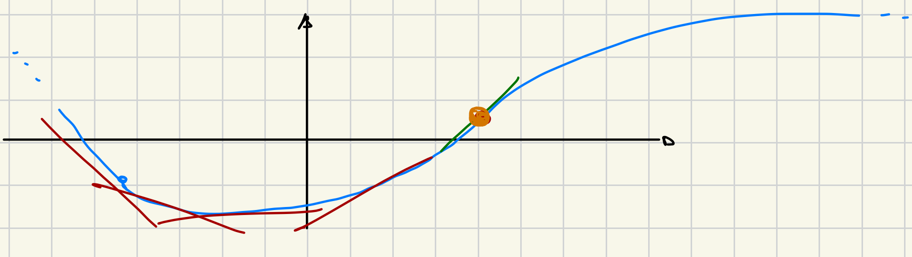
$$f(x) > t(x) \quad \forall x \in I \setminus \{x_0\} \qquad + \text{ Omar}$$

**Oss:** Concava verso il basso è uguale solo che $\boxed{f(x) < t(x)}$

**Fatto:** La derivata seconda individua le zone di concavità rivolta verso l'alto e rivolta verso il basso. In particolare vale che se $f''(x) > 0$ la concavità è rivolta verso alto
se $f''(x) < 0$ la concavità è rivolta verso basso.

Quando $f''(x) = 0$ c'è un possibile cambio di concavità

**Dim:** Non mi interessa formalmente



$f''(x) > 0 \; \boxed{\Rightarrow} \; f'(x)$ crescente $\Rightarrow$ Le rette tg formano profilo 

con seguenze Lagrange

## Es 265 pag 1792

$$f(x) = \ln\left(\frac{x^2+1}{x^2-1}\right)$$

(1) Dom f:

$$\begin{cases} \dfrac{x^2+1}{x^2-1} > 0 \\ x^2-1 \neq 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \cancel{N>0 \quad \forall x \in \mathbb{R}} \\ x<-1 \;\vee\; x>1 \\ x \neq \pm 1 \end{cases}$$

$$\leadsto \boxed{\mathrm{Dom}(f) = \{x < -1 \;\vee\; x > 1\}}$$

(2) Assi: $x=0$ No per il dom f

$f(x)=0$

$$\ln\left(\frac{x^2+1}{x^2-1}\right) = 0 \leadsto \frac{x^2+1}{x^2-1} = 1 \leadsto \cancel{x^2}+1 = \cancel{x^2}-1$$ IMP.

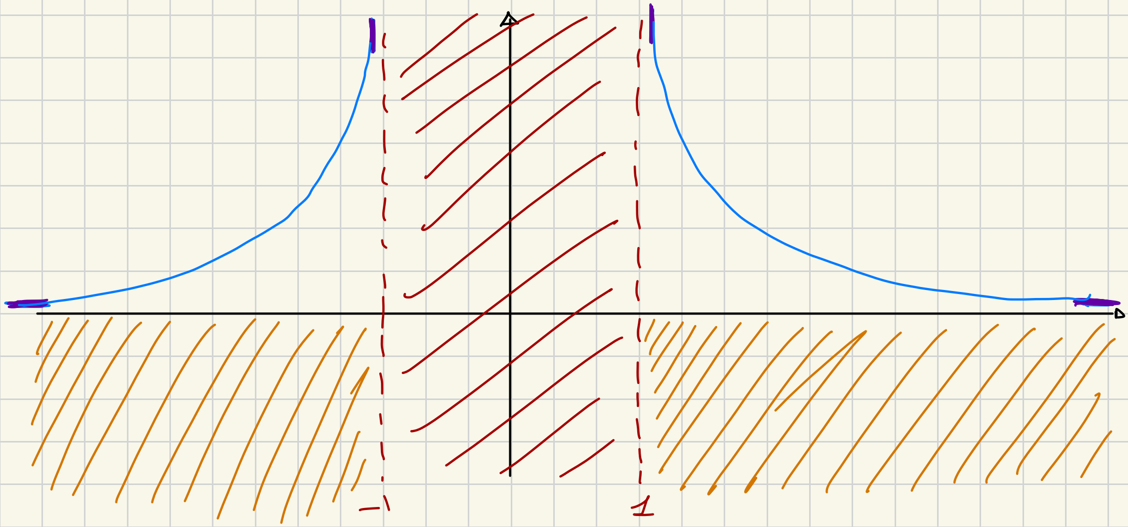
(3) Segno: $f(x) \geq 0 \qquad \ln\left(\frac{x^2+1}{x^2-1}\right) \geq 0$

$$\frac{x^2+1}{x^2-1} \geq 1 \leadsto \frac{\cancel{x^2}+1-\cancel{x^2}+1}{x^2-1} \geq 0 \qquad \frac{2}{x^2-1} \geq 0$$

$$\boxed{\text{Sol: } \; x<-1 \;\vee\; x>1}$$

(4) Limiti: $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln\left(\frac{x^2+1}{x^2-1}\right) = 0 \qquad \lim\limits_{x\to-\infty} \ln\left(\frac{x^2+1}{x^2-1}\right) = 0$

$$\lim_{x \to -1^-} \ln\left(\frac{x^2+1}{x^2-1}\right) = +\infty \qquad \lim_{x \to 1^+} \ln\left(\frac{x^2+1}{x^2-1}\right) = +\infty$$




(5) $f(x) = \ln\left(\frac{x^2+1}{x^2-1}\right)$

$$\cancel{2x^3} - 2x - \cancel{2x^3} - 2x$$

$$f'(x) = \frac{1}{\frac{x^2+1}{x^2-1}} \cdot \frac{2x(x^2-1) - (x^2+1)\cdot 2x}{(x^2-1)^2}$$

$$= \frac{\cancel{x^2-1}}{x^2+1} \cdot \frac{(-4x)}{(x^2-1)^{\cancel{2}}} = \frac{-4x}{(x^2+1)(x^2-1)}$$

Non ci sono problemi, quindi no pti angolosi, né cuspidi ...

$f'(x) \geq 0$ $\quad N \geq 0 \quad -4x \geq 0 \quad x \leq 0$

$\quad D > 0 \quad x < -1 \quad \vee \quad x > 1$

| | -1 | | 0 | | 1 | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| N | + | | + | − | | − |
| D | + | | − | − | | + |
| | + | | − | + | | − |
| | ↗ | | ↘ | ↗ | | ↘ |

Non nel Dominio

(6) $f'(x) = \dfrac{-4x}{x^4-1}$

$$f''(x) = \frac{-4(x^4-1) + 4x(4x^3)}{(x^4-1)^2} = \frac{4(-x^4+1+4x^4)}{(x^4-1)^2}$$

$$= \frac{4(3x^4+1)}{(x^4-1)^2}$$

$f''(x) \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \implies$ Concavità sempre rivolta verso alto