

Settimana: 12

Materia: Matematica

Classe: 5A

Data: 1/12/25

Pag 1686 n 117

$g(x)$

$$g(0) = 0$$

$$g'(0) = 0$$

$$g''(0) = 0$$

$$g'''(0) = 1$$

$$g^{(4)}(0) = 1$$

$$g^{(5)}(0) = 1$$

Bonus Chiuso

Hip:

$$g(x) = \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \frac{x^5}{120}$$

$$g'(x) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{4x^3}{24} + \frac{5}{120}x^4$$

$$g''(x) = x + \frac{12x^2}{24} + \frac{20}{120}x^3$$

$$g'''(x) = 1 + \frac{24x}{24} + \frac{60}{120}x^2$$

$$g^{(4)}(x) = 1 + x$$

$$g^{(5)}(x) = 1$$

n 121

$$g(x) = f(x) - f(2x)$$

$$g'(1) = 5$$

$$g'(2) = 4$$

Definisco $h(x) = f(x) - f(4x)$ Quanto fa $h'(1) = ?$

$$g'(x) = f'(x) - f'(2x) \cdot 2$$

$$h'(x) = f'(x) - f'(4x) \cdot 4$$

$$h'(1) = f'(1) - 4f'(4)$$

$$= 5 + 2f'(2) - 2(f'(2) - 7)$$

$$= 5 + 2\cancel{f'(2)} - 2\cancel{f'(2)} + 14 = 19$$

$$5 = f'(1) - 2f'(2)$$

$$7 = f'(2) - 2f'(4)$$

$$f'(1) = 5 + 2f'(2)$$

$$2f'(4) = f'(2) - 7$$

n. 18

$$y = -4x + k$$

$$f(x) = x^3 - 4x^2 + 5$$

Trova k t.c. la retta è tangente alla curva.

$$f'(x) = 3x^2 - 8x$$

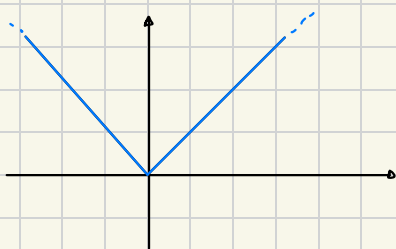
Derivata = coeff angolare della

$$f'(x) = -4$$

$$-4 = 3x^2 - 8x$$

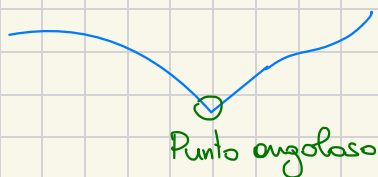
$$3x^2 - 8x + 4 = 0$$

Remind: A volte le funzioni NON sono derivabili



$f(x) = |x|$ Non è derivabile in $x=0$

(1) Punto Angoloso (a)

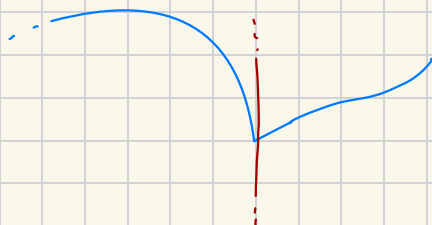


$$f'_-(x_0) = \ell$$

$$f'_+(x_0) = m$$

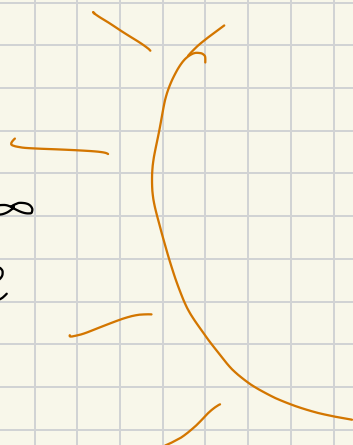
$$m \neq \ell$$

(b) Punto angoloso



$$f'_-(x_0) = \pm \infty$$

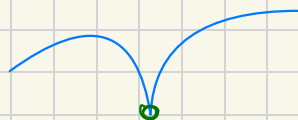
$$f'_+(x_0) = \ell$$



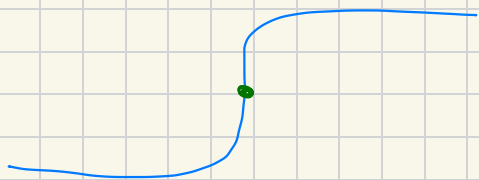
2) Cuspide (Cuore)

$$f'_-(x_0) = -\infty$$

$$f'_+(x_0) = +\infty$$



3) Flesso a tangente verticale

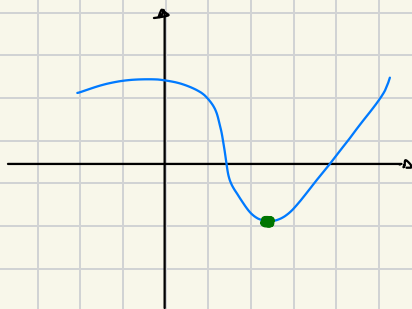
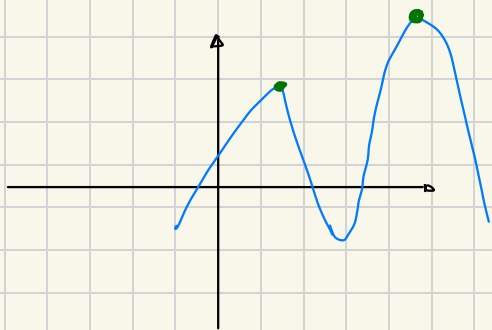


$$f'_-(x_0) = +\infty$$

$$f'_+(x_0) = +\infty$$

Def. Data $f: (a; b) \rightarrow \mathbb{R}$, x_0 è detto punto di **massimo locale** se $\exists I(x_0) \subseteq (a; b)$ t.c. $f(x_0) \geq f(c) \quad \forall c \in I(x_0)$.

x_0 è detto di **minimo locale** se $\exists I(x_0) \subseteq (a; b)$ t.c. $f(x_0) \leq f(c) \quad \forall c \in I(x_0)$.



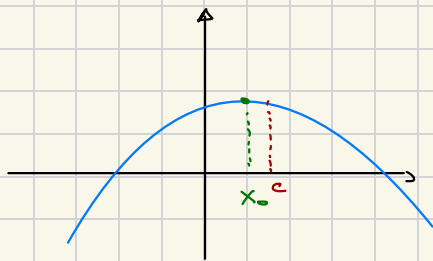
Teorema Luca Bruni (feat Fermat)

Sia $f: (a; b) \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione derivabile e sia x_0 un massimo locale. Allora $f'(x_0) = 0$.

Dim. So che $\forall c \in I(x_0) \quad f(x_0) \geq f(c)$. Devo dimostrare che la derivata in x_0 è 0.

Posso scrivere $c = x_0 + h$

$$f(x_0) \geq f(c) = f(x_0 + h)$$



$$f(x_0) \geq \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} \cdot h + f(x_0)$$

Suppongo per assurdo che $f'(x_0) > 0$. Allora, per il teo di permanenza del segno della f'_g

$$g(h) = \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$$

$g(h) > 0$ in un intorno di 0. Ma allora ho:

$$f(x_0) \geq g(h) \cdot h + f(x_0)$$

$$g(h) \cdot h \leq 0$$

Ma questo è assurdo in quanto $g(h) > 0$ e $h > 0$

Esercizio: Sistemare il caso $f'(x_0) < 0$.

Conclusione: Dato che $\begin{matrix} f'(x_0) > 0 \\ f'(x_0) < 0 \end{matrix} \left\{ \begin{array}{l} \text{Dimo} \\ \text{Assurdi} \end{array} \right. \Rightarrow f'(x_0) = 0$

Pag 1708 n 20

$$f(x) = -\sqrt[3]{x^2} = -x^{2/3}$$

(1) Faccio la derivata classica: $f'(x) = -\frac{2}{3} x^{-1/3} = -\frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$

(2) Trovo i problemi $x=0$

(3) Devo vedere "a mano" con la definizione la derivata in $x=0$

(4) Fare derivata su ϵ e dx in 0 e vedere cosa accade

$$f'_-(0) = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} =$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{-\sqrt[3]{h^2}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} -\frac{1}{h^{1/3}} = +\infty$$

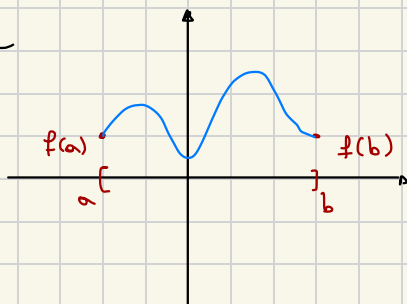
$$f'_+(0) = \lim_{h \rightarrow 0^+} -\frac{1}{h^{1/3}} = -\infty$$

\Rightarrow È cuspide

Teorema di Rolle:

Sia $f: [a; b] \longrightarrow \mathbb{R}$ una funzione

- 1) f è continua in $[a; b]$
- 2) f è derivabile in $(a; b)$
- 3) $f(a) = f(b)$



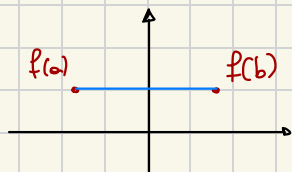
$\Rightarrow \exists c \in (a; b) \text{ t.c. } f'(c) = 0$

Oss: I punti con derivata 0 sono i massimi o i minimi

Dim.

Caso 1:

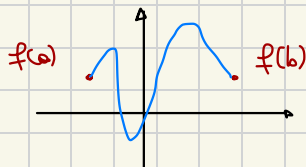
La funzione è costante



Dunque la derivata in ogni punto è 0 e ho vinto

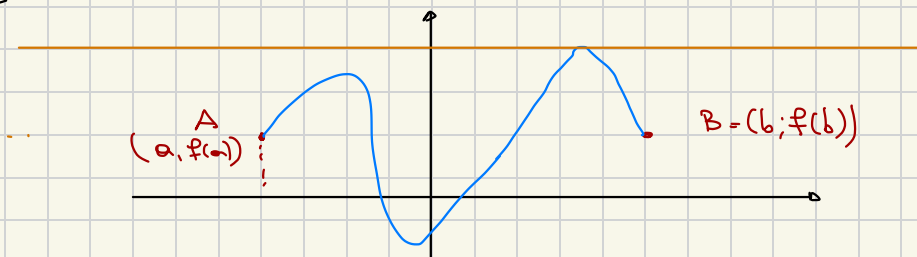
Caso 2:

La funzione NON è costante



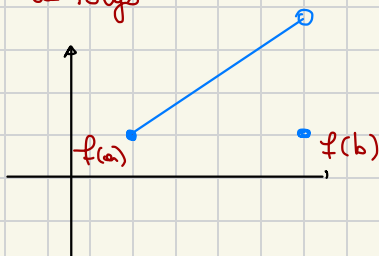
Per Teorema Weiers ammette max e min.
Per Teorema di Fermat, nei punti di max e min la derivata è 0

Idea geometrica: Il teorema di Rolle può essere pensato così: Faccio la retta che congiunge punto iniziale e finale e poi DEVE esistere una parallela a quella retta tangente alla curva



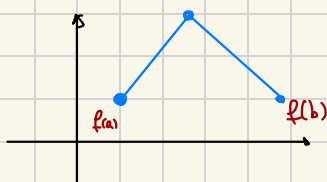
Controesempi al teorema di Rolle

1) f continua in $[a; b]$
le tolgo



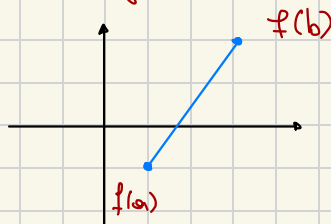
↪ Non c'è pto in cui la derivata è 0

2) f derivabili in (a, b)
le tolgo



↪ Non c'è pto in cui la derivata è 0

3) $f(a) = f(b)$
le tolgo



↪ Non c'è pto in cui la derivata è 0

Teorema di Lagrange (o teorema del valor medio)

Sia $f: [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ funzione t.c.

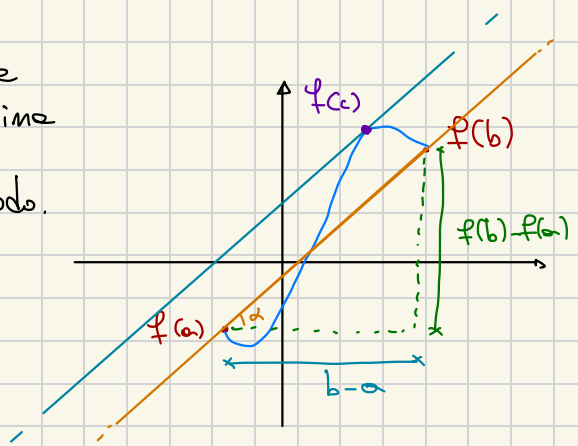
1) f continua in $[a; b]$

2) f derivabile in $(a; b)$

Allora esiste $c \in (a; b)$ t.c.
$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Geometricamente: È esattamente la stessa interpretazione di prima dove però la retta adesso può essere in qualsiasi modo.

Dim.: Segue dal Teorema di Rolle in questo senso:



Definisco la funzione

$$g(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} x$$

- 1) $g(x)$ è continua perché f è continua in $[a; b]$
- 2) $g(x)$ è derivabile poiché f è derivabile in $(a; b)$
- 3)

$$g(a) = f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \cdot a =$$

$$= [b f(a) - a f(a) - a f(b) + a f(a)] \cdot \frac{1}{b - a}$$

$$= [b f(a) - a f(b)] \cdot \frac{1}{b - a}$$

$$g(b) = f(b) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \cdot b$$

$$= [b f(b) - a f(b) - b f(b) + b f(a)] \cdot \frac{1}{b - a}$$

$$= [b f(a) - a f(b)] \cdot \frac{1}{b - a}$$

Dato che $g(a) = g(b)$ vale Rolle, dunque $\exists c \in (a; b)$ t.c.

$$g'(c) = 0 \Rightarrow f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0 \Rightarrow f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

□

Esercizio: Fare i controesempi al teorema di Lagrange

Conseguenze del teorema di Lagrange

Corollario 1: Sia $f: [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ continue e derivabile in $(a; b)$ e tale che $f'(x) = 0 \quad \forall x \in (a; b)$. Allora f è una funzione costante

Dim: Voglio che $f(x)$ sia sempre lo stesso valore. Considero la funzione definita in $[a; x]$, cioè restringo l'intervallo. Per Lagrange $\exists c \in [a; x]$ t.c.

$$\underbrace{f'(c)}_{=0} = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

per H'p

$$\Rightarrow f(x) = f(a)$$

Dunque $f(x) = f(a) \quad \forall x \in [a; b]$ cioè f è costante \square

Coroll. 2: Siano $f, g: [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ continue, derivabili in $(a; b)$ tali che

$$f'(x) = g'(x) \quad \forall x \in [a; b]$$

$$\Rightarrow f(x) - g(x) \text{ è costante}$$

Dim: Per esercizio (Usare il corollario precedente)

Coroll 3: Data $f: [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ derivabile in $(a; b)$ vale che

- (1) Se $f'(x) > 0 \quad \forall x \in (a; b) \Rightarrow f(x)$ è crescente
- (2) Se $f'(x) < 0 \quad \forall x \in (a; b) \Rightarrow f(x)$ è decrescente

Dim: (1) f è crescente in $(a; b)$ se $\forall x_1, x_2 \in (a; b) \quad x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$

Usiamo il teorema di Lagrange per la restrizione di f all'intervallo $[x_1; x_2]$ con $x_1 < x_2$. Dunque $\exists c(x_1; x_2)$ t.c.

$$f'(c) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

cioè $\underbrace{(x_2 - x_1)}_{\substack{>0 \\ \text{Per Hip}}} \underbrace{f'(c)}_{\substack{>0 \\ \text{Derivata} \\ \text{positiva}}} = f(x_2) - f(x_1)$

$$\Rightarrow f(x_2) - f(x_1) > 0 \rightarrow f(x_2) > f(x_1)$$

(2) Per Esercizio

→ Conseguenze del Lemma dei 3 rapporti:

D

Teorema: Vale il viceversa delle conseguenze 3:

- (1) Se f è una funzione crescente in $(a; b)$, allora $f'(x) \geq 0$
 $\forall x \in (a; b)$
- (2) Stesso enunciato per f decrescente.

Dim.: Non richiesto.

Pag 1734 n 36

$f(x) = \ln \sqrt{3x+x^2}$ Fare studio di f .

(1) Dominio: $3x+x^2 > 0$

$$x(x+3) > 0$$

\rightsquigarrow

$$x < -3 \vee x > 0$$

$$f: \text{Dom}(f) \rightarrow \mathbb{R}$$

(2) Assi: $x=0$ IMP

$$y=0 \quad \ln \sqrt{3x+x^2} = 0 \Rightarrow \sqrt{3x+x^2} = 1 \quad x^2+3x=1$$

$$x^2+3x-1=0$$

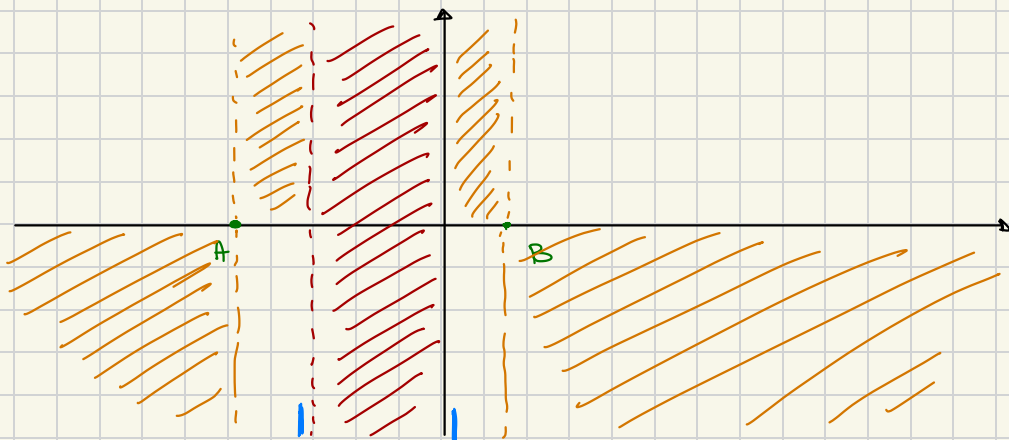
$$x_1/x_2 = \frac{-3 \pm \sqrt{13}}{2} < \begin{matrix} -\frac{3+\sqrt{13}}{2} \\ -\frac{3-\sqrt{13}}{2} \end{matrix}$$

$$B = \left(\frac{-3+\sqrt{13}}{2}; 0 \right)$$

$$A = \left(\frac{-3-\sqrt{13}}{2}; 0 \right)$$

(3) Segno: $\ln \sqrt{3x+x^2} \geq 0$ $\frac{1}{2} \ln(3x+x^2) \geq 0$

$3x+x^2 \geq 1 \quad \rightsquigarrow \quad x < \frac{-3-\sqrt{13}}{2} \vee x > \frac{-3+\sqrt{13}}{2}$



(4) $\lim_{x \rightarrow -3} \ln \sqrt{3x+x^2} = -\infty$

$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -\infty$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln \sqrt{3x+x^2} = +\infty$

la funzione NON ha poi asint. obliqui (da verificare)

(5) DERIVATA PRIMA: Si calcola la derivata prima $f'(x)$ e la si pone ≥ 0

▷ Quando la derivata è esattamente 0, quello sarà un punto stazionario. È una Def. Potrebbero poi essere

1) Minimo

2) Massimo

3) Flesso (spiego più avanti cosa è)

▷ Le parti in cui $f'(x) > 0$ la funzione è crescente