Settimana: 3

Materia: Matematica
Classe: 5C
Data: 29/09/25

Argomenti: Esercizi sulle funzioni. Inverse, composte, funzioni con valori assoluti. Intervalli, minoranti, maggioranti, sup (F), inf (F), esercizi, esempi. Def di max, min, pto di acc, pto isolato; Esercizi su sup, inf, max min; def di limite finito per $x \to x_0$

Pag 1400 n 76

$$f(x) = \frac{2-a}{1+\ln x}$$

a) Se $f(1) = 1$ $\quad 1 = \frac{2-a}{1+0} \Rightarrow 1 = 2-a \Rightarrow \boxed{a = 1}$

$$\mathrm{Dom}(f): \begin{cases} 1+\ln(x) \neq 0 \\ x>0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \ln(x) \neq -1 = \ln(e^{-1}) \\ x>0 \end{cases}$$

$$\mathrm{Dom}(f) = \{x>0,\ x \neq e^{-1}\}$$

b) Per trovare l'inversa è sufficiente trovare $\mathrm{Im}(f)$. L'espressione che troviamo è la funzione inversa in opportuno dominio.

$$y = \frac{1}{1+\ln(x)} \rightsquigarrow y(1+\ln(x)) = 1$$

$$1+\ln(x) = \frac{1}{y} \rightsquigarrow \ln(x) = \frac{1}{y} - 1 \rightsquigarrow \boxed{x = e^{\frac{1-y}{y}}}$$

L'inversa è: $f^{-1}: \mathrm{Dom}(f^{-1}) \longrightarrow \mathbb{R}$

$$f^{-1}(y) = e^{\frac{1-y}{y}} \rightsquigarrow f^{-1}(x) = e^{\frac{1-x}{x}}$$

$$\mathrm{Dom}(f^{-1}) = \{y \neq 0\}$$

$$(f^{-1} \circ f)(x) = f^{-1}(f(x)) = f^{-1}\left(\frac{1}{1+\ln(x)}\right) = \ldots = x$$

n 494 $\quad f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \qquad f(2)=4 \qquad f(0)=2 \qquad g(x)=f(2x-1)$

Puoi dire qualcosa sulle seguenti affermazioni?

a) $g(2)=7$? $\qquad g(2) = f(2\cdot 2-1) = f(3)$

Non so niente su $f(3)$, non posso dire nulla

b) $g\left(\frac{3}{2}\right)=4$? $\qquad g\left(\frac{3}{2}\right) = f\left(\frac{3}{2}\cdot 2-1\right) = f(2) = 4$ Vera

c) $(f\circ g)\left(\frac{1}{2}\right)=4$?

$$g\left(\frac{1}{2}\right) = f\left(2\cdot\frac{1}{2}-1\right) = f(0) = 2$$

$$f\left(g\left(\frac{1}{2}\right)\right) = f(2) = 4$$ VERA

d) $g(1)=f(1)$? $\qquad g(1) = f(2\cdot 1-1) = f(1)$

$\boxed{\text{VERA anche se non sappiamo il valore}}$

493 $\quad f(x) = \ln\left(|x| - \sqrt{x^2-1}\right)$ $\qquad \sqrt{x^2-1}$ è un po' meno di $\sqrt{x^2}=|x|$

1) Dom(f): a) $\begin{cases} |x| - \sqrt{x^2-1} > 0 \\ x^2-1 \geq 0 \end{cases}$ $\qquad \begin{cases} \forall x\in\mathbb{R} \text{ nelle c.e.} \\ x\leq -1 \ \vee \ x\geq 1 \end{cases}$

$\rightsquigarrow$ $\text{Dom}(f) = \{x\leq -1 \ \vee \ x\geq 1\}$

Im(f): $\qquad y = \ln\left(|x| - \sqrt{x^2-1}\right)$ $\qquad x\geq 1$ (poi è pari...)

$$y = \ln\left(x - \sqrt{x^2-1}\right)$$

$$e^y = x - \sqrt{x^2-1}$$

$$\sqrt{x^2-1} = x - e^y$$

$x - e^y \geq 0$

$e^y \leq x$ ma $x \geq 1$

$\Rightarrow e^y \leq 1$ $\quad e^y \leq e^0$

$\Rightarrow \boxed{y \leq 0}$

elevo

$$\cancel{x^2} - 1 = \cancel{x^2} - 2e^y x + e^{2y}$$

$$2e^y x = e^{2y} + 1 \quad \rightsquigarrow \quad x = \frac{e^{2y}+1}{2e^y}$$

C.E. $2e^y \neq 0$ Sempre vero

Oltre la C.E. dobbiamo imporre coerenza con la C.E. di x

Dunque impongo $x \geq 1$, cioè

$$\frac{e^{2y}+1}{2e^y} \geq 1 \quad \rightsquigarrow \quad \frac{e^{2y}+1-2e^y}{2e^y} \geq 0 \qquad \frac{(e^y-1)^2}{2e^y} \geq 0$$

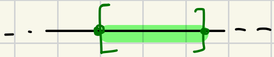
Che è sempre vero quindi devo controllare la verde.

$\Rightarrow y \leq 0$ è la C.E.

LIMITI

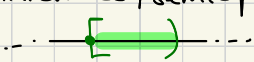
Def: Un intervallo è un sottoinsieme di numeri reali che corrisponde a una parte limitata di retta

$[a,b] = \{ a \leq x \leq b \}$ Intervallo chiuso

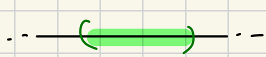


$[a,b) = \{ a \leq x < b \}$

$(a,b] = \{ a < x \leq b \}$ Intervalli semichiuso / semiaperto

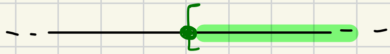


$(a,b) = \{ a < x < b \}$ Intervallo aperto

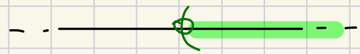


Per estensione si hanno le semirette

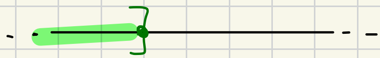
$[a; +\infty) = \{x \geq a\}$



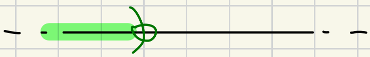
$(a; +\infty) = \{x > a\}$



$(-\infty; a] = \{x \leq a\}$



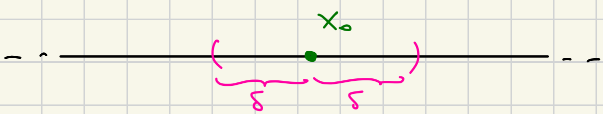
$(-\infty; a) = \{x < a\}$



Def Sia $x_0 \in \mathbb{R}$ un numero reale. Un intorno (circolare) di x_0 è un intervallo aperto con al centro x_0. Formalmente è

$$I(x_0) = (x_0 - \delta; x_0 + \delta) \qquad \delta > 0$$

delta

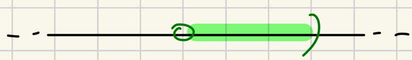


Oss: Più in generale un intorno di x_0, è intervallo aperto che contiene x_0

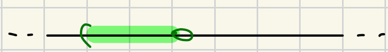
Oss: $(a; +\infty)$ si dice intorno di $+\infty$
$(-\infty; a)$ si chiama intorno di $-\infty$

Def: Dato $x_0 \in \mathbb{R}$; gli intorni destri e sinistri sono

$I(x_0)^+ = (x_0, x_0 + \delta)$

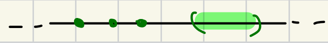


$I(x_0)^- = (x_0 - \delta; x_0)$



Def: Sia $F \subseteq \mathbb{R}$ sottoinsieme. Diremo che $\alpha \in \mathbb{R}$ è un MAGGIORANTE per F se $\forall x \in F, \ \alpha \geq x$

Diremo che $\beta \in \mathbb{R}$ è un MINORANTE per F se $\forall x \in F, \ \beta \leq x$

Esempio: $A = \{1,2,3\} \cup (4,6)$ 

Maggioranti $= [6, +\infty)$, Minoranti $= (-\infty; 1]$

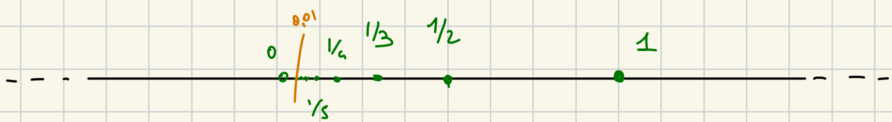
Osserviamo che $5,999$ Non è maggiorante perché in A c'è $5,9999$

Def: Sia $F \subseteq \mathbb{R}$ sottoinsieme. Se esiste almeno un maggiorante, il sottoinsieme è superiormente limitato e chiameremo estremo superiore di F $\operatorname{Sup}(F)$ il minimo dei maggior.

Se esiste almeno un minorante, F è inferiormente limitato e chiameremo estremo inferiore di F $\operatorname{Inf}(F)$ il massimo dei minoranti

Meno insiemistico

Esempio: $E = \left\{ \frac{1}{n} ; n \in \underbrace{\mathbb{N} \setminus \{0\}}_{\{1,2,3,\dots\}} \right\} = \left\{ 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots \right\}$



$\sup(E) = 1$

Epsilon

Formalmente: ▷ $1 \geq \frac{1}{n}$ $\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ (ovvio)

▷ È il più piccolo perché se tolgo $\varepsilon > 0$ a 1, cioè provo come maggiorante $1 - \varepsilon$, sarà più piccolo di 1

$\operatorname{Inf}(E) = 0$

Form: ▷ $0 \leq \frac{1}{n}$ $\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ quindi 0 è un minorante

$\varepsilon = 0,001$

▷ Mostro che 0 è il più grande fra i minoranti. Sia $\varepsilon > 0$ e provo a vedere se $0 + \varepsilon = \varepsilon$ è minorante. NON lo è perché dovrebbe valere che $\varepsilon < \frac{1}{n}$ $\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Ma dunque $n < \frac{1}{\varepsilon}$. Ma a questo basta scegliere $N > \frac{1}{\varepsilon}$

intero e ε non è più minorante

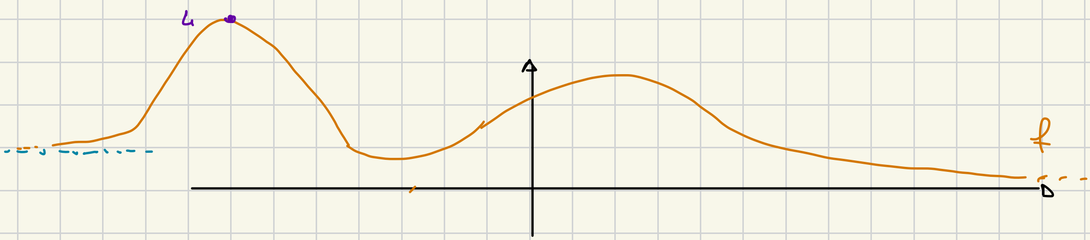
Teorema (completezza dei numeri Reali) Ogni sottoinsieme $F \subseteq \mathbb{R}$ ammette $\sup(F)$ e $\inf(F)$ (se sono illimitati poniamo $\sup(F) = +\infty$ oppure $\inf(F) = -\infty$) che sono numeri reali

Def. Sia $F \subseteq \mathbb{R}$ sottoinsieme; se $\sup(F) \in F$, lo chiamiamo Massimo di F, se $\inf(F) \in F$ lo chiamiamo minimo di F
la notazione è $\mathrm{Max}(F)$, $\min(F)$

Notazione: Data $f: D \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, definiamo

$$
\begin{aligned}
\sup(f) &= \sup(\mathrm{Im}\, f) \\
\inf(f) &= \inf(\mathrm{Im}\, f) \\
\mathrm{Max}(f) &= \mathrm{Max}(\mathrm{Im}\, f) \quad \text{se esiste} \\
\min(f) &= \min(\mathrm{Im}\, f) \quad \text{se esiste}
\end{aligned}
$$

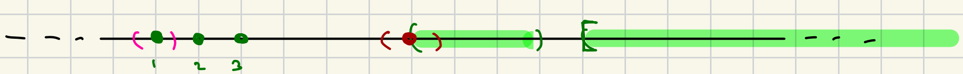
Esempio: $\sup(f) = \mathrm{Max}(f) = 4$; $\inf(f) = 0$; $\min(f)$ non esiste



Def. Sia $A \subseteq \mathbb{R}$, e sia $x_0 \in A$. Diremo che x_0 è un punto isolato di A se $\exists I(x_0)$ che non contiene altri punti di A eccetto x_0

Sia $A \subseteq \mathbb{R}$, diremo che x_0 è un pto di accumulazione per A se ogni intorno di x_0 contiene un numero infinito di punti di A.

Esempio: $A = \{1, 2, 3\} \cup (7; 9) \cup [10; +\infty)$



1 è isolato $\quad I(1) = \left(\frac{1}{2}; \frac{3}{2}\right)$
8 NON è isolato
10 NON è isolato (nella parte dx trovo cose)

3 NON è di accumulazione
8 è di Accumulazione
7 è di Accumulazione (non sta in A)

Pag 1445 n 24

$A = \{x \in \mathbb{R} \mid |x+5| < \delta \,,\ \delta > 0\}$ è intervallo? come è fatto?

δ lo conosco, lo tratto come un numero che conosco

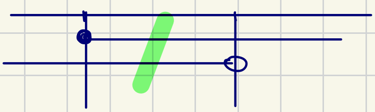
$|x+5| < \delta$

Caso a: $x+5 \geq 0$

$x \geq -5$

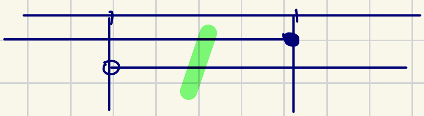
$x+5 < \delta$

$\Rightarrow \boxed{x < \delta - 5}$



Caso b: $\begin{cases} x \leq -5 \\ -x-5 < \delta \end{cases}$

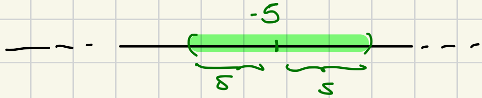
$\begin{cases} x \leq -5 \\ x > -\delta-5 \end{cases}$



$-5 \leq x < \delta - 5$ $\qquad$ $-\delta-5 < x \leq -5$

unione

$-5-\delta < x < -5+\delta \rightsquigarrow (-5-\delta\,; -5+\delta)$



n. 42: $A = \{x \mid x = \frac{n+3}{4n}, n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\}$ Verifica che $\inf(A) = \frac{1}{4}$, $\sup(A) = 1$

inf(A).

(1) $\frac{1}{4}$ è un minorante per A

È vero che $\frac{1}{4} \leq \frac{n+3}{4n}$? $\frac{n-n-3}{4n} \leq 0$ $\frac{-3}{4n} \leq 0$

$\leadsto \frac{3}{4n} \geq 0$ Sempre vero perché $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$

(2) Devo mostrare che $\frac{1}{4}$ è il più grande dei minoranti

Prendo $\frac{1}{4} + \varepsilon$ con $\varepsilon > 0$ che è un numero un goccino più grande di $\frac{1}{4}$ e faccio vedere che lui NON è più minorante.

È vero che $\frac{1}{4} + \varepsilon$ è minorante, cioè $\frac{1}{4} + \varepsilon \leq \frac{n+3}{4n}$ $\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$

$\frac{3 - 4n\varepsilon}{4n} \geq 0$ Risolvo la disequazione conoscendo ε

$4n\varepsilon \leq 3 \leadsto n \leq \frac{3}{4\varepsilon}$, ma quindi se scelgo $n > \frac{3}{4\varepsilon}$,

$\frac{1}{4} + \varepsilon$ NON è più MINORANTE.

Con i numeri: $\varepsilon = \frac{1}{1000} = 0{,}001$ $\frac{3}{4\varepsilon} = 750$ $\underbrace{\frac{1}{4} + \frac{1}{1000}}_{\frac{1}{4}+\varepsilon} = 0{,}251$

Scelgo $n > 750$, tipo $n = 1000$

e calcolo $\frac{n+3}{4n} = 0{,}25075$

Inf(A) è un minimo? Metto $\inf(A) = \frac{n+3}{4n}$; se trovo soluzione, inf(A) è un minimo

$\frac{1}{4} = \frac{n+3}{4n} \leadsto n = n+3 \leadsto 0 = 3$ Impossibile

$\sup(A) = 1$

▷ Mostro che 1 è maggiorante

$1 \geq \frac{n+3}{4n}$ ⇝ $\frac{3n-3}{4n} \geq 0$ ⇝ Solo numeratore perché $D>0$

$3n-3 \geq 0$ ⇝ $\boxed{n \geq 1}$ ⇝ Dunque $1 \geq \frac{n+3}{4n}$ $\forall n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$

▷ Mostro che $1-\varepsilon$ NON è maggiorante con $\varepsilon>0$

$1-\varepsilon \geq \frac{n+3}{4n}$? Risolviamola:

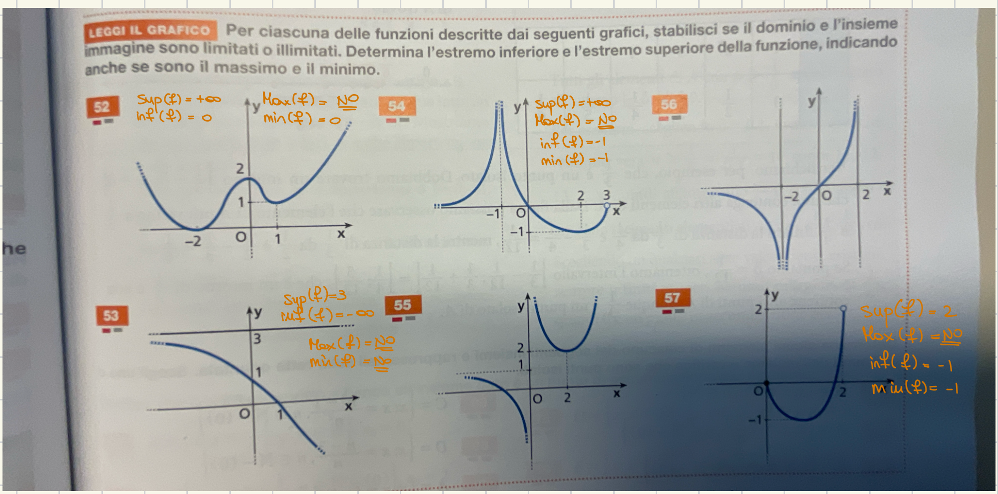
$\frac{4n-4n\varepsilon-n-3}{4n} \geq 0$ $\qquad$ $\frac{3n-4n\varepsilon-3}{4n} \geq 0$ ⇝ solo num. perché $D>0$

$n(3-4\varepsilon) \geq 3$ $\qquad$ $\boxed{n \geq \frac{3}{3-4\varepsilon}}$ ⇝ Se scelgo $n < \frac{3}{3-4\varepsilon}$

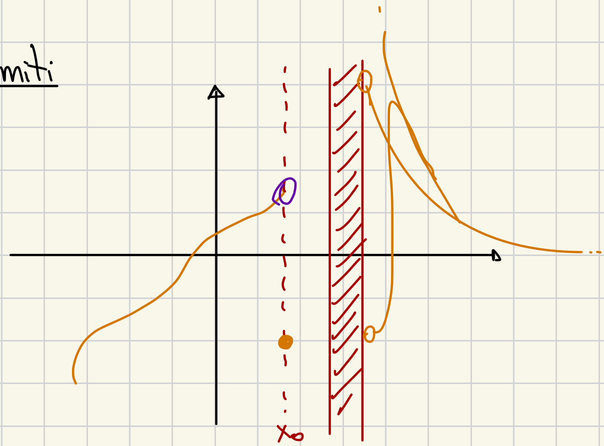
trovo che $1-\varepsilon$ NON è maggiorante

$\sup(A)$ è un massimo? $\sup(A) = \frac{n+3}{4n}$ e risolvo

$1 = \frac{n+3}{4n}$ ⇝ $4n = n+3$ ⇝ $n=1$ ⇝ Dunque $1 = \sup(A) = \operatorname{Max}(A)$


LEGGI IL GRAFICO Per ciascuna delle funzioni descritte dai seguenti grafici, stabilisci se il dominio e l'insieme immagine sono limitati o illimitati. Determina l'estremo inferiore e l'estremo superiore della funzione, indicando anche se sono il massimo e il minimo.

Limiti



Euristicamente. Il concetto di limite permette di studiare una funzione in un pto x_0 (o all'infinito) senza conoscere davvero la funzione in quel punto, ma avvicinandosi arbitrariamente.

Def: Sia $f: D \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, e sia x_0 un punto di accumulaz. per D. Diremo che il limite per f che tende a x_0 vale ℓ numero finito e si scrive

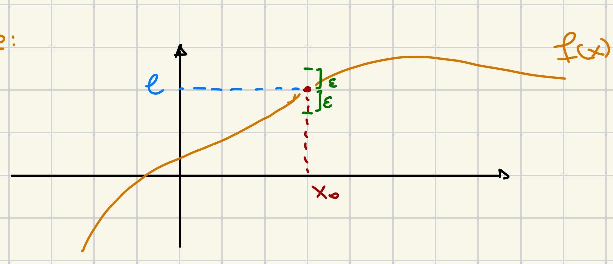
$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell$$

Limite per x che tende a x_0 di f(x)

se

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \delta > 0 \quad \text{t.c.} \quad \underbrace{|x - x_0| < \delta}_{x \in (x_0-\delta,\, x_0+\delta)} \implies \underbrace{|f(x) - \ell| < \varepsilon}_{f(x) \in (\ell-\varepsilon;\, \ell+\varepsilon)}$$

Esempio:



Matteo mi dice ε. Il limite esiste ed è ℓ se riesco a trovar δ in modo che, se sulle x mi sono avvicinato di δ, sulle y mi sono avvicinato di ε.