Settimana: 5

Materia: Matematica
Classe: 5A
Data: 13/10/25

Argomenti: Esercizi sui Limiti. Eq. Asintotica per infinitesimi e infiniti. Enunciato teo e dim con applicazioni. Esercizi in classe su limiti e continuità.

Pag 1533 n 322

$$\lim_{x\to 2} \log_2\left(\frac{\sqrt{x^2+12}-4}{3x^2-4x-4}\right) \cdot \frac{\sqrt{x^2+12}+4}{\sqrt{x^2+12}+4}$$

⤳ Manipolo la radice

$$\lim_{x\to 2} \log_2\left[\frac{\overbrace{x^2+12-16}^{x^2-4}}{(3x^2-4x-4)(\sqrt{x^2+12}+4)}\right]$$

⤳ Scompongo tutto per far scomp. i prob. in 2

$$\lim_{x\to 2} \log_2\left[\frac{(x+2)\cancel{(x-2)}}{(3x+2)\cancel{(x-2)}\sqrt{x^2+12}+4}\right]$$

Ruffini: $3x^2-4x-4 = p(x)$

$p(2) = 0$

	3	-4	-4
2		6	4
	3	2	0

$(x-2)(3x+2)$

Trin. molto sp. α, β t.c. $\alpha+\beta = -4$, $\alpha\beta = -12$

$\alpha = -6$, $\beta = +2$

$3x^2 - 6x + 2x - 4$

$3x(x-2) + 2(x-2)$

$(3x+2)(x-2)$

$$\lim_{x\to 2} \log_2\left(\underbrace{\frac{\boxed{x+2}^{\to 4}}{\underbrace{3x+2}_{8}} \cdot \frac{1}{\underbrace{\sqrt{x^2+12}+4}_{8}}}_{\frac{1}{16}}\right) = -4$$

Pag 1535 n 369

$$\lim_{x\to 0} \frac{2x\sin x}{\cos^2 x - \cos x} =$$

Strategie: Faccio comparire cose in modo raggruppamenti diversi siano limiti notevoli

$$\lim_{x\to 0} 2 \frac{x \sin x}{\cos x(\cos x - 1)} \cdot \frac{x}{x}$$

Aggiusto lim con il sin x

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x\to 0} 2 \cdot \underbrace{\frac{\sin x}{x}}_{\to 1} \cdot \underbrace{\frac{x^2}{(\cos x - 1)}}_{\to -2} \cdot \underbrace{\frac{1}{\cos x}}_{\to 1} = -4$$

Altro metodo

$$\lim_{x\to 0} 2 \frac{x \sin x}{\cos x \underbrace{(\cos x - 1)}} \cdot \frac{\cos x + 1}{\underbrace{\cos x + 1}}$$

Aggiusto il -

$$\lim_{x\to 0} 2 \frac{x \sin x}{\underbrace{(-\sin^2 x)}} \cdot \frac{\cos x + 1}{\cos x} = \lim_{x\to 0} 2 \underbrace{\left(-\frac{x}{\sin x}\right)}_{\to -1} \cdot \underbrace{\frac{\cos x + 1}{\cos x}}_{2} = -4$$

n.275 $\lim_{x\to -\infty} \dfrac{-x + \sqrt{x^2 - 8}}{6x+7}$

$x = -t$

$x \to -\infty \quad t \to +\infty$

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{t + \sqrt{t^2-8}}{-6t+7} = \lim_{x\to +\infty} \frac{t\left(1 + \sqrt{1 - \frac{8}{t^2}}\right)}{t\left(-6 + \frac{7}{t}\right)} = -\frac{1}{3}$$

Goal: $\lim_{x\to\infty} \frac{x^2+3x}{x+1} \boxed{\sim} \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{x} = \lim_{x\to+\infty} x = \infty$

equiv asintotica

Def: Sia $f: D\subseteq\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ funzione, α pto di accumulazione per f. diremo che f è un infinitesimo per $x\longrightarrow\alpha$ se

$$\lim_{x\to\alpha} f(x) = 0$$

Diremo che f è un infinitesimo di ordine γ rispetto a $g(x)$ se

(1) $\lim_{x\to\alpha} g(x) = 0$

(2) $\lim_{x\to\alpha} \frac{f(x)}{[g(x)]^\gamma} = \ell \neq 0$ con ℓ numero finito

Esempio:

(1) $\lim_{x\to 2} (x-2) = 0$ $x-2$ è un infinitesimo $x\longrightarrow 2$

(2) $\lim_{x\to 2} \frac{(x-2)}{\sin(x-2)} = 1$ $x-2$ è infinitesimo di ordine 1 rispetto a $\sin(x-2)$

Def: Diremo che f e g sono infinitesimi equivalenti, o asintoticamente equivalenti, per $x\longrightarrow\alpha$ se

$$\lim_{x\to\alpha} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$$

Lo indicheremo con $f \sim g$ (f asint. eq. a g per $x\longrightarrow\alpha$)

Esempio: $x \sim \sin x \quad x \to 0$
$x \sim \ln(1+x) \quad x \to 0$
$x \sim e^x - 1 \quad x \to 0$

Sono i lim. Notevoli

Teorema di equivalenza asintotica

Siano f, g funzioni e supponiamo che esiste $\lim_{x \to \alpha} \frac{f(x)}{g(x)}$ e f e g infinitesimi per $x \to \alpha$.

Supponiamo esistano f_1 e g_1 tali che $f \sim f_1$, $g \sim g_1$

Allora vale che

$$\lim_{x \to \alpha} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to \alpha} \frac{f_1(x)}{g_1(x)}$$

Pag 1547 n 613

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin 2x}{\ln(1+4x)} \overset{\text{Teo}}{=} \lim_{x \to 0} \frac{2\cancel{x}}{4\cancel{x}} = \frac{1}{2}$$

Voglio usare il teorema:

vale che $\sin 2x \sim 2x$
in quanto $\lim_{x \to 0} \frac{\sin 2x}{2x} = 1$

vale che $\ln(1+4x) \sim 4x$
in quanto $\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1+4x)}{4x} = 1$

n 616

$$\lim_{x \to 0} \frac{2x^2 + \sin x}{5x + x^4 \cos x} = \lim_{x \to 0} \frac{\cancel{x}\overbrace{\left(2x + \frac{\sin x}{x}\right)}^{1}}{\cancel{x}\underbrace{(5 + x^3 \cos x)}_{5}} = \frac{1}{5}$$

Dim del teorema:

Come Hp: $\lim_{x\to\alpha} \frac{f(x)}{f_1(x)} = 1$

$\lim_{x\to\alpha} \frac{g(x)}{g_1(x)} = 1$

$$\lim_{x\to\alpha} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to\alpha} \frac{f(x)}{g(x)} \cdot \frac{f_1(x)}{f_1(x)} \cdot \frac{g_1(x)}{g_1(x)}$$

$$= \lim_{x\to\alpha} \frac{f_1(x)}{g_1(x)} \cdot \underbrace{\frac{f(x)}{f_1(x)}}_{\downarrow 1} \cdot \underbrace{\frac{g_1(x)}{g(x)}}_{\downarrow 1} = \lim_{x\to\alpha} \frac{f_1(x)}{g_1(x)}$$

$\square$

Oss: Tutte le cose fatte si possono applicare anche al caso in cui il limite NON fa 0, ma fa ∞. In quel caso si usa la parola "infiniti" al posto di infinitesimi

n620: $\lim_{x\to -2} \frac{\ln(x^2+4x+5)}{\ln(x+3)^{100}}$

(Sost. $x+2=t$ $\quad x=t-2$
$x\to -2$ $\quad t\to 0$)

$$\lim_{t\to 0} \frac{\ln(t^2+4-\cancel{4t}+\cancel{4t}-8+5)}{\ln(t+1)^{100}} = \lim_{t\to 0} \frac{\ln(t^2+1)}{100\cdot\ln(t+1)} =$$

Eq. Asint. $\ln(t+1) \sim t$
$\ln(t^2+1) \sim t^2$ $\rightsquigarrow$ Per lo stesso lim notevole

$$= \lim_{t\to 0} \frac{t^2}{100\,t} = \lim_{t\to 0} \frac{t}{100} = 0$$

Pag 1541 n518

difl.

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{x^2}-2+\cos x}{\sin^2 x} = \lim_{x\to 0}\left[\frac{e^{x^2}-1}{\sin^2 x} + \frac{\cos x-1}{\sin^2 x}\right]$$

$$\lim_{x\to 0}\left[\frac{e^{x^2}-1}{\sin^2 x}\cdot\frac{x^2}{x^2} + \frac{\cos x-1}{\sin^2 x}\cdot\frac{x^2}{x^2}\right] = \frac{1}{2}$$

$\frac{x^2}{\sin^2 x} \to 1$ $\left(\frac{\sin x}{x}\right)$; $\frac{e^{x^2}-1}{x^2} \to 1$ $\left(\frac{e^x-1}{x}\right)$; $\frac{x^2}{\sin^2 x}\to 1$; $\frac{\cos x - 1}{x^2} \to -\frac{1}{2}$

544 $\lim_{x\to 0} \frac{e^{x}-e^{-x}}{\ln(1+x)} \cdot \frac{x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{x}{\ln(1+x)} \cdot \frac{e^{x}-e^{-x}}{x}$ $\qquad \frac{e^{x}-1}{x}$

$= \lim_{x\to 0} \underbrace{\frac{x}{\ln(1+x)}}_{\to 1} \cdot \underbrace{e^{-x}}_{\to 1} \underbrace{\frac{(e^{2x}-1)}{x}\cdot\frac{2}{2}}_{\to 1} = 2$

$\frac{\ln(1+x)}{x}$

538 $\lim_{x\to 0} \frac{e^{-x}+\sin x-\cos x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} + \frac{e^{-x}-\cos x}{x}$

diff

$= \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} + \frac{e^{-x}-1+1-\cos x}{x} =$

$= \lim_{x\to 0} \underbrace{\frac{\sin x}{x}}_{\to 1} - \underbrace{\frac{e^{-x}-1}{(-x)}}_{\to 1} + \underbrace{\frac{1-\cos x}{x}}_{\to 0} = 0$

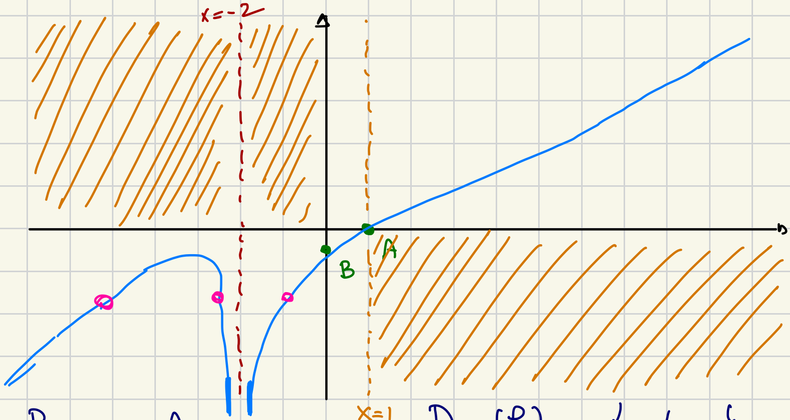
---

n 1057 pag 1573

$y=\frac{x^3+p}{(x+q)^2}$ $\qquad p,q\in\mathbb{R}$

▷ Graf(f) passa per $A(1,0)$
▷ la retta $x=-2$ è asintoto

Trova p,q.



$0=\frac{1+p}{(1+q)^2}$ Passa per A ;

$\hookrightarrow \boxed{p=-1}$

Dom(f) = $\{x\neq -q\}$

l'asintoto è in $x=-2 \Rightarrow$

$\boxed{q=2}$

$$f(x) = \frac{x^3-1}{(x+2)^2}$$

(1) $\mathrm{Dom}(f) = \{x \neq -2\}$

$$f: \mathbb{R} \setminus \{-2\} \longrightarrow \mathbb{R}$$

(2) Int assi: Asse y: $x=0 \rightsquigarrow y = -\frac{1}{4}$ $\quad B = \left(0; -\frac{1}{4}\right)$

Asse x: $y=0$ $\quad \frac{x^3-1}{\cancel{(x+2)^2}} = 0$ $\quad (x-1)(x^2+x+1) = 0$

$x-1=0 \rightsquigarrow x=1$ $\quad A = (1,0)$

$x^2+x+1=0 \rightsquigarrow \Delta = 1-4 = -3$ Negativo No soluzioni

(3) Segno. $\frac{(x-1)(x^2+x+1)}{(x+2)^2} \geq 0$

$N_1 \geq 0 \quad x \geq 1$

$N_2 \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$D > 0 \quad x \neq -2$

		-2		1	
N_1	$-$		$-$	$\bullet$	$+$
N_2	$+$		$+$		$+$
D	$+$	ϕ	$+$		$+$
	$-$		$-$		$+$

$\boxed{x \geq 1}$ $\rightsquigarrow$ Cancello la parte di sotto

(4) Limiti: $\lim_{x \to -2} \frac{x^3-1}{(x+2)^2} = -\infty$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^3-1}{(x+2)^2} = +\infty \qquad \lim_{x \to -\infty} \frac{x^3-1}{(x+2)^2} = -\infty$$

---

n 62 pag 1577

$$f(x) = \begin{cases} e^{ax+b} & x \leq 1 \\ x + \sqrt{e} - 1 & x > 1 \end{cases}$$

Trova a, b in modo che
1) Passa per $A = (-2; 1)$
2) f è continua in $x=1$

(1) Dato che $-2 \leq 1$ uso la prima $\boxed{1 = e^{-2a+b}}$

(2) Per essere continua deve valere che:

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^+} f(x) = f(1)$$

$$\underbrace{\lim_{x\to 1^-} \left(e^{ax+b}\right)}_{\text{vengo da sx}} = \underbrace{\lim_{x\to 1^+} (x+\sqrt{e}-1)}_{\text{Perché vengo da dx}} = e^{a+b}$$

$$e^{a+b} = \boxed{\sqrt{e} = e^{a+b}}$$

$$\begin{cases} -2a+b=0 \\ a+b=\frac{1}{2} \end{cases} \quad \begin{cases} 3a=\frac{1}{2} \\ b=\frac{1}{2}-a \end{cases} \quad \begin{matrix} \rightsquigarrow a=\frac{1}{6} \\ \rightsquigarrow b=\frac{1}{3} \end{matrix}$$