

Settimana: 14

Argomenti

Materia: Matematica

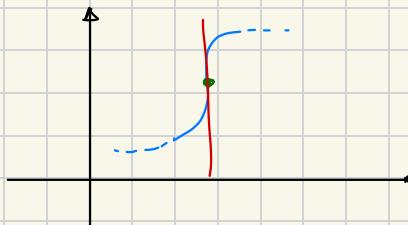
Classe: 5C

Data: 10/1/26

Punti di non derivabilità

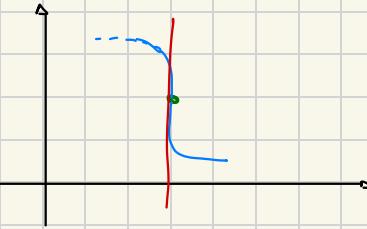
Reminder. Si ha un pto di non derivabilità se le derivate sinistra e destra non coincidono oppure sono $\pm\infty$

(1) Flesso a tangente Verticale



$$f'_-(x_0) = +\infty$$

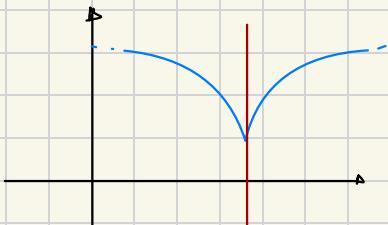
$$f'_+(x_0) = +\infty$$



$$f'_-(x_0) = -\infty$$

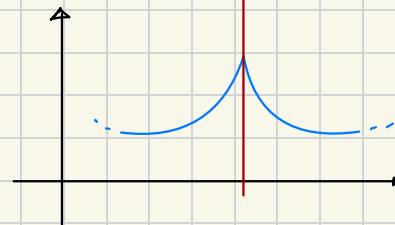
$$f'_+(x_0) = -\infty$$

(2) Cuspidi



$$f'_-(x_0) = -\infty$$

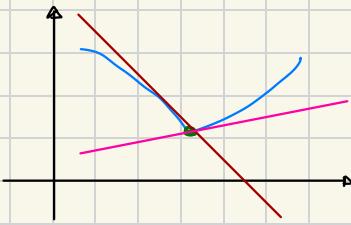
$$f'_+(x_0) = +\infty$$



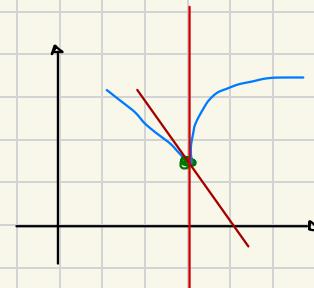
$$f'_-(x_0) = +\infty$$

$$f'_+(x_0) = -\infty$$

(3) Punti angolosi



$$\begin{aligned} f'_-(x_0) &= l \\ f'_+(x_0) &= m \end{aligned} \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{finiti, ma diversi} \\ \text{finiti, ma diversi} \end{array} \right.$$



$$\begin{aligned} f'_-(x_0) &= l \quad \text{finito} \\ f'_+(x_0) &= \pm \infty \end{aligned}$$

Possano essere
indefiniti

Pag 170 R n 23

$$f(x) = \sqrt[3]{x^2} + 2x \quad \text{Studio la derivabilità.}$$

$$f'(x) = \left[x^{\frac{2}{3}} + 2x \right]' = \frac{2}{3} x^{-\frac{1}{3}} + 2 = \frac{2}{3 \sqrt[3]{x}} + 2$$

È la derivata in tutti i punti tranne $x=0$

Per coprire cosa accade in $x=0$ calcolo con la definizione le derivate destro e sinistro in $x=0$.

$$\begin{aligned} f'_+(0) &\stackrel{\text{Def}}{=} \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt[3]{h^2} + 2h - 0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt[3]{h^2} \left(1 + 2 \sqrt[3]{h} \right)}{\sqrt[3]{h^2} \cdot \sqrt[3]{h}} = +\infty \end{aligned}$$

$$f'_-(0) \stackrel{\text{Def}}{=} \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \dots = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{\sqrt[3]{h^2} \left(1 + 2 \sqrt[3]{h} \right)}{\sqrt[3]{h^2} \cdot \sqrt[3]{h}} = -\infty$$

→ C'è un cuspidone

Teoremi del calcolo differenziale

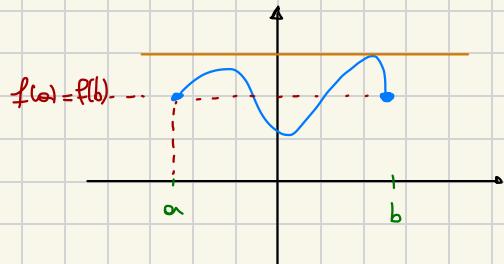
Teorema di Rolle. Date $f: [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ tali che

(1) f è continua in $[a; b]$

(2) f è derivabile in $(a; b)$

(3) $f(a) = f(b)$

Allora $\exists c \in [a; b] \text{ t.c. } f'(c) = 0$



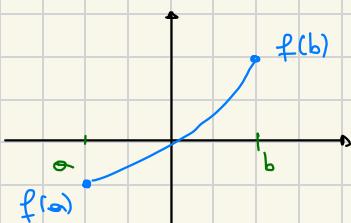
Oss: Geometricamente sto dicendo che se valgono quelle Hip c'è un punto della curva che ha una tangente orizzontale

\Rightarrow No dim (Slide 5A)

Oss: Le Hip sono tutte e tre necessarie, cioè se ne togliamo l'implicazione potrebbe non essere vero.

Vale (1), (2)

Non Vale (3)



No tg orizzontale

Vale (1), (3)

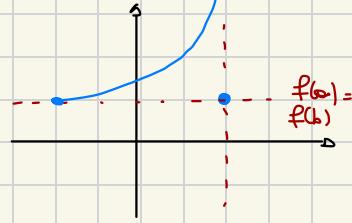
Non Vale (2)



Il punto cerchiato
non è derivabile e
sarebbe il punto c
del Teorema

Vale (2), (3)

Non Vale (1)

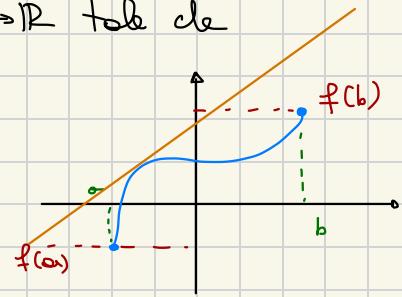


Non c'è punto con
tangente orizzontale

Teorema di Lagrange: Dato $f: [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ tale che

- (1) f è continua in $[a; b]$
- (2) f è derivabile in $(a; b)$

Allora $\exists c \in (a; b)$ t.c. $f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$



↳ Incl. rette che congiunge $(a; f(a))$, $(b; f(b))$

Oss.: Geometricamente mi sta dicendo che esiste un punto nel grafico in cui la tangente è parallela alla retta che congiunge i punti $(a; f(a))$, $(b; f(b))$.

→ No dim (slide 5A)

Oss.: Le Hip sono tutte necessarie, I controesempi sono esattamente uguali a quelli di Rolle.

1100 pag 1713

$f(x) = 1 + |x|$ $f: [-2; 2] \rightarrow \mathbb{R}$ Verifica le Hip di Rolle?

Caso a: Se $x \geq 0$

$$f(x) = 1 + x$$

Caso b: Se $x \leq 0$

$$f(x) = 1 - x$$

$$f(x) = \begin{cases} 1 - x & -2 \leq x \leq 0 \\ 1 + x & 0 \leq x \leq 2 \end{cases}$$

(1) Continuità

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} 1 - x = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} 1 + x = 1$$

) Uguali $\Rightarrow f$ continua in 0

$$(2) \underline{\text{Derivabilità}}: f'(x) = \begin{cases} -1 & -2 < x < 0 \\ 1 & 0 < x < 2 \end{cases} \quad \boxed{\begin{array}{l} \text{Derivabile in} \\ (-2, 2) \text{ con} \\ x \neq 0 \end{array}}$$

Dobbiamo quindi verificare a mano se esiste $f'(0)$. Per farlo si fanno derivate sx e destro e si confrontano.

$$f'_-(0) = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{1-h-1}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} (-1) = \boxed{-1}$$

$$f'_+(0) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{1+h-1}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} 1 = \boxed{1}$$

$$f'_-(0) \neq f'_+(0) \Rightarrow \text{Punto Angoloso} \Rightarrow \text{Non derivabile} \Rightarrow \text{No Rette.}$$