Def / Notazione: Dato $n \in \mathbb{N}$, definisco **n fattoriale** con la seguente scrittura

n fattoriale $\;[\; n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \; 3 \cdot 2 \cdot 1$

ed è il prodotto dei numeri da 1 fino a n.
Per convenzione $0! = 1$

Esempi: $4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$

$5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 5 \cdot 24 = 120$
$6! = 6 \cdot 5 \dots \cdot 1 = 6 \cdot 120 = 720$

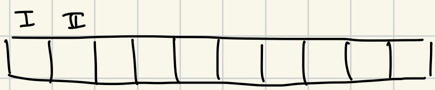
$5! + 7! = 5! + 7 \cdot 6 \cdot 5! = 5!\,(1 + 42) = 43 \cdot 5!$

$(n+1)! - n! = (n+1) \cdot n! - n! = n!\,(n+1-1) = n! \cdot n$

$\frac{53!}{52!} = \frac{53 \cdot \cancel{52!}}{\cancel{52!}} = 53$ $\qquad \frac{53!}{52!} = \frac{53\ \cancel{52 \cdot 51} \dots}{\cancel{52 \cdot 51} \dots} = 53$

$\frac{n+2!}{n!} = \frac{(n+2)(n+1)\cancel{(n)(n-1)} \dots}{\cancel{n(n-1)} \dots} = (n+2)(n+1)$

Esercizio: 10 persone in fila per i colloqui. In quanti possono mettersi in fila ordinata?



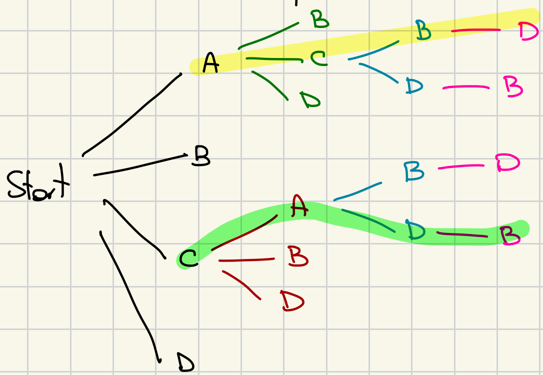
La fila è rappresentata da caselle
Scelgo chi mettere in ogni casella.

$$\underset{\uparrow \atop \text{I}}{10} \cdot \underset{\uparrow \atop \text{II}}{9} \cdot \underset{\uparrow \atop \text{III}}{8} \cdots \cdot 2 \cdot 1 = 10!$$

Perché devo moltiplicare?
Le scelte generano una sorte di diagramma ad albero

V	D
	S
	Vbo
	Vbe

Rifaccio lo stesso problema con 4 persone:



⟿ ACBD file

⟿ CADB file

(I) (II) (III) (IV)

Def: Le permutazioni semplici di n elementi sono tutti i gruppi formati con tutti gli n elementi e in cui conta l'ordine

Si indica con P_n

Oss: Per quanto appena visto $P_n = n!$

Esercizio. Luca ha 10 persone prenotate per i colloqui, ma ha solo 4 posti. Quante sono le possibili file (ordinate)

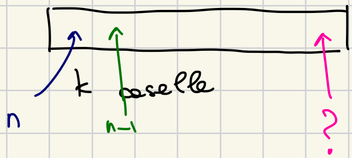
La mia fila è di 4 posti

$$\frac{10!}{(10-4)!} = \frac{10!}{6!} = \underset{\mathrm{I}}{10} \cdot \underset{\mathrm{II}}{9} \cdot 8 \cdot \underset{\mathrm{IV}}{7}$$ e si esaurisce la fila

Def: Le disposizioni semplici di k elementi in un insieme di n elementi $(0 < k \leq n)$ sono tutti i gruppi formati con $\underbrace{k}_{\text{sono distinti}}$ degli n elementi in cui conta l'ordine

Si indica con $D_{n,k}$] n elem. totali, k numero di el. da disp.

Oss: Per quanto appena visto:



$7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3$ $k = 5$, $n = 7$

$12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8$ $n = 12$

$74 \cdot 73 \cdot 72 \cdot 71 \cdot 70$ $n = 74$

$$D_{n,k} = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot [n-(k-1)] \underset{\text{convincersi}}{\boxed{=}} \frac{n!}{(n-k)!}$$

Oss. Se devo disporre n elementi distinti, la disposizione semplice coincide con la permutazione:

$$D_{n,n} = P_n$$

Def. Le disposizioni con ripetizione di k elementi in un insieme di n, con $k \neq 0$ sono tutti i gruppi di k elementi in cui conta l'ordine e in cui gli elementi si possono ripetere

Si indica con $D'_{n,k}$

Oss: Ho k posti in una fila (k sere in cui posso uscire) e ho n locali disponibili (Posso andare più volte nello stesso posto)

$10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10$ $k = 5$, $n = 10$ $\rightsquigarrow$ $D'_{n,k} = n^k$