Settimana: 17

Materia: Matematica
Classe: 5C
Data: 10/02/26

Argomenti

Massimi, minimi, flessi

Remind: $f: [a;b] \longrightarrow \mathbb{R}$, $\max(f) = \max(\operatorname{Im} f)$
$\min(f) = \min(\operatorname{Im} f)$

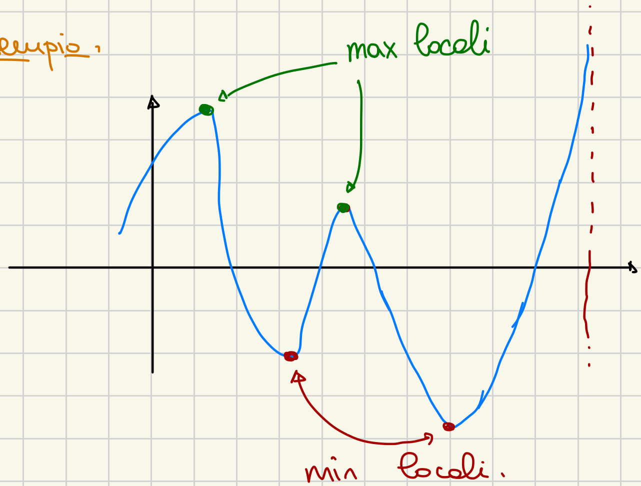
Def: Sia $f: [a;b] \longrightarrow \mathbb{R}$ una funzione. $x_0 \in (a;b)$ Diremo che x_0 è un massimo locale per f se esiste un intorno I di x_0 tale che
↳ Relativo

$$f(x_0) \geq f(x) \quad \forall x \in I$$

Diremo che x_0 è minimo locale per f se esiste un intorno I di x_0 tale che
↳ Relativo

$$f(x_0) \leq f(x) \quad \forall x \in I$$

Esempio:



Teorema di Fermat: Data $f: [a;b] \longrightarrow \mathbb{R}$, derivabile nell'intervallo aperto $(a;b)$; se f ha un minimo o massimo locale in x_0, allora $f'(x_0) = 0$

Dim: Sappiamo che, nel caso x_0 massimo, $f(x_0) \geq f(x) \quad \forall x \in I$
Dobbiamo dimostrare che $f'(x_0) = 0$

Suppongo per assurdo che $f'(x_0) \neq 0$, dunque dovrà valere ad esempio che $f'(x_0) > 0$ (caso $f'(x_0) < 0$ per esercizio)

$$f(x_0+h) = f(x_0) + \boxed{\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}}\, h$$

$g(h)$ è una funzione che dipende da h.

Sappiamo che $\lim_{h \to 0} g(h) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = f'(x_0)$

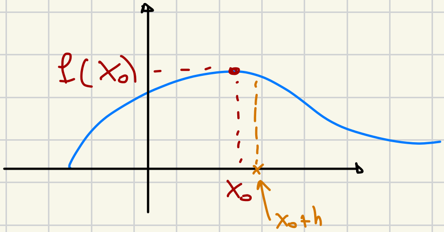
Per il teorema di Permanenza del segno la funzione $g(h)$ è positiva poiché ho supposto che $f'(x_0)$ sia positivo.

Ma allora ho

Se $h>0$, allora $g(h) \cdot h > 0$

$$f(x_0+h) = f(x_0) + \overbrace{g(h) \cdot h}$$

$$f(x_0+h) = f(x_0) + \text{qualcosa di positivo}$$



Ma questo è ASSURDO perché $f(x_0)$ è il massimo per Ipotesi

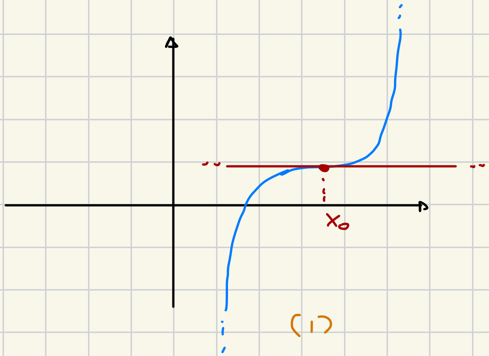
$\Rightarrow f'(x_0)$ Non può essere positivo

$\Rightarrow f'(x_0) = 0$ $\square$

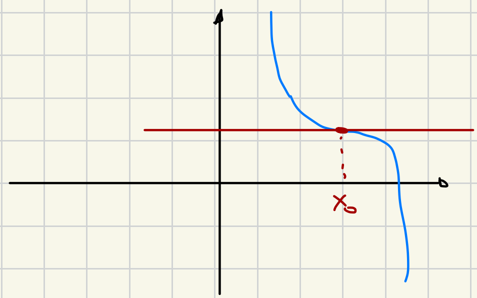
Def: Sia $f: [a;b] \longrightarrow \mathbb{R}$, derivabile in $(a;b)$. Sia $x_0 \in (a,b)$.
x_0 si dice punto stazionario (o critico) se $f'(x_0) = 0$

Warning: Max o min locale $\Longrightarrow$ punto stazionario

Def: Sia $f: [a;b] \longrightarrow \mathbb{R}$, derivabile in $(a;b)$. $x_0 \in (a;b)$ è un flesso a tangente orizzontale se è un pto stazionario e vale
$f'(x) > 0$ se $x < x_0$ e $x > x_0$ (1) oppure
$f'(x) < 0$ se $x < x_0$ e $x > x_0$



(1)



Pag 1779 n 57

$$f(x) = \frac{x^3}{(1-x)^2}$$

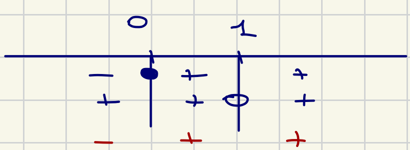
(1) $\mathrm{Dom}(f) = \{x \neq 1\}$

(2) $x = 0 \rightsquigarrow f(0) = 0$
$y = 0 \rightsquigarrow x = 0$

$\boxed{A = (0;0)}$

(3) Segno: $f(x) \geq 0$

N: $x^3 \geq 0 \rightsquigarrow x \geq 0$
D: $(1-x)^2 > 0 \rightsquigarrow$ sempre $x \neq 1$



Sol: $x \geq 0$, $x \neq 1$

(4) Limiti: $\lim_{x \to +\infty} \frac{x^3}{(1-x)^2} = +\infty$ ← No asintoto orizzontale

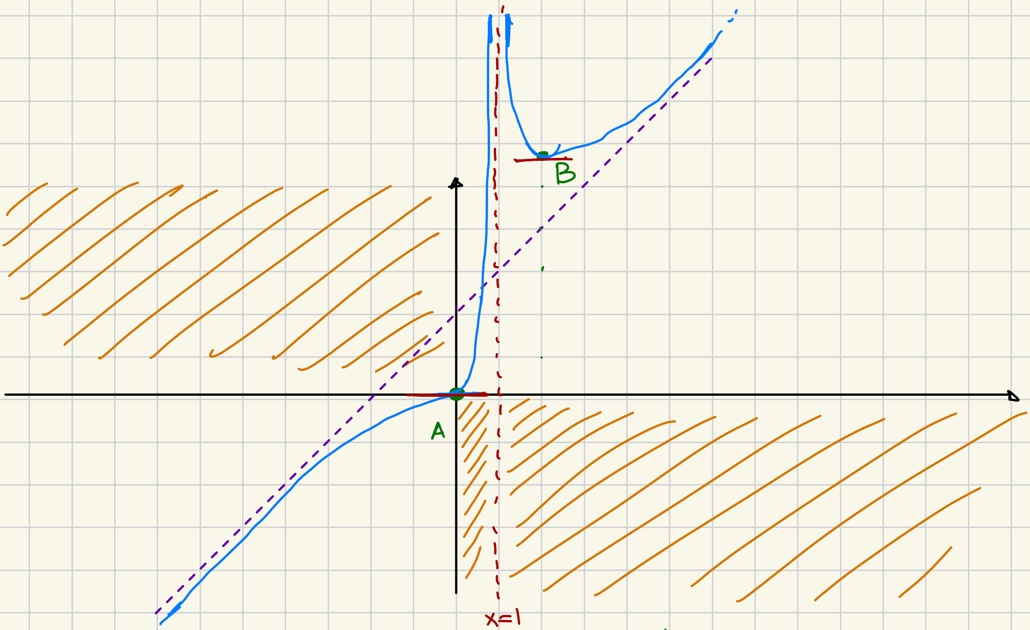
Provo asintoto obliquo: $\lim_{x \to +\infty} \frac{x^3}{(1-x)^2 \cdot x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^3}{x^3 - 2x^2 + x} = 1 \; (=m)$

$\lim_{x \to +\infty} f(x) - mx = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^3}{(1-x)^2} - x = \lim_{x \to +\infty} \frac{\cancel{x^3} - \cancel{x^3} + 2x^2 - x}{x^2 - 2x + 1} = 2 \; (=q)$

$$\boxed{y = x + 2 \qquad \text{Asintoto obliquo}}$$

$x \to -\infty$ fa la stessa cosa, ⇝ $y = x+2$ (Da verificare)

$\lim_{x \to 1^+} \frac{x^3}{(1-x)^2} = +\infty \qquad \lim_{x \to 1^-} \frac{x^3}{(1-x)^2} = +\infty$



(5) $f(x) = \frac{x^3}{(1-x)^2} \qquad f'(x) = \frac{3x^2(1-x)^{\cancel{2}} - x^3 \cdot 2\cancel{(1-x)}(-1)}{(1-x)^{\cancel{4}\,3}}$

$f'(x) = \frac{3x^2 - 3x^3 + 2x^3}{(1-x)^3} = \frac{x^2(3-x)}{(1-x)^3}$

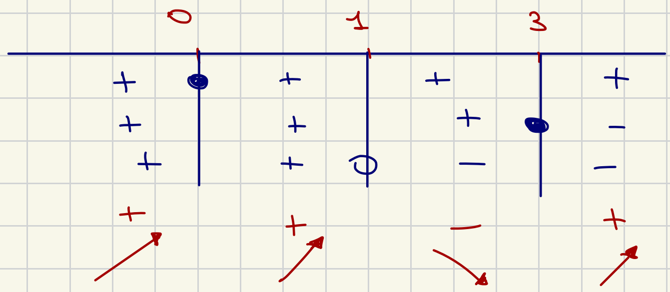
Impongo $f'(x) \geq 0$

$$\frac{x^2(3-x)}{(1-x)^3} \geq 0$$

$N_1: \; x^2 \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad \rightsquigarrow \; x = 0$ pto st.

$N_2: \; 3 - x \geq 0 \quad x \leq 3 \quad \rightsquigarrow \; x = 3$ pto st.

$D. \; (1-x)^3 > 0 \quad x < 1$



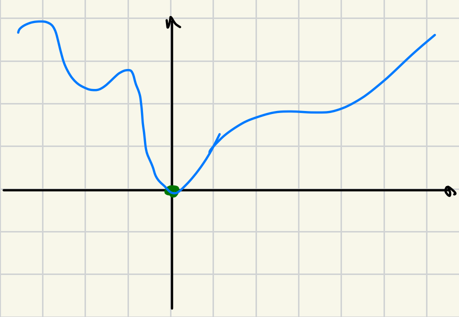
0 è flesso a tg orizzontale $\rightsquigarrow (0, f(0)) = (0;0) = A$

3 è un minimo $\rightsquigarrow (3; f(3)) = \left(3; \frac{27}{4}\right) = B$

---

n 210 pag 1789

$f(x) = x^2 e^x + (a-1)x$ — Trova a in modo che il grafico è tg all'asse x nell'origine



La condizione è $f'(0) = 0$

$f'(x) = 2xe^x + x^2 e^x + (a-1)$

$f'(0) = 0$ cioè $a - 1 = 0$

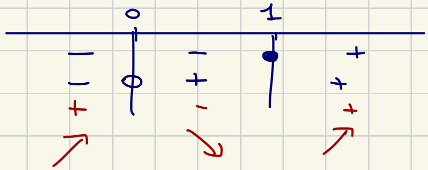
$\rightsquigarrow \boxed{a = 1}$

214 $f(x) = ax^3 + 3x + b - 2$ ha un massimo coincidente con il minimo della funzione $y = x - \ln x$

(1) Trovo minimo di $g(x) = x - \ln(x)$

$g'(x) = 1 - \frac{1}{x}$ $\qquad g'(x) \geq 0 \qquad \frac{x-1}{x} \geq 0$

N: $x \geq 1$
D: $x > 0$



minimo: $A = (1; g(1)) = (1; 1 - \ln(1)) = (1; 1)$

(2) ▷ Impongo che A appartenga al grafico di f
▷ " " A sia massimo locale

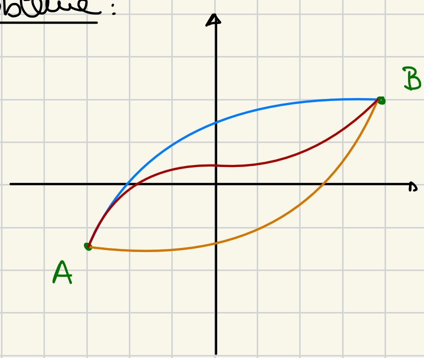
$\cancel{1} = a \cdot 1^3 + \cancel{3} \cdot 1 + b - \cancel{2} \rightsquigarrow \boxed{a + b = 0}$

$f'(x) = 3ax^2 + 3 \rightsquigarrow f'(1) = 0 \rightsquigarrow \boxed{3a + 3 = 0}$

$\rightsquigarrow \boxed{a = -1 \quad , \quad b = 1}$

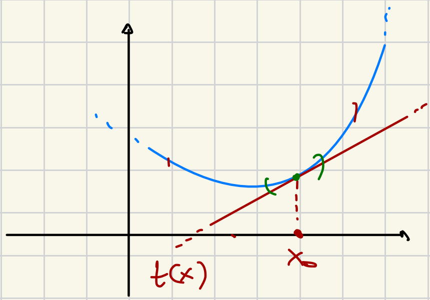
Concavità e convessità

Problema:



C'è un modo per capire se la funzione "che ha la bocca" rivolta verso l'alto o verso il basso?

Def: Sia $f: [a;b] \to \mathbb{R}$, f derivabile in $(a;b)$, $x_0 \in (a;b)$.
Diremo che f ha concavità rivolta verso l'alto in x_0 se $\exists$ intorno I completo di x_0 tale che $\forall x \in I$ la funzione valutata in x è più in alto della retta tangente $t(x)$ nel punto x_0. In formula se



$$\boxed{\forall x \in I \setminus \{x_0\} \qquad f(x) > t(x)}$$

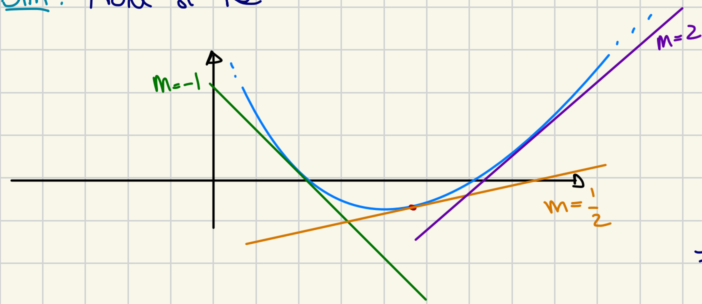
Diremo che f ha concavità rivolta verso il basso in x_0 se, con la notazione di sopra

$$\boxed{\forall x \in I \setminus \{x_0\} \qquad f(x) < t(x)}$$

Teorema: Sia $f: [a;b] \to \mathbb{R}$, f ammette derivata seconda in $(a;b)$. Sia $x_0 \in (a;b)$, allore

- Se $f''(x_0) > 0$ la concavità è rivolta verso l'alto
- Se $f''(x_0) < 0$ la concavità è rivolta verso il basso

Dim: Non si fa



Intuitivamente:
$f''(x) > 0$
$\Rightarrow f'(x)$ crescente
cioè la retta tangente aumenta la propria inclinaz. fornendo il profilo corretto

$\square$

Esempio / Esercizio: $f(x) = e^{2x} - 1$

(1) Dom f $= \mathbb{R}$

(2) Assi: ▷ $y=0$ $e^{2x}-1=0$ $(e^x-1)\overbrace{(e^x+1)}^{\text{non da sol}}=0$ ⇝ $x=0$

▷ $x=0$ ⇝ $y=0$ $A=(0;0)$

(3) Segno: $e^{2x}-1 \geq 0$ ⇝ $(e^x-1)(e^x+1)\geq 0$ $\boxed{x \geq 0}$

(4) Limiti:
$$\lim_{x\to+\infty}(e^{2x}-1)=+\infty$$
$$\lim_{x\to-\infty}(e^{2x}-1)=-1$$
⇝ Asintoto orizzontale

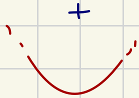
(5) $f'(x) = e^{2x}\cdot 2 = 2e^{2x} \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$+$

(6) Si fa la derivata II e si mette ≥ 0

$f''(x) = 4e^{2x} \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$+$



Studio der II.
Nei punti in cui $f'' \geq 0$ faccio ∪ altrimenti ∩