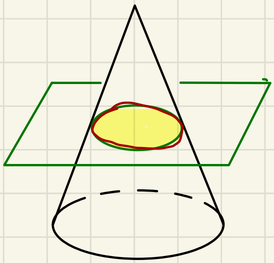
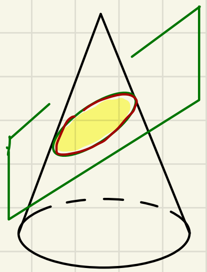
Prima Legge di Keplero. Le orbite dei satelliti sono **coniche**, ovvero sono intersezioni tra un piano e un cono. Questo risultato esce fuori dall'imposizione della Legge di Gravitazione e da conservazione del momento angolare (Purtroppo con gli strumenti che abbiamo, non possiamo fare tutto matematicamente)



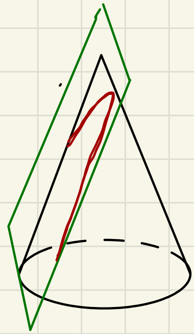
Cerchio: Piano parallelo alla base

$$x^2+y^2=1$$



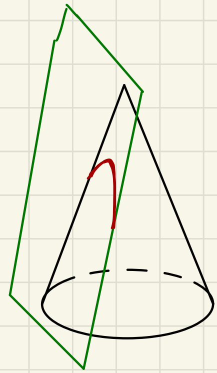
Ellisse: Piano inclinato da orizzontale fino a apertura cono
Orbite pianeti

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$



Parabola: Piano inclinato con la stessa inclinaz. del cono.

$$y=ax^2+bx+c$$

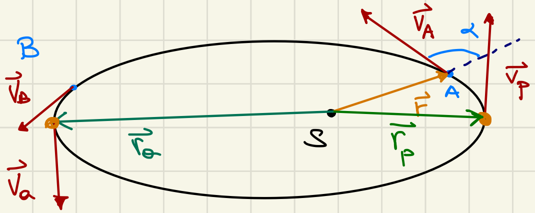


Iperbole: Piano inclinato da inclinazione cono a verticale

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$

Coniche: Luoghi di zeri di equazioni di II grado

Seconda Legge di Keplero: Deriva dalla conservazione del momento angolare.



$$\vec{L} = \vec{r} \wedge \vec{p}$$

$$L = rp \cdot \sin\alpha$$
$$= rmv \sin\alpha$$

Confronto le velocità al Perielio (Punto più vicino) e all'afelio (Punto più lontano)

Il momento angolare $\vec{L}$ si conserva. Dunque $L_a = L_p$

$$L_a = r_a \cdot \cancel{m}\, V_a = r_p \cdot \cancel{m} \cdot V_p = L_p$$

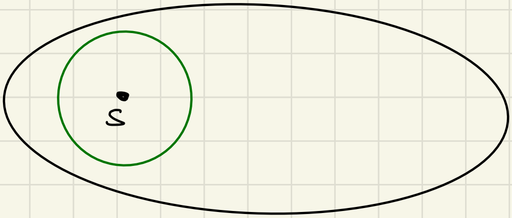
Ho omesso $\sin\alpha$ poiché in perielio e Afelio $\alpha = 90°$ e $\sin 90° = 1$

$$\boxed{V_p = \frac{r_a}{r_p} V_a}$$

Dato che $r_a > r_p \Rightarrow \frac{r_a}{r_p} > 1 \Rightarrow V_p > V_a$

$\Rightarrow$ In perielio sono più veloce.

Terza Legge di Keplero : $\frac{a^3}{T^2}$ è costante per tutte le orbite
Calcoliamo effettivamente quanto vale $\frac{a^3}{T^2} = k$



Prop: $k = \frac{a^3}{T^2} = \frac{GM}{4\pi^2}$

UTILE

Dim: Scelgo l'orbita circolare; in questo caso $a = r$ raggio del cerchio.

Nel moto circolare $\frac{2\pi r}{v} = T$ e inoltre questo è il moto di un satellite $\Rightarrow$ $v^2 = \frac{GM}{r}$ Ricavo T.

$$\frac{4\pi^2 r^2}{v^2} = T^2 \leadsto \frac{4\pi^2 r^2}{GM} r = T^2$$

La costante vale $$\frac{a^3}{T^2} = \frac{\cancel{r^3}}{4\pi^2 \cancel{r^3}} GM = \frac{GM}{4\pi^2}$$

Che è effettivamente una costante poiché non dipende da nulla se non da M massa del corpo intorno a cui ruotano i pianeti. $\square$