Settimana: 3

Materia: Matematica
Classe: 5A
Data: 29/09/25

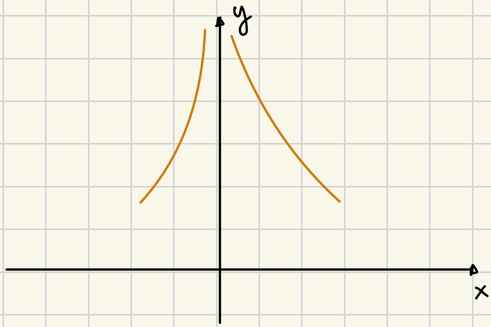
Argomenti: Correzione di esercizi simili a quesiti della maturità. Verifica di limiti. Teoremi di prodotto e quoziente dei limiti (forme $x \to x_0$). Molti esempi di calcolo di limiti

Pag 1485 Q1

$$f(x) = \left|\frac{2x+5}{k^2 x}\right| \quad , \quad k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

Verificare che $x=0$ è asintoto verticale

$$f_2(x) = \left|\frac{2x+5}{4x}\right|$$



$$\lim_{x \to 0} \left|\frac{2x+5}{4x}\right| = +\infty$$

Analisi: provando con $k=2$ mi sono convinto che il limite sopra è $+\infty$. Se cambio k, succede sempre la stessa cosa quindi sembra essere:

$$\lim_{x \to 0} \left|\frac{2x+5}{k^2 x}\right| = +\infty$$

Si deve VERIFICARE.

$$\forall M > 0 \ , \ \exists \delta > 0 \quad t.c. \quad |x - 0| < \delta \implies f(x) > M$$

Vittoria mi ha detto M, cerco δ

Parto dal fatto che $f(x) > M$, cioè $\left|\frac{2x+5}{k^2 x}\right| > M$

Ora la risolvo e quella sarà la condizione per x.

Per semplicità faccio solo $x>0$ ($\to x<0$ per caso), cioè provengo da destra

In questo caso, la condizione diventa:

$$\frac{2x+5}{k^2x} > M \rightsquigarrow \frac{2x-k^2xM+5}{k^2x} > 0 \rightsquigarrow \frac{x(2-k^2M)+5}{k^2x} > 0$$

$$\frac{x(k^2M-2)-5}{k^2x} < 0$$

<u>Den</u>: sempre positivo

Guardo solo il numeratore: $x(k^2M-2)-5 < 0$

$$\Rightarrow x < \frac{5}{k^2M-2}$$

Suppongo che M molto grande e $k^2M-2 > 0$

$\rightsquigarrow$ Basta quindi scegliere $\delta \in \left(0, \frac{5}{k^2M-2}\right)$

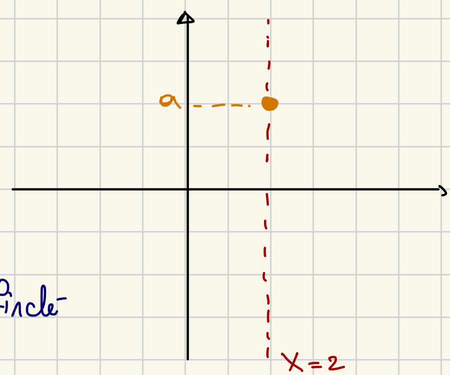
<u>Q4</u>: Verifico $\lim_{x\to 2} 3(x^2-4) = 0$ e considero

$$f(x) = \begin{cases} 3(x^2-4)\cdot \sin\frac{1}{x-2} & x \neq 2 \\ a & x = 2 \end{cases}$$

per quali a è continua

Per verificare che la funzione è continua deve valere che

$$\underbrace{\lim_{x\to 2} f(x)}_{\text{vicino a 2}} = \underbrace{f(2)}_{\text{su 2}}$$



Sostituendo ho da trovare a affinché

$$\lim_{x\to 2}\left[3(x^2-4)\,\sin\left(\frac{1}{x-2}\right)\right] = a$$

Imp: Noto che $\sin\left(\frac{1}{x-2}\right)$ è Limitato! Quindi nel conteggio del limite si comporta bene (Moltiplicato per 0, fa 0)

Formalmente
$$-1 \leq \sin\frac{1}{x-2} \leq 1 \quad \Big\downarrow \cdot 3(x^2-4)$$

$$3(x^2-4)(-1) \leq 3(x^2-4)\sin\frac{1}{x-2} \leq 3(x^2-4) \quad \text{Lim}$$

$$\underbrace{\lim_{x\to 2}\left[-3(x^2-4)\right]}_{=0 \text{ per pto } 1} \leq \lim_{x\to 2} 3(x^2-4)\sin\frac{1}{x-2} \leq \underbrace{\lim_{x\to 2} 3(x^2-4)}_{0 \text{ '' per pto } 1}$$

⇝ Per teo carabinieri $\quad 0 \leq \underbrace{\lim_{x\to 2} 3(x^2-4)\sin\frac{1}{x-2}}_{0} \leq 0$

⇝ Lo rimetto sopra e scopro che $\boxed{a=0}$

Teoremi di calcolo dei limiti

Prodotto Siano $f, g : D \to \mathbb{R}$, x_0 di acc. per D e supponiamo

(1) $\lim_{x\to x_0} f(x) = \ell \qquad \lim_{x\to x_0} g(x) = m \qquad \ell, m$ finiti

$$\lim_{x\to x_0}\left[f(x)\cdot g(x)\right] = \left[\lim_{x\to x_0} f(x)\right]\cdot\left[\lim_{x\to x_0} g(x)\right] = \ell m$$

(2) Se $\lim_{x\to x_0} f(x) = +\infty$, $\lim_{x\to x_0} g(x) = 0$ Non si può dire nulla a priori

(3) Se $\lim_{x\to x_0} f(x) = 0$ e $g(x)$ è Limitata in un intorno di x_0

allore $\lim_{x\to x_0} f(x)\cdot g(x) = 0$

Dim 3: Analogo all'esercizio sopre. Fare i carabinieri con l'ipotesi de

$$m \le g(x) \le M \quad] \Leftrightarrow g \text{ limitate}$$

$\cdot f(x)$

$$f(x)\cdot m \le f(x)\, g(x) \le f(x)\cdot M$$

Passo al lim

$$\lim_{x\to x_0} (f(x)\cdot m) \le \lim_{x\to x_0} f(x)\, g(x) \le \lim_{x\to x_0} (f(x)\cdot M)$$

$$0 \le \lim_{x\to x_0} f(x)\, g(x) \le 0$$

Per i Carabinieri ho concluso

$\square$

Oss: So che $\lim_{x\to x_0} f(x) = \ell$ Quanto fa $\lim_{x\to x_0} [f(x)]^n = \ell^n$

Quoziente: Siano $\lim_{x\to x_0} f(x) = \ell$, $\lim_{x\to x_0} g(x) = m$, $m \neq 0$

(1) $$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x\to x_0} f(x)}{\lim_{x\to x_0} g(x)} = \frac{\ell}{m}$$

(2) Se $\ell, m = 0$ nelle notazioni sopre, purtroppo non si può dire niente. Stesso cose se ho $\frac{\infty}{\infty}$

Esempio: $$\lim_{x\to +\infty} \frac{3x^3+2x^2+1}{5x^2} =$$ Manipolazione interne per giungere a delle forme che posso trattare con le regole sopre

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{x^3\left(3+\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}{x^2\cdot 5} = \lim_{x\to+\infty} \underbrace{x}_{\to +\infty}\cdot \underbrace{\frac{3+\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}}{5}}_{\to \frac{3}{5}} = \infty$$

Esempio: $$\lim_{x\to+\infty} \frac{37x^{21}+12x^3+7}{12x^{21}+74x^{15}+1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\cancel{x^{21}}\overbrace{\left(37+\frac{12}{x^{18}}+\frac{7}{x^{21}}\right)}^{\to 37}}{\cancel{x^{21}}\underbrace{\left(12+\frac{74}{x^6}+\frac{1}{x^{21}}\right)}_{\to 12}} = \frac{37}{12}$$

Esempio: $$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(2x)}{x}(x+1) = \lim_{x\to 0} \underbrace{\boxed{\frac{\sin(2x)}{2x}}}_{\to 1}\cdot \underbrace{2(x+1)}_{\to 2} = 2$$

Esempio: $$\lim_{x\to 3} \frac{\sin(2(x-3))}{x-3}$$

Sempre nello stesso spirito voglio manipolare e arrivare a $\frac{\sin x}{x}$

$x-3=v \rightsquigarrow$ $x\to 3$, $v\to 0$

$x = v+3$

Sostituisco tutto nel limite

$$\lim_{v\to 0}\frac{\sin(2v)}{v}$$

$2v=t$ $\quad v=\frac{t}{2}$

$v\to 0$ $\quad t\to 0$

$$\lim_{t\to 0}\frac{\sin(t)}{\frac{t}{2}} = \lim_{t\to 0}\underbrace{\frac{\sin(t)}{t}}_{\to 1}\cdot 2 = 2$$

Esempio: $$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sin(x)}{x} = 0$$ Sopra è limitata

Esempio: $$\lim_{x\to\infty}\left(x-\sqrt{x^2+1}\right) =$$ Penso: La radice e il $-$ non mi piacciono. Provo a fare cose tipo razionalizzazione

$$\lim_{x\to+\infty} (x-\sqrt{x^2+1}) \cdot \frac{x+\sqrt{x^2+1}}{x+\sqrt{x^2+1}} =$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2-(x^2+1)}{x+\sqrt{x^2+1}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{-1}{x+\sqrt{x^2+1}} = 0$$

$0 \cdot \infty$

Esempio: $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-} (1-\sin x)\cdot \operatorname{tg} x =$

Non mi piace! c'è -

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-} (1-\sin x) \frac{\sin x}{\cos x} \cdot \frac{(1+\sin x)}{(1+\sin x)} =$$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-} \frac{(1-\sin^2 x)\sin x}{\cos x\,(1+\sin x)} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-} \frac{\overbrace{\cos^{\cancel{2}} x}^{\to 0} \cdot \overbrace{\sin x}^{\to 1}}{\cancel{\cos x}\,\underbrace{(1+\sin x)}_{\to 2}} = 0$$

Pag 1526 n.151

$$\lim_{x\to-\infty} \log_{\frac{1}{2}} \Big(\underbrace{\tfrac{1}{2}x^2-x}_{\to+\infty}\Big) = -\infty$$

n.155: $\lim_{x\to0^+} \left(\frac{2}{\sin x} - \frac{1}{\operatorname{tg} x}\right) = \lim_{x\to0^+} \left(\frac{2}{\sin x} - \frac{\cos x}{\sin x}\right)$

$$= \lim_{x\to0^+} \left(\frac{2-\cos x}{\sin x}\right) = +\infty$$

n.176 $\lim_{x\to+\infty} \frac{(4x^3+1)^2}{-2x^6+3x^2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{16x^6+8x^3+1}{-2x^6+3x^2} =$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{\cancel{x^6}\overbrace{\left(16+\frac{8}{x^3}+\frac{1}{x^6}\right)}^{\to 16}}{\cancel{x^6}\underbrace{\left(-2+\frac{3}{x^4}\right)}_{\to -2}} = -8$$

n. 180: $\lim_{x\to+\infty} \frac{e^{2x}+e^x-1}{e^x+4} = \lim_{t\to+\infty} \frac{t^2+t-1}{t+4} =$ $\quad e^x = t \quad x\to+\infty,\ t\to+\infty$

$= \lim_{t\to+\infty} \frac{t^{\cancel{2}}\overbrace{\left(1+\frac{1}{t}-1\right)}^{1}}{\cancel{t}\underbrace{\left(1+\frac{4}{t}\right)}_{\to 1}} = \infty$

n. 182: $\lim_{x\to-\infty} \left(\frac{x^2-2x}{4x^2+1}\right)^x = \lim_{x\to-\infty} \left[\frac{\cancel{x^2}\overbrace{\left(1-\frac{2}{x}\right)}^{1}}{\cancel{x^2}\underbrace{\left(4+\frac{1}{x^2}\right)}_{\to 4}}\right]^x \boxed{=} \infty$

Stiamo usando il teorema che dice che sotto opportune Hipotesi, vale che

$$\lim_{x\to x_0} [f(x)]^{g(x)} = \left[\lim_{x\to x_0} f(x)\right]^{\left(\lim_{x\to x_0} g(x)\right)}$$

Non devono venire cose tipo: 0^0, ∞^0, 1^∞

n. 268: $\lim_{x\to0^+} (2x)^{\frac{2}{\ln(2x)}} = \lim_{x\to0^+} e^{\frac{2}{\cancel{\ln(2x)}}\cdot\cancel{\ln(2x)}} = e^2$

Artificio del Bernoulli

$[f(x)]^{g(x)} = e^{\ln[f(x)]^{g(x)}} =$

$= e^{g(x)\cdot\ln(f(x))}$

n. 252: F.I. ∞^0

$\lim_{x\to+\infty} x^{\frac{1}{\ln^2 x^2}} = \lim_{x\to+\infty} e^{\frac{1}{\ln^2 x^2}\cdot\ln(x)}$

$\ln^2 x^2 = \ln(x^2)\ln(x^2) = 2\ln(x)\cdot 2\ln(x)$
$= 4\ln^2(x)$

$= \lim_{x\to+\infty} e^{\frac{1}{4\ln^{\cancel{2}}(x)}\cdot\cancel{\ln(x)}} = \lim_{x\to+\infty} e^{\frac{1}{4\ln(x)}} = 1$

n. 210 $\lim_{x\to+\infty} \sqrt[3]{x^3+x^2} - \sqrt[3]{x^3-x^2} =$ $\left\{ a^3-b^3 = (a-b)(a^2+ab+b^2) \right.$

$\lim_{x\to+\infty} \left(\sqrt[3]{x^3+x^2} - \sqrt[3]{x^3-x^2}\right) \cdot \frac{\left(\sqrt[3]{x^3+x^2}\right)^2 + \sqrt[3]{x^3+x^2}\sqrt[3]{x^3-x^2} + \left(\sqrt[3]{x^3-x^2}\right)^2}{\left(\sqrt[3]{x^3+x^2}\right)^2 + \sqrt[3]{x^3+x^2}\sqrt[3]{x^3-x^2} + \left(\sqrt[3]{x^3-x^2}\right)^2}$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\cancel{x^3}+x^2-\cancel{x^3}+x^2}{\left(\sqrt[3]{x^3+x^2}\right)^2+\sqrt[3]{x^3+x^2}\,\sqrt[3]{x^3-x^2}+\left(\sqrt[3]{x^3-x^2}\right)^2} =$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{2x^2}{\left[\sqrt[3]{x^3\left(1+\frac{1}{x}\right)}\right]^2+\sqrt[3]{x^3\left(1+\frac{1}{x}\right)}\,\sqrt[3]{x^3\left(1-\frac{1}{x}\right)}+\left[\sqrt[3]{x^3\left(1-\frac{1}{x}\right)}\right]^2}$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{2\cancel{x^2}}{\cancel{x^2}\left[\underbrace{\left(\sqrt[3]{1+\frac{1}{x}}\right)^2}_{\to 1}+\underbrace{\sqrt[3]{1+\frac{1}{x}}\,\sqrt[3]{1-\frac{1}{x}}}_{\to 1}+\underbrace{\left(\sqrt[3]{1-\frac{1}{x}}\right)^2}_{\to 1}\right]} = \frac{2}{3}$$

Remind: Limite notevole: $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

Def / Lim notevole: Definiamo il numero di Nepero e come

$$\lim_{x\to+\infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$$

Es / Limite notevole:

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{(1-\cos x)(1+\cos x)}{x^2(1+\cos x)} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin^2 x}{x^2(1+\cos x)}$$

$$= \lim_{x\to 0} \underbrace{\frac{\sin x}{x}}_{\to 1} \cdot \underbrace{\frac{\sin x}{x}}_{\to 1} \cdot \underbrace{\frac{1}{1+\cos x}}_{\to 1/2} = \frac{1}{2}$$

$$\boxed{\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}}$$

Es / Limite notevole:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{x}\cdot \ln(1+x) = \lim_{x\to 0} \ln(1+x)^{\frac{1}{x}}$$

$t = \frac{1}{x}$ $\quad x \to 0$

$x = \frac{1}{t}$ $\quad t \to +\infty$

$$= \lim_{t\to +\infty} \ln \underbrace{\overbrace{\left[1+\frac{1}{t}\right]^t}}_{\downarrow\, e} = 1$$

$$\boxed{\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1}$$

Es / Lim notevole:

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = \lim_{y\to 0} \frac{y}{\ln(y+1)} = 1$$

$x \to 0 \qquad x = \ln(y+1)$

$y \to 0 \qquad e^x - 1 = y$

$$\boxed{\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1}$$