

Settimana: 9

Materia: Matematica

Classe: 5C

Data: 10/11/25

Derivate

Def. Dato $f: (a,b) \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, sia $x_0 \in (a,b)$ e sia

$A = (x_0, f(x_0))$ Consideriamo

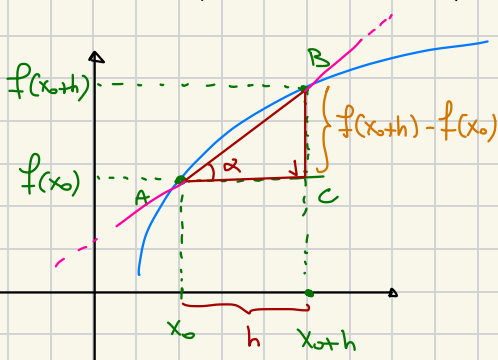
poi il punto

$B = (x_0 + h; f(x_0 + h))$.

Il RAPPORTO INCREMENTALE

in x_0 (di ampiezza h) è

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{(x_0 + h) - x_0} = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$



In effetti il rapporto incrementale è $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$

Oss. $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \frac{\cancel{AB} \cdot \sin \alpha}{\cancel{AB} \cdot \cos \alpha} = \operatorname{tg} \alpha$

Quindi il rapp. incrementale è la tg dell'angolo che si forma.

Discorso: Voglio far collassare il punto B verso il punto A in modo che la retta secante AB diventi al limite la tangente alla curva.

Def. Sia $f: (a,b) \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ funzione $x_0 \in (a,b)$ diremo che f è derivabile in x_0 se esiste finito il limite

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

} faccio collassare B su A

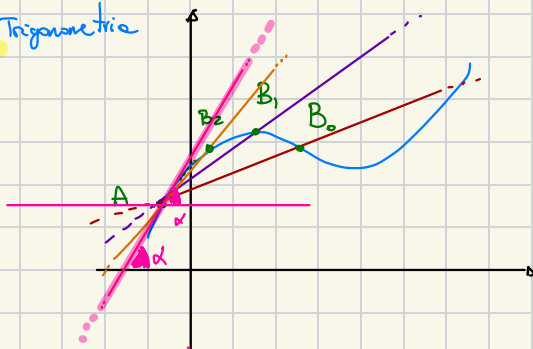
Se tale limite esiste finito lo indicheremo con

$$f'(x_0) \quad \left| \quad Df(x_0) \quad \left| \quad \frac{df}{dx}(x_0) \quad \left| \quad \frac{\partial f}{\partial x}(x_0) \right. \right.$$

f primo in x_0 D di f in x_0 $\frac{df}{dx}$ di f su dx in x_0 $\frac{\partial f}{\partial x}$ di f su dx in x_0

Oss: La derivata è il valore della tangente dell'angolo α dove α è l'angolo che la tangente alla curva forma con il verso pos. dell'asse x .

Trigonometria



Dovreste sapere che $\tan \alpha$ non è altro che m coeff. angolare della retta

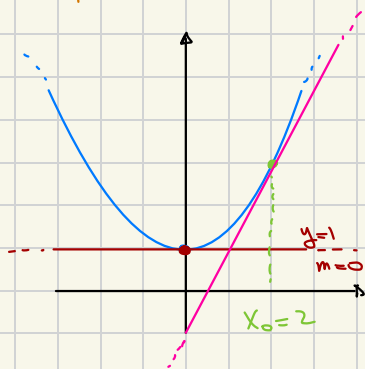
Dunque la derivata di una funzione in un punto non è altro che il coeff. angolare delle rette tangente al grafico in quel punto



Esempio:

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$f(x) = x^2 + 1$$



$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} \quad x_0 = 0$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} =$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^2 + 1 - 1}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} h = 0$$

Calcola anche, se esiste, $f'(2)$ come esercizio.

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(4+h^2+4h+1) - (4+1)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} (h+4) = 4 \end{aligned}$$

Coeff. angolare della retta tg al grafico in $x_0 = 2$ è 4.

Teorema (Esercizio): Sia $f: (a,b) \rightarrow \mathbb{R}$ e sia $x_0 \in (a,b)$.
 Supponiamo che f sia derivabile in x_0 con derivata $f'(x_0)$.
 Allora la retta tangente al grafico di f nel punto x_0 è:

$$[y - f(x_0)] = f'(x_0) [x - x_0]$$

Dim.: In passato avete visto che se m è il coeff. angolare di una retta e la retta passa per $A = (x_A, y_A)$ tale retta ha equazione

$$(y - y_A) = m(x - x_A)$$

Nel nostro caso la retta ha $m = f'(x_0)$ per def e la retta passa per $A = (x_0, f(x_0))$ perché A sta nel grafico. Usando la formula sopra si ha la tesi.

□

Back to esempio: $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ $f(x) = x^2 + 1$

(1) Retta tg al grafico in $x_0 = 0$
 Per la formula

$$[y - f(x_0)] = f'(x_0) (x - x_0)$$

$$[y - \overset{=1}{f(0)}] = \overset{=0}{f'(0)} (x - 0)$$

$$y - 1 = 0 \Rightarrow \boxed{y = 1}$$

(2) Retta tg al grafico in $x_0 = 2$
 Per la formula

$$[y - f(2)] = f'(2) \cdot (x - 2)$$

$$y - 5 = 4(x - 2)$$

$$\boxed{y = 4x - 3}$$

Domanda: C'è un modo di fare la derivata di tutte le funzioni insieme?

Def: Sia $f: (a,b) \rightarrow \mathbb{R}$ derivabile in ogni pto $x_0 \in (a,b)$. Definiamo la funzione derivata

$$f': (a,b) \rightarrow \mathbb{R}$$

Tale che $f'(x)$ è la derivata della funzione nel punto x .

Esempio: $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad f(x) = x^2 + 1$

Per calcolare la funzione derivata, faccio il limite del rapporto incrementale in un pto generico x .

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{[(x+h)^2 + 1] - (x^2 + 1)}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{[\cancel{x^2} + h^2 + 2xh + \cancel{1}] - (\cancel{x^2} + \cancel{1})}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (h + 2x) = 2x \end{aligned}$$

Dunque la funzione derivata è $f'(x) = 2x$ (si fanno tutte le deriv. insieme)

Derivate delle funzioni elementari (mettoncimi per costruire)

(1) $f(x) = k$ costante	$f'(x) = 0$
(2) $f(x) = x^n \quad n \geq 1, n \in \mathbb{N}$	$f'(x) = n \cdot x^{n-1}$
(3) $f(x) = \sin x$	$f'(x) = \cos x$
(4) $f(x) = \cos x$	$f'(x) = -\sin x$
(5) $f(x) = e^x$	$f'(x) = e^x$
(6) $f(x) = a^x \quad a > 0, a \neq 1$	$f'(x) = a^x \ln a$
(7) $f(x) = \ln x$	$f'(x) = 1/x$
(8) $f(x) = \log_a x \quad a > 0, a \neq 1$	$f'(x) = \frac{1}{x} \cdot \log_a e$
(2bis) $f(x) = x^\alpha, \alpha \neq 0, \alpha \in \mathbb{R}$	$f'(x) = \alpha \cdot x^{\alpha-1}$

Pag 1623 n 62

$f(x) = \frac{x+1}{x} \rightarrow$ calcolo con la def. $f'(x)$

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{h+x+1}{h+x} - \frac{x+1}{x}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cancel{h}x + \cancel{h} + \cancel{1} - \cancel{h}x - h - \cancel{x} - \cancel{1}}{hx(h+x)} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} -\frac{1}{x(h+x)} = -\frac{1}{x^2} \end{aligned}$$

n 40

$$f(x) = x \cos x$$

$$\cos x \cosh - \sin x \sinh$$

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h) \cos(x+h) - x \cos x}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x \cos x \cosh - x \sin x \sinh + h \cos x \cosh - h \sin x \sinh - x \cos x}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x \cos x (\cosh - 1)}{h} - x \sin x \frac{\sinh}{h} + \cancel{\frac{h}{h}} \cos x \cosh - \cancel{\frac{h}{h}} \sin x \sinh \\ &= -x \sin x + \cos x \end{aligned}$$

Regole di Derivazione (Dim successive)

$$(1) D(f \pm g) = Df \pm Dg$$

$$(2) D(f \cdot g) = (Df)g + f \cdot (Dg)$$

$$(2bis) D(k \cdot f) = k \cdot Df$$

k costante

$$(3) D\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{(Df) \cdot g - f \cdot (Dg)}{g^2}$$

$$(4) [D(f \circ g)](x) = Df(g(x)) \cdot Dg(x)$$

Hard

Esercizi:

$$f(x) = x \cdot \cos x$$

$$Df(x) = [D(x)] \cdot \cos x + x D(\cos x)$$

$$= 1 \cdot \cos x + x(-\sin x)$$

$$= \cos x - x \sin x$$

Pag 1629 159

$$f(x) = x^5 + 6x$$

$$f'(x) = 5x^4 + 6$$

160

$$f(x) = -3x^2 + 3$$

$$f'(x) = (-3) \cdot 2x = -6x$$

164

$$f(x) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2$$

$$f'(x) = x^2 + x$$

182:

$$f(x) = \sqrt[4]{x^3} + 3x - 2 = x^{\frac{3}{4}} + 3x - 2$$

$$f'(x) = \frac{3}{4} x^{\frac{3}{4}-1} + 3 = \frac{3}{4} x^{-\frac{1}{4}} + 3 = \frac{3}{4\sqrt[4]{x}} + 3$$

199:

$$f(x) = (\ln x - 3) \cdot \ln x$$

$$f'(x) = [D(\ln x - 3)] \cdot \ln x + (\ln x - 3) \cdot D(\ln x)$$

$$= \frac{1}{x} \cdot \ln x + (\ln x - 3) \frac{1}{x} = \frac{2\ln x}{x} - \frac{3}{x} = \frac{2\ln x - 3}{x}$$

207

$$f(x) = 2\sqrt{x^2 \ln x} - \sqrt{x^2}$$

$$f'(x) = 2\sqrt{x^2 \ln x} \left[2x \cdot \ln x + x^2 \cdot \frac{1}{x} \right] - \sqrt{x^2} \cdot 2x$$

$$= 4\sqrt{x} \ln x + 2\sqrt{x} - 2\sqrt{x} = 4\sqrt{x} \ln x$$

Pag 1632 n 216

$$f(x) = x \cdot e^x \cdot \ln x$$

$$(fg)' = f'g + fg'$$

$$D(fg) = Df \cdot g + f \cdot Dg$$

$$\begin{aligned}
 f'(x) &= D(x \cdot e^x) \cdot \ln x + x \cdot e^x D(\ln x) \\
 &= [1 \cdot e^x + x \cdot e^x] \cdot \ln x + \cancel{x} e^x \cdot \frac{1}{\cancel{x}} \\
 &= e^x (\ln x + x \ln x + 1)
 \end{aligned}$$

218: $f(x) = x \sin x \cos x$

$$\begin{aligned}
 f'(x) &= D(x \sin x) \cdot \cos x + x \sin x D(\cos x) \\
 &= [1 \cdot \sin x + x \cos x] \cos x + x \sin x \cdot (-\sin x) \\
 &= \sin x \cos x + x \cos^2 x - x \sin^2 x
 \end{aligned}$$

245 $h(x) = e^{x^2-3x}$

$$h'(x) = e^{x^2-3x} \cdot (2x-3)$$

$$D(f(g(x))) = Df(g(x)) \cdot Dg(x)$$

$$f(x) = e^x \quad g(x) = x^2 - 3x$$

$$f(g(x)) = f(x^2 - 3x) = e^{x^2 - 3x}$$

$$f'(x) = e^x \quad g'(x) = 2x - 3$$

249 $f(x) = \ln(x^2 - 1) + 5$

$$f'(x) = \frac{1}{x^2 - 1} \cdot 2x$$

"Derivate delle
più esterne, valutate
in quella più interna"

"Derivate di
quelle interne"

Tip: Per riconoscere una f_z composta
si vede una funzione elementare
con argomento che è una f_z

284: $f(x) = 5 \cdot \sin(x^4)$

$$f'(x) = 5 \cdot \cos(x^4) \cdot 4x^3 = 20x^3 \cos(x^4)$$

292: $f(x) = \sqrt{2x} + \sqrt{e^{2x}+1} = (2x)^{\frac{1}{2}} + (e^{2x}+1)^{\frac{1}{2}} \quad (e^{2x})' + 1'$

$f'(x) = \frac{1}{2} (2x)^{\frac{1}{2}-1} \cdot 2 \xrightarrow{\text{derivate di interno}} + \frac{1}{2} (e^{2x}+1)^{\frac{1}{2}-1} \cdot [e^{2x}]'$

$$= (2x)^{-\frac{1}{2}} + \frac{1}{2} (e^{2x}+1)^{-\frac{1}{2}} [e^{2x} \cdot 2 + 0]$$

$$= (2x)^{-\frac{1}{2}} + e^{2x} (e^{2x}+1)^{-\frac{1}{2}}$$

293: $f(x) = \ln(2\ln x)$

$$f'(x) = \frac{1}{2\ln x} \cdot \frac{2}{x} = \frac{1}{x \ln x}$$

①

Macchi

⑪

Matilde

⑨

Sara

⑫

Sofia

②