|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **；；Problem Chosen** AB | **2024 MCM/ICM Summary Sheet** | **Team Number** 11 |

# summary

目录

[summary 1](#_Toc157262817)

[1.1 问题背景与问题重述 3](#_Toc157262818)

[问题一的模型建立与求解 4](#_Toc157262819)

[1.2 数据分析 4](#_Toc157262820)

[1.3 生产基地运输物资的最短路径求解 5](#_Toc157262821)

## 问题背景与问题重述

问题背景：

战争时期，除了军队，物资也是极其重要的一环。物资是战争胜利的保障品，是军队有力抗争的底蕴，就此物资的生产以及及时供应显得十分紧迫。则生产基地的合理运作以及物资的合理运送发挥着重要的作用，生产基地负责每日生产军用物资以及及时配送，在战时情况下，既要保障物资的高效生产，又需将成本的高效利用，故而引发人们对战时军用物资运输调度问题的研究与思考。

问题重述：

问题一：在保证生产基地的生产量在平均值的上下20%范围内，合理分配生产基地的物资生产计划并制定配送方案最大限度节省成本。

问题二：在问题一的基础上为每个生产基地增加了存储的能力，物资可每隔几天向军队用户配送，要求合理指定生产计划和配送方案最大限度上节省成本。

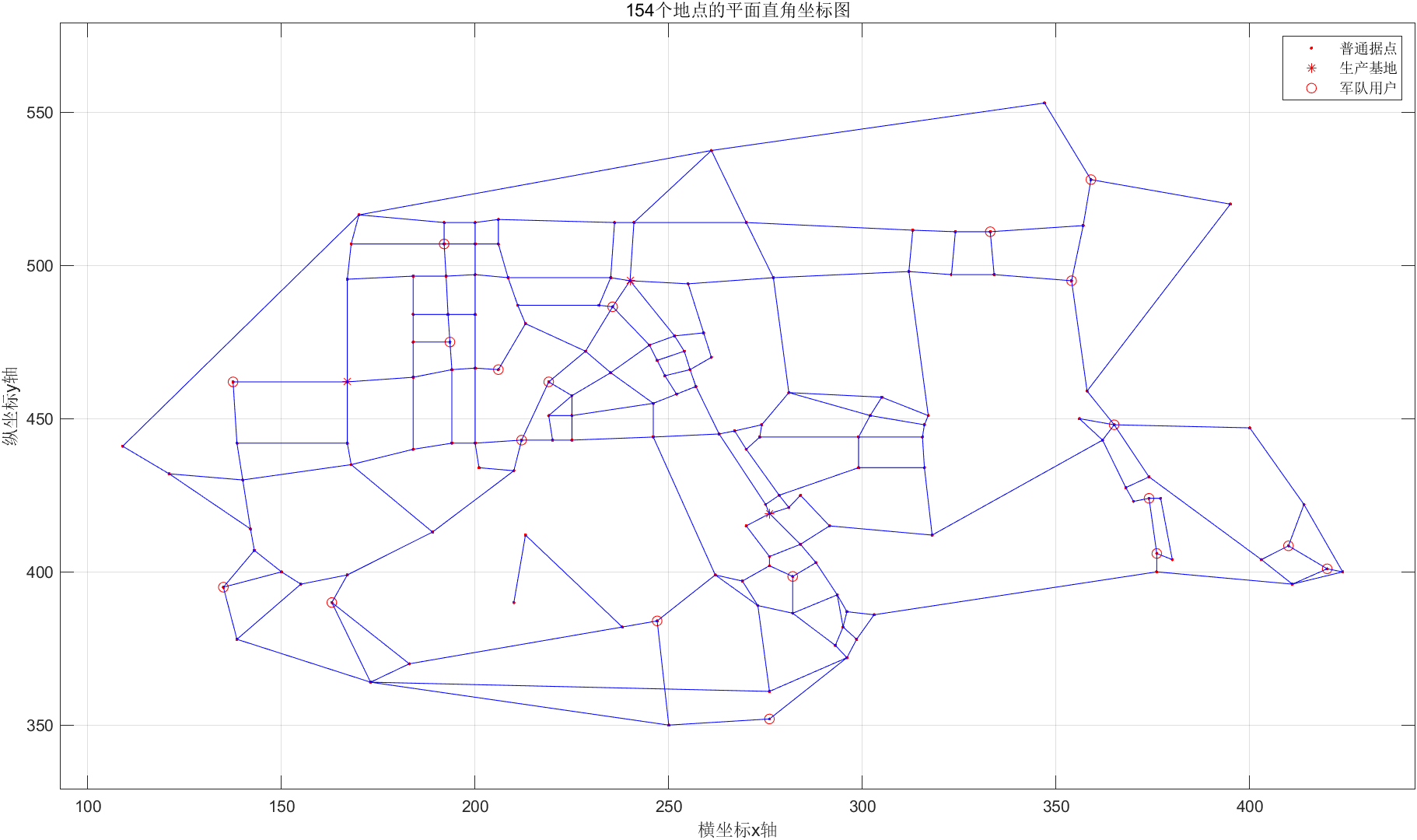
问题三：在每日进行一次配送和生产任务尽量均衡的基础上，增设一个额外的生产基地，使总运输费用最小，并给出生产基地的选址和每日的生产和配送方案。

问题假设：

1. 所有的军队每日需要消耗的物资数量是固定不变的
2. 所有车辆都能在当日内将物资从生产基地运送至军队
3. 道路的流量足以让所需数量的运输车辆通过。

问题一的模型建立与求解

## 数据分析

首先由题目提供的附件1表1中给出的154个地点的平面直角坐标以及附件2中20个部队的编号和据点以及起始和终止的据点坐标，又由附件1表2中给出的各地点之间的距离可得到相邻点位及其间路程的长度，利用MatLab绘制平面直角坐标图如图x所示。

图x: 地区据点分布平面直角坐标图

从分布图可以直观的看出军队据点，生产基地，以及普通据点分布的位置，并且容易得出部分各基地与各军队用户的距离远近。依据相近者的原则，可以将部分军队安排给相应生产基地。例如，图左下三个据点明显距离16号生产基地最近，在计算各军队用户距离各生产基地的距离进行分配时可以减少相应计算。

运输基地运输成本求解

其次由附件二中给出的所有军队各自的该物资的日消耗量数据及题意可知，军队的物资日消耗量可由式x计算

 公式x

式中:为当日总需求量，为第个军队当日的物资需求量.

而后得出各生产基地日生产该物资的平均值，则各生产基地的日产量的浮动区间可由公式x表示。

 公式x

并且依据军队日所需物资的总和，可以求解所需大车与小车各自的数量进而得到

由军队每日需要物资的总量，可设第个生产基地的日生产量为,由生产基地向军队运输物资的数量（单位:吨）为，同时第 个基地到军队 的距离（单位:千米）为，由 生产基地向军队，的运输费用（单位:元/千米）为， 表示部队 的日消耗量， 为是否小型车，为0-1变量则根据题中所给的运输任务，运输任务所需要资金可用式x表示：

 式x

任务的约束条件方程为方程组x

 方程x



最后依据上述，由于每日物资运输数量一定，因此每个货物运输基地的派车都具有唯一性，即采用所有的大型车运输物资，并用一辆小型车运送最后一次剩余的少于3吨的物资。因此，运输成本的大小与运输距离成正相关关系。运输的距离越短，成本越小，因此将成本最小问题转化为运输距离最短问题。针对各军队据点到生产基地的距离，求得生产基地运输物资的最短总距离，则可求得最小成本。

## 生产基地运输物资的最短路径求解

1. 建立Dijkstra模型求解最短路径

最短路经问题是计算各军队据点到生产基地之间的最短路径，目前主流的解法主要有Dijkstra算法和Floyd算法。由于本次题目所涉及的路径长度为总权重即各点位之间的边的权重之和，皆为正值，且节点数目较多，所以对此问题利用Dijkstra算法进行求解。

2.Dijkstra算法

将154个地点看做节点，既将各节点分别进行连线构成一个赋权无向路线图，将每个据点看做节点，其中每条边的权值为各顶点之间的距离，将赋权无向路线图用数学表达式以邻接矩阵A表示



则表示为节点到节点间的长度，若两节点为相邻点，则其值为；若两节点为不相邻点，则其值为；若，则其值为。

从图的源点出发到顶点的相对于集合的最短长度记作 .

那么Dijkstra算法可以表示为：





使用python networkx包将图x所示的地区平面图转换为带权邻接矩阵，该邻接矩阵的部分数据如表x所示

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 列  行 | AN | AO | AP | AQ | AR | AS | AT | AU | AV | AW |
| 36 | 0 | 14.35 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 37 | 14.64 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 38 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 39 | 11.72 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 40 | 0 | 11.17 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 41 | 11.17 | 0 | 51.68 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 42 | 0 | 51.68 | 0 | 3.22 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 43 | 0 | 0 | 3.22 | 0 | 4.14 | 0 | 0 | 0 | 0 | 15.19 |
| 44 | 0 | 0 | 0 | 4.14 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 45 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 27.73 | 0 | 0 | 0 |

表x:邻接矩阵的部分内容

将邻接矩阵输入到Dijkstra模型中，可分别得到第 个生产基地到第 个军队用户的最短路径，求得的最短路径如表x所示：

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| 起始点—结束点 | 最短路径长（km） | 货物运输量（kg） |
| 120-125 | 55.89 | 28733 |
| 120-106 | 31.59 | 38223 |
| 120-141 | 92.58 | 9258 |
| 120-85 | 126.35 | 15570 |
| 120-1 | 109.41 | 14744 |
| 120-130 | 36.82 | 32517 |
| 120-36 | 128.0 | 11503 |
| 120-34 | 77.52 | 11451 |
| 120-94 | 55.8 | 12773 |
| 120-11 | 66.8 | 16103 |
| 63-73 | 27.71 | 21733 |
| 63-150 | 147.18 | 8481 |
| 63-79 | 143.87 | 38759 |
| 63-42 | 112.14 | 9489 |
| 63-75 | 30.7 | 28295 |
| 16-31 | 106.2 | 23947 |
| 16-27 | 58.06 | 9265 |
| 16-24 | 73.66 | 31251 |
| 16-22 | 89.41 | 16375 |
| 16-145 | 66.19 | 39653 |

表x：各军队用户最短运输路径及物资运输量

根据军队在理想情况下从各个生产基地获取的物资数量可得到表x所示的三个生产基地的生产总量

|  |  |
| --- | --- |
| 基地编号 | 生产总量（t） |
| 120 | 190.875 |
| 63 | 106.757 |
| 16 | 120.941 |

表x:理想情况下每日各基地的生产总量

基地生产量负载均衡

根据题目中的要求，为保证各基地之间的生产平衡，应使各生产基地每日产量在平均值上下20%范围内，根据公式x可计算出上产量的区间位于111.4995-167.2492（单位

：吨） 之间，但通过表x可知，基地63的生产量低于平衡区间，基地120的生产量高于平衡区间。因此需要对两基地的生产量进行负载均衡。

生产量和运输距离归一化

通过对原始生产量和运输距离经过数据归一化处理后，各指标处于同一数量级，适合进行综合对比评价，此处我们使用MIN-MAX归一化方法，其数学原理如公式x所示：

 公式x

将基地编号120的生产量及运输数据输入得到归一化的数据如表x所示

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| 基地120 | | |
| 军队用户 | 生产量 | 运输距离 |
|  | 0.00 | 0.46 |
|  | 0.00 | 1.00 |
|  | 0.05 | 0.23 |
|  | 0.12 | 0.80 |
|  | 0.15 | 0.98 |
|  | 0.17 | 0.34 |
|  | 0.65 | 0.23 |
|  | 0.79 | 0.02 |
|  | 1.00 | 0.00 |

表x：基地120数据归一化结果

通过比较，我们认为生产量与运输距离相差超过0.50的军队需求属于“需求量少但距离远”和“需求量大但距离近”的情况，这两种情况对运输成本的影响较小，可将其脱离此生产基地挂靠到除本基地外距离最近的生产基地上。通过计算，得到需要脱离挂靠的军队用户如表x所示

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| 从120基地脱离的军队用户 | 物资需求量（t） | 距离最近的生产基地 | 距离（km） |
| 34 | 11.451 | 63 | 157.25 |
| 94 | 12.773 | 63 | 153.40 |
| 1 | 14.744 | 63 | 237.49 |

表x：生产基地重新分配情况

重新计算每个生产基地的日生产量如表x所示：

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| 生产基地编号 | 120 | 63 | 16 |
| 物资生产数量 | 151.907 | 145.725 | 120.491 |

表x：符合负载均衡的生产基地生产量

计算运输总成本

在第 个运输基地向第 个军队用户运输过程中，假设大型运输车需要使用 辆，小型运输车需要使用辆，运输距离为千米，运输物资质量为 千克，则向个 军队用户运输的总成本可用式x表示



同时大型运输车和小型运输车数量和运输物资质量之间有式x表示的关系



则总运输成本W可用式x表示



通过式x和式x联立可知单个军队用户的运输成本和大型运输车a的数量成正比关系，因此将物资全部使用大型运输车运输，最后剩余不足3t的物资使用小型运输车运输，最终得到第 个运输基地向第 个军队用户运输物资的运输车辆分配及总成本如表x所示

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| 生产基地 | 军队用户 | 运输路线 | 大型运输车 | 小型运输车 |
| 120 | 141 | ['141', '140', '126', '127', '124', '123', '122', '121', '120'] | 2 | 0 |
| 120 | 36 | ['36', '35', '40', '11', '108', '109', '114', '120'] | 2 | 1 |
| 120 | 85 | ['85', '77', '2', '83', '84', '96', '119', '120'] | 3 | 1 |
| 120 | 11 | ['11', '108', '109', '114', '120'] | 3 | 1 |
| 120 | 125 | ['125', '124', '123', '122', '121', '120'] | 6 | 0 |
| 120 | 130 | ['130', '121', '120'] | 6 | 1 |
| 120 | 106 | ['106', '115', '12', '120'] | 8 | 0 |
| 63 | 150 | ['150', '82', '81', '68', '69', '74', '73', '64', '7', '63'] | 2 | 0 |
| 63 | 42 | ['42', '43', '148', '44', '45', '5', '59', '60', '7', '63'] | 2 | 0 |
| 63 | 73 | ['73', '64', '7', '63'] | 4 | 1 |
| 63 | 75 | ['75', '65', '63'] | 6 | 0 |
| 63 | 79 | ['79', '75', '65', '63'] | 8 | 0 |
| 63 | 34 | ['34', '11', '50', '51', '52', '54', '6', '55', '56', '5', '59', '60', '7', '63'] | 2 | 1 |
| 63 | 94 | ['94', '95', '96', '97', '15', '98', '4', '55', '56', '5', '59', '60', '7', '63'] | 2 | 1 |
| 63 | 1 | ['1', '14', '132', '93', '94', '95', '96', '97', '15', '98', '4', '55', '56', '5', '59', '60', '7', '63'] | 3 | 0 |
| 16 | 27 | ['27', '28', '16'] | 2 | 0 |
| 16 | 22 | ['22', '25', '145', '26', '9', '28', '16'] | 3 | 1 |
| 16 | 31 | ['31', '30', '29', '28', '16'] | 5 | 0 |
| 16 | 24 | ['24', '25', '145', '26', '9', '28', '16'] | 6 | 1 |
| 16 | 145 | ['145', '26', '9', '28', '16'] | 8 | 0 |
| 总成本 | 388743.3225 |  |  |  |

表x:

问题二建立与求解

设第个生产基地的日生产量为，第个部队用户从第个生产基地在第天的运输数量为，为第个生产基地在第天的剩余产值，为第个生产基地向第个部队用户在第天运输物资的单位公里运输成本，为第个生产基地到第个部队用户的距离,则该问题可以表示为：



其中，表示第个部队用户在第天的需求，为存储费用为10元/吨。约束条件中表明第个生产基地在第一天要提前生产存放在仓库里面，即为第个生产基地在第一天的存量，表示在第一天时存储的物资

不超过5倍的日生产量。表示保证前天生产的物资均在前天送达，防止物资在仓库存放超过5天。

问题三的模型建立与求解

对于问题三，要建立一个新的生产基地，在满足生产任务尽量均衡的条件下，设计生产基地的日生产量与日配送方案，使总运输费用最小。

设置这个变量表示第个地点是否选为新的生产基地。为一个足够大的正数，在式中，它能够保证当时，也必须为0，即该点不进行生产和配送。



式x

孤立军队用户选取

要建立适合的生产基地，使每日的物资运输成本最小，因此需要选取孤立（即运输距离场长且物资运输量大）的基地，组成一个集合，在该集合内寻找一个据点作为新的运输基地使其到集合内各个军队用户的运输距离最短。

构建归一化张量

在第一问中我们通过对军队的物资需求量和距生产基地的距离进行了归一化操作，得到了归一化的物资需求量和距离生产基地的距离，便于对物资需求量和距生产基地的距离进行比较，设军队用户编号为，物资需求量为，距离最近的运输站距离为，因此我们构建 形如式x的归一化张量，便于选取孤立军队用户的选取。

 式x

得到的张量部分内容如表x所示

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| 军队用户所在地点 | 距离 | 物资质量 |
| 73 | 0.000 | 0.6356 |
| 75 | 0.008 | 0.9541 |
| 106 | 0.053 | 0.7711 |
| 130 | 0.215 | 0.1377 |
| 94 | 0.216 | 0.6497 |
| 125 | 0.235 | 0.0252 |
| 27 | 0.305 | 1.0000 |

表x：归一化矩阵部分内容

通过归一化张量，我们按照问题一中的方法选出的孤立军队集合如表x所示

|  |  |
| --- | --- |
| 军队用户所在地点 | 物资质量（kg） |
| 11 | 16103 |
| 22 | 16375 |
| 24 | 31251 |
| 27 | 9265 |
| 31 | 23947 |
| 34 | 11451 |
| 36 | 11503 |
| 42 | 9489 |

表x：孤立军队集合

退火算法寻找最佳生产基地位置

模拟退火算法简介

模拟退火算法（Simulated Annealing，SA）是一种基于物理学中固体退火过程的随机优化算法。它被用于在搜索空间中寻找某个问题的全局最优解或近似最优解，尤其在组合优化和约束优化问题中表现出色。

算法的名称来源于固体退火过程，其中物质在高温下随机运动，随着温度逐渐降低，最终达到低能态。在模拟退火算法中，类似的思想被应用于搜索问题的解空间。以下是算法的基本思想和步骤：

初始解的生成： 随机生成或通过某种启发式方法得到初始解。

定义能量函数： 定义问题的目标函数作为能量函数，用于评估解的质量。目标是最小化或最大化这个能量函数。

温度初始化： 初始化一个高温，表示系统的随机性较大。

迭代搜索： 在每个迭代中，根据当前解产生一个相邻解，然后通过比较能量函数的值来决定是否接受新解。接受较差解的概率随着温度的下降而逐渐降低。

降温过程： 随着迭代的进行，逐渐降低温度。降温过程可以是线性的、指数的或其他形式。

终止条件： 当达到预定的终止条件，如最大迭代次数或达到足够低的温度时，停止

算法。

在模拟退火算法中，接受较差解的概率是一个关键参数，由Metropolis准则等方法来确定。这个概率的引入使得算法能够跳出局部最小值，避免陷入局部最优解。

在退火的状态转移过程中，由前一个状态转移到后一个状态时，系统的能量由转换为，如果我们定义系统由转换为的接收概率可用式x表示

 式x

从式x中可知，如果退火能量减小，那么这种转移就被接受，即当前解偏离全局最优值的距离越近，如果能量增大了，说明当前解偏离全局最优值的距离更远了，此时算法并不会立即将解抛弃，而是进行概率操作：首先在区间 生成一个均匀分布的随机数，若，则这种转移接受，否则拒绝转移，进入下一步。这个过程往复循环。其中

以能量的变化量和进行决定概率的大小，所以这个值动态的.

构建新邻接矩阵

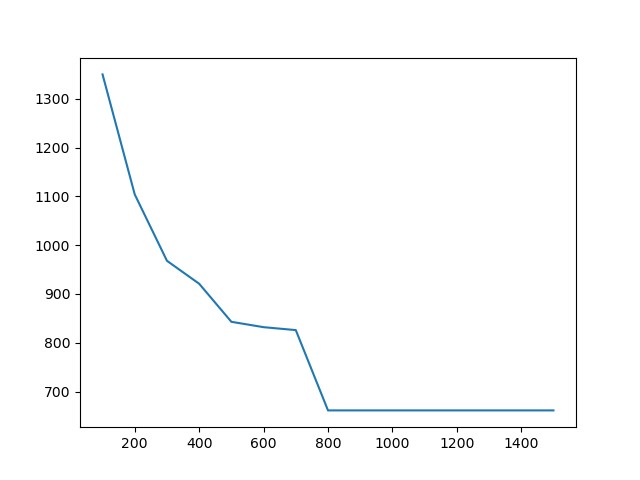
设新的生产基地的横坐标为，纵坐标为 ，则新的邻接矩阵可以如表x的形式进行表示：

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 列  行 | AN | AO | AP | AQ | AR | AS | | AT | | AU | | AV | | AW | |
| 36 | 0 | 14.35 | 0 | 0 | 0 | | 0 | | 0 | | 0 | | 0 | | 0 | |
| 37 | 14.64 | 0 | 0 | 0 | 0 | | 0 | | 0 | | 0 | | 0 | | 0 | |
| 38 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | | 0 | | 0 | | 0 | | 0 | | 0 | |
| 39 | 11.72 | 0 | 0 | 0 | 0 | | 0 | | 0 | | 0 | | 0 | | 0 | |
| 40 | 0 | 11.17 | 0 | 0 | 0 | | 0 | | 0 | | 0 | | 0 | | 0 | |
| 41 | 11.17 | 0 | 51.68 | 0 | 0 | | 0 | | 0 | | 0 | | 0 | | 0 | |
| 42 | 0 | 51.68 | 0 | 3.22+ | 0 | | 0 | | 0 | | 0 | | 0 | | 0 | |
| 43 | 0 | 0 | 3.22 | 0 | 4.14+ | | 0 | | 0 | | 0 | | 0 | | 15.19 | |
| 44 | 0 | 0 | 0 | 4.14 | 0 | | 0 | | 0 | | 0 | | 0 | | 0 | |
| 45 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | | 0 | | 27.73 | | 0 | | 0 | | 0 | |

表x：增加生产基地后的邻接矩阵

寻找最优生产基地位置

将孤立军队的坐标和约束条件带入退火算法中，迭代1500轮，得到的运输距离随迭代轮数变化的曲线如图x所示



图x：运输距离随迭代轮数变化曲线

得到最优的建站结果为编号为32的据点，其坐标为(365,450)

则可根据总利润公式求得总利润及配送路线如表x所示：

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| 生产基地 | 军队用户 | 运输路线 | 大型运输车 | 小型运输车 |
|  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |

模型评价：

1.在本篇文章中，我

灵敏度分析：