南京林业大学试卷 A 卷

课程 线性代数(B) 2023~2024 学年第 1 学期

题号	一	二	三	总分
得分				

姓名

班号

学号

一、单项选择题（每题 3 分，共 30 分）

1．设 D= $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 3$，则 $\begin{vmatrix} 5a_1 & 2a_1 - 3b_1 & 2c_1 \\ 5a_2 & 2a_2 - 3b_2 & 2c_2 \\ 5a_3 & 2a_3 - 3b_3 & 2c_3 \end{vmatrix} =$ （ ***D*** ）．

（A）45 （B）-45 （C）90 （D）-90

2．设 x 的多项式 $f(x) = D = \begin{vmatrix} 2x & 3 & 1 & 2 \\ x & x & 0 & 1 \\ 2 & 1 & x & 4 \\ x & 2 & 1 & 4x \end{vmatrix}$，则 $f(x)$ 中 x^3 项的系数为（ B ）．

（A）7 （B）-14 （C）15 （D）20

3. 设 A, B **为 $n(n \geq 2)$** 方阵，则必有（ C ）．

(A) $|A+B| = |A| + |B|$ (B) $||A|B| = ||B|A|$

(C) $|AB| = |BA|$ (D) $|A-B| = |B-A|$

4. 设 $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$， $B = \begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} + a_{11} & a_{32} + a_{12} & a_{33} + a_{13} \end{pmatrix}$， $P_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$，

$P_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$，则必有（ D ）．

(A) $AP_1P_2 = B$ (B) $AP_2P_1 = B$ (C) $P_2P_1A = B$ (D) $P_1P_2A = B$

5．设 A^*, A^{-1} 是 n 阶方阵 A 的伴随矩阵、逆矩阵，则 $\left|A^* A^{-1}\right| =$（ C ）．

(A) $|A|^n$ (B) $|A|^{n-1}$ (C) $|A|^{n-2}$ (D) $|A|^{n-3}$

6．若非零矩阵 A,B,C 满足 $AB=C$, 则下列命题不正确的是（ B ）．

(A) $R(A,C) = R(A)$ (B) $R(A,B) = R(A)$ (C) $R\begin{pmatrix} B \\ C \end{pmatrix} = R(B)$ (D) $R(C) \leq \min\{R(A), R(B)\}$

7. 设矩阵 $A_{m \times n}$ 的秩 $R(A)=m<n$, 则（ D ）．

(A) 若 $AB=O$,则 $B=O$　　(B) 若 $BA=O$,则 $B\neq O$

(C) $A^T Ax = O$ 只有零解　　(D) $AA^T x = O$ 只有零解

8. 下列向量组线性无关的是（ B）.

(A) $\begin{pmatrix}-1\\3\\2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\4\\2\end{pmatrix}$　　(B) $\begin{pmatrix}2\\3\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\4\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\2\end{pmatrix}$

(C) $\begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\1\\-4\end{pmatrix}$　　(D) $\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-2\\-1\\3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-3\\0\\5\end{pmatrix}$

9. 设 A 为 n 阶不可逆矩阵，A 中有一元素 a_{ij} 的代数余子式 $A_{ij}\neq 0$，则齐次方程 $Ax=0$ 的基础解系所含向量的个数为（ C ）.

(A) i 个　　(B) j 个　　(C) 1 个　　(D) n 个

10. 设 ξ 是可逆矩阵 A 的一个特征向量，则下列结论不正确的是（ A ）.

(A) ξ 是 A^T 的一个特征向量　　(B) ξ 是 A^* 的一个特征向量

(C) ξ 是 A^{-1} 的一个特征向量

(D) ξ 是 $c_0E+c_1A+\cdots+c_kA^k$ 的一个特征向量, 其中 $c_0,c_1,\cdots,c_k$ 是任意常数

二、**计算下列行列式**（每题 8 分，共 16 分）

1. $\begin{vmatrix}1&1&1&5\\1&2&-1&-2\\2&-3&-1&-2\\3&1&2&0\end{vmatrix}$　　2. $D_n=\begin{vmatrix}1&1&1&\cdots&1\\2&2^2&2^3&\cdots&2^n\\3&3^2&3^3&\cdots&3^n\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\n&n^2&n^3&\cdots&n^n\end{vmatrix}$

解:1.原式 $=\begin{vmatrix}1&-1&2&7\\1&0&0&0\\2&-7&1&2\\3&-5&5&6\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}-1&2&7\\-7&1&2\\-5&5&6\end{vmatrix}=142$　　(4分,6分,8分)

2. $D_n=n!\begin{vmatrix}1&1&1&\cdots&1\\1&2&2^2&\cdots&2^{n-1}\\1&3&3^2&\cdots&3^{n-1}\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\1&n&n^2&\cdots&n^{n-1}\end{vmatrix}\underline{\underline{\text{由范德蒙行列式得}}}n!(n-1)!(n-2)!\cdots2!1!$.(4分,8分)

三、解答题（第 1 题 10 分，2~4 题 12 分，第 5 题 8 分，共 54 分）

1.（本题 10 分）设矩阵 X 满足 $A^*X - A^{-1}B = 2X$，其中 A^*, A^{-1} 分别是 A 的伴随矩阵和逆矩阵，

且 $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -1 & 2 & 4 \\ 2 & 5 & 8 \end{pmatrix}$，求矩阵 X.

解：由 $A^*X - A^{-1}B = 2X$，得 $AA^*X - AA^{-1}B = 2AX$，　　（2 分）

整理得，$B = (|A|E - 2A)X$.　　（4 分）

又　$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 4, |4E - 2A| = \begin{vmatrix} 2 & -2 & 2 \\ 2 & 2 & -2 \\ -2 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 32 \neq 0$，　　（8 分）

所以　$X = (4E - 2A)^{-1}B = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -1 & 2 & 4 \\ 2 & 5 & 8 \end{pmatrix} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 0 & 5 & 2 \\ 1 & 7 & 12 \\ 3 & 8 & 6 \end{pmatrix}$.　　（10 分）

2. （本题 12 分）求向量组 $\vec{\alpha}_1 = (1,2,-3,4)^T$，$\vec{\alpha}_2 = (6,17,-18,29)^T$，$\vec{\alpha}_3 = (-3,-4,11,-8)^T$，$\vec{\alpha}_4 = (-6,-4,24,-10)^T$，$\vec{\alpha}_5 = (1,8,-1,12)^T$ 的秩和一个最大线性无关组，并将其余向量用该最大线性无关组线性表示.

解：$A = (\vec{\alpha}_1 \quad \vec{\alpha}_2 \quad \vec{\alpha}_3 \quad \vec{\alpha}_4 \quad \vec{\alpha}_5) = \begin{pmatrix} 1 & 6 & -3 & -6 & 1 \\ 2 & 17 & -4 & -4 & 8 \\ -3 & -18 & 11 & 24 & -1 \\ 4 & 29 & -8 & -10 & 12 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{3}{5} & -\frac{4}{5} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{2}{5} & \frac{4}{5} \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$，　　（6 分）

则向量组的秩为 3，　　（8 分）

最大无关组为 $\vec{\alpha}_1$，$\vec{\alpha}_2$，$\vec{\alpha}_3$，　　（10 分）

且 $\vec{\alpha}_4 = \frac{3}{5}\vec{\alpha}_1 + \frac{2}{5}\vec{\alpha}_2 + 3\vec{\alpha}_3, \vec{\alpha}_5 = -\frac{4}{5}\vec{\alpha}_1 + \frac{4}{5}\vec{\alpha}_2 + \vec{\alpha}_3$.　　（12 分）

3. （**本题** 12 分）当 a,b 取何值时，线性方程组 $\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 0, \\ 2x_1 + x_2 - 6x_3 + 4x_4 = -1, \\ 3x_1 + 2x_2 + ax_3 + 7x_4 = -1, \\ x_1 - x_2 - 6x_3 - x_4 = b \end{cases}$ 无解？有解？并在有解时求其全部解.

解：$B=\begin{pmatrix}1&1&-2&3&0\\2&1&-6&4&-1\\3&2&a&7&-1\\1&-1&-6&-1&b\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&0&-4&1&-1\\0&1&2&2&1\\0&0&a+8&0&0\\0&0&0&0&b+2\end{pmatrix}$ （4 分）

（1）当 $b\neq -2$ 时，$R(B)\neq R(A)$，线性方程组无解； （6 分）

（2）当 $b=-2$ 时，$R(B)=R(A)$，线性方程组有解； （8 分）

（i）若 $a=-8$ 时，则原线性方程组通解为

$x=k_1(4,-2,1,0)^T+k_2(-1,-2,0,1)^T+(-1,1,0,0)^T,k_1,k_2$ 为任意常数. （10 分）

（ii） 若 $a\neq -8$ 时，则原线性方程组通解为

$x=k(-1,-2,0,1)^T+(-1,1,0,0)^T,k$ 为任意常数. （12 分）

4.（本题 12 分） 设矩阵 $A=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&y&1\\0&0&1&2\end{pmatrix}$,

（1）已知 A 的一个特征值为 3，试求 y 的值；
（2）求矩阵 A 的所有特征值和特征向量.
解：（1）由于

$$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda&-1&0&0\\-1&\lambda&0&0\\0&0&\lambda-y&-1\\0&0&-1&\lambda-2\end{vmatrix}=(\lambda^2-1)[\lambda^2-(y+2)\lambda-1].$$ （2 分）

将 $\lambda=3$ 代入 $|\lambda E-A|=0$，解得 y=2； （4 分）

（2）由（1）得 $A=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&2&1\\0&0&1&2\end{pmatrix}$，$|\lambda E-A|=(\lambda-1)^2(\lambda+1)(\lambda-3)=0$

可得 A 的特征值为 $\lambda_1=\lambda_2=1$，$\lambda_3=-1$，$\lambda_4=3$， （6 分）

$\lambda_1=\lambda_2=1$ 时，解 $(E-A)x=0$ 得基础解系 $\eta_1=(1,1,0,0)^T,\eta_2=(0,0,-1,1)^T$， A 的所有属于特征值 1 的特征向量为 $k_1\eta_1+k_2\eta_2$，期中 k_1,k_2 不全为零. （8 分）

$\lambda_3=-1$ 时，解 $(-E-A)x=0$ 得基础解系 $\eta_3=(-1,1,0,0)^T$， A 的所有属于特征值-1 的特征向量为 $k_3\eta_3$，期中 k_3 不为零. （10 分）

$\lambda_4=3$时，解$(3E-A)x=0$得基础解系$\eta_4=(0,0,1,1)^T$， A的所有属于特征值3的特征向量为

$k_4\eta_4$，期中k_4不为零. （12分）

5.（本题8分）设$A=(a_{ij})$为n阶方阵，且$R(A)=n-1$.

(1) 若矩阵A的各行元素之和均为0，试求方程组$Ax=0$的通解；
(2) 若行列式$|A|$中元素a_{11}的代数余子式$A_{11}\neq 0$，试求线性方程组$Ax=0$的通解.

解：(1)矩阵A的各行元素之和均为0,说明$x_1=1,x_2=1,\cdots,x_n=1$是方程组$Ax=0$的一个解. (2分)

又$R(A)=n-1$，所以线性方程组$Ax=0$的通解为$k(1,1,\cdots,1)^T$，期中k为任意常数. （4分）

(2) 由$R(A)=n-1$知$AA^*=|A|E=O$，故A^*的每一列都是$Ax=0$的解， (6分)

又式$A_{11}\neq 0$，所以线性方程组$Ax=0$的通解是$k(A_{11},A_{12},\cdots,A_{1n})^T$，期中$k$为任意常数. （8分）