

# 南京林业大学试卷(A卷)

课程 线性代数 A

2023~2024 学年第 1 学期

题号	一	二	三	四	五	六	七	八	总分
得分									

## 一、单项选择题（每题 3 分，共 30 分）

1. 设  $D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 3$ , 则  $\begin{vmatrix} 5a_1 & 2a_1 - 3b_1 & 2c_1 \\ 5a_2 & 2a_2 - 3b_2 & 2c_2 \\ 5a_3 & 2a_3 - 3b_3 & 2c_3 \end{vmatrix} = ( \quad )$ .

(A) 45

(B) -45

(C) 90

(D) -90

2. 设  $x$  的多项式  $f(x) = D = \begin{vmatrix} 2x & 3 & 1 & 2 \\ x & x & 0 & 1 \\ 2 & 1 & x & 4 \\ x & 2 & 1 & 4x \end{vmatrix}$ , 则  $f(x)$  中  $x^3$  项的系数为 ( ).

(A) 7

(B) -14

(C) 15

(D) 20

3. 设  $A, B$  是  $n$  ( $n \geq 2$ ) 阶方阵, 则必有 ( ).

(A)  $|A+B| = |A| + |B|$

(B)  $|A|B| = |B|A|$

(C)  $|AB| = |BA|$

(D)  $|A-B| = |B-A|$

4. 设  $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} + a_{11} & a_{32} + a_{12} & a_{33} + a_{13} \end{pmatrix}$ ,  $P_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$P_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ , 则必有 ( ).

(A)  $AP_1P_2 = B$

(B)  $AP_2P_1 = B$

(C)  $P_2P_1A = B$

(D)  $P_1P_2A = B$

5. 设  $A^*$ ,  $A^{-1}$  分别是  $n$  阶方阵  $A$  的伴随矩阵、逆矩阵, 则  $|A^*A^{-1}| = ( \quad )$ .

(A)  $|A|^n$

(B)  $|A|^{n-1}$

(C)  $|A|^{n-2}$

(D)  $|A|^{n-3}$

6. 若非零矩阵  $A, B, C$  满足  $AB = C$ ，则下述命题不正确的是（ ）。

(A)  $R(A, C) = R(A)$

(B)  $R(A, B) = R(A)$

(C)  $R\begin{pmatrix} B \\ C \end{pmatrix} = R(B)$

(D)  $R(C) \leq \min\{R(A), R(B)\}$

7. 下列各组矩阵相似的是（ ）。

(A)  $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$  与  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$  与  $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$  与  $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$  与  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

8. 下列向量组线性无关的是（ ）。

(A)  $\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}$

9. 设  $A$  为  $n$  阶不可逆矩阵， $A$  中有一元素  $a_{ij}$  的代数余子式  $A_{ij} \neq 0$ ，则齐次线性方程组  $Ax = 0$  的基础解系所含向量的个数为（ ）。

(A)  $i$  个

(B)  $j$  个

(C) 1 个

(D)  $n$  个

10. 设  $\xi$  是可逆矩阵  $A$  的一个特征向量，则下列结论不正确的是（ ）。

(A)  $\xi$  是  $A^T$  的一个特征向量

(B)  $\xi$  是  $A^*$  的一个特征向量

(C)  $\xi$  是  $A^{-1}$  的一个特征向量

(D)  $\xi$  是  $c_0E + c_1A + \cdots + c_kA^k$  的一个特征向量，其中  $c_0, c_1, \cdots, c_k$  是任意常数

二、计算下列行列式的值（每题 8 分，共 16 分）

$$1. \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 5 \\ 1 & 2 & -1 & -2 \\ 2 & -3 & -1 & -2 \\ 3 & 1 & 2 & 0 \end{vmatrix}; \quad 2. D_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 2 & 2^2 & 2^3 & \cdots & 2^n \\ 3 & 3^2 & 3^3 & \cdots & 3^n \\ \cdots & & & & \\ n & n^2 & n^3 & \cdots & n^n \end{vmatrix}.$$

三、解答题（第 1 题 10 分，第 2-4 题 12 分，第 5 题 8 分，共 54 分）

1.（本题 10 分）设矩阵  $X$  满足  $A^*X - A^{-1}B = 2X$ ，其中  $A^*$ 、 $A^{-1}$  分别是  $A$  的伴随矩阵和逆矩阵，且

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -1 & 2 & 4 \\ 2 & 5 & 8 \end{pmatrix},$$

求矩阵  $X$ 。

2.（本题 12 分）求向量组  $\vec{\alpha}_1 = (1, 2, -3, 4)^T$ ， $\vec{\alpha}_2 = (6, 17, -18, 29)^T$ ， $\vec{\alpha}_3 = (-3, -4, 11, -8)^T$ ， $\vec{\alpha}_4 = (-6, -4, 24, -10)^T$ ， $\vec{\alpha}_5 = (1, 8, -1, 12)^T$  的秩和一个最大线性无关组，并将其余向量用该最大线性无关组线性表示。

3.（本题 12 分）当  $a, b$  取何值时，线性方程组 
$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 0 \\ 2x_1 + x_2 - 6x_3 + 4x_4 = -1 \\ 3x_1 + 2x_2 + ax_3 + 7x_4 = -1 \\ x_1 - x_2 - 6x_3 - x_4 = b \end{cases}$$
 无解？有解？并在

有解时求其全部解。

4.（本题 12 分）已知二次型

$$f(x_1, x_2, x_3) = (1-a)x_1^2 + (1-a)x_2^2 + 2x_3^2 + 2(1+a)x_1x_2$$

的秩为 2。

（1）求常数  $a$  的值；

（2）求正交变换  $x = Py$ ，把  $f(x_1, x_2, x_3)$  化成标准形。

5.（本题 8 分）判断二次型  $f = \sum_{i=1}^n x_i^2 + \sum_{i=2}^n x_i x_{i-1}$  的正定性。