

南京林业大学试卷(A卷)

课程 线性代数 A 2023~2024 学年第 1 学期

题号	一	二	三	四	五	六	七	八	总分
得分									

姓名

一、单项选择题（每题 3 分，共 30 分）

1. 设 $D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 3$, 则 $\begin{vmatrix} 5a_1 & 2a_1 - 3b_1 & 2c_1 \\ 5a_2 & 2a_2 - 3b_2 & 2c_2 \\ 5a_3 & 2a_3 - 3b_3 & 2c_3 \end{vmatrix} = (\quad)$.

- (A) 45 (B) -45 (C) 90 (D) -90

2. 设 x 的多项式 $f(x) = D = \begin{vmatrix} 2x & 3 & 1 & 2 \\ x & x & 0 & 1 \\ 2 & 1 & x & 4 \\ x & 2 & 1 & 4x \end{vmatrix}$, 则 $f(x)$ 中 x^3 项的系数为 () .

班级

- (A) 7 (B) -14 (C) 15 (D) 20

3. 设 A, B 是 n ($n \geq 2$) 阶方阵, 则必有 () .

(A) $|A + B| = |A| + |B|$ (B) $||A|B| = ||B|A|$

(C) $|AB| = |BA|$ (D) $|A - B| = |B - A|$

4. 设 $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} + a_{11} & a_{32} + a_{12} & a_{33} + a_{13} \end{pmatrix}$, $P_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$P_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, 则必有 () .

- (A) $AP_1P_2 = B$ (B) $AP_2P_1 = B$ (C) $P_2P_1A = B$ (D) $P_1P_2A = B$

5. 设 A^* , A^{-1} 分别是 n 阶方阵 A 的伴随矩阵、逆矩阵, 则 $|A^*A^{-1}| = (\quad)$.

- (A) $|A|^n$ (B) $|A|^{n-1}$ (C) $|A|^{n-2}$ (D) $|A|^{n-3}$

6. 若非零矩阵 A, B, C 满足 $AB = C$, 则下述命题不正确的是 () .

(A) $R(A, C) = R(A)$

(B) $R(A, B) = R(A)$

(C) $R\begin{pmatrix} B \\ C \end{pmatrix} = R(B)$

(D) $R(C) \leq \min\{R(A), R(B)\}$

7. 下列各组矩阵相似的是 () .

(A) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$ 与 $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

(B) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ 与 $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

(C) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ 与 $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

(D) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ 与 $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

8. 下列向量组线性无关的是 () .

(A) $\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$

(B) $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$

(C) $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}$

(D) $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}$

9. 设 A 为 n 阶不可逆矩阵, A 中有一元素 a_{ij} 的代数余子式 $A_{ij} \neq 0$, 则齐次线性方程组 $Ax = 0$ 的基础解系所含向量的个数为 () .

(A) i 个

(B) j 个

(C) 1 个

(D) n 个

10. 设 ζ 是可逆矩阵 A 的一个特征向量, 则下列结论不正确的是 () .

(A) ζ 是 A^T 的一个特征向量

(B) ζ 是 A^* 的一个特征向量

(C) ζ 是 A^{-1} 的一个特征向量

(D) ζ 是 $c_0E + c_1A + \cdots + c_kA^k$ 的一个特征向量, 其中 c_0, c_1, \dots, c_k 是任意常数

二、计算下列行列式的值 (每题 8 分, 共 16 分)

$$1. \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 5 \\ 1 & 2 & -1 & -2 \\ 2 & -3 & -1 & -2 \\ 3 & 1 & 2 & 0 \end{vmatrix};$$

$$2. D_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 2 & 2^2 & 2^3 & \cdots & 2^n \\ 3 & 3^2 & 3^3 & \cdots & 3^n \\ \cdots & & & & \\ n & n^2 & n^3 & \cdots & n^n \end{vmatrix}.$$

三、解答题（第1题10分，第2-4题12分，第5题8分，共54分）

1. (本题10分) 设矩阵 X 满足 $A^*X - A^{-1}B = 2X$ ，其中 A^* 、 A^{-1} 分别是 A 的伴随矩阵和逆矩阵，且

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -1 & 2 & 4 \\ 2 & 5 & 8 \end{pmatrix},$$

求矩阵 X .

2. (本题12分) 求向量组 $\vec{\alpha}_1 = (1, 2, -3, 4)^T$, $\vec{\alpha}_2 = (6, 17, -18, 29)^T$, $\vec{\alpha}_3 = (-3, -4, 11, -8)^T$, $\vec{\alpha}_4 = (-6, -4, 24, -10)^T$, $\vec{\alpha}_5 = (1, 8, -1, 12)^T$ 的秩和一个最大线性无关组，并将其余向量用该最大线性无关组线性表示.

3. (本题12分) 当 a, b 取何值时，线性方程组 $\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 0 \\ 2x_1 + x_2 - 6x_3 + 4x_4 = -1 \\ 3x_1 + 2x_2 + ax_3 + 7x_4 = -1 \\ x_1 - x_2 - 6x_3 - x_4 = b \end{cases}$ 无解？有解？并在有解时求其全部解.

4. (本题12分) 已知二次型

$$f(x_1, x_2, x_3) = (1-a)x_1^2 + (1-a)x_2^2 + 2x_3^2 + 2(1+a)x_1x_2$$

的秩为2.

(1) 求常数 a 的值；

(2) 求正交变换 $x = Py$ ，把 $f(x_1, x_2, x_3)$ 化成标准形.

5. (本题8分) 判断二次型 $f = \sum_{i=1}^n x_i^2 + \sum_{i=2}^n x_i x_{i-1}$ 的正定性.