平面图顶点覆盖问题报告

孟悦琦

2023 年 7 月 10 日

1 背景介绍

在计算理论研究过程中，NP 完全问题是十分重要的一类问题。若语言 L 是 NP 完全问题，应满足：1. L 是 NP 问题。2. 对于每一个 NP 问题 L'，存在一个多项式时间内的规约，使得 L' 规约到 L。像我们熟知的 SAT 问题，独立集问题（IS）都 NP 完全问题。顶点覆盖问题也是一类 NP 完全问题。并且，对于定点覆盖问题，若加以平面图的条件限制，以及最大顶点度为 3 的条件限制后，仍然可以证明其是 NP 完全问题。以下给出详细证明：

2 平面图顶点覆盖 NP 完全性证明

在证明过程中，使用了一关键结构。此结构如图 1.1 所示。该结构可以被命名为交叉结构（$crossover$），

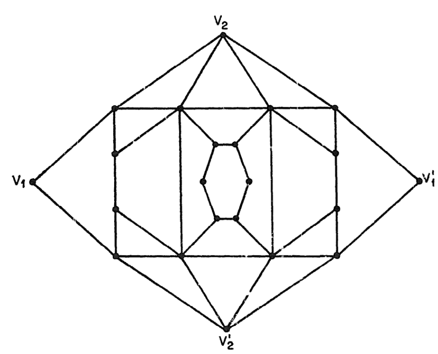

图 1: 交叉（$crossover$）结构

它的四个出口位置被标记为 v_1, v_2, v_1', v_2'。对于任意 i, j，满足 $0 \le i, j \le 2$，那么，令 $c[i, j]$ 表示所有顶点覆盖 C 的最小基数，顶点覆盖满足如下条件：

$$|\{V_1, V_1'\} \cap C| = i \;\; \& \;\; |\{V_2, V_2'\} \cap C| = j$$

通过观察交叉结构，我们发现，当 $i = 1$ 或 $j = 1$ 时，$c[i, j]$ 的值和选取哪一个出口顶点无关。表 1 中给出了所有 i, j 取值下，$c[i, j]$ 的值。通过观察表 1，我们发现如下性质：对于 $0 \le l \le 2$，有：

$$\text{(A)} \quad c[1, l] - c[0, l] \le 1 \;\; \& \;\; c[l, 1] - c[l, 0] \le 0$$

$$\text{(B)} \quad c[2, l] - c[1, l] = c[l, 2] - c[l, 1] = 1$$

$j \backslash i$	0	1	2
0	13	14	15
1	13	13	14
2	14	14	15

表 1：所有可能的 $c[i,j]$ 值

对于给定的一个图 $G=(N,A)$，我们可以进行如下变换，生成新图 $G'=(N',A')$。使用交叉（*crossover*）结构变换，具体方法如下：

1. 将图 G 在一个平面中表示，允许边之间存在交叉。

2. 对图中的每个交叉点，用交叉（*crossover*）结构代替。

具体替代过程如下图所示：

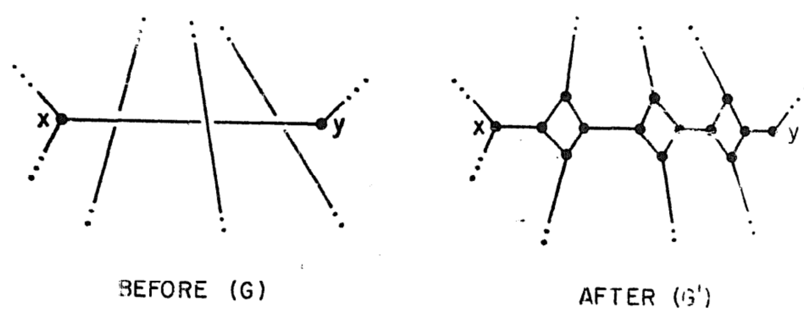

图 2: 代替过程

使用交叉结构来替代 $\{x,y\}$ 上的交点，这些交叉结构可以被称作是 $\{x,y\}-line$ 上的交叉结构。连接 $\{x,y\}-line$ 上交叉结构与 x,y 的，为 $\{x,y\}-line$ 上的边。$\{x,y\}$ 是 $\{x,y\}-line$ 上的结点。临近 x 结点的交叉结构出口被称作 y 出口，临近 y 的被称作 x 出口。

我们令 d 是图 G' 中使用交叉（*crossover*）结构的数量。显然，G' 中的边可以被分为两部分：（1）在 $\{x,y\}-line$ 上的边。（2）在 d 个交叉结构上的边。通过使用顶点集合 x 和每个交叉结构的 x 出口或 y 和每个交叉结构的 y 出口，所有 $\{x,y\}-line$ 上的边可以被覆盖。而交叉结构中的边仅能使用交叉结构内部的结点进行覆盖。经过之前所描述的变换，G 中的所有边的交点，在 G' 中都被交叉结构所取代，因此，G' 是一个平面图。并且，由于 n 个顶点至多有 $O(n^2)$ 条边，至多有 $O(n^4)$ 个交点，显然这个规约可以在 $poly(n)$ 时间内完成。于是我们只需要证明，对于任意 k，图 G 有一个大小为 k 的顶点覆盖当且仅当图 G' 有一个大小为 $k+13d$ 的顶点覆盖。

首先，我们假设 S 是图 $G=(N,A)$ 的顶点覆盖，并且 $|S|=k$。我们用如下方法对 G' 的顶点覆盖集进

行构造。对于任意边 $\{x,y\} \in A$，令 $f(x,y)$ 为在 S 中的 xy 的端点。构造集合：

$$S' = \{v : 对于\{x,y\} \in A, v为\{x,y\} - line上交叉结构的f(x,y)出口\}$$

由于 S 是 G 中的一个顶点覆盖，$f(x,y)$ 包含了所有 A 中的边，于是有 $S \cup S'$ 可以覆盖所有非交叉结构中的边。同时，由于每一个交叉结构在 S' 中被计算了两次，故有 $|S'| = 2d$。之后要完成的便是覆盖交叉结构中未被覆盖的边。这是我们观察表 1，由于每个交叉结构，每对出口都被覆盖了一次，那么由于 $c[i,j] = 13$，我们只需在每个交叉结构中添加 11 条边即可。令 S'' 为每个交叉结构需要添加的 11 条边组成的集合。那么 $S \cup S' \cup S''$ 即为 G' 的顶点覆盖，同时有 $|S \cup S' \cup S''| = k + 2d + 11d = k + 13d$，满足规约假设。

相反的，我们假设 G' 中存在一个基数为 $k + 13d$ 的顶点覆盖。令：

$$k^* = \min\{|S| : S是G'的顶点覆盖\}$$
$$M = \{S : S是G'中的一个顶点覆盖，且|S| = k^*\}$$

对于每一个 $S \in M$，我们定义：

$$m(S) = |\{x \in S : x是G'中交叉结构的出口结点\}|$$
$$m^* = \min\{m(S) : m(S) \in M\}$$

这时，令 $S^* \in M$ 表示一个符合条件 $m(S^*) = m^*$ 的顶点覆盖。根据表 1，由于至少在每个交叉结构中有 13 个结点，我们可以得到 $|S^* \cap N| \leq k$。于是我们仅需要证明 $S' = S^* \cap N$ 是图 G 的一个顶点覆盖。

我们使用反证法证明。假设不是，那么存在 $\{x,y\} \in A$ 有 $S' \cap \{x,y\} = \phi$，因此 $s^* \cap \{x,y\} = \phi$。我们令 l 时 $\{x,y\} - line$ 上的交叉结构数量。由于有 $l+1$ 条边在 $\{x,y\} - line$ 上，故必须有至少 $l+1$ 个顶点在 S^* 中，且由于 x,y 都不再其中，这 $l+1$ 个顶点应都是交叉结构的出口。如果我们令 $n(i)$ 为 $\{x,y\} - line$ 中有 i 个交叉结构出口在 S^* 中的数量，那么有 $n(2) - n(0) \geq 1$，我们证明这样会产生矛盾。

我们令 X_i 为 $\{x,y\} - line$ 上的第 i 个交叉结构的全部结点，有 $1 \leq i \leq l$，令 $S_i = X_i \cap S^*$。令 $T_i \subseteq X_i$ 为一个包含 x 出口和 S_i 中非出口结点的顶点覆盖，X_i 在包含这些顶点的同时，具有最小基数。对每一个 i，$r(i)$ 为 S_i 中第 i 个交叉结构出口的个数。根据之前的 (A) 与 (B)，得到：

$$r(i) = 0时 \quad |T_i| \leq |S_i| + 1$$
$$r(i) = 1时 \quad |T_i| \leq |S_i|$$
$$r(i) = 2时 \quad |T_i| \leq |S_i| - 1$$

令 $T_i = \bigcup_{i=1}^{l} T_i$，$S_i = \bigcup_{i=1}^{l} S_i$。由于 $n(2) - n(0) \geq 1$，我们得到：

$$|T| \leq |S| - 1$$

同时，根据之前的定义我们发现，T 至少比 S 少一个交叉结构的出口顶点，同时有相同数量的交叉结构非出口顶点。同时我们发现，$T \cup x$ 可以覆盖所有 S 覆盖的非交叉结构上的边。于是 $T^* = (S - S^*) \cup T \cup x$ 是 G' 的顶点覆盖。同时：

$$|T^*| = |S| - |S^*| + |T| + 1$$
$$m(T^*) = m(S^*) - 1 = m^* - 1$$

这与 m^* 的定义相矛盾，于是有 $S^* \cap N$ 为 G 的一个顶点覆盖。

于是证明顶点覆盖问题在 $poly(n)$ 时间内规约到平面图顶点覆盖问题的正确性。□

需要注意的是，当输入图 G 的顶点度不超过 3 时，生成的图 G' 的顶点度不会超过 6。这说明对于顶点度最多为 6 的平面图来说，其顶点覆盖问题是一个 NP 完全问题。

3 最大顶点度为 3 平面图顶点覆盖 NP 完全性证明

首先，由于顶点覆盖问题是 NP 问题，并且最大度数为 3 的平面图顶点覆盖问题亦为顶点覆盖问题，故此问题存在非确定图灵机 $poly(n)$ 时间内求解的算法。即有最大顶点度数为 3 的平面图顶点覆盖问题为 NP 问题。

给出一个平面图 G 和它的顶点覆盖集基数 k，我们构造一个平面图 G'，G' 满足最大顶点度为 3。同时构造 k' 为 G' 中的顶点覆盖集的基数。我们只需要证明 G' 有一个大小为 k' 的顶点覆盖集合，当且仅当 G 有一个大小为 k 的顶点覆盖集合。

假设图 $G = (V, E)$，其中 $V = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$。我们从 $G = G_0$ 开始进行迭代变换。对于每一个整数 i，图 G_i 可以通过图 G_{i-1} 变换得来。具体方式如下：

1. 令 $\{v_i, w_1\}, \{v_i, w_2\}, \ldots, \{v_i, w_p\}$，为图 G_{i-1} 中与 v_i 连接的边，且按照顺时针顺序。

2. 将 v_i 替换为新结点组 $u_i(j), v_i(j)$，其中 $1 \le j \le n$，且存在边 $\{u_i(j), v_i(j)\}, 1 \le j \le n$，$\{v_i(j), u_i(j+1)\}, 1 \le j \le n-1$，以及 $\{v_i(n), u_i(1)\}$。

3. 去除所有边 $\{v_i, w_j\}$，添加边 $\{v_i(j), w_j\}$，增加一个顶点 z_i，增加边 $\{u_i(1), z_i\}$

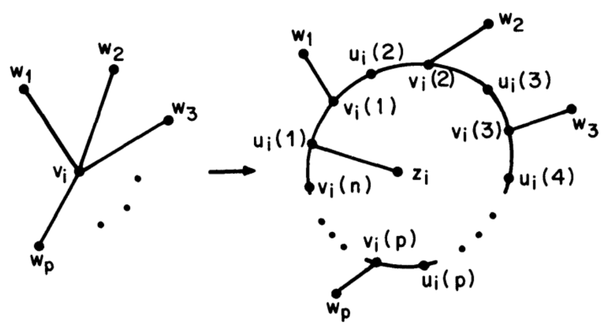

图 3: 变换过程

于是我们令 $G' = G_n$，$k' = n^2 + k$。显然 G' 中没有顶点度超过 3。

下面我们假设顶点集 V^* 为图 G 的一个基数至多为 k 的顶点覆盖，我们构造图 G' 的基数不大于 k' 顶点覆盖集 V_1^*，构造方式如下：

$$V_1^* = \{v_i(j) : v_i \in V^*, 1 \le j \le n\} \cup \{u_i(1) : v_i \in V^*\} \cup \{u_i(j) : v_i \notin V^*, 1 \le j \le n\}$$

经过计算得出，$|V_1^*| = nk + k + n(n-k) = n^2 + k = k'$。由于顶点数量是 $O(n^2)$ 的，故必定可以在 $poly(n)$ 的时间内完成规约的过程。于是我们只需证明 V^* 是 G 的顶点覆盖，当且仅当 V_1^* 是 G' 的顶点覆盖。

首先，若 V^* 为 G 的顶点覆盖，那么显然 $u_i(1), 1 \le i \le n$ 在集合 V_1^* 中。故边 $\{u_i(1), z_i\}$ 必定被覆盖。且根据 V_1^* 中的元素构成，边 $\{u_i(j), v_i(j)\}, 1 \le j \le n$，$\{v_i(j), u_i(j+1)\}, 1 \le j \le n-1$，以及 $\{v_i(n), u_i(1)\}$ 亦必然被覆盖。而对于边 $\{v_i, w_t\}$，使用反证法。若 V_1^* 中不存在覆盖边 $\{v_i(j), w_t\}$ 的顶点，那

么有 $v_i(j) \notin V_1^*$ & $w_t \notin V_1^*$。设 $w_t \in \{v_k(s) : 1 \leq k, s \leq n, k \neq i\}$。那么显然有 $v_i \notin V^*$ & $v_k \notin V^*$。那么，对于 V^*，必有一条边 $\{v_i, v_k\}$ 未被覆盖，这与 V^* 的定义矛盾。

相反的，假设 V_1^* 是 G' 的一个顶点覆盖，满足 $|V^*| \leq k'$。那么由于覆盖 G 中对应边的顶点是 G' 中的顶点，故构造：

$$V^* = \{v_i : \text{对于} j, 1 \leq j \leq n, v_i(j) \in V_1^*\}$$

显然 V^* 必定是 G 的顶点覆盖。我们只需证明 $|V^*| \leq k$。首先，我们可以假定 $u_i(1) \in V_1^*$，这是因为边 $\{u_i(1), z_i\}$ 必定被覆盖且 z_1 的度为 1。对于 $1 \leq i \leq n$，定义 S_i：

$$S_i = V_1^* \cap \{u_i(j), v_i(j) : 1 \leq j \leq n\}$$

为了覆盖 v_i 环上的 $2n$ 个顶点，我们必定有 $S_i \geq n$。由于 $k' = n^2 + k$，这意味着最多有 k 个 i 满足 $S_i \geq n$。更进一步，由于 $u_i(1) \in S_i$，基数为 n 的 S_i 必定为 $\{u_i(j) : 1 \leq j \leq n\}$。所以如果有 $|S_i| > n$，则存在 $v_i(j) \in S_i$。由于此种情况最多出现 k 次，于是得到 $|V^*| \leq k$，V^* 是符合要求的图 G 顶点覆盖集。□

由此我们证明了对于顶点最大度为 3 的平面图，顶点覆盖问题也是 NP 完全问题。

4 总结

本篇本文章主要讲述了 NP 完全问题中的平面图顶点覆盖问题，并给出了详细证明。对于平面图的顶点覆盖问题，当给予限制条件顶点度最大为 3 时，此问题仍为 NP 完全。