延迟系统思考题

一、

试用分步法求解下列中立型延迟系统 $$ \begin{cases} x^{'}(t)=2x(t-1)-x^{'}(t-1), & t \in [0,3], \ x(t)=t, & t \in[-1,0], \ \end{cases} $$ 并给出其解的曲线图。

解：

1. 当$t \in [0,1]$时，有$x(t-1)=t-1$，代入原方程得 $$ \begin{cases} x^{'}(t)=2t-3, & t \in [0,1], \ x(0)=0. \ \end{cases} $$ 求解得到$x(t)=t^2-3t,x\in [0,1]$。

2. 当$t \in [1,2]$时，有$x(t-1)=(t-1)^2-3(t-1)$，代入原方程得 $$ \begin{cases} x^{'}(t)=2(t-1)^2-8(t-1)+3, & x \in [1,2], \ x(1)=-2. \ \end{cases} $$ 求解得到$x(t)=(t-1)^3-4(t-1)^2+3(t-1)-2,x \in [1,2]$。

3. 当$t \in [2,3]$时，有$x(t-1)=(t-2)^3-4(t-2)^2+3(t-2)-2$，代入原方程得 $$ \begin{cases} x^{'}(t)=2(t-2)^3-10(t-2)^2+14(t-2)-7, & x \in [2,3], \ x(2)=-2. \ \end{cases} $$ 求解得到$x(t)=\frac{1}{2}(t-2)^4-\frac{10}{3}(t-2)^3+7(t-2)^2-t(t-2)-2,x \in [2,3]$。

4. 曲线图如下：

二、

试证明：当$|b|<-\mathfrak{Re}(a)$时，延迟微分方程 $$x^{'}(t)=ax(t)+bx(t-\tau),a,b\in \mathbb{C},\tau>0,$$ 的精确解$x(t)$是渐近稳定的。

证明：

将$x=e^{\lambda t}$代入原方程得到相应的特征方程 $$\lambda=a+be^{-\lambda \tau}.$$ 原方程精确解渐近稳定等价于$\mathfrak{Re}(\lambda)<0$。往证当$|b|<-\mathfrak{Re}(a)$时可以推出$\mathfrak{Re}(\lambda)<0$。
反证：假设当$|b|<-\mathfrak{Re}(a)$时有$\mathfrak{Re}(\lambda)\geq0$。
已知$0 \leq |b| < - \mathfrak{Re}(a)$，可得$\mathfrak{Re}(a) < 0$。对特征方程两边分别取实部得 $$ \begin{split} \mathfrak{Re}(\lambda) =& \mathfrak{Re}(a+be^{-\lambda \tau}) \ =& \mathfrak{Re}(a) + \mathfrak{Re}(be^{-\lambda \tau}) \ =& \mathfrak{Re}(a) + \mathfrak{Re}(|b|e^{iarg(b)-\tau \mathfrak{Re}(\lambda)- i \tau\mathfrak{Im}(\lambda)}) \ =& \mathfrak{Re}(a) + |b|e^{-\tau \mathfrak{Re}(\lambda)}\mathfrak{Re}(e^{i\theta}) \ \end{split} $$ 其中$\theta=arg(b)-\tau\mathfrak{Im}(\lambda)$。可知
$$ \begin{split} & |b| \geq 0, \ & 0 < e^{-\tau \mathfrak{Re}(\lambda)} \leq 1, \ & -1 \leq \mathfrak{Re}(e^{i\theta}) \leq 1, \ \end{split} $$ 从而有 $$-|b| \leq |b|e^{-\tau \mathfrak{Re}(\lambda)}\mathfrak{Re}(e^{i\theta}) \leq |b|,$$ 从而 $$ \mathfrak{Re}(\lambda)=\mathfrak{Re}(a) + |b|e^{-\tau \mathfrak{Re}(\lambda)}\mathfrak{Re}(e^{i\theta}) \leq \mathfrak{Re}(a) + |b| < 0, $$ 与假设$\mathfrak{Re}(\lambda) \geq 0$相矛盾。从而假设不成立，证毕。

三、

取步长$h=\frac{\tau}{m}(m \in N)$，将线性$\theta$-方法 $$y_{n+1}=y_{n}+h[\theta f(t_n,y_n)+(1-\theta)f(t_{n+1},y_{n+1})],\theta \in [0,1],$$ 推广应用于延迟微分方程 $$x^{'}(t)=ax(t)+bx(t-\tau),a,b\in

\mathbb{C},\tau>0,$$ 试给出其计算格式，并证明：当$|b| < - \mathfrak{Re}(a)$，且$\theta \in [0,\frac{1}{2}]$时，该计算格式是渐进稳定的。

解：

对于延迟微分系统 $$ \begin{cases} y'(t)=f(t,y(t),y(\alpha(t))), & t > t_0, \ y(t) = \phi(t), & t \in [t_{-1}, t_0], \ \end{cases} $$ 其中$\alpha(t)< t$，可以将线性θ-方法推广为如下形式：