排列组合

1. 抽样（摸球）：从 n 张卡片中抽取 r 张

可能结果总数	放回	不放回
有序	n^r	P_n^r
无序	$\binom{n+r-1}{r}$	$\binom{n}{r}$

2. 分配（占位）：把 r 只球投入 n 个房间

可能结果总数	不限制	有限制（只限一球）
可分辨（编号）	n^r	P_n^r
不可分辨	$\binom{n+r-1}{r}$	$\binom{n}{r}$

3. 从装有编号为 $1\sim n$ 的球的袋子中有放回地摸出 r 只球，依次记下其号码，可能总数为 n^r
4. n 个人的生日共有 365^n 种
5. 公共汽车上的 r 位乘客在以后的 n 个站下车的方式有 n^r 种
6. n 个可分辨粒子在相空间的 N 个相格中的可能分配有 N^n 种

全排列

$n\cdot(n-1)\cdots 3\cdot 2\cdot 1$

7. n 卷文集在书架上的排列方式有 $n!$ 种
8. 把 n 个客人分到 n 个房间共有 $n!$ 种安排法
9. 把编号为 $1\sim N$ 的球从袋中一只接一只摸出依序排成一列，共有 $N!$ 种不同结果
10. 把 n 封信分别装入 n 只信封共有 $n!$ 种结果

选排列

$P_n^r=n(n-1)\cdots(n-r+1)=\frac{n!}{(n-r)!}$，$1\le r\le n$

11. 从 n 种商品中选 r 种依序上货架，共有 P_n^r 种不同排列
12. 把 r 个客人分到 $n\,(n\ge r)$ 个房间，共有 P_n^r 种安排

重复组合数（r 个元素中可以有相同的）：

$\binom{n+r-1}{r}$

总结：

可能结果总数	重复	不重复
排列	n^r	P_n^r
组合	$\binom{n+r-1}{r}$	$\binom{n}{r}$

n 只球在 n 个位置的全排列

(1) 1 号球出现在 1 号位的概率为 $\frac{1}{n}$，由对称性，1 号球出现在第 k 号位的概率也为 $\frac{1}{n}$。更进一步，第 i 号球出现在第 k 号位的概率也为 $\frac{1}{n}$。这是不放回开锁问题的答案。

(2) k 号位由预先指定的某号球占据的概率：$\frac{1}{n}$

(3) 袋中有 a 只黑球和 b 只白球，从中一只只摸出球，则第 k 次摸得黑球的概率为 $\frac{a}{a+b}$，

与顺序无关　　这是抽签问题的答案

(4) 在 n 封信与 n 只信封的匹配中，1 号信装入 1 号信封的概率为 $\frac{1}{n}$，由对称性，i 号信装入 i 号信封的概率也为 $\frac{1}{n}$

1, 2 号信与信封符合的概率为 $\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{n-1}$

由对称性，第 i,j 号信与信封符合的概率也为 $\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{n-1}$

1, 2, 3 号信与信封符合的概率为 $\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{n-1}\cdot\frac{1}{n-2}$

由对称性，第 i,j,k 号信与信封符合的概率也为 $\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{n-1}\cdot\frac{1}{n-2}$

抽样调查

(1) 从 N 张卡片中任取一张，1 号或 k 号卡片被抽到的概率均为 $\frac{1}{N}$

(2) 从 N 张卡片中任取两张，1, 2 号卡片被抽到的概率为 $\frac{1}{N}\cdot\frac{1}{N-1}\times 2$，由对称性，预先指定的 k 号与 j 号卡片被抽到的概率亦为 $\frac{1}{\binom{N}{2}}$

(3) 从 N 张卡片中任取 l 张，预先指定的 $i_1, i_2, \cdots, i_l$ 号卡片被抽到的概率为

$\frac{1}{\binom{N}{l}}=\frac{1}{N(N-1)\cdots(N-l+1)}$，这也表明，在抽样中，$l$ 张卡片被一张张抽出与一次性抽出 l 张卡片是等价的

(4) 袋中有 a 只黑球 b 只白球，从中摸出 n 只有 k 只黑球的概率为 $\frac{\binom{a}{k}\binom{b}{n-k}}{\binom{a+b}{n}}$

超几何分布

(5) 甲袋中有 a 只黑球 b 只白球，乙袋和丙袋都是空袋，先从甲袋中随机摸 $n\,(1\le n\le a+b)$ 只球放入乙袋，再从乙袋中随机摸 $m\,(1\le m\le n)$ 只球放入丙袋，最后从丙袋中任取一球，求该球为黑球的概率

$\frac{\binom{a}{k}\binom{b}{n-k}}{\binom{a+b}{n}}$　$\frac{\binom{k}{i}\binom{n-k}{m-i}}{\binom{n}{m}}$

多项系数 $\binom{n}{r_1, r_2, \cdots, r_k}=\frac{n!}{r_1!r_2!\cdots r_k!}$

$r_1+r_2+\cdots+r_k=n$　当 $k=2$ 时化为二项系数

1. （抽样）从 n 个不同的元素中取 r_1 个构成第 1 组，r_2 个构成第 2 组，……，剩下的 r_k 个构成第 k 组，计有 $\frac{n!}{r_1!r_2!\cdots r_k!}$ 种
2. （分割）把 n 个物体分为 k 类，第一类 r_1 个，第二类 r_2 个，……，第 k 类 r_k 个，这里 $r_1+r_2+\cdots+r_k=n$，则分法共有 $\frac{n!}{r_1!r_2!\cdots r_k!}$ 种

k 类元素的抽样数

1. 袋中有 M 只黑球，$(N-M)$ 只白球，从中摸出 n 只，则有 k 只黑球、$(n-k)$ 只白球的构成方法计有 $\binom{M}{k}\binom{N-M}{n-k}$ 种
2. 袋中装有 i 号球 N_i 只，$i=1,2,\cdots,k$，$N_1+N_2+\cdots+N_k=N$，从中摸出 n 只，则有 i 号球 n_i 只，$i=1,2,\cdots,k$，$n_1+n_2+\cdots+n_k=n$ 的构成方法有 $\binom{N_1}{n_1}\binom{N_2}{n_2}\cdots\binom{N_k}{n_k}$ 种
3. 若 $r_1+r_2+\cdots+r_k=n$，则

$$\binom{n}{r_1}\binom{n-r_1}{r_2}\binom{n-r_1-r_2}{r_3}\cdots\binom{n-r_1-r_2-\cdots-r_{k-1}}{r_k}=\frac{n!}{r_1!r_2!\cdots r_k!}$$

binomial $\Leftrightarrow$ poisson

$b(n,p)$　$n\to\infty$　$p\to 0$

$np=\lambda$

泰勒展开

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}$$

Normal Distribution 的一个性质：

If X is $N(\mu,\sigma^2)\Rightarrow Y=aX+b: N(a\mu+b,\ a^2\sigma^2)$

对其他 Distribution 性质的推导：

Bernoulli: 1. $E[X]=\sum_{x\in S}xf(x)=0\cdot(1-p)+1\cdot p=p$

2. $Var[X]=E[(X-E[X])^2]=\sum_{x\in S}(x-p)^2f(x)$

$=p^2(1-p)+(1-p)^2p=(1-p)p$

3. mgf: $M(t)=E[e^{tX}]=e^t\cdot p+(1-p)$, $t\in(-\infty,\infty)$

Binomial: $M(t)=E[e^{tX}]=\sum_{x=0}^{n}e^{tx}\binom{n}{x}p^x(1-p)^{n-x}$

$=\sum_{x=0}^{n}\binom{n}{x}(pe^t)^x(1-p)^{n-x}=[(1-p)+pe^t]^n$　$t\in(-\infty,\infty)$

$M'(t)=n[(1-p)+pe^t]^{n-1}pe^t\Rightarrow M'(0)=E[X]=np$

$M''(t)=n(n-1)[(1-p)+pe^t]^{n-2}p^2e^{2t}+n[(1-p)+pe^t]^{n-1}pe^t$

Poisson: $P(X=x)\xleftarrow{\text{approximated}}b(n,p=\frac{\lambda}{n})$

Let $n\to\infty$, $\lim_{n\to\infty}\frac{n!}{x!(n-x)!}\left(\frac{\lambda}{n}\right)^x\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-x}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{n!}{(n-x)!n^x}\cdot\frac{\lambda^x}{x!}\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^n\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{-x}$

Noting $\lim_{n\to\infty}\cdots$　$=1$　$=e^{-\lambda}$　$=1$

We have $P(X=x)=\cdots=\frac{\lambda^xe^{-\lambda}}{x!}$

$M(t)=\sum_{x=0}^{\infty}e^{tx}\frac{\lambda^xe^{-\lambda}}{x!}=e^{-\lambda}\sum_{x=0}^{\infty}\frac{(\lambda e^t)^x}{x!}$

$=e^{-\lambda}\cdot e^{\lambda e^t}=e^{\lambda(e^t-1)}$

$M'(t)=\lambda e^te^{\lambda(e^t-1)}\Rightarrow M'(0)=\lambda$

$M''(t)=\lambda e^te^{\lambda(e^t-1)}+\lambda^2e^{2t}e^{\lambda(e^t-1)}$

Poisson 到 Exponential:

cdf

$F(w)=0$, for $w<0$　For $w\ge 0$, $F(w)=P(W\le w)=$

$1-P(W>w)=1-P(\text{no occurances in }[0,w])=1-e^{-\lambda w}$

$f(x)=F'(w)=\lambda e^{-\lambda w}$, $w\ge 0$　$w\Leftrightarrow x$, $\theta\Leftrightarrow\frac{1}{\lambda}$

$M(t)=\int_0^\infty e^{tx}\cdot\frac{1}{\theta}e^{-\frac{x}{\theta}}dx=\frac{1}{\theta}\frac{1}{t-\frac{1}{\theta}}e^{(t-\frac{1}{\theta})x}\Big|_0^\infty$

$=\frac{1}{1-t\theta}$, $t<\frac{1}{\theta}$

$M'(t)=\frac{1}{(1-\theta t)^2}$, $M''(t)=\frac{2\theta^2}{(1-\theta t)^3}$

Poisson 到 Gamma:　Y has $E(Y)=\lambda T$

its pmf: $f(y)=\frac{(\lambda T)^ye^{-\lambda T}}{y!}$, $y=0,1,\cdots$

Then for $\alpha=1,2,\cdots$,

$P(Y<\alpha)=\sum_{k=0}^{\alpha-1}\frac{(\lambda T)^ke^{-\lambda T}}{k!}$

同上 (0)　w

$F(w)=P(W\le w)=1-P(W>w)=1-\sum_{k=0}^{\alpha-1}\frac{(\lambda w)^ke^{-\lambda w}}{k!}$

$f(w)=F'(w)=\frac{\lambda^\alpha w^{\alpha-1}}{(\alpha-1)!}e^{-\lambda w}$, $w>0$

$M(t)=\int_0^\infty e^{tx}\frac{x^{\alpha-1}e^{-\frac{x}{\theta}}}{\Gamma(\alpha)\theta^\alpha}dx=$

$\frac{1}{\theta^\alpha(\alpha-1)!}\int_0^\infty e^{\frac{x(t\theta-1)}{\theta}}x^{\alpha-1}dx$　$y=\frac{1-\theta t}{\theta}x$

$\frac{1}{\theta^\alpha(\alpha-1)!}\int_0^\infty e^{-y}\left(\frac{\theta y}{1-\theta t}\right)^{\alpha-1}\left(\frac{\theta}{1-\theta t}\right)dy$

$=\frac{1}{\theta^\alpha(\alpha-1)!}\int_0^\infty e^{-y}\left(\frac{\theta}{1-\theta t}\right)^\alpha y^\alpha dy=$

$\frac{1}{(\alpha-1)!(1-\theta t)^\alpha}\int_0^\infty e^{-y}y^\alpha dy=\frac{1}{(1-\theta t)^\alpha}$