Matematica discreta e Probabilità

Leonardo Mengozzi

Titoletti indice link a rispettive sezioni, in alto a sinistra "←Indice" link a Indice e nome dimostrazioni link al teorema, definizone, ecc da dimostare.

Indice

1 Combinatoria **3**
Insiemi . . . 3
Definizione 1.1 (Cardinalità) . . . 3
Definizione 1.2 (Insieme finito) . . . 3
Definizione 1.3 (Cardinalità insiemi infiniti) . . . 3
Definizione 1.4 (Insieme numerabile) . . . 3
Definizione 1.5 (Insieme Discreto) . . . 3
Definizione 1.6 (Combinatoria di base) . . . 3
Definizione 1.7 (Prodotto Cartesiano) . . . 4
Definizione 1.8 (Sequenza) . . . 4
Definizione 1.9 (Insieme delle parti) . . . 4
Teorema 1.1 (Insieme delle parti) . . . 4
Principi di base . . . 4
Definizione 1.10 (Prodotto Condizionato) . . . 5
Definizione 1.11 (Disposizioni) . . . 5
Proposizione 1.1 (Fattoriale Discendente) . . . 5
Definizione 1.12 (Permutazioni) . . . 6
Definizione 1.13 (Combinazioni) . . . 6
Proposizione 1.2 (Numero Combinazioni) . . . 6
Definizione 1.14 (Combinazione di 1. . . n) . . . 7
Definizione 1.15 (Combinazione tipo (a,b)) . . . 7
Definizione 1.16 (Combinazione tipo (a,b,c)) . . . 7
Definizione 1.17 (Anagramma) . . . 7
Proposizione 1.3 (Binomio Combinazioni tipo (a,b,c)) . . . 8
Proposizione 1.4 (Somma binomi) . . . 8
Cammino Reticolare . . . 8
Numeri di Fibonacci . . . 9

Definizione 1.18 (Principio di inclusione esclusione) 10
Definizione 1.19 (Sequenze k-piene) 10
Definizione 1.20 (Scombussolamenti) 10
Definizione 1.21 (Partizione) 11
Definizione 1.22 (Numero di Bell) 11
Triangolo di Bell 12
Definizione 1.23 (Numero di Stirling) 12

1 Combinatoria

> "Serve a contare quanti elementi ci sono in un insieme. (risponde alla domanda "Quante sono?")."

Insiemi

Negli insiemi non conta l'ordine (infatti si usano le "$\{\}$", se contava l'ordine si usavano le "$()$") e gli elementi ripetuti. Insieme finito $\{1, \dots, n\}$. Insieme infinito $\{1, \dots\}$.

Definizione 1.1 (*Cardinalità*)

Un insieme A ha cardinalità n se contiene esattamente n elementi, o equivalentemente se $\exists$ una corrispondenza biunivoca $A \longleftrightarrow \{1, 2, \dots, n\}$.

La cardinalità si indica $|A| = n$.

Definizione 1.2 (*Insieme finito*)

Un insieme A si dice finito se $\exists n \in \mathbb{N}$ t.c. A contiene esattamente n elementi distinti.

Osservazione: L'insieme vuoto è l'unico insieme finito di cardinalità 0.

Definizione 1.3 (*Cardinalità insiemi infiniti*)

Due insiemi infiniti hanno la stessa cardinalità se $\exists$ una biezione (Corrispondenza biunivoca) tra di loro.

Definizione 1.4 (*Insieme numerabile*)

Un insieme A si dice numerabile se ha la stessa cardinalità di $\{1, 2, 3, \dots\}$.

In altre parole un insieme è numerabile se i suoi elementi possono essere messi in un a fila infinità.

Insiemi numerabili sono $\mathbb{N}$ (anche se più grande di $\{1, 2, 3, \dots\}$), $\mathbb{Z} = \{0, 1, -1, 2, -2, 3, \dots\}$, $\mathbb{Q}_{>0}$ dalla dimostrazione classica di Cantor.

Un insieme non numerabile sono delle sequenze infinite di bit 0/1. Dimostrazione non riportata.

Definizione 1.5 (*Insieme Discreto*)

Un insieme è discreto se è finito o numerabile.

Definizione 1.6 (*Combinatoria di base*)

Costruisce schemi "complessi" partendo da schemi semplici riuscendo a controllarne la cardinalità. (si opera solo con insiemi finiti).

Definizione 1.7 (*Prodotto Cartesiano*)

Siano A, B insiemi il cui prodotto cartesiano $A \times B$ è l'insieme delle coppie ordinate $(a, b), a \in A, b \in B$.

generalizzando:

$$A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_k = \{(a_1, \ldots, a_k) \mid a_i \in A_i, \forall i \in 1, \ldots, k\}$$

n-esima potenza cartesiana di n, ovvero $A \times \cdots \times A = A^n$.

Definizione 1.8 (*Sequenza*)

Una sequenza (o lista) finita di lunghezza n di elementi di A è un elemento $(a_1, \ldots, a_n)$ del prodotto cartesiano A^n.

Sono **successioni** delle sequenze di lunghezza ∞, tipo $\{a_1, \ldots\}$.

Definizione 1.9 (*Insieme delle parti*)

Sia A un insieme, l'insieme delle parti $\mathcal{P}(A)$ è l'insieme i cui elementi sono tutti i sotto insiemi di A, inclusi l'insieme vuoto $\emptyset$ e A stesso. (insieme i cui elementi sono insiemi).

La cardinalità dell'insieme delle parti è $|\mathcal{P}A| = 2^{|A|}$.

Teorema 1.1 (*Insieme delle parti*)

Sia A un insieme di $|A| = n$, allora $\exists$ una corrispondenza biunivoca tra $\mathcal{P}(A)$ e $\{0, 1\}^n$.

Dimostrazione Teorema 1.1 : Vediamo un caso particolare $A = \{1, 2, 3\}$

$\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \emptyset, A$

$\updownarrow$

$100 = (1, 0, 0), 010, 001, 110, 101, 011, 000, 111$

Per il caso generale $|A| = n, A = \{a_1, \ldots, a_n\}$ procediamo come prima facendo corrispondere ad'un sotto insieme $S \subseteq A$ la sequenza binaria B il uci i-esimo bit è 1 $\iff$ $a_i \in S$. ■

Principi di base

1. **Principio di ugualianza:** Siano A, B insiemi qualunque in corrispondenza biunivoca allora questi hanno lo stesso numero di elementi.

   Generalizzazione del Principio di ugualianza: $F : A \to B$ si dice $k : 1$ (k a 1) se è surriettiva e a ogni elemento di B corrispondono esattamente

k elementi di A. In questo caso $|A| = k|B|$. Il principio di ugualianza corrisponde al caso $k = 1$.

2. **Principio della somma:** Siano A, B insiemi qualunque disgiunti (non hanno elementi in comune), allora $|A \cup B| = |A| + |B|$.

   Ricorda: Si dice Distinti se gli insiemi sono diversi per almeno un elemento.

3. **Principio del prodotto:** Siano A, B insiemi qualunque, allora $|A \times B| = |A| \cdot |B|$.

Definizione 1.10 (*Prodotto Condizionato*)

Siano A, B insiemi. $C \subseteq A \times B$ è sotto insieme del prodotto cartesiano e si dice prodotto condizionato di tipo (n, m) se sono soddisfatte queste condizioni:

1. *$\exists n$ elementi di A che compaiono come 1° coefficente in un elemento di C.*
2. *Fissata la 1° coordinata di un elemento di C, $\exists m$ elementi di B che possono essere aggiunti come 2° coordinata.*

In altri termini possiamo scegliere la 1° coordinata in n modi e fissata questa scelta possiamo scegliere la 2° in m modi.

Se per tutti i primi n coefficenti si hanno m secondi coefficienti si ha il prodotto condizionato, altrimenti no.

Nota: Una coordinata può non essere scelta.

Definizione 1.11 (*Disposizioni*)

Sia $A = \{1, \dots, n\}$ una disposizione di lungheza k in A, è una sequenza $(a_1, \dots, a_k)$ di A t.c. $a_i \neq a_j, \forall i \neq j$.

Proposizione 1.1 (*Fattoriale Discendente*)

Le disposizioni di lunghezza k in $\{1, \dots, n\}$ sono

$$\underbrace{n(n-1)\cdots(n-k+1)}_{k} = (n)_k$$

Dimostrazione Proposizione 1.1 : Abbiamo n scelte per la prima coordinata. Fissata la prima coordinata ho $n-1$ scelte per la seconda coordinata. Fissate le prime due coordinate ho $n-2$ scelte per la terza coordinata, e cosi via. Abbiamo quindi un prodotto condizonato di tipo $(n, n-1, \ldots, n-k+1)$. ■

Definizione 1.12 (*Permutazioni*)

Una permutazione di lunghezza n è una disposizione di lunghezza n in $\{1, \ldots, n\}$.

Conseguenza: Dal Fattoriale Discreto, il numero di permutazioni di lunghezza n è $(n)_n = 1 \cdot 2 \ldots n = n!$.

Definizione 1.13 (*Combinazioni*)

Sia $A = \{1, \ldots, n\}$, una combinazione è un sotto insieme di A con a elementi. (l'ordine non importa).

Proposizione 1.2 (*Numero Combinazioni*)

Siano a, b, n con $a + b = n$, allora questi 3 insiemi sono in biezione tra loro.

1. *Sotto insieme di $\{1, \ldots, n\}$ con a elementi.*
2. *Sotto insieme di $\{1, \ldots, n\}$ con b elementi.*
3. *Sequenza binarie lunghezza n con a volte 1 e b volte 0.*

Questi insiemi hanno esattamente $\frac{(n)_a}{a!} = \frac{(n)_b}{b!} = \frac{n!}{a!b!}$ elementi. Questo numero $\frac{(n)_a}{a!} = \binom{n}{a} = \binom{n}{a,b}$ (coefficente binomiale).

Coefficente binomiale:

$$(x+y)^n = \sum_{a=0}^{n} \binom{n}{a} x^a y^{n-a} = \sum_{a,b \mid a+b=n} \binom{n}{a, b} x^a y^b$$

Osservazione: Negli esercizi considerare il numero sopra con "l'insieme di elementi" e quello sotto "quante posizioni in cui metterli".

Dimostrazione Proposizione 1.2 : ($Parte1$) La corrispondenza tra 1 e 3 la si dimostra con il seguene esempio: $n = 5, a = 3$

$$\{1,2,3\} \leftrightarrow 11100$$
$$\{1,2,4\} \leftrightarrow 11010$$
$$\{1,2,5\} \leftrightarrow 11001$$
$$\{1,3,4\} \leftrightarrow 10110$$

Tutte le sequenze hanno 3 "1" e 2 "0". Poi 1 e 2 sono in biezione data dal completamento. ($Parte2$) Pensiamo di avere una funzione fatta cosi: Nel dominio abbiamo le disposizioni di lunghezza a in $\{1, \dots, n\}$ e nel codominio abbiamo i sotto insiemi di $\{1, \dots, n\}$ con a elementi. Per esempio:

$$(2,5,1) \mapsto \{1,2,5\}$$
$$(3,5,4) \mapsto \{3,4,5\}$$
$$(3,4,5) \mapsto \{3,4,5\}$$

Non è in biezione perchè non è ignettiva. (Nel caso generale abbiamo una funzione $a! : 1$).

Quindi le disposizioni sono $A!$ volte i sotto insiemi e quindi i sotto insiemi con a elementi sono $\frac{(n)_a}{a!} = \frac{n(n-1)...(b+1)}{a!} = \frac{n(n-1)...3\cdot2\cdot1}{a!b!} = \frac{n!}{a!b!}$. ■

Definizione 1.14 (*Combinazione di 1. . . n*)

Una combinazione di lunghezza a in $\{1, \dots, n\}$ è un sotto insieme di $\{1, \dots, n\}$ con a elementi.

Definizione 1.15 (*Combinazione tipo (a,b)*)

Una combinazione di tipo (a, b) con $(a + b = n)$ è una coppia ordinata (A, B) di sotto insiemi di $\{1, \dots, n\}$ con $|A| = a, |B| = b, A \cup B = \{1, \dots, n\}$.

Definizione 1.16 (*Combinazione tipo (a,b,c)*)

Una combinazione di tipo (a, b, c) con $(a+b+c = n)$ è una terna ordinata (A, B, C) di sotto insiemi di $\{1, \dots, n\}$ con $|A| = a, |B| = b, |C| = c, A \cup B \cup C = \{1, \dots, n\}$.

Definizione 1.17 (*Anagramma*)

Sequenze binarie, ternarie, quaternarie, ecc, ordinate di numeri $\{1, \dots, n\}$, con $n = a + b + \dots$, di tipo $(a, b, c, \dots)$ in biezione con le sequenze in cui compare a volte "1", b volte "2", c volte "3", ecc.

Esempio di riferimento (terna):

$$(\{1,2\},\{3\},\{4\}) \leftrightarrow (1,1,2,3)$$
$$(\{1,2\},\{4\},\{3\}) \leftrightarrow (1,1,3,2)$$
$$(\{1,3\},\{2\},\{4\}) \leftrightarrow (1,2,1,3)$$
$$(\{2,4\},\{1\},\{3\}) \leftrightarrow (2,1,3,1)$$

Proposizione 1.3 (*Binomio Combinazioni tipo (a,b,c)*)

Le combinazioni di tipo (a, b, c) con $(a + b + c = n)$ sono $\binom{n}{a,b,c} = \frac{n!}{a!b!c!}$.

Dimostrazione Proposizione 1.3 : Posso scegliere A in $\binom{n}{a}$ modi. Fissato A posso sciegliere B in $\binom{n-a}{b}$ modi. C è univocamente determinato da A, B.

Il numero di combinazioni di tipo (a, b, c) è $\binom{n}{a} \cdot \binom{n-a}{b} = \frac{n!}{a!(n-a)!} \cdot \frac{(n-a)!}{b!(n-a-b)!} = \frac{n!}{a!b!c!}$. ∎

Osservazione: $\binom{n}{a,b,c} = \binom{n}{b,c,a}$=..., in particolare con due indici abbiamo $\binom{n}{a} = \binom{n}{b}$ se $(a + b = n)$.

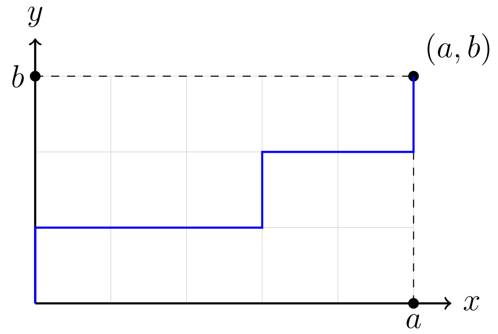
Proposizione 1.4 (*Somma binomi*)

$\binom{n}{a,b} = \binom{n-1}{a-1,b} + \binom{n-1}{a,b-1}$ *che è uguale a* $\binom{n}{a} = \binom{n-1}{a-1} + \binom{n-1}{a}$.
Più in generale $\binom{n}{a,b,c} = \binom{n-1}{a-1,b,c} + \binom{n-1}{a,b-1,c} + \binom{n-1}{a,b,c-1}$.

Dimostrazione Proposizione 1.4 : Le combinazioni di tipo (a, b, c) sono in biezione con le combinazioni di tipo:

- $\{(A, B, C) \mid n \in A\}$ sono $\binom{n-1}{a-1,b,c}$.
- $\{(A, B, C) \mid n \in B\}$ sono $\binom{n-1}{a,b-1,c}$.
- $\{(A, B, C) \mid n \in C\}$ sono $\binom{n-1}{a,b,c-1}$. ∎

Cammino Reticolare



Il cammino reticolare nel piano cartesiano è il percorso che congiunge l'orgine degli assi a un punto (a,b) tramite *passi* verticali o orrizontali di 1.

Ottima interpretazione grafica di una combinazione di tipo (a,b). Quanti sono i cammini reticolari da (0,0) a (a,b)?

Possiamo codificare i passi inverticali con "1" e i passi orrizontali con "0". Cosi i cammini grafici diventano sequenze binarie. La lunghezza di tali sequenze è $a+b$, con a volte "0" e b volte "1". Abbiamo ottenuto un anagramma di tipo (a,b).

Osserviamo che abbiamo una biezione tra cammini e anagrammi e i cammini sono quindi $\binom{a+b}{a,b}$.

Numeri di Fibonacci

Conta i sotto insiemi di $\{1,\ldots,n\}$ che non hanno 2 numeri consecutivi.

- F_n = numero sotto insiemi di $\{1,\ldots,n\}$ senza consecutivi.
- $F_{n,k}$ = numero sotto insiemi di $\{1,\ldots,n\}$ di cardinalità k senza consecutivi.

$$F_n = \sum_{k=0}^{n} F_{n,k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n-k+1}{k}$$

Dimostrazione : Arriviamo alla formula con un esempio, $F_{8,3}$. Vediamo questi insiemi come sequenze di lunghezza 8 con 3 "1" non consecutivi (astrazione simile Camminio Reticolare). Devo riuscire ad'usare il principio d'equivalenza con un insieme di cui so la cardinalità. Sò che dopo il primo e secondo "1" c'è sempre uno "0", quindi cancello questo "0" cosi ho sequenze da 6. Ora "1" possono essere consecutivi ma posso tornare univocamente alla precedente rappresentazione, quindi è biunivoco. Deduciamo che $F_{8,3} = \binom{6}{3} = 20$.

In generale $F_{n,k}$ sono le sequenze di lunghezza n con k volte "1", non consecutivi. Cancellando gli "0" che seguono i primi $k-1$ "1" otteniamo una sequenza binaria lunga $n-k+1$, con k "1".

Tali sequenze sono $F_{n,k} = \binom{n-k+1}{k}$ e quindi $F_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n-k+1}{k}$. A n non ci arrivo perchè il coefficente binomiale da 0 quando $k > n-k+1$. ■

Versione ricorsiva di $F_n, \forall n \geqslant 3$ si ha

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$$

Dimostrazione : Suddividiamo i sotto insiemi di $\{1,\ldots,n\}$ senza consecutivi in due gruppi.

1. A_n quelli che contengono n.
2. B_n quelli che non contengono n.

Notare che $F_n = |F_{n-1}| + |F_{n-2}|$. In generale gli elementi di B_n non contengono n, quindi $B_n = F_{n-1}$ e togliendo n agli elementi di A_n rimane un qualunque sotto insiemi di $\{1, \ldots, n-2\}$ senza consecutivi. Quindi $|A_n| = F_{n-2}$. ■

Definizione 1.18 (*Principio di inclusione esclusione*)

La cardinalità dell'unione di due insiemi:

$$|A \cup B| = |A| - |B| - |A \cap B|$$

La cardinalità dell'unione di tre insiemi:

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$$

La cardinalità dell'unione di n insiemi:

$$|A_1 \cup \cdots \cup A_n| = \sum_{\emptyset \neq I \subseteq \{1,\ldots,n\}}^{n} (-1)^{|I|-1} |\bigcap_{i \in I} A_i|$$

Definiamo l'insieme complementare con $(A_1, \ldots, A_n)^C$. Permette di risolvere tanti quesiti più facilmente.

Per convenzine definiamo $\bigcap_{i\in\emptyset} = U$, l'intero insieme.

Quindi otteniamo che $|(A_1, \ldots, A_n)^C| = |\bigcap_{i\in\emptyset} A_i| + \sum_{\emptyset \neq I \subseteq \{1,\ldots,n\}}^{n} (-1)^{|I|-1} |\bigcap_{i\in I} A_i|$ che è come dire $\sum_{I \subseteq \{1,\ldots,n\}}^{n} (-1)^{|I|} |\bigcap_{i \in I} A_i|$.

Definizione 1.19 (*Sequenze k-piene*)

Una sequenza k-piena è una sequenza in cui ogni numero da 1 a k compare almeno una volta. (non compaiono altri numeri).

Usando il principio di inclusione esclusione scopro che il numero di sequenze k-piene lunghe n e con coefficenti in $\{1, \ldots, k\}$ è

$$|S| = \sum_{j=0}^{k} (-1)^j \binom{k}{j} (k-j)^n$$

Definizione 1.20 (*Scombussolamenti*)

Uno scombussolamento è una permutazione di $\{1, \ldots, n\}$ in cui per ogni i il numero non sta al posto i.

Usando il principio di inclusione esclusione scopro che il numero di scombussolamenti di n coefficenti è

$$|S| = \sum_{j=0}^{n} (-1)^j (n)_{n-j}$$

Definizione 1.21 (*Partizione*)

Una partizione di A è una suddivisione in sotto insiemi di A. Cioè un insieme di sotto insiemi detti blocchi della partizione $\{s_1, s_2, s_3, \dots\}$ tale che:

1. $S_i \cap S_j = \emptyset, \forall i \neq j$
2. $\overset{\cup}{i}\ S_i = A$

In altre parole la partizione è la suddivisione e i blocchi sono i pezzi della partizione.

Nota: Le partizioni possono essere usate per "raggruppare" le permutazioni degli stessi elementi. Non è una fuzione biunivoca.

Definizione 1.22 (*Numero di Bell*)

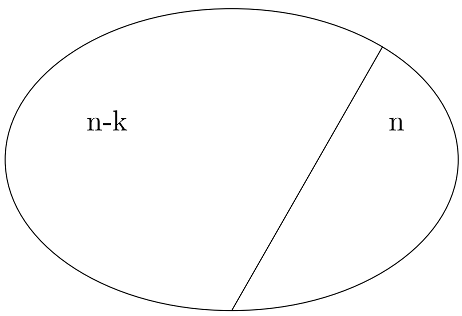
Il numero di partizioni di $\{1, \dots, n\}$ si dice numero di Bell e si indica con B_n. Si calcola con la formula ricorsiva per $\forall n \geqslant 2$:

$$B_n = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} B_n$$

Si assume $B_n = 1$ per convenzione.

Dimostrazione Definizione 1.22 : Poniamo $B_{n,k}$ come il numero di partizioni di $\{1, \dots, n\}$ in cui n compare in un blocco con k elementi.

Calcoliamo $B_{n,k}$:



I numeri nel blocco che contiene n li possiamo scegliere in $\binom{n-1}{k-1}$ modi. Gli altri $n-k$ numeri li possiamo partizionare in B_{n-k} modi. Implicando:

$$B_{n,k} = \binom{n-1}{k-1} B_{n-k}$$

Ottenendo così

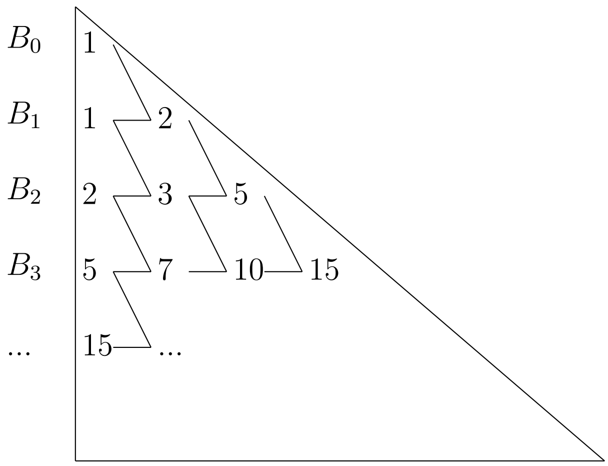
$$B_n = \sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1} B_{n-k}$$

Equivalente a quella dell'enunciato ponendo $h = n-k$:

$$B_h = \sum_{h=0}^{n-1} \binom{n-1}{n-h-1} B_h = B_h = \sum_{h=0}^{h-1} \binom{h-1}{h} B_h \qquad \blacksquare$$

Triangolo di Bell

Trucco per calcolare il numero di Bell:



Definizione 1.23 (*Numero di Stirling*)

Indichiamo con $S_{n,k}$ il numero di partizioni di $\{1,\dots,n\}$ in k blocchi. Si calcola con la formula ricorsiva:

$$S_{n,k} = S_{n-1,k-1} + kS_{n-1,k}$$

Si assume $S_{n,n} = 1$ e $S_n, 1 = 1$.

Dimostrazione Definizione 1.23 : Contiamo le partizioni in k blocchi in cui n è da solo. Gli altri $n-1$ numeri devono essere partizionati in $k-1$ blocchi: $S_{n-1,k-1}$ scelte.

Contiamo ora quelle in cui n non è in blocco da solo (procedendo per scelte successive):

- Partizioniamo i numeri da 1 a $n-1$ in k blocchi: $S_{n-1,k}$ scelte.
- Scegliamo in quale blocco inserire n: k scelte. ■