

Matematica discreta e Probabilità

Leonardo Mengozzi

Titoletti indice link a rispettive sezioni, in alto a sinistra "←Indice" link a Indice e nome dimostrazioni link al teorema, definizione, ecc da dimostrare.

Indice

| | | |
|----------|--|----------|
| 1 | Combinatoria | 3 |
| | Insiemi | 3 |
| | Definizione 1.1 (Cardinalità) | 3 |
| | Definizione 1.2 (Insieme finito) | 3 |
| | Definizione 1.3 (Cardinalità insiemi infiniti) | 3 |
| | Definizione 1.4 (Insieme numerabile) | 3 |
| | Definizione 1.5 (Insieme Discreto) | 3 |
| | Definizione 1.6 (Combinatoria di base) | 3 |
| | Definizione 1.7 (Prodotto Cartesiano) | 4 |
| | Definizione 1.8 (Sequenza) | 4 |
| | Definizione 1.9 (Insieme delle parti) | 4 |
| | Teorema 1.1 (Insieme delle parti) | 4 |
| | Principi di base | 4 |
| | Definizione 1.10 (Prodotto Condizionato) | 5 |
| | Definizione 1.11 (Disposizioni) | 5 |
| | Proposizione 1.1 (Fattoriale Discendente) | 5 |
| | Definizione 1.12 (Permutazioni) | 6 |
| | Definizione 1.13 (Combinazioni) | 6 |
| | Proposizione 1.2 (Numero Combinazioni) | 6 |
| | Definizione 1.14 (Combinazione di $1 \dots n$) | 7 |
| | Definizione 1.15 (Combinazione tipo (a,b)) | 7 |
| | Definizione 1.16 (Combinazione tipo (a,b,c)) | 7 |
| | Definizione 1.17 (Anagramma) | 7 |
| | Proposizione 1.3 (Binomio Combinazioni tipo (a,b,c)) | 8 |
| | Proposizione 1.4 (Somma binomi) | 8 |
| | Cammino Reticolare | 8 |
| | Numeri di Fibonacci | 9 |

| | |
|---|-----------|
| Definizione 1.18 (Principio di inclusione esclusione) | 10 |
| Definizione 1.19 (Sequenze k-piene) | 10 |
| Definizione 1.20 (Scombussolamenti) | 10 |
| Definizione 1.21 (Partizione) | 11 |
| Definizione 1.22 (Numero di Bell) | 11 |
| Triangolo di Bell | 12 |
| Definizione 1.23 (Numero di Stirling) | 12 |
| 2 Statistica Descrittiva | 14 |
| Definizione 2.1 (Popolazione) | 14 |
| Definizione 2.2 (Carattere) | 14 |
| Definizione 2.3 (Unità (Statistica)) | 14 |
| Definizione 2.4 (Campione) | 14 |
| Definizione 2.5 (Modalità) | 14 |
| Definizione 2.6 (Classi) | 14 |
| Definizione 2.7 (Frequenza (assoluta)) | 14 |
| Definizione 2.8 (Frequenza relativa) | 15 |
| Definizione 2.9 (Istogramma) | 15 |
| Definizione 2.10 (Media Campionaria) | 15 |
| Definizione 2.11 (Linearità della media) | 16 |

1 Combinatoria

”Serve a contare quanti elementi ci sono in un insieme. (risponde alla domanda ”Quante sono?”).”

Insiemi

Negli insiemi non conta l'ordine (infatti si usano le ”{}”, se contava l'ordine si usavano le ”()”) e gli elementi ripetuti. Insieme finito $\{1, \dots, n\}$. Insieme infinito $\{1, \dots\}$.

Definizione 1.1 (*Cardinalità*)

Un insieme A ha cardinalità n se contiene esattamente n elementi, o equivalentemente se \exists una corrispondenza biunivoca $A \longleftrightarrow \{1, 2, \dots, n\}$.

La cardinalità si indica $|A| = n$.

Definizione 1.2 (*Insieme finito*)

Un insieme A si dice finito se $\exists n \in \mathbb{N}$ t.c. A contiene esattamente n elementi distinti.

Osservazione: L'insieme vuoto è l'unico insieme finito di cardinalità 0.

Definizione 1.3 (*Cardinalità insiemi infiniti*)

Due insiemi infiniti hanno la stessa cardinalità se \exists una biezione (Corrispondenza biunivoca) tra di loro.

Definizione 1.4 (*Insieme numerabile*)

Un insieme A si dice numerabile se ha la stessa cardinalità di $\{1, 2, 3, \dots\}$.

In altre parole un insieme è numerabile se i suoi elementi possono essere messi in un a fila infinità.

Insiemi numerabili sono \mathbb{N} (anche se più grande di $\{1, 2, 3, \dots\}$), $\mathbb{Z} = \{0, 1, -1, 2, -2, 3, \dots\}$, $\mathbb{Q}_{>0}$ dalla dimostrazione classica di Cantor.

Un insieme non numerabile sono delle sequenze infinite di bit 0/1. Dimostrazione non riportata.

Definizione 1.5 (*Insieme Discreto*)

Un insieme è discreto se è finito o numerabile.

Definizione 1.6 (*Combinatoria di base*)

Costruisce schemi ”complessi” partendo da schemi semplici riuscendo a controllarne la cardinalità. (si opera solo con insiemi finiti).

Definizione 1.7 (*Prodotto Cartesiano*)

Siano A, B insiemi il cui prodotto cartesiano $A \times B$ è l'insieme delle coppie ordinate $(a, b), a \in A, b \in B$.
generalizzando:

$$A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_k = \{(a_1, \dots, a_k) \mid a_i \in A_i, \forall i \in 1, \dots, k\}$$

n-esima potenza cartesiana di n, ovvero $A \times \cdots \times A = A^n$.

Definizione 1.8 (*Sequenza*)

Una sequenza (o lista) finita di lunghezza n di elementi di A è un elemento (a_1, \dots, a_n) del prodotto cartesiano A^n .

Sono **successioni** delle sequenze di lunghezza ∞ , tipo $\{a_1, \dots\}$.

Definizione 1.9 (*Insieme delle parti*)

Sia A un insieme, l'insieme delle parti $\mathcal{P}(A)$ è l'insieme i cui elementi sono tutti i sotto insiemi di A , inclusi l'insieme vuoto \emptyset e A stesso. (insieme i cui elementi sono insiemi).

La cardinalità dell'insieme delle parti è $|\mathcal{P}A| = 2^{|A|}$.

Teorema 1.1 (*Insieme delle parti*)

Sia A un insieme di $|A| = n$, allora \exists una corrispondenza biunivoca tra $\mathcal{P}(A)$ e $\{0, 1\}^n$.

Dimostrazione Teorema 1.1 : Vediamo un caso particolare $A = \{1, 2, 3\}$

$\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \emptyset, A$

\updownarrow

$100 = (1, 0, 0), 010, 001, 110, 101, 011, 000, 111$

Per il caso generale $|A| = n, A = \{a_1, \dots, a_n\}$ procediamo come prima facendo corrispondere ad'un sotto insieme $S \subseteq A$ la sequenza binaria B il cui i -esimo bit è $1 \iff a_i \in S$. ■

Principi di base

1. **Principio di ugualianza:** Siano A, B insiemi qualunque in corrispondenza biunivoca allora questi hanno lo stesso numero di elementi.

Generalizzazione del Principio di ugualianza: $F : A \rightarrow B$ si dice $k : 1$ (k a 1) se è surriettiva e a ogni elemento di B corrispondono esattamente

k elementi di A . In questo caso $|A| = k|B|$. Il principio di ugualianza corrisponde al caso $k = 1$.

2. **Principio della somma:** Siano A, B insiemi qualunque disgiunti (non hanno elementi in comune), allora $|A \cup B| = |A| + |B|$.

Ricorda: Si dice Distinti se gli insiemi sono diversi per almeno un elemento.

3. **Principio del prodotto:** Siano A, B insiemi qualunque, allora $|A \times B| = |A| \cdot |B|$.

Definizione 1.10 (*Prodotto Condizionato*)

Siano A, B insiemi. $C \subseteq A \times B$ è sotto insieme del prodotto cartesiano e si dice prodotto condizionato di tipo (n, m) se sono soddisfatte queste condizioni:

1. $\exists n$ elementi di A che compaiono come 1° coefficiente in un elemento di C .
2. Fissata la 1° coordinata di un elemento di C , $\exists m$ elementi di B che possono essere aggiunti come 2° coordinata.

In altri termini possiamo scegliere la 1° coordinata in n modi e fissata questa scelta possiamo scegliere la 2° in m modi.

Se per tutti i primi n coefficienti si hanno m secondi coefficienti si ha il prodotto condizionato, altrimenti no.

Nota: Una coordinata può non essere scelta.

Definizione 1.11 (*Disposizioni*)

Sia $A = \{1, \dots, n\}$ una disposizione di lunghezza k in A , è una sequenza (a_1, \dots, a_k) di A t.c. $a_i \neq a_j, \forall i \neq j$.

Proposizione 1.1 (*Fattoriale Discendente*)

Le disposizioni di lunghezza k in $\{1, \dots, n\}$ sono

$$\underbrace{n(n-1) \cdots (n-k+1)}_k = (n)_k$$

Dimostrazione Proposizione 1.1: Abbiamo n scelte per la prima coordinata. Fissata la prima coordinata ho $n-1$ scelte per la seconda coordinata. Fissate le prime due coordinate ho $n-2$ scelte per la terza

coordinata, e così via. Abbiamo quindi un prodotto condizionato di tipo $(n, n-1, \dots, n-k+1)$. ■

Definizione 1.12 (*Permutazioni*)

Una permutazione di lunghezza n è una disposizione di lunghezza n in $\{1, \dots, n\}$.

Conseguenza: Dal Fattoriale Discreto, il numero di permutazioni di lunghezza n è $(n)_n = 1 \cdot 2 \dots n = n!$.

Definizione 1.13 (*Combinazioni*)

Sia $A = \{1, \dots, n\}$, una combinazione è un sotto insieme di A con a elementi. (l'ordine non importa).

Proposizione 1.2 (*Numero Combinazioni*)

Siano a, b, n con $a + b = n$, allora questi 3 insiemi sono in biezione tra loro.

1. Sotto insieme di $\{1, \dots, n\}$ con a elementi.
2. Sotto insieme di $\{1, \dots, n\}$ con b elementi.
3. Sequenza binarie lunghezza n con a volte 1 e b volte 0.

Questi insiemi hanno esattamente $\frac{(n)_a}{a!} = \frac{(n)_b}{b!} = \frac{n!}{a!b!}$ elementi. Questo numero $\frac{(n)_a}{a!} = \binom{n}{a} = \binom{n}{a,b}$ (coefficiente binomiale).

Coefficiente binomiale:

$$(x + y)^n = \sum_{a=0}^n \binom{n}{a} x^a y^{n-a} = \sum_{a,b|a+b=n} \binom{n}{a,b} x^a y^b$$

Osservazione: Negli esercizi considerare il numero sopra con "l'insieme di elementi" e quello sotto "quante posizioni in cui metterli".

Dimostrazione Proposizione 1.2: (*Parte1*) La corrispondenza tra 1 e 3 la si dimostra con il seguente esempio: $n = 5, a = 3$

$$\{1, 2, 3\} \leftrightarrow 11100$$

$$\{1, 2, 4\} \leftrightarrow 11010$$

$$\{1, 2, 5\} \leftrightarrow 11001$$

$$\{1, 3, 4\} \leftrightarrow 10110$$

Tutte le sequenze hanno 3 "1" e 2 "0". Poi 1 e 2 sono in biezione data dal completamento. (*Parte2*) Pensiamo di avere una funzione fatta

così: Nel dominio abbiamo le disposizioni di lunghezza a in $\{1, \dots, n\}$ e nel codominio abbiamo i sottoinsiemi di $\{1, \dots, n\}$ con a elementi. Per esempio:

$$(2, 5, 1) \mapsto \{1, 2, 5\}$$

$$(3, 5, 4) \mapsto \{3, 4, 5\}$$

$$(3, 4, 5) \mapsto \{3, 4, 5\}$$

Non è in biezione perché non è iniettiva. (Nel caso generale abbiamo una funzione $a! : 1$).

Quindi le disposizioni sono $A!$ volte i sottoinsiemi e quindi i sottoinsiemi con a elementi sono $\frac{(n)_a}{a!} = \frac{n(n-1)\dots(b+1)}{a!} = \frac{n(n-1)\dots 3 \cdot 2 \cdot 1}{a!b!} = \frac{n!}{a!b!}$. ■

Definizione 1.14 (*Combinazione di $1 \dots n$*)

Una combinazione di lunghezza a in $\{1, \dots, n\}$ è un sottoinsieme di $\{1, \dots, n\}$ con a elementi.

Definizione 1.15 (*Combinazione tipo (a, b)*)

Una combinazione di tipo (a, b) con $(a + b = n)$ è una coppia ordinata (A, B) di sottoinsiemi di $\{1, \dots, n\}$ con $|A| = a, |B| = b, A \cup B = \{1, \dots, n\}$.

Definizione 1.16 (*Combinazione tipo (a, b, c)*)

Una combinazione di tipo (a, b, c) con $(a + b + c = n)$ è una terna ordinata (A, B, C) di sottoinsiemi di $\{1, \dots, n\}$ con $|A| = a, |B| = b, |C| = c, A \cup B \cup C = \{1, \dots, n\}$.

Definizione 1.17 (*Anagramma*)

Sequenze binarie, ternarie, quaternarie, ecc, ordinate di numeri $\{1, \dots, n\}$, con $n = a + b + \dots$, di tipo (a, b, c, \dots) in biezione con le sequenze in cui compare a volte "1", b volte "2", c volte "3", ecc.

Esempio di riferimento (terna):

$$(\{1, 2\}, \{3\}, \{4\}) \leftrightarrow (1, 1, 2, 3)$$

$$(\{1, 2\}, \{4\}, \{3\}) \leftrightarrow (1, 1, 3, 2)$$

$$(\{1, 3\}, \{2\}, \{4\}) \leftrightarrow (1, 2, 1, 3)$$

$$(\{2, 4\}, \{1\}, \{3\}) \leftrightarrow (2, 1, 3, 1)$$

Proposizione 1.3 (*Binomio Combinazioni tipo (a, b, c)*)

Le combinazioni di tipo (a, b, c) con $(a + b + c = n)$ sono $\binom{n}{a, b, c} = \frac{n!}{a!b!c!}$.

Dimostrazione Proposizione 1.3: Posso scegliere A in $\binom{n}{a}$ modi. Fissato A posso scegliere B in $\binom{n-a}{b}$ modi. C è univocamente determinato da A, B .

Il numero di combinazioni di tipo (a, b, c) è $\binom{n}{a} \cdot \binom{n-a}{b} = \frac{n!}{a!(n-a)!} \cdot \frac{(n-a)!}{b!(n-a-b)!} = \frac{n!}{a!b!c!}$. ■

Osservazione: $\binom{n}{a, b, c} = \binom{n}{b, c, a} = \dots$, in particolare con due indici abbiamo $\binom{n}{a} = \binom{n}{b}$ se $(a + b = n)$.

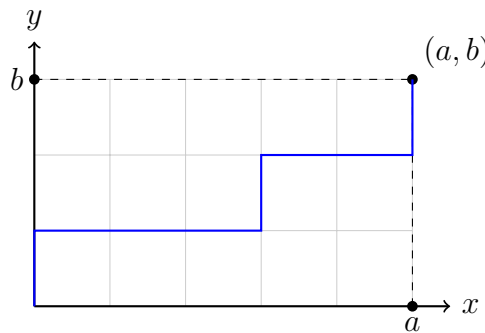
Proposizione 1.4 (*Somma binomi*)

$\binom{n}{a, b} = \binom{n-1}{a-1, b} + \binom{n-1}{a, b-1}$ che è uguale a $\binom{n}{a} = \binom{n-1}{a-1} + \binom{n-1}{a}$.
Più in generale $\binom{n}{a, b, c} = \binom{n-1}{a-1, b, c} + \binom{n-1}{a, b-1, c} + \binom{n-1}{a, b, c-1}$.

Dimostrazione Proposizione 1.4: Le combinazioni di tipo (a, b, c) sono in biiezione con le combinazioni di tipo:

- $\{(A, B, C) \mid n \in A\}$ sono $\binom{n-1}{a-1, b, c}$.
- $\{(A, B, C) \mid n \in B\}$ sono $\binom{n-1}{a, b-1, c}$.
- $\{(A, B, C) \mid n \in C\}$ sono $\binom{n-1}{a, b, c-1}$. ■

Cammino Reticolare



Il cammino reticolare nel piano cartesiano è il percorso che congiunge l'origine degli assi a un punto (a, b) tramite *passi* verticali o orizzontali di 1.

Ottima interpretazione grafica di una combinazione di tipo (a, b) . Quanti sono i cammini reticolari da $(0, 0)$ a (a, b) ?

Possiamo codificare i passi verticali con "1" e i passi orizzontali con "0". Così i cammini grafici diventano sequenze binarie. La lunghezza di

tali sequenze è $a + b$, con a volte "0" e b volte "1". Abbiamo ottenuto un anagramma di tipo (a, b) .

Osserviamo che abbiamo una biezione tra cammini e anagrammi e i cammini sono quindi $\binom{a+b}{a, b}$.

Numeri di Fibonacci

Conta i sotto insiemi di $\{1, \dots, n\}$ che non hanno 2 numeri consecutivi.

- F_n = numero sotto insiemi di $\{1, \dots, n\}$ senza consecutivi.
- $F_{n,k}$ = numero sotto insiemi di $\{1, \dots, n\}$ di cardinalità k senza consecutivi.

$$F_n = \sum_{k=0}^n F_{n,k} = \sum_{k=0}^n \binom{n-k+1}{k}$$

Dimostrazione: Arriviamo alla formula con un esempio, $F_{8,3}$. Vediamo questi insiemi come sequenze di lunghezza 8 con 3 "1" non consecutivi (astrazione simile Camminio Reticolare). Devo riuscire ad usare il principio d'equivalenza con un insieme di cui so la cardinalità. Sò che dopo il primo e secondo "1" c'è sempre uno "0", quindi cancello questo "0" così ho sequenze da 6. Ora "1" possono essere consecutivi ma posso tornare univocamente alla precedente rappresentazione, quindi è biunivoco. Deduciamo che $F_{8,3} = \binom{6}{3} = 20$.

In generale $F_{n,k}$ sono le sequenze di lunghezza n con k volte "1", non consecutivi. Cancellando gli "0" che seguono i primi $k-1$ "1" otteniamo una sequenza binaria lunga $n-k+1$, con k "1".

Tali sequenze sono $F_{n,k} = \binom{n-k+1}{k}$ e quindi $F_n = \sum_{k=0}^n \binom{n-k+1}{k}$. A n non ci arrivo perchè il coefficiente binomiale da 0 quando $k > n-k+1$. ■

Versione ricorsiva di $F_n, \forall n \geq 3$ si ha

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$$

Dimostrazione: Suddividiamo i sotto insiemi di $\{1, \dots, n\}$ senza consecutivi in due gruppi.

1. A_n quelli che contengono n .
2. B_n quelli che non contengono n .

Notare che $F_n = |F_{n-1}| + |F_{n-2}|$. In generale gli elementi di B_n non contengono n , quindi $B_n = F_{n-1}$ e togliendo n agli elementi di A_n rimane un qualunque sottoinsieme di $\{1, \dots, n-2\}$ senza consecutivi. Quindi $|A_n| = F_{n-2}$. ■

Definizione 1.18 (*Principio di inclusione esclusione*)

La cardinalità dell'unione di due insiemi:

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

La cardinalità dell'unione di tre insiemi:

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$$

La cardinalità dell'unione di n insiemi:

$$|A_1 \cup \dots \cup A_n| = \sum_{\emptyset \neq I \subseteq \{1, \dots, n\}} (-1)^{|I|-1} \left| \bigcap_{i \in I} A_i \right|$$

Definiamo l'insieme complementare con $(A_1, \dots, A_n)^C$. Permette di risolvere tanti quesiti più facilmente.

Per convenzione definiamo $\bigcap_{i \in \emptyset} = U$, l'intero insieme.

Quindi otteniamo che $|(A_1, \dots, A_n)^C| = |\bigcap_{i \in \emptyset} A_i| + \sum_{\emptyset \neq I \subseteq \{1, \dots, n\}} (-1)^{|I|-1} \left| \bigcap_{i \in I} A_i \right|$ che è come dire $\sum_{I \subseteq \{1, \dots, n\}} (-1)^{|I|} \left| \bigcap_{i \in I} A_i \right|$.

Definizione 1.19 (*Sequenze k-piene*)

Una sequenza k -piena è una sequenza in cui ogni numero da 1 a k compare almeno una volta. (non compaiono altri numeri).

Usando il principio di inclusione esclusione scopro che il numero di sequenze k -piene lunghe n e con coefficienti in $\{1, \dots, k\}$ è

$$|S| = \sum_{j=0}^k (-1)^j \binom{k}{j} (k-j)^n$$

Definizione 1.20 (*Scombussolamenti*)

Uno scombussolamento è una permutazione di $\{1, \dots, n\}$ in cui per ogni i il numero non sta al posto i .

Usando il principio di inclusione esclusione scopro che il numero di scomposizioni di n coefficienti è

$$|S| = \sum_{j=0}^n (-1)^j (n)_{n-j}$$

Definizione 1.21 (*Partizione*)

Una partizione di A è una suddivisione in sotto insiemi di A . Cioè un insieme di sotto insiemi detti blocchi della partizione $\{s_1, s_2, s_3, \dots\}$ tale che:

1. $S_i \cap S_j = \emptyset, \forall i \neq j$
2. $\bigcup_i S_i = A$

In altre parole la partizione è la suddivisione e i blocchi sono i pezzi della partizione.

Nota: Le partizioni possono essere usate per "raggruppare" le permutazioni degli stessi elementi. Non è una funzione biunivoca.

Definizione 1.22 (*Numero di Bell*)

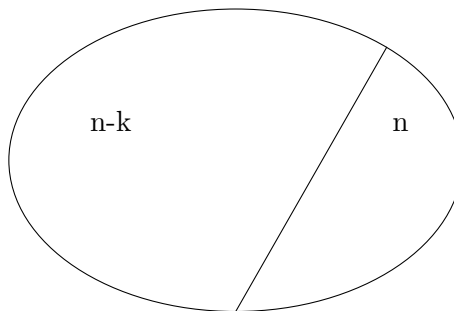
Il numero di partizioni di $\{1, \dots, n\}$ si dice numero di Bell e si indica con B_n . Si calcola con la formula ricorsiva per $\forall n \geq 2$:

$$B_n = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} B_k$$

Si assume $B_0 = 1$ per convenzione.

Dimostrazione Definizione 1.22: Poniamo $B_{n,k}$ come il numero di partizioni di $\{1, \dots, n\}$ in cui n compare in un blocco con k elementi.

Calcoliamo $B_{n,k}$:



I numeri nel blocco che contiene n li possiamo scegliere in $\binom{n-1}{k-1}$ modi.
 Gli altri $n - k$ numeri li possiamo partizionare in B_{n-k} modi. Implicando:

$$B_{n,k} = \binom{n-1}{k-1} B_{n-k}$$

Ottenendo così

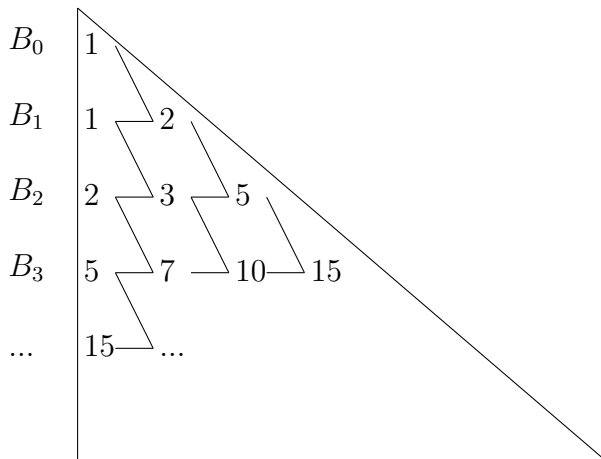
$$B_n = \sum_{k=1}^n \binom{n-1}{k-1} B_{n-k}$$

Equivalente a quella dell'enunciato ponendo $h = n - k$:

$$B_h = \sum_{h=0}^{n-1} \binom{n-1}{n-h-1} B_h = B_h = \sum_{h=0}^{h-1} \binom{h-1}{h} B_h \quad \blacksquare$$

Triangolo di Bell

Trucco per calcolare il numero di Bell:



Definizione 1.23 (Numero di Stirling)

Indichiamo con $S_{n,k}$ il numero di partizioni di $\{1, \dots, n\}$ in k blocchi. Si calcola con la formula ricorsiva:

$$S_{n,k} = S_{n-1,k-1} + kS_{n-1,k}$$

Si assume $S_{n,n} = 1$ e $S_n, 1 = 1$.

Dimostrazione Definizione 1.23: Contiamo le partizioni in k blocchi in cui n è da solo. Gli altri $n - 1$ numeri devono essere partizionati in $k - 1$ blocchi: $S_{n-1, k-1}$ scelte.

Contiamo ora quelle in cui n non è in blocco da solo (procedendo per scelte successive):

- Partizioniamo i numeri da 1 a $n - 1$ in k blocchi: $S_{n-1, k}$ scelte.
- Scegliamo in quale blocco inserire n : k scelte. ■

2 Statistica Descrittiva

”Si occupa di presentare/descrivere i dati raccolti in un indagine nel modo migliore possibile (sintetico, comunicativo).”

Definizione 2.1 (*Popolazione*)

Insieme su cui vogliamo effettuare un'indagine.

Definizione 2.2 (*Carattere*)

Un carattere è quello che vogliamo studiare dalla popolazione.

- **Carattere Quantitativo** se assumiamo valori numerici che esprimono una misura.
- **Carattere Qualitativo** se non è qualitativo.

I caratteri sarebbero distinguibili anche in **discreti e continui**.

Definizione 2.3 (*Unità (Statistica)*)

Un unità (statistica) è un elemento della popolazione.

Definizione 2.4 (*Campione*)

Un campione è un sotto insieme (rappresentativo) della popolazione del quale possiamo determinare il valore del campione.

Definizione 2.5 (*Modalità*)

La modalità sono i valori che può assumere il carattere.

Definizione 2.6 (*Classi*)

*Se le modalità sono molto numerose (o infinite) è conveniente raggrupparle in **classi**.*

*Una classe, solitamente, è determinata dal **confine inferiore e superiore**. Il **valore centrale** di una classe è la media dei confini.*

Se abbiamo un solo confine chi fa l'indagine può decidere un valore rappresentativo come valore centrale.

Definizione 2.7 (*Frequenza (assoluta)*)

La frequenza (assoluta) di una modalità è il numero di volte in cui compare nel campione.

Definizione 2.8 (*Frequenza relativa*)

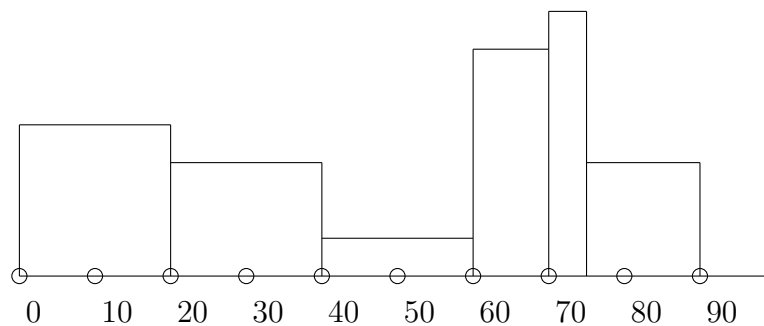
La frequenza relativa è il rapporto fra la frequenza assoluta e la cardinalità del campione.

$$F_R = \frac{F_A}{|\text{campione}|}$$

Definizione 2.9 (*Istogramma*)

L'istogramma è un grafico che rappresenta i risultati di un'indagine.

Ad'ogni modalità (classe) è associato un rettangolo con base proporzionale all'ampiezza e area proporzionale alla frequenza.

**Definizione 2.10 (*Media Campionaria*)**

La media campionaria si effettua su un carattere quantitativo su un campione di n elementi.

$$\bar{x} = \bar{x}_n = \frac{1}{n}(x_1 + \dots + x_n)$$

Ricordiamo delle proprietà delle sommatorie:

- $\sum_{i=1}^n (a_i + b_i) = \sum_{i=1}^n a_i + \sum_{i=1}^n b_i$
- $\sum_{i=1}^n c = nc$
- $\sum_{i=1}^n (ca_i) = c \sum_{i=1}^n a_i$
- $\sum_{i=1}^n (\sum_{j=1}^n (a_i b_j)) = (\sum_{i=1}^n a_i) \cdot (\sum_{i=1}^n b_i)$

Definizione 2.11 (*Linearità della media*)

Siano x, y, z tre caratteri legati dalla relazione $z = ax + by$ con costanti

$a, b.$

$$\bar{z} = a\bar{x} + b\bar{y}$$

Caso particolare è con $y = 1$ ottenendo così $z = ax + b$ e quindi $\bar{z} = a\bar{x} + b$.
Può essere usato per semplificare i conti.

Dimostrazione Definizione 2.11 :

$$\bar{z} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n z_i = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (ax_i + by_i) = \frac{1}{n} a \sum_{i=1}^n x_i + \frac{1}{n} b \sum_{i=1}^n y_i = a\bar{x} + b\bar{y} \quad \blacksquare$$