Matematica discreta e Probabilità

Leonardo Mengozzi

Indice

1 Combinatoria

> "Serve a contare quanti elementi ci sono in un insieme. (risponde alla domanda "Quante sono?")."

Ricorda: Negli insiemi non conta l'ordine (infatti si usano le "$\{\}$", se contava l'ordine si usavano le "$()$") e gli elementi ripetuti. Insieme finito $\{1, \ldots, n\}$. Insieme infinito $\{1, \ldots\}$.

Definizione 1.1 (*Cardinalità*)

Un insieme A ha cardinalità n se contiene esattamente n elementi, o equivalentemente se $\exists$ una corrispondenza biunivoca $A \longleftrightarrow \{1, 2, \ldots, n\}$.

La cardinalità si indica $|A| = n$.

Definizione 1.2 (*Insieme finito*)

Un insieme A si dice finito se $\exists n \in \mathbb{N}$ t.c. A contiene esattamente n elementi distinti.

Osservazione: L'insieme vuoto è l'unico insieme finito di cardinalità 0.

Definizione 1.3 (*Cardinalità insiemi infiniti*)

Due insiemi infiniti hanno la stessa cardinalità se $\exists$ una biezione (Corrispondenza biunivoca) tra di loro.

Definizione 1.4 (*Insieme numerabile*)

Un insieme A si dice numerabile se ha la stessa cardinalità di $\{1, 2, 3, \ldots\}$.

In altre parole un insieme è numerabile se i suoi elementi possono essere messi in un a fila infinità.

Insiemi numerabili sono $\mathbb{N}$ (anche se più grande di $\{1, 2, 3, \ldots\}$), $\mathbb{Z} = \{0, 1, -1, 2, -2, 3, \ldots\}$, $\mathbb{Q}_{>0}$ dalla dimostrazione classica di Cantor.

Un insieme non numerabile sono delle sequenze infinite di bit 0/1.

Definizione 1.5 (*Insieme Discreto*)

Un insieme è discreto se è finito o numerabile.

Combinatoria di base

Costruisce schemi "complessi" partendo da schemi semplici riuscendo a controllarne la cardinalità. (si opera solo con insiemi finiti).

Definizione 1.6 (*Prodotto Cartesiano*)

Siano A, B insiemi il cui prodotto cartesiano $A \times B$ è l'insieme delle coppie *ordinate* $(a, b), a \in A, b \in B$.

generalizzando:

$$A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_k = \{(a_1, \ldots, a_k) \mid a_i \in A_i, \forall i \in 1, \ldots, k\}$$

n-esima potenza cartesiana di n, ovvero $A \times \cdots \times A = A^n$.

Definizione 1.7 (*Sequenza*)

Una sequenza (o lista) finita di lunghezza n di elementi di A è un elemento $(a_1, \ldots, a_n)$ *del prodotto cartesiano* A^n.

Sono **successioni** delle sequenze di lunghezza ∞, tipo $\{a_1, \ldots\}$.

Definizione 1.8 (*Insieme delle parti*)

Sia A un insieme, l'insieme delle parti $\mathcal{P}(A)$ *è l'insieme i cui elementi sono tutti i sotto insiemi di A, inclusi l'insieme vuoto* $\emptyset$ *e A stesso. (insieme i cui elementi sono insiemi).*

Teorema 1.1 (*Insieme delle parti*)

Sia A un insieme di $|A| = n$*, allora* $\exists$ *una corrispondenza biunivoca tra* $\mathcal{P}(A)$ *e* $\{0, 1\}^n$.

Dimostrazione Teorema 1.1 : Vediamo un caso particolare $A = \{1, 2, 3\}$

$\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \emptyset, A$

$\updownarrow$

$100 = (1, 0, 0), 010, 001, 110, 101, 011, 000, 111$

Per il caso generale $|A| = n, A = \{a_1, \ldots, a_n\}$ procediamo come prima facendo corrispondere ad'un sotto insieme $S \subseteq A$ la sequenza binaria B il uci i-esimo bit è 1 $\iff a_i \in S$. ■

Principi di base

1. **Principio di ugualianza:** Siano A, B insiemi qualunque in corrispondenza biunivoca allora questi hanno lo stesso numero di elementi.
2. Principio della somma: Siano A, B insiemi qualunque disgiunti (non hanno elemtni in comune), allora $|A \cup B| = |A| + |B|$.

   Ricorda: Si dice Distinti se gli insiemi sono diversi per almeno un elemento.

3. **Principio del prodotto:** Siano A, B insiemi qualunque, allora $|A \times B| = |A| \cdot |B|$.

Generalizzazione del Principio di ugualianza: $F : A \rightarrow B$ si dice $k : 1$ (k a 1) se è surriettiva e a ogni elemento di B corrispondono esattamente k elementi di A. In questo caso $|A| = k|B|$. Il principio di ugualianza corrisponde al caso $k = 1$.

Definizione 1.9 (*Prodotto Condizionato*)

Siano A, B insiemi. $C \subseteq A \times B$ è sotto insieme del prodotto cartesiano e si dice prodotto condizionato di tipo (n, m) se sono soddisfatte queste condizioni:

1. *$\exists n$ elementi di A che compaiono come 1° coefficente in un elemento di C.*
2. *Fissata la 1° coordinata di un elemento di C, $\exists m$ elementi di B che possono essere aggiunti come 2° coordinata.*

In altri termini possiamo scegliere la 1° coordinata in n modi e fissata questa scelta possiamo scegliere la 2° in m modi.

Se per tutti i primi n coefficenti si hanno m secondi coefficienti si ha il prodotto condizionato, altrimenti no.

Una coordinata può non essere scelta.

2 Statistica Descrittiva

"Si occupa di presentare/descrivere i dati raccoli in un indiagine nel modo migliore possibile (sintetico, comunicativo)."

3 Probabilità

"Si occupa di prevedere quanto è facile/possibile che qualcosa accada. Consiste in passaggi logici rigorosi partendo da un modello fisso (spazio di probabilità)."

4 Statistica Inferenziale

"Scopo di dedurre proprietà di una popolazione dalla conoscenza dei dati di un campione."