

# Matematica discreta e Probabilità

Leonardo Mengozzi

Le voci dell'indice, "←Indice" e i nomi delle dimostrazioni sono dei link alle rispettive sezioni.

## Indice

<b>1</b>	<b>Combinatoria</b>	<b>4</b>
	Insiemi . . . . .	4
	Definizione 1.1 (Cardinalità) . . . . .	4
	Definizione 1.2 (Insieme finito) . . . . .	4
	Definizione 1.3 (Cardinalità insiemi infiniti) . . . . .	4
	Definizione 1.4 (Insieme numerabile) . . . . .	4
	Definizione 1.5 (Insieme Discreto) . . . . .	4
	Definizione 1.6 (Combinatoria di base) . . . . .	4
	Definizione 1.7 (Prodotto Cartesiano) . . . . .	5
	Definizione 1.8 (Sequenza) . . . . .	5
	Definizione 1.9 (Insieme delle parti) . . . . .	5
	Teorema 1.1 (Insieme delle parti) . . . . .	5
	Principi di base . . . . .	5
	Definizione 1.10 (Prodotto Condizionato) . . . . .	6
	Definizione 1.11 (Disposizioni) . . . . .	6
	Proposizione 1.1 (Fattoriale Discendente) . . . . .	6
	Definizione 1.12 (Permutazioni) . . . . .	7
	Definizione 1.13 (Combinazioni) . . . . .	7
	Proposizione 1.2 (Numero Combinazioni) . . . . .	7
	Definizione 1.14 (Combinazione di $1 \dots n$ ) . . . . .	8
	Definizione 1.15 (Combinazione tipo (a,b)) . . . . .	8
	Definizione 1.16 (Combinazione tipo (a,b,c)) . . . . .	8
	Definizione 1.17 (Anagramma) . . . . .	8
	Proposizione 1.3 (Binomio Combinazioni tipo (a,b,c)) . . . . .	9
	Proposizione 1.4 (Somma binomi) . . . . .	9
	Cammino Reticolare . . . . .	9
	Numeri di Fibonacci . . . . .	10

Definizione 1.18 (Principio di inclusione esclusione) . . . . .	11
Definizione 1.19 (Sequenze k-piene) . . . . .	11
Definizione 1.20 (Scombussolamenti) . . . . .	11
Definizione 1.21 (Partizione) . . . . .	12
Definizione 1.22 (Numero di Bell) . . . . .	12
Triangolo di Bell . . . . .	13
Definizione 1.23 (Numero di Stirling) . . . . .	13
Triangolo di Stirling . . . . .	14
<b>2 Statistica Descrittiva</b>	<b>15</b>
Definizione 2.1 (Popolazione) . . . . .	15
Definizione 2.2 (Carattere) . . . . .	15
Definizione 2.3 (Unità (Statistica)) . . . . .	15
Definizione 2.4 (Campione) . . . . .	15
Definizione 2.5 (Modalità) . . . . .	15
Definizione 2.6 (Classi) . . . . .	15
Definizione 2.7 (Frequenza (assoluta)) . . . . .	15
Definizione 2.8 (Frequenza relativa) . . . . .	16
Definizione 2.9 (Istogramma) . . . . .	16
Definizione 2.10 (Media Campionaria) . . . . .	16
Definizione 2.11 (Linearità della media) . . . . .	17
Definizione 2.12 (Media Ponderata) . . . . .	17
Definizione 2.13 (Varianza) . . . . .	17
Proprietà 2.1 (1° varianza) . . . . .	18
Proprietà 2.2 (2° varianza) . . . . .	18
Definizione 2.14 (Correlazione Positiva) . . . . .	18
Definizione 2.15 (Correlazione Negativa) . . . . .	18
Definizione 2.16 (Covarianza) . . . . .	18
Definizione 2.17 (Retta ai minimi quadrati) . . . . .	19
Definizione 2.18 (Media geometrica) . . . . .	19
<b>3 Probabilità</b>	<b>20</b>
Definizione 3.1 (Fenomeno) . . . . .	20
Definizione 3.2 (Evento) . . . . .	20
Definizione 3.3 (Valutazione di probabilità) . . . . .	20
Definizione 3.4 (Evento coerente) . . . . .	20
Definizione 3.5 (Probabilità uniforme) . . . . .	21
Definizione 3.6 (Probabilità eventi) . . . . .	21
Definizione 3.7 (Non-esempio) . . . . .	21
Considerazioni elementari . . . . .	21
Definizione 3.8 (Probabilità condizionata) . . . . .	22

---

Definizione 3.9 (Formula delle probabilità totali) . . . . .	22
Definizione 3.10 (Formula di Bayes) . . . . .	22
Definizione 3.11 (Eventi indipendenti) . . . . .	23
Definizione 3.12 (Variabili Aleatorie) . . . . .	23
Definizione 3.13 (Funzione di ripartizione) . . . . .	23
Definizione 3.14 (Densità concreta discreta) . . . . .	23
Definizione 3.15 (Densità astratta discreta) . . . . .	24
Approfondimento Serie Geometrica . . . . .	24
Definizione 3.16 (Densità uniforme) . . . . .	24
Definizione 3.17 (Densità di Bernulli) . . . . .	24
Definizione 3.18 (Schema successo insuccesso) . . . . .	24
Definizione 3.19 (S.S.I. a prove indipendenti) . . . . .	25

# 1 Combinatoria

”Serve a contare quanti elementi ci sono in un insieme. (risponde alla domanda ”Quante sono?”).”

## Insiemi

Negli insiemi non conta l'ordine (infatti si usano le ”{}”, se contava l'ordine si usavano le ”()”) e gli elementi ripetuti. Insieme finito  $\{1, \dots, n\}$ . Insieme infinito  $\{1, \dots\}$ .

### Definizione 1.1 (*Cardinalità*)

Un insieme  $A$  ha cardinalità  $n$  se contiene esattamente  $n$  elementi, o equivalentemente se  $\exists$  una corrispondenza biunivoca  $A \longleftrightarrow \{1, 2, \dots, n\}$ .

La cardinalità si indica  $|A| = n$ .

### Definizione 1.2 (*Insieme finito*)

Un insieme  $A$  si dice finito se  $\exists n \in \mathbb{N}$  t.c.  $A$  contiene esattamente  $n$  elementi distinti.

*Osservazione:* L'insieme vuoto è l'unico insieme finito di cardinalità 0.

### Definizione 1.3 (*Cardinalità insiemi infiniti*)

Due insiemi infiniti hanno la stessa cardinalità se  $\exists$  una biezion (Corrispondenza biunivoca) tra di loro.

### Definizione 1.4 (*Insieme numerabile*)

Un insieme  $A$  si dice numerabile se ha la stessa cardinalità di  $\{1, 2, 3, \dots\}$ .

In altre parole un insieme è numerabile se i suoi elementi possono essere messi in un a fila infinità.

Insiemi numerabili sono  $\mathbb{N}$  (anche se più grande di  $\{1, 2, 3, \dots\}$ ),  $\mathbb{Z} = \{0, 1, -1, 2, -2, 3, \dots\}$ ,  $\mathbb{Q}_{>0}$  dalla dimostrazione classica di Cantor.

Un insieme non numerabile sono delle sequenze infinite di bit 0/1. Dimostrazione non riportata.

### Definizione 1.5 (*Insieme Discreto*)

Un insieme è discreto se è finito o numerabile.

### Definizione 1.6 (*Combinatoria di base*)

Costruisce schemi ”complessi” partendo da schemi semplici riuscendo a controllarne la cardinalità. (si opera solo con insiemi finiti).

**Definizione 1.7 (*Prodotto Cartesiano*)**

Siano  $A, B$  insiemi il cui prodotto cartesiano  $A \times B$  è l'insieme delle coppie ordinate  $(a, b), a \in A, b \in B$ .  
generalizzando:

$$A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_k = \{(a_1, \dots, a_k) \mid a_i \in A_i, \forall i \in 1, \dots, k\}$$

**n-esima potenza cartesiana di n**, ovvero  $A \times \cdots \times A = A^n$ .

**Definizione 1.8 (*Sequenza*)**

Una sequenza (o lista) finita di lunghezza  $n$  di elementi di  $A$  è un elemento  $(a_1, \dots, a_n)$  del prodotto cartesiano  $A^n$ .

Sono **successioni** delle sequenze di lunghezza  $\infty$ , tipo  $\{a_1, \dots\}$ .

**Definizione 1.9 (*Insieme delle parti*)**

Sia  $A$  un insieme, l'insieme delle parti  $\mathcal{P}(A)$  è l'insieme i cui elementi sono tutti i sotto insiemi di  $A$ , inclusi l'insieme vuoto  $\emptyset$  e  $A$  stesso. (insieme i cui elementi sono insiemi).

La cardinalità dell'insieme delle parti è  $|\mathcal{P}A| = 2^{|A|}$ .

**Teorema 1.1 (*Insieme delle parti*)**

Sia  $A$  un insieme di  $|A| = n$ , allora  $\exists$  una corrispondenza biunivoca tra  $\mathcal{P}(A)$  e  $\{0, 1\}^n$ .

**Dimostrazione Teorema 1.1 :** Vediamo un caso particolare  $A = \{1, 2, 3\}$

$\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \emptyset, A$

$\Updownarrow$

$100 = (1, 0, 0), 010, 001, 110, 101, 011, 000, 111$

Per il caso generale  $|A| = n, A = \{a_1, \dots, a_n\}$  procediamo come prima facendo corrispondere ad'un sotto insieme  $S \subseteq A$  la sequenza binaria  $B$  il cui  $i$ -esimo bit è  $1 \iff a_i \in S$ . ■

**Principi di base**

1. **Principio di ugualianza:** Siano  $A, B$  insiemi qualunque in corrispondenza biunivoca allora questi hanno lo stesso numero di elementi.

Generalizzazione del Principio di ugualianza:  $F : A \rightarrow B$  si dice  $k : 1$  ( $k$  a 1) se è surriettiva e a ogni elemento di  $B$  corrispondono esattamente

$k$  elementi di  $A$ . In questo caso  $|A| = k|B|$ . Il principio di ugualianza corrisponde al caso  $k = 1$ .

2. **Principio della somma:** Siano  $A, B$  insiemi qualunque disgiunti (non hanno elementi in comune), allora  $|A \cup B| = |A| + |B|$ .

Ricorda: Si dice Distinti se gli insiemi sono diversi per almeno un elemento.

3. **Principio del prodotto:** Siano  $A, B$  insiemi qualunque, allora  $|A \times B| = |A| \cdot |B|$ .

### Definizione 1.10 (*Prodotto Condizionato*)

Siano  $A, B$  insiemi.  $C \subseteq A \times B$  è sotto insieme del prodotto cartesiano e si dice prodotto condizionato di tipo  $(n, m)$  se sono soddisfatte queste condizioni:

1.  $\exists n$  elementi di  $A$  che compaiono come 1° coefficiente in un elemento di  $C$ .
2. Fissata la 1° coordinata di un elemento di  $C$ ,  $\exists m$  elementi di  $B$  che possono essere aggiunti come 2° coordinata.

In altri termini possiamo scegliere la 1° coordinata in  $n$  modi e fissata questa scelta possiamo scegliere la 2° in  $m$  modi.

Se per tutti i primi  $n$  coefficienti si hanno  $m$  secondi coefficienti si ha il prodotto condizionato, altrimenti no.

Nota: Una coordinata può non essere scelta.

### Definizione 1.11 (*Disposizioni*)

Sia  $A = \{1, \dots, n\}$  una disposizione di lunghezza  $k$  in  $A$ , è una sequenza  $(a_1, \dots, a_k)$  di  $A$  t.c.  $a_i \neq a_j, \forall i \neq j$ .

### Proposizione 1.1 (*Fattoriale Discendente*)

Le disposizioni di lunghezza  $k$  in  $\{1, \dots, n\}$  sono

$$\underbrace{n(n-1) \cdots (n-k+1)}_k = (n)_k$$

**Dimostrazione Proposizione 1.1:** Abbiamo  $n$  scelte per la prima coordinata. Fissata la prima coordinata ho  $n-1$  scelte per la seconda coordinata. Fissate le prime due coordinate ho  $n-2$  scelte per la terza

coordinata, e così via. Abbiamo quindi un prodotto condizionato di tipo  $(n, n-1, \dots, n-k+1)$ . ■

### Definizione 1.12 (*Permutazioni*)

Una permutazione di lunghezza  $n$  è una disposizione di lunghezza  $n$  in  $\{1, \dots, n\}$ .

Conseguenza: Dal Fattoriale Discreto, il numero di permutazioni di lunghezza  $n$  è  $(n)_n = 1 \cdot 2 \dots n = n!$ .

### Definizione 1.13 (*Combinazioni*)

Sia  $A = \{1, \dots, n\}$ , una combinazione è un sotto insieme di  $A$  con  $a$  elementi. (l'ordine non importa).

### Proposizione 1.2 (*Numero Combinazioni*)

Siano  $a, b, n$  con  $a + b = n$ , allora questi 3 insiemi sono in biezione tra loro.

1. Sotto insieme di  $\{1, \dots, n\}$  con  $a$  elementi.
2. Sotto insieme di  $\{1, \dots, n\}$  con  $b$  elementi.
3. Sequenza binarie lunghezza  $n$  con  $a$  volte 1 e  $b$  volte 0.

Questi insiemi hanno esattamente  $\frac{(n)_a}{a!} = \frac{(n)_b}{b!} = \frac{n!}{a!b!}$  elementi. Questo numero  $\frac{(n)_a}{a!} = \binom{n}{a} = \binom{n}{a,b}$  (coefficiente binomiale).

Coefficiente binomiale:

$$(x + y)^n = \sum_{a=0}^n \binom{n}{a} x^a y^{n-a} = \sum_{a,b|a+b=n} \binom{n}{a,b} x^a y^b$$

*Osservazione:* Negli esercizi considerare il numero sopra con "l'insieme di elementi" e quello sotto "quante posizioni in cui metterli".

**Dimostrazione Proposizione 1.2:** (*Parte1*) La corrispondenza tra 1 e 3 la si dimostra con il seguente esempio:  $n = 5, a = 3$

$$\{1, 2, 3\} \leftrightarrow 11100$$

$$\{1, 2, 4\} \leftrightarrow 11010$$

$$\{1, 2, 5\} \leftrightarrow 11001$$

$$\{1, 3, 4\} \leftrightarrow 10110$$

Tutte le sequenze hanno 3 "1" e 2 "0". Poi 1 e 2 sono in biezione data dal completamento. (*Parte2*) Pensiamo di avere una funzione fatta

così: Nel dominio abbiamo le disposizioni di lunghezza  $a$  in  $\{1, \dots, n\}$  e nel codominio abbiamo i sottoinsiemi di  $\{1, \dots, n\}$  con  $a$  elementi. Per esempio:

$$(2, 5, 1) \mapsto \{1, 2, 5\}$$

$$(3, 5, 4) \mapsto \{3, 4, 5\}$$

$$(3, 4, 5) \mapsto \{3, 4, 5\}$$

Non è in biezione perché non è iniettiva. (Nel caso generale abbiamo una funzione  $a! : 1$ ).

Quindi le disposizioni sono  $A!$  volte i sottoinsiemi e quindi i sottoinsiemi con  $a$  elementi sono  $\frac{(n)_a}{a!} = \frac{n(n-1)\dots(b+1)}{a!} = \frac{n(n-1)\dots 3 \cdot 2 \cdot 1}{a!b!} = \frac{n!}{a!b!}$ . ■

### **Definizione 1.14 (*Combinazione di $1 \dots n$* )**

Una combinazione di lunghezza  $a$  in  $\{1, \dots, n\}$  è un sottoinsieme di  $\{1, \dots, n\}$  con  $a$  elementi.

### **Definizione 1.15 (*Combinazione tipo $(a, b)$* )**

Una combinazione di tipo  $(a, b)$  con  $(a + b = n)$  è una coppia ordinata  $(A, B)$  di sottoinsiemi di  $\{1, \dots, n\}$  con  $|A| = a, |B| = b, A \cup B = \{1, \dots, n\}$ .

### **Definizione 1.16 (*Combinazione tipo $(a, b, c)$* )**

Una combinazione di tipo  $(a, b, c)$  con  $(a + b + c = n)$  è una terna ordinata  $(A, B, C)$  di sottoinsiemi di  $\{1, \dots, n\}$  con  $|A| = a, |B| = b, |C| = c, A \cup B \cup C = \{1, \dots, n\}$ .

### **Definizione 1.17 (*Anagramma*)**

Sequenze binarie, ternarie, quaternarie, ecc, ordinate di numeri  $\{1, \dots, n\}$ , con  $n = a + b + \dots$ , di tipo  $(a, b, c, \dots)$  in biezione con le sequenze in cui compare  $a$  volte "1",  $b$  volte "2",  $c$  volte "3", ecc.

Esempio di riferimento (terna):

$$(\{1, 2\}, \{3\}, \{4\}) \leftrightarrow (1, 1, 2, 3)$$

$$(\{1, 2\}, \{4\}, \{3\}) \leftrightarrow (1, 1, 3, 2)$$

$$(\{1, 3\}, \{2\}, \{4\}) \leftrightarrow (1, 2, 1, 3)$$

$$(\{2, 4\}, \{1\}, \{3\}) \leftrightarrow (2, 1, 3, 1)$$



**Proposizione 1.3 (*Binomio Combinazioni tipo (a,b,c)*)**

Le combinazioni di tipo  $(a, b, c)$  con  $(a + b + c = n)$  sono  $\binom{n}{a, b, c} = \frac{n!}{a!b!c!}$ .

**Dimostrazione Proposizione 1.3:** Posso scegliere  $A$  in  $\binom{n}{a}$  modi. Fissato  $A$  posso scegliere  $B$  in  $\binom{n-a}{b}$  modi.  $C$  è univocamente determinato da  $A, B$ .

Il numero di combinazioni di tipo  $(a, b, c)$  è  $\binom{n}{a} \cdot \binom{n-a}{b} = \frac{n!}{a!(n-a)!} \cdot \frac{(n-a)!}{b!(n-a-b)!} = \frac{n!}{a!b!c!}$ . ■

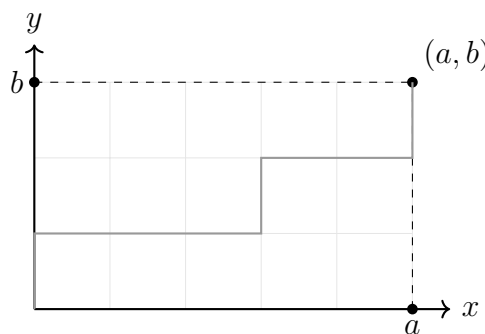
*Osservazione:*  $\binom{n}{a, b, c} = \binom{n}{b, c, a} = \dots$ , in particolare con due indici abbiamo  $\binom{n}{a} = \binom{n}{b}$  se  $(a + b = n)$ .

**Proposizione 1.4 (*Somma binomi*)**

$\binom{n}{a, b} = \binom{n-1}{a-1, b} + \binom{n-1}{a, b-1}$  che è uguale a  $\binom{n}{a} = \binom{n-1}{a-1} + \binom{n-1}{a}$ .  
Più in generale  $\binom{n}{a, b, c} = \binom{n-1}{a-1, b, c} + \binom{n-1}{a, b-1, c} + \binom{n-1}{a, b, c-1}$ .

**Dimostrazione Proposizione 1.4:** Le combinazioni di tipo  $(a, b, c)$  sono in biiezione con le combinazioni di tipo:

- $\{(A, B, C) \mid n \in A\}$  sono  $\binom{n-1}{a-1, b, c}$ .
- $\{(A, B, C) \mid n \in B\}$  sono  $\binom{n-1}{a, b-1, c}$ .
- $\{(A, B, C) \mid n \in C\}$  sono  $\binom{n-1}{a, b, c-1}$ . ■

**Cammino Reticolare**

Il cammino reticolare nel piano cartesiano è il percorso che congiunge l'origine degli assi a un punto  $(a, b)$  tramite *passi* verticali o orizzontali di 1.

Ottima interpretazione grafica di una combinazione di tipo  $(a, b)$ . Quanti sono i cammini reticolari da  $(0, 0)$  a  $(a, b)$ ?

Possiamo codificare i passi inverticali con "1" e i passi orizzontali con "0". Così i cammini grafici diventano sequenze binarie. La lunghezza di tali sequenze è  $a + b$ , con  $a$  volte "0" e  $b$  volte "1". Abbiamo ottenuto un anagramma di tipo  $(a, b)$ .

Osserviamo che abbiamo una biezione tra cammini e anagrammi e i cammini sono quindi  $\binom{a+b}{a, b}$ .

## Numeri di Fibonacci

Conta i sotto insiemi di  $\{1, \dots, n\}$  che non hanno 2 numeri consecutivi.

- $F_n$  = numero sotto insiemi di  $\{1, \dots, n\}$  senza consecutivi.
- $F_{n,k}$  = numero sotto insiemi di  $\{1, \dots, n\}$  di cardinalità  $k$  senza consecutivi.

$$F_n = \sum_{k=0}^n F_{n,k} = \sum_{k=0}^n \binom{n-k+1}{k}$$

**Dimostrazione:** Arriviamo alla formula con un esempio,  $F_{8,3}$ . Vediamo questi insiemi come sequenze di lunghezza 8 con 3 "1" non consecutivi (astrazione simile Camminio Reticolare). Devo riuscire ad usare il principio d'equivalenza con un insieme di cui so la cardinalità. Sò che dopo il primo e secondo "1" c'è sempre uno "0", quindi cancello questo "0" così ho sequenze da 6. Ora "1" possono essere consecutivi ma posso tornare univocamente alla precedente rappresentazione, quindi è biunivoco. Deduciamo che  $F_{8,3} = \binom{6}{3} = 20$ .

In generale  $F_{n,k}$  sono le sequenze di lunghezza  $n$  con  $k$  volte "1", non consecutivi. Cancellando gli "0" che seguono i primi  $k-1$  "1" otteniamo una sequenza binaria lunga  $n-k+1$ , con  $k$  "1".

Tali sequenze sono  $F_{n,k} = \binom{n-k+1}{k}$  e quindi  $F_n = \sum_{k=0}^n \binom{n-k+1}{k}$ . A  $n$  non ci arrivo perchè il coefficiente binomiale da 0 quando  $k > n-k+1$ . ■

Versione ricorsiva di  $F_n, \forall n \geq 3$  si ha

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$$

**Dimostrazione:** Suddividiamo i sotto insiemi di  $\{1, \dots, n\}$  senza consecutivi in due gruppi.

1.  $A_n$  quelli che contengono  $n$ .
2.  $B_n$  quelli che non contengono  $n$ .

Notare che  $F_n = |F_{n-1}| + |F_{n-2}|$ . In generale gli elementi di  $B_n$  non contengono  $n$ , quindi  $B_n = F_{n-1}$  e togliendo  $n$  agli elementi di  $A_n$  rimane un qualunque sottoinsieme di  $\{1, \dots, n-2\}$  senza consecutivi. Quindi  $|A_n| = F_{n-2}$ . ■

### Definizione 1.18 (*Principio di inclusione esclusione*)

La cardinalità dell'unione di due insiemi:

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

La cardinalità dell'unione di tre insiemi:

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$$

La cardinalità dell'unione di  $n$  insiemi:

$$|A_1 \cup \dots \cup A_n| = \sum_{\emptyset \neq I \subseteq \{1, \dots, n\}} (-1)^{|I|-1} \left| \bigcap_{i \in I} A_i \right|$$

Definiamo l'insieme complementare con  $(A_1, \dots, A_n)^C$ . Permette di risolvere tanti quesiti più facilmente.

Per convenzione definiamo  $\bigcap_{i \in \emptyset} = U$ , l'intero insieme. Quindi otteniamo che  $|(A_1, \dots, A_n)^C| = |\bigcap_{i \in \emptyset} A_i| + \sum_{\emptyset \neq I \subseteq \{1, \dots, n\}} (-1)^{|I|-1} |\bigcap_{i \in I} A_i|$  che è come dire  $\sum_{I \subseteq \{1, \dots, n\}} (-1)^{|I|} |\bigcap_{i \in I} A_i|$ .

### Definizione 1.19 (*Sequenze k-piene*)

Una sequenza  $k$ -piena è una sequenza in cui ogni numero da 1 a  $k$  compare almeno una volta. (non compaiono altri numeri).

Usando il principio di inclusione esclusione scopro che il numero di sequenze  $k$ -piene lunghe  $n$  e con coefficienti in  $\{1, \dots, k\}$  è

$$|S| = \sum_{j=0}^k (-1)^j \binom{k}{j} (k-j)^n$$

### Definizione 1.20 (*Scombussolamenti*)

Uno scombussolamento è una permutazione di  $\{1, \dots, n\}$  in cui per ogni  $i$  il numero non sta al posto  $i$ .

Usando il principio di inclusione esclusione scopro che il numero di scomposamenti di  $n$  coefficienti è

$$|S| = \sum_{j=0}^n (-1)^j (n)_{n-j}$$

### Definizione 1.21 (*Partizione*)

Una partizione di  $A$  è una suddivisione in sotto insiemi di  $A$ . Cioè un insieme di sotto insiemi detti blocchi della partizione  $\{s_1, s_2, s_3, \dots\}$  tale che:

1.  $S_i \cap S_j = \emptyset, \forall i \neq j$
2.  $\bigcup_i S_i = A$

In altre parole la partizione è la suddivisione e i blocchi sono i pezzi della partizione.

Nota: Le partizioni possono essere usate per "raggruppare" le permutazioni degli stessi elementi. Non è una fusione biunivoca.

### Definizione 1.22 (*Numero di Bell*)

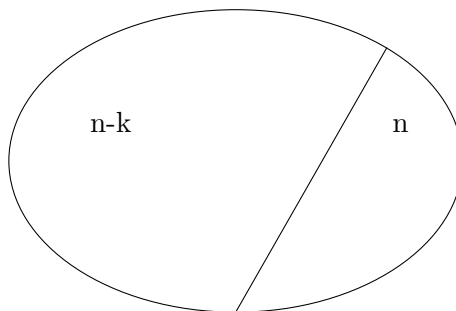
Il numero di partizioni di  $\{1, \dots, n\}$  si dice numero di Bell e si indica con  $B_n$ . Si calcola con la formula ricorsiva per  $\forall n \geq 2$ :

$$B_n = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} B_k$$

Si assume  $B_0 = 1$  per convenzione.

**Dimostrazione Definizione 1.22:** Poniamo  $B_{n,k}$  come il numero di partizioni di  $\{1, \dots, n\}$  in cui  $n$  compare in un blocco con  $k$  elementi.

Calcoliamo  $B_{n,k}$ :



I numeri nel blocco che contiene  $n$  li possiamo scegliere in  $\binom{n-1}{k-1}$  modi.  
 Gli altri  $n - k$  numeri li possiamo partizionare in  $B_{n-k}$  modi. Implicando:

$$B_{n,k} = \binom{n-1}{k-1} B_{n-k}$$

Ottenendo così

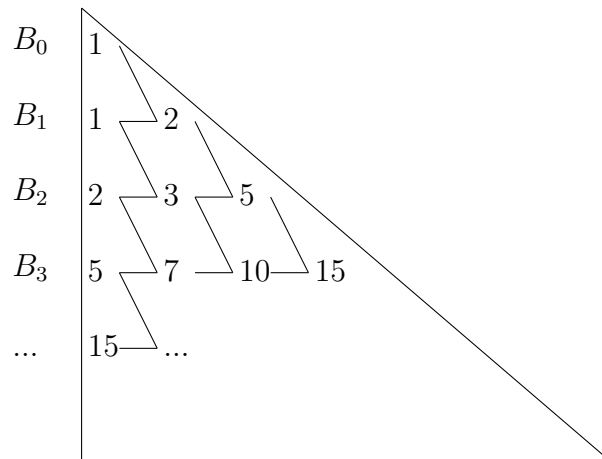
$$B_n = \sum_{k=1}^n \binom{n-1}{k-1} B_{n-k}$$

Equivalente a quella dell'enunciato ponendo  $h = n - k$ :

$$B_h = \sum_{h=0}^{n-1} \binom{n-1}{n-h-1} B_h = B_h = \sum_{h=0}^{h-1} \binom{h-1}{h} B_h \quad \blacksquare$$

## Triangolo di Bell

Trucco per calcolare il numero di Bell:



### Definizione 1.23 (Numero di Stirling)

Indichiamo con  $S_{n,k}$  il numero di partizioni di  $\{1, \dots, n\}$  in  $k$  blocchi. Si calcola con la formula ricorsiva:

$$S_{n,k} = S_{n-1,k-1} + kS_{n-1,k}$$

Si assume  $S_{n,n} = 1$  e  $S_n, 1 = 1$ .

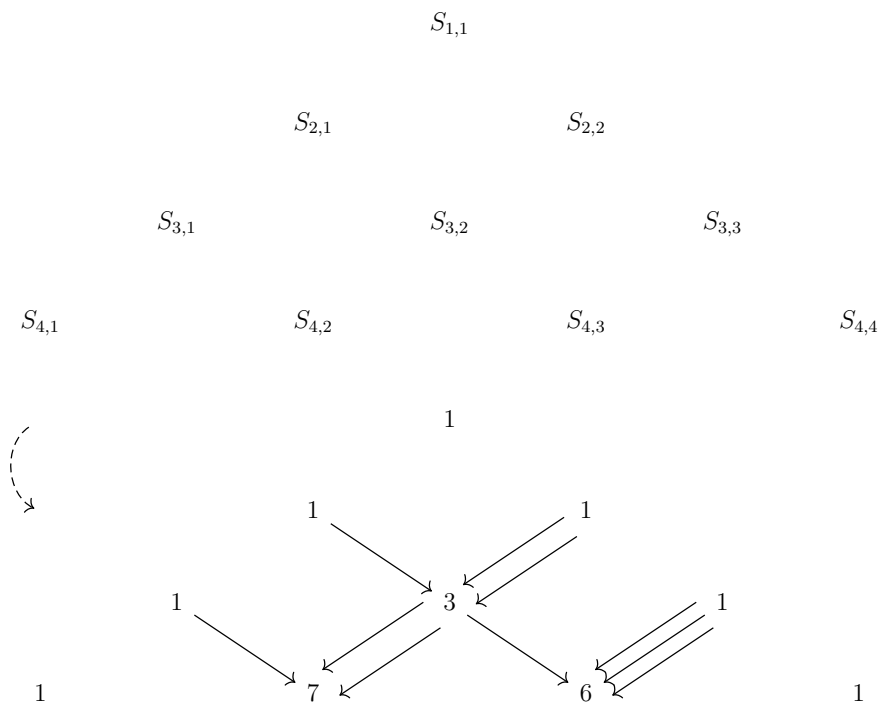
**Dimostrazione Definizione 1.23:** Contiamo le partizioni in  $k$  blocchi in cui  $n$  è da solo. Gli altri  $n - 1$  numeri devono essere partizionati in  $k - 1$  blocchi:  $S_{n-1,k-1}$  scelte.

Contiamo ora quelle in cui  $n$  non è in blocco da solo (procedendo per scelte successive):

- Partizioniamo i numeri da 1 a  $n - 1$  in  $k$  blocchi:  $S_{n-1,k}$  scelte.
- Scegliamo in quale blocco inserire  $n$ :  $k$  scelte. ■

## Triangolo di Stirling

Trucco per calcolare i numeri di Stirling:



Ogni numero è la somma di quello in alto a sinistra più quello in alto a destra moltiplicato per il numero di diagonale.

## 2 Statistica Descrittiva

”Si occupa di presentare/descrivere i dati raccolti in un indagine nel modo migliore possibile (sintetico, comunicativo).”

### Definizione 2.1 (*Popolazione*)

*Insieme su cui vogliamo effettuare un'indagine.*

### Definizione 2.2 (*Carattere*)

*Un carattere è quello che vogliamo studiare dalla popolazione.*

- **Carattere Quantitativo** se assumiamo valori numerici che esprimono una misura.
- **Carattere Qualitativo** se non è qualitativo.

I caratteri sarebbero distinguibili anche in **discreti e continui**.

### Definizione 2.3 (*Unità (Statistica)*)

*Un unità (statistica) è un elemento della popolazione.*

### Definizione 2.4 (*Campione*)

*Un campione è un sotto insieme (rappresentativo) della popolazione del quale possiamo determinare il valore del campione.*

### Definizione 2.5 (*Modalità*)

*La modalità sono i valori che può assumere il carattere.*

### Definizione 2.6 (*Classi*)

*Se le modalità sono molto numerose (o infinite) è conveniente raggrupparle in **classi**.*

*Una classe, solitamente, è determinata dal **confine inferiore e superiore**. Il **valore centrale** di una classe è la media dei confini.*

*Se abbiamo un solo confine chi fa l'indagine può decidere un valore rappresentativo come valore centrale.*

### Definizione 2.7 (*Frequenza (assoluta)*)

*La frequenza (assoluta) di una modalità è il numero di volte in cui compare nel campione.*

**Definizione 2.8 (*Frequenza relativa*)**

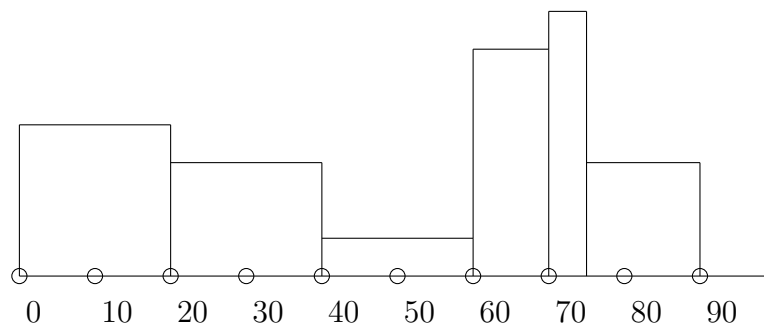
La frequenza relativa è il rapporto fra la frequenza assoluta e la cardinalità del campione.

$$F_R = \frac{F_A}{|\text{campione}|}$$

**Definizione 2.9 (*Istogramma*)**

L'istogramma è un grafico che rappresenta i risultati di un'indagine.

Ad'ogni modalità (classe) è associato un rettangolo con base proporzionale all'ampiezza e area proporzionale alla frequenza.

**Definizione 2.10 (*Media Campionaria*)**

La media campionaria si effettua su un carattere quantitativo su un campione di  $n$  elementi.

$$\bar{x} = \bar{x}_n = \frac{1}{n}(x_1 + \cdots + x_n)$$

Ricordiamo delle proprietà delle sommatorie:

- $\sum_{i=1}^n (a_i + b_i) = \sum_{i=1}^n a_i + \sum_{i=1}^n b_i$
- $\sum_{i=1}^n c = nc$
- $\sum_{i=1}^n (ca_i) = c \sum_{i=1}^n a_i$
- $\sum_{i=1}^n (\sum_{j=1}^n (a_i b_j)) = (\sum_{i=1}^n a_i) \cdot (\sum_{i=1}^n b_i)$



**Definizione 2.11 (*Linearità della media*)**

Siano  $x, y, z$  tre caratteri legati dalla relazione  $z = ax + by$  con costanti  $a, b$ .

$$\bar{z} = a\bar{x} + b\bar{y}$$

Caso particolare è con  $y = 1$  ottenendo così  $z = ax + b$  e quindi  $\bar{z} = a\bar{x} + b$ .  
Può essere usato per semplificare i conti.

**Dimostrazione Definizione 2.11 :**

$$\bar{z} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n z_i = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (ax_i + by_i) = \frac{1}{n} a \sum_{i=1}^n x_i + \frac{1}{n} b \sum_{i=1}^n y_i = a\bar{x} + b\bar{y} \quad \blacksquare$$

**Definizione 2.12 (*Media Ponderata*)**

La media ponderata si usa per dare diversa importanza (peso) ai vari elementi d'un campione.

$$\overline{x_w} = \frac{x_1 w_1 + \cdots + x_n w_n}{w_1 + \cdots + w_n}$$

*Osservazione:* La media campionaria si ottiene dando peso 1 a tutti gli elementi.

**Definizione 2.13 (*Varianza*)**

La varianza di  $x$  è la media dei quadrati della distanza da  $\bar{x}$ .

$$\sigma_x^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2$$

In altre parole indica la dispersione dei valori, ovvero da una misura di quanto i dati sono lontani tra loro.

**Dimostrazione Definizione 2.13 :** Ricordiamo la formula della parabola  $at^2 + bt + c = 0$ ,  $a > 0$  e con vertice d'ascissa  $-b/2a$ .

Possiamo fissare un punto a caso  $t$ . Consideriamo la media dei quadrati delle distanze date come:

$$\frac{(x_1 - t)^2 + \cdots + (x_n - t)^2}{n}$$

Per quale  $t$  questa quantità è minima?  $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - t)^2 = \frac{1}{n} (\sum_{i=1}^n (t^2 - 2x_i t + x_i^2)) = t^2 - \frac{2t}{n} \sum_{i=1}^n x_i + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2 = t^2 - 2\bar{x}t + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2$ . Il valore minimo lo otteniamo per  $t = \frac{-(-2\bar{x})}{2 \cdot 1} = \bar{x}$ . ■

*Osservazione:* Dal calcolo precedente con  $\bar{\sigma}_x^2 = \overline{x^2} - 2\bar{x}\bar{x} - \bar{x}^2 = \overline{x^2} - \bar{x}^2$ .

*Osservazione:* La varianza è sempre positiva.

### Proprietà 2.1 (1° varianza)

La varianza rimane invariata per traslazioni di costanti.

$$\sigma_y^2 = \sigma_x^2$$

**Dimostrazione Proprietà 2.1:** Sia  $y = x + c$  con  $c$  costante. Otteniamo

$$\bar{y} = \bar{x} + c \text{ ovvero } \overline{y^2} = \overline{x^2 + 2cx + c^2} = \overline{x^2} + 2c\bar{x} + c^2 \text{ che ci da } \sigma_y^2 = \overline{y^2} - \bar{y}^2 = \overline{x^2} + 2c\bar{x} + c^2 - (\bar{x}^2 + 2c\bar{x} + c^2) = \sigma_x^2. \blacksquare$$

### Proprietà 2.2 (2° varianza)

La varianza aumenta per prodotto con costanti.

$$\sigma_y^2 = a^2 \sigma_x^2$$

**Dimostrazione Proprietà 2.2:** Sia  $y = ax$  con  $a$  costante. Otteniamo  $\bar{y} =$

$$a\bar{x} \text{ ovvero } \overline{y^2} = \overline{a^2 x^2} = a^2 \overline{x^2} \text{ che ci da } \sigma_y^2 = \overline{y^2} - \bar{y}^2 = a^2 \overline{x^2} - a^2 \bar{x}^2 = a^2 \sigma_x^2. \blacksquare$$

### Definizione 2.14 (Correlazione Positiva)

Dati due caratteri  $x$  e  $y$  diciamo che sono positivamente correlati se al crescere di uno ci aspettiamo che cresca anche l'altro.

### Definizione 2.15 (Correlazione Negativa)

Dati due caratteri  $x$  e  $y$  diciamo che sono negativamente correlati se al crescere di uno ci aspettiamo che l'altro diminuisca.

### Definizione 2.16 (Covarianza)

La covarianza di  $x$  e  $y$  è

$$\sigma_{x,y} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) = \overline{xy} - \bar{x}\bar{y}$$

In altre parole se  $x$  e  $y$  sono positivamente correlate allora  $(x_i - \bar{x})$  e  $(y_i - \bar{y})$ . Ci aspettiamo che siano concordi e quindi che il prodotto sia maggiore di zero.

*Osservazione:*  $\sigma_{x,x} = \sigma_x^2$ .

**Dimostrazione Definizione 2.16:**  $\sigma_{x,y} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i y_i) - x_i \bar{y} - \bar{x} y_i + \bar{x} \bar{y} = \bar{x} \bar{y} - \bar{x} \bar{y} - \bar{x} \bar{y} + \bar{x} \bar{y} = \bar{x} \bar{y} - \bar{x} \bar{y}$ . ■

### Definizione 2.17 (*Retta ai minimi quadrati*)

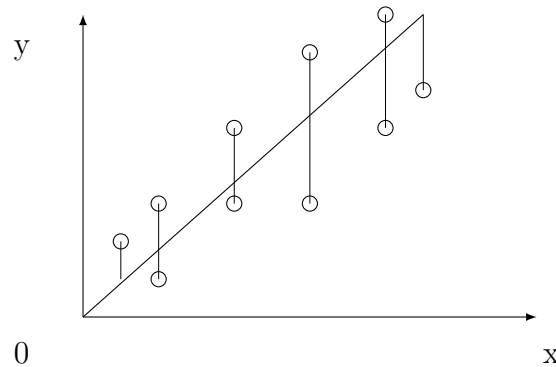
La retta ai minimi quadrati è la retta che minimizza i quadrati degli errori (cioè delle lunghezze dei segmenti verticali.)

La somma dei quadrati degli errori è

$$S(m, q) = \sum_{i=1}^n (y_i - mx_i - q)^2$$

vogliamo  $m$  e  $q$  in modo che questa quantità sia minima.

$$S(m, q) = \sigma_y^2 + m^2 \sigma_x^2 - 2m \sigma_{x,y} + (\bar{y} - q - m\bar{x})^2$$



*Osservazione:* Sia  $\bar{y} = m\bar{x} + q$ , il punto  $(\bar{x}, \bar{y}) \in$  retta è  $S(m, q) = \sigma_y^2 + m^2 \sigma_x^2 - 2m \sigma_{x,y} \implies m = \frac{-b}{2a} = -\sigma_{x,y} \frac{1}{2\sigma_x^2} = \frac{\sigma_{x,y}}{\sigma_x^2}$ .

### Definizione 2.18 (*Media geometrica*)

La media geometrica permette di ottenere la variazione percentuale media dei fattori moltiplicativi:

$$\bar{x}_g = \sqrt[n]{x_1 \cdot \dots \cdot x_n}$$

$$\bar{x}_g^n = x_1 \cdot \dots \cdot x_n$$

*Osservazione:* Ogni variazione percentuale corrisponde ad una moltiplicazione.

La **media armonica** è l'inverso della media degli inversi.

### 3 Probabilità

”Si occupa di prevedere quanto è facile/possibile che qualcosa accada. Consiste in passaggi logici rigorosi partendo da un modello fisso (spazio di probabilità).”

#### Definizione 3.1 (*Fenomeno*)

*Un fenomeno è qualcosa che accade e che porta ad'un esito o risultato.*

Un fenomeno può essere:

- **Deterministico** se il risultato può essere predetto con esattezza.
- **Aleatorio** se il risultato è imprevedibile.

#### Definizione 3.2 (*Evento*)

*Un evento è un insieme di possibili risultati.*

#### Definizione 3.3 (*Valutazione di probabilità*)

*La valutazione di probabilità è una funzione che ad'ogni evento associa un numero tanto più grande quanto riteniamo che l'evento possa accadere.*

#### Definizione 3.4 (*Evento coerente*)

*Sia  $\Omega$  l'insieme dei risultati. Un evento è un sotto insieme di  $\Omega$  di cui ha senso calcolare la valutazione di probabilità, ossia:*

1. *Se  $A_1, \dots$  sono eventi allora  $\bigcup_i A_i$  è un evento.*
2. *Se  $A$  è un evento allora  $A^C$  è un evento.*
3.  *$\Omega$  è un evento ( $\Omega \in \mathcal{A}$ ).*

*Osservazione:* Una collezione di sotto insiemi di  $\omega$  che soddisfa tutti i presupposti si dice **famiglia coerente d'eventi**, con simbolo  $\mathcal{A}$ .

*Osservazione:* Non tutti i sotto insiemi di  $\Omega$  sono eventi.

La valutazione di probabilità,  $P$ ,  $P : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ , deve soddisfare le proprietà:

1.  $P(\Omega) = 1$ .
2.  $P(A) \geq 0, \forall$  evento  $A$ .

3. Se  $A_1, \dots$  sono eventi disgiunti allora

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$$

*Osservazione:*  $P$  non ha dominio  $\Omega$  ma l'insieme degli eventi. Non calcoliamo la  $P$  di un risultato ma di un evento.

**Definizione 3.5 (*Probabilità uniforme*)**

La probabilità è uniforme se:

1. Se  $\Omega$  è finito con  $|\Omega| = n$ .
2. Se ogni sotto insieme di  $\Omega$  è un evento.
3. Se  $\omega_1$  e  $\omega_2$  sono due risultati allora  $P(\{\omega_1\}) = P(\{\omega_2\})$ .

Dalle proprietà della valutazione di probabilità deduciamo anche

$$P(\omega_1) + \dots + P(\omega_n) = P(\Omega) = 1$$

In generale abbiamo quindi

$$P(\omega) = \frac{1}{n}, \forall \omega \in \Omega$$

**Definizione 3.6 (*Probabilità eventi*)**

Sia  $A \in \Omega$ ,  $A = \{\omega_1, \dots, \omega_k\}$

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{\#risultatifavorevoli}{\#risultatipossibili}$$

Ragionamento:  $P(A) = P(\omega_1) + \dots + P(\omega_k) = \frac{1}{n} + \dots + \frac{1}{n} = \frac{k}{n}$ , se  $|A| = k$ .

*Osservazione:* Vale uno spazio con proprietà uniforme.

**Definizione 3.7 (*Non-esempio*)**

Un non-esempio è qualcosa che non funziona.

## Considerazioni elementari

- Se  $E$  è un evento allora  $E^C$  è un evento.
- $E \cup E^C = \Omega$  è un uninoe disgiunta.

- Se  $P(E) + P(E^C) = 1$  allora  $P(E^C) = 1 - P(E)$ .

*Osservazione:* Il principio di inclusione-esclusione vale anche per l'unione di più di due probabilità.

### Definizione 3.8 (*Probabilità condizionata*)

Chiamiamo *probabilità condizionata* la probabilità che accada l'evento  $B$  sapendo che accade l'evento  $A$  prima di  $B$ .

$$P(B | A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

In altre parole riparametrizziamo la probabilità di  $B$  da  $\Omega$  al sotto insieme codiviso con  $A$ .

*Osservazione:* Ponendo  $P'(B) = P(B | A)$  allora  $P'$  soddisfa le proprietà delle valutazioni di probabilità:

- $P'(\Omega) = P(\Omega | A) = \frac{P(\Omega \cap A)}{P(A)} = 1$ .
- $P'(A_1 \cup A_2) = P'(A_1) + P'(A_2)$  se  $A_1, A_2$  sono disgiunti.

*Osservazione:*  $P(A \cap B) = P(B | A)P(A)$ .

### Definizione 3.9 (*Formula delle probabilità totali*)

Sia  $\Omega$  partizionato in  $\{A_1, A_2, \dots\}$ . Per sapere la probabilità d'un evento  $B$  condizionato da un qualsiasi altro evento.

$$P(B) = \sum_{i=1}^n P(B \cap A_i) = \sum_{i=1}^n P(B | A_i)P(A_i)$$

### Definizione 3.10 (*Formula di Bayes*)

Siano  $A, B$  eventi.

$$P(B | A) = \frac{P(A | B)P(B)}{P(A)}$$

**Dimostrazione Definizione 3.10:** Siano  $P(A | B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$  e  $P(B | A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$ . Allora  $P(A \cap B) = P(A | B)P(B) = P(B | A)P(A) = P(A \cap B)$ . ■

**Definizione 3.11 (*Eventi indipendenti*)**

$A$  e  $B$  sono eventi indipendenti se sapere che accade uno dei due non cambia la probabilità che accada l'altro.

$$P(B \mid A) = P(B)$$

$$P(A \mid B) = P(A)$$

Dato che  $P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = P(A)$  allora  $P(A \cap B) = P(A)P(B)$ .

**Definizione 3.12 (*Variabili Aleatorie*)**

Sia  $\Omega$  uno spazio di probabilità,  $A$  un insieme coerente di eventi e  $P$  la valutazione di probabilità.

Una **variabile aleatoria** è una funzione  $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  tale che  $\forall a \in \mathbb{R}, \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \leq a\}$ , oppure  $X \leq a$ , deve essere un evento. (si scrive anche  $\chi_A$ ).

Per una variabile aleatoria non ha senso scrivere  $P(X)$ , ma ha senso scrivere  $P(X \leq a)$ . Una variabile aleatoria può essere continua o discreta.

**Definizione 3.13 (*Funzione di ripartizione*)**

Sia  $X$  una variabile aleatoria. La sua funzione di ripartizione  $F_X$  è una funzione  $F_X : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definita come  $F_X(t) = P(X \leq t)$ .

**Definizione 3.14 (*Densità concreta discreta*)**

Sia  $X$  una variabile aleatoria discreta. La densità concreta discreta di  $X$  è  $dx : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  con

$$dx(h) = P(X = h) \begin{cases} a_1 & \text{se } h = \dots \\ \dots & \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

La densità concreta discreta soddisfa le proprietà:

1.  $dx(h) \leq 0, \forall h$ .
2.  $dx(h) \neq 0$  per una quantità finita o numerabile di valori  $h$ .
3.  $\sum_{h=0}^h dx(h) = 1$ .

*Osservazione:* Una densità è valida se soddisfa le tre proprietà.

**Definizione 3.15 (*Densità astratta discreta*)**

Sia  $X$  una variabile aleatoria discreta. La densità astratta discreta è  $d : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ . La densità astratta discreta soddisfa le proprietà:

1.  $d(h) \leq 0, \forall h$ .
2.  $d(h) \neq 0$  per una quantità discreta di valori  $h$ .
3.  $\sum_{h=0}^h d(h) = 1$ .

**Approfondimento Serie Geometrica**

Sia  $0 < a < 1$  allora  $1 - a^n = (1 - a)(1 + \dots + a^{n-1})$  sapendo che  $(1 + \dots + a^{n-1} = \frac{1-a^n}{1-a}$  possiamo dire che

$$\lim_{h \rightarrow \infty} (1 + \dots + a^{n-1}) = \lim_{h \rightarrow \infty} \frac{1 - a^n}{1 - a} = \frac{1}{1 - a} = \sum_{h=0}^{\infty} a^h$$

**Definizione 3.16 (*Densità uniforme*)**

Sia  $X$  una variabile aleatoria e si dice uniforme nell'insieme  $A = \{a_1, \dots, a_n\} \subseteq \mathbb{R}$  se

$$dx(h) = \begin{cases} \frac{1}{n} & \text{se } h = a_1, \dots, a_n \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Si scrive  $X \sim U(\{\dots\})$ .

**Definizione 3.17 (*Densità di Bernulli*)**

Si dice densità di Bernulli se  $X$  assume solo i valori 0 e 1.

$$dx(h) = \begin{cases} p & \text{se } h = 1 \\ 1 - p & \text{se } h = 0 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Si scrive  $X \sim B(1, p)$

*Osservazione:* Si usa quando qualcosa può accadere o non accadere.

**Definizione 3.18 (*Schema successo insuccesso*)**

Lo schema successo insuccesso è una sequenza di  $n$  fenomeni aleatori ognuno dei quali da un successo oppure un insuccesso.



**Definizione 3.19 (*S.S.I. a prove indipendenti*)**

*Uno schema successo insuccesso si dice a prove indipendenti se:*

- 1. Ogni prova ha la stessa probabilità di dare successo.*
- 2. L'esito di ogni tentativo è indipendente da quello degli'altri.*

La variabile binomiale  $X = \# \text{successi}$  la chiamiamo binomiale e scriviamo  $X \sim B(h, p)$  con  $h$  il numero di tentativi e  $p$  la probabilità che ogni tentativo dia successo.