

Matematica discreta e Probabilità

Leonardo Mengozzi

Navigazione tra pagine: titoletti indice link a rispettive sezioni, in alto a sinistra "←Indice" link a Indice e nome dimostrazioni link al teorema, definizione, ecc da dimostrare.

Indice

1	Combinatoria	2
	Insiemi	2
	Definizione 1.1 (Cardinalità)	2
	Definizione 1.2 (Insieme finito)	2
	Definizione 1.3 (Cardinalità insiemi infiniti)	2
	Definizione 1.4 (Insieme numerabile)	2
	Definizione 1.5 (Insieme Discreto)	2
	Combinatoria di base	2
	Definizione 1.6 (Prodotto Cartesiano)	3
	Definizione 1.7 (Sequenza)	3
	Definizione 1.8 (Insieme delle parti)	3
	Teorema 1.1 (Insieme delle parti)	3
	Principi di base	3
	Definizione 1.9 (Prodotto Condizionato)	4
	Definizione 1.10 (Disposizioni)	4
	Proposizione 1.1 (Fattoriale Discendente)	4
	Definizione 1.11 (Permutazioni)	5
	Definizione 1.12 (Combinazioni)	5
	Proposizione 1.2 (Numero Combinazioni)	5
	Definizione 1.13 (Combinazione di $1 \dots n$)	6
	Definizione 1.14 (Combinazione tipo (a,b))	6
	Definizione 1.15 (Combinazione tipo (a,b,c))	6
	Definizione 1.16 (Anagramma)	6
	Proposizione 1.3 (Binomio Combinazioni tipo (a,b,c))	7
	Proposizione 1.4 (Somma binomi)	7
	Cammino Reticolare	7
	Numeri di Fibonacci	8

1 Combinatoria

”Serve a contare quanti elementi ci sono in un insieme. (risponde alla domanda ”Quante sono?”).”

Insiemi

Negli insiemi non conta l'ordine (infatti si usano le ”{}”, se contava l'ordine si usavano le ”()”) e gli elementi ripetuti. Insieme finito $\{1, \dots, n\}$. Insieme infinito $\{1, \dots\}$.

Definizione 1.1 (*Cardinalità*)

Un insieme A ha cardinalità n se contiene esattamente n elementi, o equivalentemente se \exists una corrispondenza biunivoca $A \longleftrightarrow \{1, 2, \dots, n\}$.

La cardinalità si indica $|A| = n$.

Definizione 1.2 (*Insieme finito*)

Un insieme A si dice finito se $\exists n \in \mathbb{N}$ t.c. A contiene esattamente n elementi distinti.

Osservazione: L'insieme vuoto è l'unico insieme finito di cardinalità 0.

Definizione 1.3 (*Cardinalità insiemi infiniti*)

Due insiemi infiniti hanno la stessa cardinalità se \exists una biezione (Corrispondenza biunivoca) tra di loro.

Definizione 1.4 (*Insieme numerabile*)

Un insieme A si dice numerabile se ha la stessa cardinalità di $\{1, 2, 3, \dots\}$.

In altre parole un insieme è numerabile se i suoi elementi possono essere messi in un a fila infinità.

Insiemi numerabili sono \mathbb{N} (anche se più grande di $\{1, 2, 3, \dots\}$), $\mathbb{Z} = \{0, 1, -1, 2, -2, 3, \dots\}$, $\mathbb{Q}_{>0}$ dalla dimostrazione classica di Cantor.

Un insieme non numerabile sono delle sequenze infinite di bit 0/1.

Definizione 1.5 (*Insieme Discreto*)

Un insieme è discreto se è finito o numerabile.

Combinatoria di base

Costruisce schemi ”complessi” partendo da schemi semplici riuscendo a controllarne la cardinalità. (si opera solo con insiemi finiti).

Definizione 1.6 (*Prodotto Cartesiano*)

Siano A, B insiemi il cui prodotto cartesiano $A \times B$ è l'insieme delle coppie ordinate $(a, b), a \in A, b \in B$.
generalizzando:

$$A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_k = \{(a_1, \dots, a_k) \mid a_i \in A_i, \forall i \in 1, \dots, k\}$$

n-esima potenza cartesiana di n, ovvero $A \times \cdots \times A = A^n$.

Definizione 1.7 (*Sequenza*)

Una sequenza (o lista) finita di lunghezza n di elementi di A è un elemento (a_1, \dots, a_n) del prodotto cartesiano A^n .

Sono **successioni** delle sequenze di lunghezza ∞ , tipo $\{a_1, \dots\}$.

Definizione 1.8 (*Insieme delle parti*)

Sia A un insieme, l'insieme delle parti $\mathcal{P}(A)$ è l'insieme i cui elementi sono tutti i sotto insiemi di A , inclusi l'insieme vuoto \emptyset e A stesso. (insieme i cui elementi sono insiemi).

Teorema 1.1 (*Insieme delle parti*)

Sia A un insieme di $|A| = n$, allora \exists una corrispondenza biunivoca tra $\mathcal{P}(A)$ e $\{0, 1\}^n$.

Dimostrazione Teorema 1.1 : Vediamo un caso particolare $A = \{1, 2, 3\}$

$\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \emptyset, A$

\updownarrow

$100 = (1, 0, 0), 010, 001, 110, 101, 011, 000, 111$

Per il caso generale $|A| = n, A = \{a_1, \dots, a_n\}$ procediamo come prima facendo corrispondere ad'un sotto insieme $S \subseteq A$ la sequenza binaria B il cui i -esimo bit è 1 $\iff a_i \in S$. ■

Principi di base

1. **Principio di ugualianza:** Siano A, B insiemi qualunque in corrispondenza biunivoca allora questi hanno lo stesso numero di elementi.
2. **Principio della somma:** Siano A, B insiemi qualunque disgiunti (non hanno elementi in comune), allora $|A \cup B| = |A| + |B|$.

Ricorda: Si dice Distinti se gli insiemi sono diversi per almeno un elemento.

3. Principio del prodotto: Siano A, B insiemi qualunque, allora $|A \times B| = |A| \cdot |B|$.

Generalizzazione del Principio di ugualianza: $F : A \rightarrow B$ si dice $k : 1$ (k a 1) se è surriettiva e a ogni elemento di B corrispondono esattamente k elementi di A . In questo caso $|A| = k|B|$. Il principio di ugualianza corrisponde al caso $k = 1$.

Definizione 1.9 (*Prodotto Condizionato*)

Siano A, B insiemi. $C \subseteq A \times B$ è sotto insieme del prodotto cartesiano e si dice prodotto condizionato di tipo (n, m) se sono soddisfatte queste condizioni:

1. $\exists n$ elementi di A che compaiono come 1° coefficiente in un elemento di C .
2. Fissata la 1° coordinata di un elemento di C , $\exists m$ elementi di B che possono essere aggiunti come 2° coordinata.

In altri termini possiamo scegliere la 1° coordinata in n modi e fissata questa scelta possiamo scegliere la 2° in m modi.

Se per tutti i primi n coefficienti si hanno m secondi coefficienti si ha il prodotto condizionato, altrimenti no.

Una coordinata può non essere scelta.

Definizione 1.10 (*Disposizioni*)

Sia $A = \{1, \dots, n\}$ una disposizione di lunghezza k in A , è una sequenza (a_1, \dots, a_k) di A t.c. $a_i \neq a_j, \forall i \neq j$.

Proposizione 1.1 (*Fattoriale Discendente*)

Le disposizioni di lunghezza k in $\{1, \dots, n\}$ sono

$$\underbrace{n(n-1) \cdots (n-k+1)}_k = (n)_k$$

Dimostrazione Proposizione 1.1: Abbiamo n scelte per la prima coordinata. Fissata la prima coordinata ho $n-1$ scelte per la seconda coordinata. Fissate le prime due coordinate ho $n-2$ scelte per la terza

coordinata, e così via. Abbiamo quindi un prodotto condizionato di tipo $(n, n-1, \dots, n-k+1)$. ■

Definizione 1.11 (*Permutazioni*)

Una permutazione di lunghezza n è una disposizione di lunghezza n in $\{1, \dots, n\}$.

Conseguenza: Dal Fattoriale Discreto, il numero di permutazioni di lunghezza n è $(n)_n = 1 \cdot 2 \dots n = n!$.

Definizione 1.12 (*Combinazioni*)

Sia $A = \{1, \dots, n\}$, una combinazione è un sotto insieme di A con a elementi. (l'ordine non importa).

Proposizione 1.2 (*Numero Combinazioni*)

Siano a, b, n con $a + b = n$, allora questi 3 insiemi sono in biezione tra loro.

1. Sotto insieme di $\{1, \dots, n\}$ con a elementi.
2. Sotto insieme di $\{1, \dots, n\}$ con b elementi.
3. Sequenza binarie lunghezza n con a volte 1 e b volte 0.

Questi insiemi hanno esattamente $\frac{(n)_a}{a!} = \frac{(n)_b}{b!} = \frac{n!}{a!b!}$ elementi.

Questo numero $\frac{(n)_a}{a!} = \binom{n}{a} = \binom{n}{a,b}$.

Coefficiente binomiale:

$$(x + y)^n = \sum_{a=0}^n \binom{n}{a} x^a y^{n-a} = \sum_{a,b|a+b=n} \binom{n}{a,b} x^a y^b$$

Dimostrazione Proposizione 1.2: (*Parte1*) La corrispondenza tra 1 e 3 la si dimostra con il seguente esempio: $n = 5, a = 3$

$$\{1, 2, 3\} \leftrightarrow 11100$$

$$\{1, 2, 4\} \leftrightarrow 11010$$

$$\{1, 2, 5\} \leftrightarrow 11001$$

$$\{1, 3, 4\} \leftrightarrow 10110$$

Tutte le sequenze hanno 3 "1" e 2 "0".

Poi 1 e 2 sono in biezione data dal completamento.

(Parte2) Pensiamo di avere una funzione fatta così: Nel dominio abbiamo le disposizioni di lunghezza a in $\{1, \dots, n\}$ e nel codominio abbiamo i sottoinsiemi di $\{1, \dots, n\}$ con a elementi. Per esempio:

$$(2, 5, 1) \mapsto \{1, 2, 5\}$$

$$(3, 5, 4) \mapsto \{3, 4, 5\}$$

$$(3, 4, 5) \mapsto \{3, 4, 5\}$$

Non è in biezione perchè non è iniettiva. (Nel caso generale abbiamo una funzione $a! : 1$).

Quindi le disposizioni sono $A!$ volte i sottoinsiemi e quindi i sottoinsiemi con a elementi sono $\frac{(n)_a}{a!} = \frac{n(n-1)\dots(b+1)}{a!} = \frac{n(n-1)\dots 3 \cdot 2 \cdot 1}{a!b!} = \frac{n!}{a!b!}$. ■

Definizione 1.13 (*Combinazione di $1 \dots n$*)

Una combinazione di lunghezza a in $\{1, \dots, n\}$ è un sottoinsieme di $\{1, \dots, n\}$ con a elementi.

Definizione 1.14 (*Combinazione tipo (a, b)*)

Una combinazione di tipo (a, b) con $(a + b = n)$ è una coppia ordinata (A, B) di sottoinsiemi di $\{1, \dots, n\}$ con $|A| = a, |B| = b, A \cup B = \{1, \dots, n\}$.

Definizione 1.15 (*Combinazione tipo (a, b, c)*)

Una combinazione di tipo (a, b, c) con $(a + b + c = n)$ è una terna ordinata (A, B, C) di sottoinsiemi di $\{1, \dots, n\}$ con $|A| = a, |B| = b, |C| = c, A \cup B \cup C = \{1, \dots, n\}$.

Definizione 1.16 (*Anagramma*)

Sequenza ordinate di numeri $\{1, \dots, n\}$ con $n = a + b + \dots$ binarie, ternarie, quaternarie, ecc di tipo (a, b, c, \dots) in biezione con le sequenze in cui compare a volte "1", b volte "2", c volte "3", ecc.

Esempio di riferimento (terna):

$$(\{1, 2\}, \{3\}, \{4\}) \leftrightarrow (1, 1, 2, 3)$$

$$(\{1, 2\}, \{4\}, \{3\}) \leftrightarrow (1, 1, 2, 3)$$

$$(\{1, 3\}, \{2\}, \{4\}) \leftrightarrow (1, 2, 1, 3)$$

$$(\{2, 4\}, \{1\}, \{3\}) \leftrightarrow (2, 1, 3, 1)$$

Proposizione 1.3 (*Binomio Combinazioni tipo (a, b, c)*)

Le combinazioni di tipo (a, b, c) con $(a + b + c = n)$ sono $\binom{n}{a, b, c} = \frac{n!}{a!b!c!}$.

Dimostrazione Proposizione 1.3: Posso scegliere A in $\binom{n}{a}$ modi. Fissato A posso scegliere B in $\binom{n-a}{b}$ modi. C è univocamente determinato da A, B .

Il numero di combinazioni di tipo (a, b, c) è $\binom{n}{a} \cdot \binom{n-a}{b} = \frac{n!}{a!(n-a)!} \cdot \frac{(n-a)!}{b!(n-a-b)!} = \frac{n!}{a!b!c!}$. ■

Osservazione: $\binom{n}{a, b, c} = \binom{n}{b, c, a} = \dots$, in particolare con due indici abbiamo $\binom{n}{a} = \binom{n}{b}$ se $(a + b = n)$.

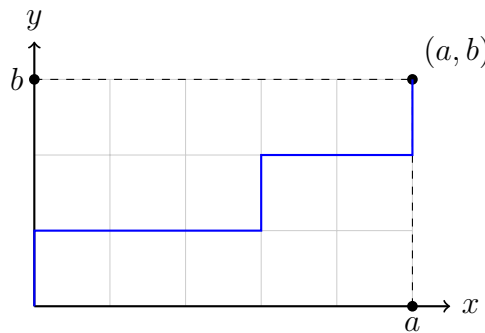
Proposizione 1.4 (Somma binomi)

$\binom{n}{a, b} = \binom{n-1}{a-1, b} + \binom{n-1}{a, b-1}$ che è uguale a $\binom{n}{a} = \binom{n-1}{a-1} + \binom{n-1}{a}$.
Più in generale $\binom{n}{a, b, c} = \binom{n-1}{a-1, b, c} + \binom{n-1}{a, b-1, c} + \binom{n-1}{a, b, c-1}$.

Dimostrazione Proposizione 1.4: Le combinazioni di tipo (a, b, c) sono in biezione con le combinazioni di tipo:

- $\{(A, B, C) \mid n \in A\}$ sono $\binom{n-1}{a-1, b, c}$.
- $\{(A, B, C) \mid n \in B\}$ sono $\binom{n-1}{a, b-1, c}$.
- $\{(A, B, C) \mid n \in C\}$ sono $\binom{n-1}{a, b, c-1}$. ■

Cammino Reticolare



Il cammino reticolare nel piano cartesiano è il percorso che congiunge l'origine degli assi a un punto (a,b) tramite *passi* verticali o orrizontali di 1.

Ottima interpretazione grafica di una combinazione di tipo (a,b) . Quanti sono i cammini reticolari da $(0,0)$ a (a,b) ?

Possiamo codificare i passi inverticali con "1" e i passi orrizontali con "0". Così i cammini grafici diventano sequenze binarie. La lunghezza di

tali sequenze è $a + b$, con a volte "0" e b volte "1". Abbiamo ottenuto un anagramma di tipo (a, b) .

Osserviamo che abbiamo una biezione tra cammini e anagrammi e i cammini sono quindi $\binom{a+b}{a, b}$.

Numeri di Fibonacci

Conta i sotto insiemi di $\{1, \dots, n\}$ che non hanno 2 numeri consecutivi.

$$F_n = \sum_{k=0}^n \binom{n-k+1}{k}$$

Ragionamento, Definiamo:

- F_n come il numero di sotto insiemi possibili di $\{1, \dots, n\}$.
- $F_{n,k}$ il numero di sotto insiemi di $\{1, \dots, n\}$ di k elementi che non hanno due elementi consecutivi.

Arriviamo alla formula con un esempio, $F_{8,3}$. Vediamo questi insiemi come sequenze di lunghezza 8 con 3 "1" non consecutivi (astrazione simile Camminio Reticolare). Devo riuscire ad usare il principio d'equivalenza con un insieme di cui so la cardinalità. Sò che dopo il primo e secondo "1" c'è sempre uno "0", quindi cancello questo "0" così ho sequenze da 6. Ora "1" possono essere consecutivi ma posso tornare univocamente alla precedente rappresentazione, quindi è biunivoco. Deduciamo che $F_{8,3} = \binom{6}{3} = 20$.

In generale $F_{n,k}$ sono le sequenze di lunghezza n con k volte "1", non consecutivi. Cancellando gli "0" che seguono i primi $k-1$ "1" otteniamo una sequenza binaria lunga $n-k+1$, con k "1".

Tali sequenze sono $F_{n,k} = \binom{n-k+1}{k}$ e quindi $F_n = \sum_{k=0}^n \binom{n-k+1}{k}$. A n non ci arrivo perchè il coefficiente binomiale da 0 quando $k > n-k+1$.