Matematica discreta e Probabilità

Leonardo Mengozzi

Le voci dell'indice, "←Indice" e i nomi delle dimostrazioni sono dei link alle rispettive sezioni.

Indice

1 Combinatoria

> "Serve a contare quanti elementi ci sono in un insieme. (risponde alla domanda "Quante sono?")."

Insiemi

Negli insiemi non conta l'ordine (infatti si usano le "{}", se contava l'ordine si usavano le "()") e gli elementi ripetuti. Insieme finito $\{1, \ldots, n\}$. Insieme infinito $\{1, \ldots\}$.

Definizione 1.1 (*Cardinalità*)

Un insieme A ha cardinalità n se contiene esattamente n elementi, o equivalentemente se $\exists$ una corrispondenza biunivoca $A \longleftrightarrow \{1, 2, \ldots, n\}$.

La cardinalità si indica $|A| = n$.

Definizione 1.2 (*Insieme finito*)

Un insieme A si dice finito se $\exists n \in \mathbb{N}$ t.c. A contiene esattamente n elementi distinti.

Osservazione: L'insieme vuoto è l'unico insieme finito di cardinalità 0.

Definizione 1.3 (*Cardinalità insiemi infiniti*)

Due insiemi infiniti hanno la stessa cardinalità se $\exists$ una biezione (Corrispondenza biunivoca) tra di loro.

Definizione 1.4 (*Insieme numerabile*)

Un insieme A si dice numerabile se ha la stessa cardinalità di $\{1, 2, 3, \ldots\}$.

In altre parole un insieme è numerabile se i suoi elementi possono essere messi in un a fila infinità.

Insiemi numerabili sono $\mathbb{N}$ (anche se più grande di $\{1, 2, 3, \ldots\}$), $\mathbb{Z} = \{0, 1, -1, 2, -2, 3, \ldots\}$, $\mathbb{Q}_{>0}$ dalla dimostrazione classica di Cantor.

Un insieme non numerabile sono delle sequenze infinite di bit 0/1. Dimostrazione non riportata.

Definizione 1.5 (*Insieme Discreto*)

Un insieme è discreto se è finito o numerabile.

Definizione 1.6 (*Combinatoria di base*)

Costruisce schemi "complessi" partendo da schemi semplici riuscendo a controllarne la cardinalità. (si opera solo con insiemi finiti).

Definizione 1.7 (*Prodotto Cartesiano*)

Siano A, B insiemi il cui prodotto cartesiano $A \times B$ è l'insieme delle coppie ordinate $(a, b), a \in A, b \in B$.
generalizzando:

$$A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_k = \{(a_1, \dots, a_k) \mid a_i \in A_i, \forall i \in 1, \dots, k\}$$

n-esima potenza cartesiana di n, ovvero $A \times \cdots \times A = A^n$.

Definizione 1.8 (*Sequenza*)

Una sequenza (o lista) finita di lunghezza n di elementi di A è un elemento $(a_1, \dots, a_n)$ del prodotto cartesiano A^n.

Sono **successioni** delle sequenze di lunghezza ∞, tipo $\{a_1, \dots\}$.

Definizione 1.9 (*Insieme delle parti*)

Sia A un insieme, l'insieme delle parti $\mathcal{P}(A)$ è l'insieme i cui elementi sono tutti i sotto insiemi di A, inclusi l'insieme vuoto $\emptyset$ e A stesso. (insieme i cui elementi sono insiemi).

La cardinalità dell'insieme delle parti è $|\mathcal{P}A| = 2^{|A|}$.

Teorema 1.1 (*Insieme delle parti*)

Sia A un insieme di $|A| = n$, allora $\exists$ una corrispondenza biunivoca tra $\mathcal{P}(A)$ e $\{0, 1\}^n$.

Dimostrazione Teorema 1.1 : Vediamo un caso particolare $A = \{1, 2, 3\}$

$\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \emptyset, A$

$\updownarrow$

$100 = (1, 0, 0), 010, 001, 110, 101, 011, 000, 111$

Per il caso generale $|A| = n, A = \{a_1, \dots, a_n\}$ procediamo come prima facendo corrispondere ad'un sotto insieme $S \subseteq A$ la sequenza binaria B il uci i-esimo bit è 1 $\iff a_i \in S$. ■

Principi di base

1. **Principio di ugualianza:** Siano A, B insiemi qualunque in corrispondenza biunivoca allora questi hanno lo stesso numero di elementi.

   Generalizzazione del Principio di ugualianza: $F : A \to B$ si dice $k : 1$ (k a 1) se è surriettiva e a ogni elemento di B corrispondono esattamente

k elementi di A. In questo caso $|A| = k|B|$. Il principio di ugualianza corrisponde al caso $k = 1$.

2. **Principio della somma:** Siano A, B insiemi qualunque disgiunti (non hanno elementi in comune), allora $|A \cup B| = |A| + |B|$.

   Ricorda: Si dice Distinti se gli insiemi sono diversi per almeno un elemento.

3. **Principio del prodotto:** Siano A, B insiemi qualunque, allora $|A \times B| = |A| \cdot |B|$.

Definizione 1.10 (*Prodotto Condizionato*)

Siano A, B insiemi. $C \subseteq A \times B$ è sotto insieme del prodotto cartesiano e si dice prodotto condizionato di tipo (n, m) se sono soddisfatte queste condizioni:

1. *$\exists n$ elementi di A che compaiono come 1° coefficente in un elemento di C.*

2. *Fissata la 1° coordinata di un elemento di C, $\exists m$ elementi di B che possono essere aggiunti come 2° coordinata.*

In altri termini possiamo scegliere la 1° coordinata in n modi e fissata questa scelta possiamo scegliere la 2° in m modi.

Se per tutti i primi n coefficenti si hanno m secondi coefficienti si ha il prodotto condizionato, altrimenti no.

Nota: Una coordinata può non essere scelta.

Definizione 1.11 (*Disposizioni*)

Sia $A = \{1, \dots, n\}$ una disposizione di lungheza k in A, è una sequenza $(a_1, \dots, a_k)$ di A t.c. $a_i \neq a_j, \forall i \neq j$.

Proposizione 1.1 (*Fattoriale Discendente*)

Le disposizioni di lunghezza k in $\{1, \dots, n\}$ sono

$$\underbrace{n(n-1)\cdots(n-k+1)}_{k} = (n)_k$$

Dimostrazione Proposizione 1.1 : Abbiamo n scelte per la prima coordinata. Fissata la prima coordinata ho $n - 1$ scelte per la seconda coordinata. Fissate le prime due coordinate ho $n - 2$ scelte per la terza coordinata, e cosi via. Abbiamo quindi un prodotto condizonato di tipo $(n, n-1, \ldots, n-k+1)$. ■

Definizione 1.12 (*Permutazioni*)

Una permutazione di lunghezza n è una disposizione di lunghezza n in $\{1, \ldots, n\}$.

Conseguenza: Dal Fattoriale Discreto, il numero di permutazioni di lunghezza n è $(n)_n = 1 \cdot 2 \ldots n = n!$.

Definizione 1.13 (*Combinazioni*)

Sia $A = \{1, \ldots, n\}$, una combinazione è un sotto insieme di A con a elementi. (l'ordine non importa).

Proposizione 1.2 (*Numero Combinazioni*)

Siano a, b, n con $a + b = n$, allora questi 3 insiemi sono in biezione tra loro.

1. *Sotto insieme di $\{1, \ldots, n\}$ con a elementi.*
2. *Sotto insieme di $\{1, \ldots, n\}$ con b elementi.*
3. *Sequenza binarie lunghezza n con a volte 1 e b volte 0.*

Questi insiemi hanno esattamente $\frac{(n)_a}{a!} = \frac{(n)_b}{b!} = \frac{n!}{a!b!}$ elementi. Questo numero $\frac{(n)_a}{a!} = \binom{n}{a} = \binom{n}{a,b}$ (coefficente binomiale).

Coefficente binomiale:

$$(x+y)^n = \sum_{a=0}^{n} \binom{n}{a} x^a y^{n-a} = \sum_{a,b|a+b=n} \binom{n}{a, b} x^a y^b$$

Osservazione: Negli esercizi considerare il numero sopra con "l'insieme di elementi" e quello sotto "quante posizioni in cui metterli".

Dimostrazione Proposizione 1.2 : ($Parte1$) La corrispondenza tra 1 e 3 la si dimostra con il seguene esempio: $n = 5, a = 3$

$$\begin{aligned} \{1,2,3\} &\leftrightarrow 11100 \\ \{1,2,4\} &\leftrightarrow 11010 \\ \{1,2,5\} &\leftrightarrow 11001 \\ \{1,3,4\} &\leftrightarrow 10110 \end{aligned}$$

Tutte le sequenze hanno 3 "1" e 2 "0". Poi 1 e 2 sono in biezione data dal completamento. ($Parte2$) Pensiamo di avere una funzione fatta cosi: Nel dominio abbiamo le disposizioni di lunghezza a in $\{1,\ldots,n\}$ e nel codominio abbiamo i sotto insiemi di $\{1,\ldots,n\}$ con a elementi. Per esempio:

$$(2,5,1) \mapsto \{1,2,5\}$$
$$(3,5,4) \mapsto \{3,4,5\}$$
$$(3,4,5) \mapsto \{3,4,5\}$$

Non è in biezione perchè non è ignettiva. (Nel caso generale abbiamo una funzione $a! : 1$).

Quindi le disposizioni sono $A!$ volte i sotto insiemi e quindi i sotto insiemi con a elementi sono $\frac{(n)_a}{a!} = \frac{n(n-1)\ldots(b+1)}{a!} = \frac{n(n-1)\ldots 3\cdot 2\cdot 1}{a!b!} = \frac{n!}{a!b!}$. ■

Definizione 1.14 (*Combinazione di 1. . . n*)

Una combinazione di lunghezza a in $\{1,\ldots,n\}$ è un sotto insieme di $\{1,\ldots,n\}$ con a elementi.

Definizione 1.15 (*Combinazione tipo (a,b)*)

Una combinazione di tipo (a,b) con $(a+b=n)$ è una coppia ordinata (A,B) di sotto insiemi di $\{1,\ldots,n\}$ con $|A|=a, |B|=b, A\cup B = \{1,\ldots,n\}$.

Definizione 1.16 (*Combinazione tipo (a,b,c)*)

Una combinazione di tipo (a,b,c) con $(a+b+c=n)$ è una terna ordinata (A,B,C) di sotto insiemi di $\{1,\ldots,n\}$ con $|A|=a, |B|=b, |C|=c, A\cup B\cup C = \{1,\ldots,n\}$.

Definizione 1.17 (*Anagramma*)

Sequenze binarie, ternarie, quaternarie, ecc, ordinate di numeri $\{1,\ldots,n\}$, con $n=a+b+\ldots$, di tipo $(a,b,c,\ldots)$ in biezione con le sequenze in cui compare a volte "1", b volte "2", c volte "3", ecc.

Esempio di riferimento (terna):

$$(\{1,2\},\{3\},\{4\}) \leftrightarrow (1,1,2,3)$$
$$(\{1,2\},\{4\},\{3\}) \leftrightarrow (1,1,3,2)$$
$$(\{1,3\},\{2\},\{4\}) \leftrightarrow (1,2,1,3)$$
$$(\{2,4\},\{1\},\{3\}) \leftrightarrow (2,1,3,1)$$

Proposizione 1.3 (*Binomio Combinazioni tipo (a,b,c)*)

Le combinazioni di tipo (a, b, c) con $(a + b + c = n)$ sono $\binom{n}{a,b,c} = \frac{n!}{a!b!c!}$.

Dimostrazione Proposizione 1.3: Posso scegliere A in $\binom{n}{a}$ modi. Fissato A posso sciegliere B in $\binom{n-a}{b}$ modi. C è univocamente determinato da A, B.

Il numero di combinazioni di tipo (a, b, c) è $\binom{n}{a} \cdot \binom{n-a}{b} = \frac{n!}{a!(n-a)!} \cdot \frac{(n-a)!}{b!(n-a-b)!} = \frac{n!}{a!b!c!}$. ■

Osservazione: $\binom{n}{a,b,c} = \binom{n}{b,c,a} = \ldots$, in particolare con due indici abbiamo $\binom{n}{a} = \binom{n}{b}$ se $(a + b = n)$.

Proposizione 1.4 (*Somma binomi*)

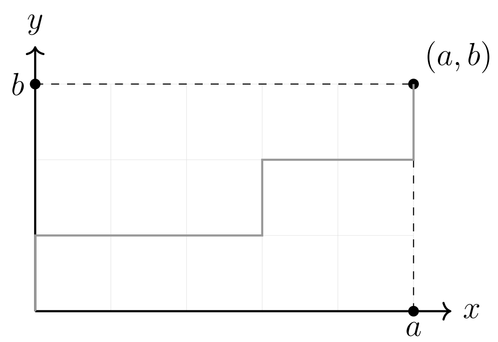
$\binom{n}{a,b} = \binom{n-1}{a-1,b} + \binom{n-1}{a,b-1}$ *che è uguale a* $\binom{n}{a} = \binom{n-1}{a-1} + \binom{n-1}{a}$.

Più in generale $\binom{n}{a,b,c} = \binom{n-1}{a-1,b,c} + \binom{n-1}{a,b-1,c} + \binom{n-1}{a,b,c-1}$.

Dimostrazione Proposizione 1.4: Le combinazioni di tipo (a, b, c) sono in biezione con le combinazioni di tipo:

- $\{(A, B, C) \mid n \in A\}$ sono $\binom{n-1}{a-1,b,c}$.
- $\{(A, B, C) \mid n \in B\}$ sono $\binom{n-1}{a,b-1,c}$.
- $\{(A, B, C) \mid n \in C\}$ sono $\binom{n-1}{a,b,c-1}$. ■

Cammino Reticolare



Il cammino reticolare nel piano cartesiano è il percorso che congiunge l'orgine degli assi a un punto (a,b) tramite *passi* verticali o orrizontali di 1.

Ottima interpretazione grafica di una combinazione di tipo (a,b). Quanti sono i cammini reticolari da (0,0) a (a,b)?

Possiamo codificare i passi inverticali con "1" e i passi orrizontali con "0". Cosi i cammini grafici diventano sequenze binarie. La lunghezza di tali sequenze è $a+b$, con a volte "0" e b volte "1". Abbiamo ottenuto un anagramma di tipo (a,b).

Osserviamo che abbiamo una biezione tra cammini e anagrammi e i cammini sono quindi $\binom{a+b}{a,b}$.

Numeri di Fibonacci

Conta i sotto insiemi di $\{1,\dots,n\}$ che non hanno 2 numeri consecutivi.

- F_n = numero sotto insiemi di $\{1,\dots,n\}$ senza consecutivi.
- $F_{n,k}$ = numero sotto insiemi di $\{1,\dots,n\}$ di cardinalità k senza consecutivi.

$$F_n = \sum_{k=0}^{n} F_{n,k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n-k+1}{k}$$

Dimostrazione : Arriviamo alla formula con un esempio, $F_{8,3}$. Vediamo questi insiemi come sequenze di lunghezza 8 con 3 "1" non consecutivi (astrazione simile Camminio Reticolare). Devo riuscire ad'usare il principio d'equivalenza con un insieme di cui so la cardinalità. Sò che dopo il primo e secondo "1" c'è sempre uno "0", quindi cancello questo "0" cosi ho sequenze da 6. Ora "1" possono essere consecutivi ma posso tornare univocamente alla precedente rappresentazione, quindi è biunivoco. Deduciamo che $F_{8,3} = \binom{6}{3} = 20$.

In generale $F_{n,k}$ sono le sequenze di lunghezza n con k volte "1", non consecutivi. Cancellando gli "0" che seguono i primi $k-1$ "1" otteniamo una sequenza binaria lunga $n-k+1$, con k "1".

Tali sequenze sono $F_{n,k} = \binom{n-k+1}{k}$ e quindi $F_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n-k+1}{k}$. A n non ci arrivo perchè il coefficente binomiale da 0 quando $k > n-k+1$. ■

Versione ricorsiva di $F_n, \forall n \geqslant 3$ si ha

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$$

Dimostrazione : Suddividiamo i sotto insiemi di $\{1,\dots,n\}$ senza consecutivi in due gruppi.

1. A_n quelli che contengono n.
2. B_n quelli che non contengono n.

Notare che $F_n = |F_{n-1}| + |F_{n-2}|$. In generale gli elementi di B_n non contengono n, quindi $B_n = F_{n-1}$ e togliendo n agli elementi di A_n rimane un qualunque sotto insiemi di $\{1, \dots, n-2\}$ senza consecutivi. Quindi $|A_n| = F_{n-2}$. ■

Definizione 1.18 (*Principio di inclusione esclusione*)

La cardinalità dell'unione di due insiemi:

$$|A \cup B| = |A| - |B| - |A \cap B|$$

La cardinalità dell'unione di tre insiemi:

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$$

La cardinalità dell'unione di n insiemi:

$$|A_1 \cup \dots \cup A_n| = \sum_{\emptyset \neq I \subseteq \{1,\dots,n\}}^{n} (-1)^{|I|-1} |\bigcap_{i \in I} A_i|$$

Definiamo l'insieme complementare con $(A_1, \dots, A_n)^C$. Permette di risolvere tanti quesiti più facilmente.

Per convenzine definiamo $\bigcap_{i \in \emptyset} = U$, l'intero insieme. Quindi otteniamo che $|(A_1, \dots, A_n)^C| = |\bigcap_{i \in \emptyset} A_i| + \sum_{\emptyset \neq I \subseteq \{1,\dots,n\}}^{n} (-1)^{|I|-1} |\bigcap_{i \in I} A_i|$ che è come dire $\sum_{I \subseteq \{1,\dots,n\}}^{n} (-1)^{|I|} |\bigcap_{i \in I} A_i|$.

Definizione 1.19 (*Sequenze k-piene*)

Una sequenza k-piena è una sequenza in cui ogni numero da 1 a k compare almeno una volta. (non compaiono altri numeri).

Usando il principio di inclusione esclusione scopro che il numero di sequenze k-piene lunghe n e con coefficenti in $\{1, \dots, k\}$ è

$$|S| = \sum_{j=0}^{k} (-1)^j \binom{k}{j} (k-j)^n$$

Definizione 1.20 (*Scombussolamenti*)

Uno scombussolamento è una permutazione di $\{1, \dots, n\}$ in cui per ogni i il numero non sta al posto i.

Usando il principio di inclusione esclusione scopro che il numero di scombussolamenti di n coefficenti è

$$|S| = \sum_{j=0}^{n} (-1)^j (n)_{n-j}$$

Definizione 1.21 (*Partizione*)

Una partizione di A è una suddivisione in sotto insiemi di A. Cioè un insieme di sotto insiemi detti blocchi della partizione $\{s_1, s_2, s_3, \dots\}$ tale che:

1. $S_i \cap S_j = \emptyset, \forall i \neq j$
2. $\bigcup_i S_i = A$

In altre parole la partizione è la suddivisione e i blocchi sono i pezzi della partizione.

Nota: Le partizioni possono essere usate per "raggruppare" le permutazioni degli stessi elementi. Non è una fuzione biunivoca.

Definizione 1.22 (*Numero di Bell*)

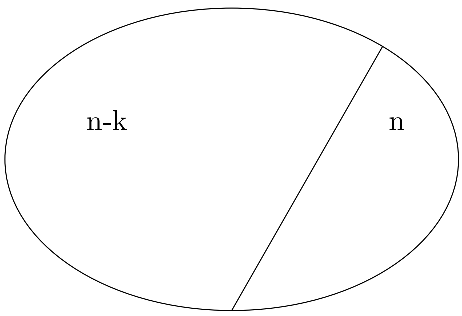
Il numero di partizioni di $\{1, \dots, n\}$ si dice numero di Bell e si indica con B_n. Si calcola con la formula ricorsiva per $\forall n \geqslant 2$:

$$B_n = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} B_n$$

Si assume $B_0 = 1$ per convenzione.

Dimostrazione Definizione 1.22 : Poniamo $B_{n,k}$ come il numero di partizioni di $\{1, \dots, n\}$ in cui n compare in un blocco con k elementi.

Calcoliamo $B_{n,k}$:



I numeri nel blocco che contiene n li possiamo scegliere in $\binom{n-1}{k-1}$ modi. Gli altri $n-k$ numeri li possiamo partizionare in B_{n-k} modi. Implicando:

$$B_{n,k} = \binom{n-1}{k-1} B_{n-k}$$

Ottenendo così

$$B_n = \sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1} B_{n-k}$$

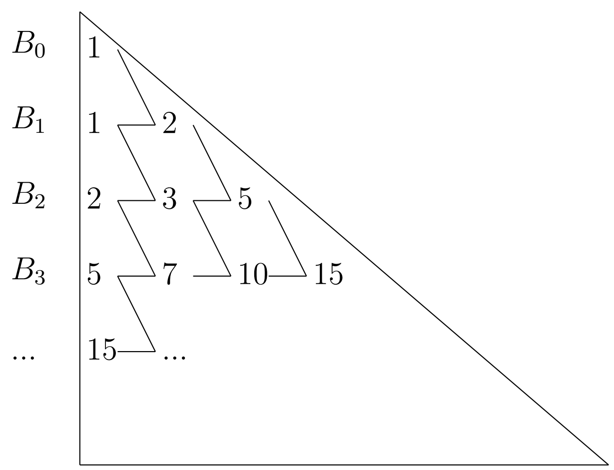
Equivalente a quella dell'enunciato ponendo $h = n - k$:

$$B_h = \sum_{h=0}^{n-1} \binom{n-1}{n-h-1} B_h = B_h = \sum_{h=0}^{h-1} \binom{h-1}{h} B_h$$

■

Triangolo di Bell

Trucco per calcolare il numero di Bell:



Definizione 1.23 (*Numero di Stirling*)

Indichiamo con $S_{n,k}$ il numero di partizioni di $\{1, \ldots, n\}$ in k blocchi. Si calcola con la formula ricorsiva:

$$S_{n,k} = S_{n-1,k-1} + kS_{n-1,k}$$

Si assume $S_{n,n} = 1$ e $S_n, 1 = 1$.

Dimostrazione Definizione 1.23 : Contiamo le partizioni in k blocchi in cui n è da solo. Gli altri $n-1$ numeri devono essere partizionati in $k-1$ blocchi: $S_{n-1,k-1}$ scelte.

Contiamo ora quelle in cui n non è in blocco da solo (procedendo per scelte successive):

- Partizioniamo i numeri da 1 a $n-1$ in k blocchi: $S_{n-1,k}$ scelte.
- Scegliamo in quale blocco inserire n: k scelte. ■

Triangolo di Stirling

Trucco per calcolare i numeri di Stirling:

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & S_{1,1} & & & \\
 & & S_{2,1} & & S_{2,2} & & \\
 & S_{3,1} & & S_{3,2} & & S_{3,3} & \\
S_{4,1} & & S_{4,2} & & S_{4,3} & & S_{4,4}
\end{array}$$

$$\begin{tikzcd}
 & & & 1 & & & \\
 & & 1 \arrow[dr] & & 1 \arrow[dl, Rightarrow] & & \\
 & 1 \arrow[dr] & & 3 \arrow[dl, Rightarrow] \arrow[dr] & & 1 \arrow[dl, Rrightarrow] & \\
1 & & 7 & & 6 & & 1
\end{tikzcd}$$

Ogni numero è la somma di quello in alto a sinistra più quello in alto a destra moltiplicato per il numero di diagonale.

2 Statistica Descrittiva

"Si occupa di presentare/descrivere i dati raccoli in un indiagine nel modo migliore possibile (sintetico, comunicativo)."

Definizione 2.1 (*Popolazione*)

Insieme su cui vogliamo effettuare un'indagine.

Definizione 2.2 (*Carattere*)

Un carattere è quello che vogliamo studiare dalla popolazione.

- **Carattere Quantitativo** se assumiamo valori numerici che esprimono una misura.
- **Carattere Qualitativo** se non è qualitativo.

I caratteri sarebbero distinguibili anche in **discreti e continui**.

Definizione 2.3 (*Unità (Statistica)*)

Un unità (statistica) è un elemento della popolazione.

Definizione 2.4 (*Campione*)

Un campione è un sotto insieme (rappresentativo) della popolazione del quale possiamo determinare il valore del campione.

Definizione 2.5 (*Modalità*)

La modalità sono i valori che può assumere il carattere.

Definizione 2.6 (*Classi*)

Se le modalità sono molto numerose (o infinite) è conveniente raggrupparle in ***classi****.*

Una classe, solitamente, è determinata dal ***confine inferiore e superiore****. Il* ***valore centrale*** *di una classe è la media dei confini.*

Se abbiamo un solo confine chi fa l'indagine può decidere un valore rappresentativo come valore centrale.

Definizione 2.7 (*Frequenza (assoluta)*)

La frequenza (assoluta) di una modalità è il numero di volte in cui compare nel campione.

Definizione 2.8 (***Frequenza relativa***)

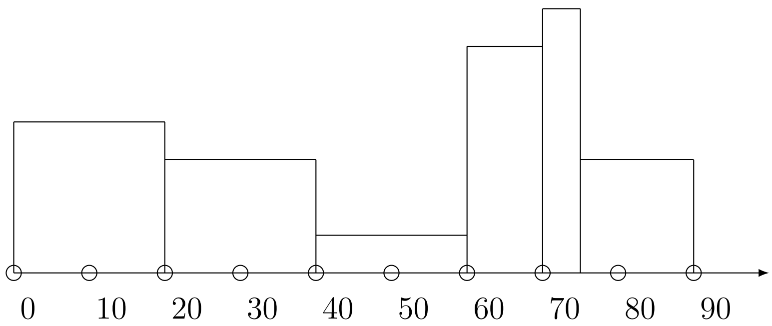
La frequenza relativa è il rapporto fra la frequenza assoluta e la cardinalità del campione.

$$F_R = \frac{F_A}{|campione|}$$

Definizione 2.9 (***Istogramma***)

L'istogramma è un grafico che rappresenta i risultati di un'indagine.

Ad'ogni modalità (classe) è associato un rettangolo con base proporzionale all'ampiezza e area proporzionale alla frequenza.



Definizione 2.10 (***Media Campionaria***)

La media campionaria si effettua su un carattere quantitativo su un campione di n elementi.

$$\overline{x} = \overline{x}_n = \frac{1}{n}(x_1 + \cdots + x_n)$$

Ricordiamo delle proprietà delle sommatorie:

- $\sum_{i=1}^{n}(a_i + b_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i + \sum_{i=1}^{n} b_i$
- $\sum_{i=1}^{n} c = nc$
- $\sum_{i=1}^{n}(ca_i) = c\sum_{i=1}^{n} a_i$
- $\sum_{i=1}^{n}(\sum_{j=1}^{n}(a_i b_j)) = (\sum_{i=1}^{n} a_i) \cdot (\sum_{i=1}^{n} b_i)$

Definizione 2.11 (*Linearità della media*)

Siano x, y, z tre caratteri legati dalla relazione $z = ax + by$ con costanti a, b.

$$\overline{z} = a\overline{x} + b\overline{y}$$

Caso particolare è con $y = 1$ ottenendo così $z = ax+b$ e quindi $\overline{z} = a\overline{x}+b$. Può essere usato per semplificare i conti.

Dimostrazione Definizione 2.11 :

$$\overline{z} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} z_i = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(ax_i + by_i) = \frac{1}{n}a\sum_{i=1}^{n} x_i + \frac{1}{n}b\sum_{i=1}^{n} y_i = a\overline{x} + b\overline{y}$$ ■

Definizione 2.12 (*Media Ponderata*)

La media ponderata si usa per dare diversa importanza (peso) ai vari elementi d'un campione.

$$\overline{x_w} = \frac{x_1w_1 + \cdots + x_nw_n}{w_1 + \cdots + w_n}$$

Osservazione: La media campionaria si ottiene dando peso 1 a tutti gli elementi.

Definizione 2.13 (*Varianza*)

La varianza di x è la media dei quadrati della distanza da $\overline{x}$.

$$\sigma_x^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2$$

In altre parole indica la dispersione dei valori, ovvero da una misura di qunato i dati sono lontanti tra dolo.

Dimostrazione Definizione 2.13 : Ricordiamo la formula della parabola $at^2 + bt + c = 0, a > 0$ e con vertice d'ascissa $-b/2a$.

Possiamo fissare un punto a caso t. Consideriamo la media dei quadrati delle distanze date come:

$$\frac{(x_1 - t)^2 + \cdots + (x_n - t)^2}{n}$$

Per quale t questa quantità è minima? $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - t)^2 = \frac{1}{n}(\sum_{i=1}^{n}(t^2 - 2x_1t + x_1^2)) = t^2 - \frac{2t}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i + \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = t^2 - 2\overline{x}t + \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2$. Il valore minimo lo otteniamo per $t = \frac{-(-2\overline{x})}{2\cdot 1} = \overline{x}$. ■

Osservazione: Dal calcolo precedente con $\overline{x}, \sigma_x^2 = \overline{x}^2 - 2\overline{x}\overline{x} - \overline{x^2} = \overline{x^2} - \overline{x}^2$.

Osservazione: La varianza è sempre positiva.

Proprietà 2.1 (*1° varianza*)

La varianza rimane invariata per traslazioni di costanti.

$$\sigma_y^2 = \sigma_x^2$$

Dimostrazione Proprietà 2.1 : Sia $y = x + c$ con c costante. Otteniamo $\overline{y} = \overline{x} + c$ ovvero $\overline{y^2} = \overline{x^2 + 2cx + c^2} = \overline{x^2} + 2c\overline{x} + c^2$ che ci da $\sigma_y^2 = \overline{y^2} - \overline{y}^2 = \overline{x^2} + 2c\overline{x} + c^2 - (\overline{x}^2 + 2c\overline{x} + c^2) = \sigma_x^2$. ■

Proprietà 2.2 (*2° varianza*)

La varianza aumenta per prodotto con costanti.

$$\sigma_y^2 = a^2\sigma_x^2$$

Dimostrazione Proprietà 2.2 : Sia $y = ax$ con a costante. Otteniamo $\overline{y} = a\overline{x}$ ovvero $\overline{y^2} = \overline{a^2x^2} = a^2\overline{x^2}$ che ci da $\sigma_y^2 = \overline{y^2} - \overline{y}^2 = a^2\overline{x^2} - a^2\overline{x}^2 = a^2\sigma_x^2$. ■

Definizione 2.14 (*Correlazione Positiva*)

Dati due caratteri x e y diciamo che sono positivamente correlati se al crescere di uno ci aspettiamo che cresca anche l'altro.

Definizione 2.15 (*Correlazione Negativa*)

Dati due caratteri x e y diciamo che sono negativamente correlati se al crescere di uno ci aspettiamo che l'altro diminuisca.

Definizione 2.16 (*Covarianza*)

La covarianza di x e y è

$$\sigma_{x,y} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})(y_i - \overline{y}) = \overline{xy} - \overline{x}\overline{y}$$

In altre parole se x e y sono positivamente correlate allora $(x_i - \overline{x})$ e $(y_i - \overline{y})$. Ci aspettiamo che siano concordi e quindi che il prodotto sia maggiore di zero.

Osservazione: $\sigma_{x,x} = \sigma_x^2$.

Dimostrazione Definizione 2.16 : $\sigma_{x,y} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})(y_i - \overline{y}) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i y_i) - x_i\overline{y} - \overline{x}y_i + \overline{x}\overline{y} = \overline{xy} - \overline{x}\overline{y} - \overline{x}\overline{y} + \overline{x}\overline{y} = \overline{xy} - \overline{x}\overline{y}$. ■

Definizione 2.17 (*Retta ai minimi quadrati*)

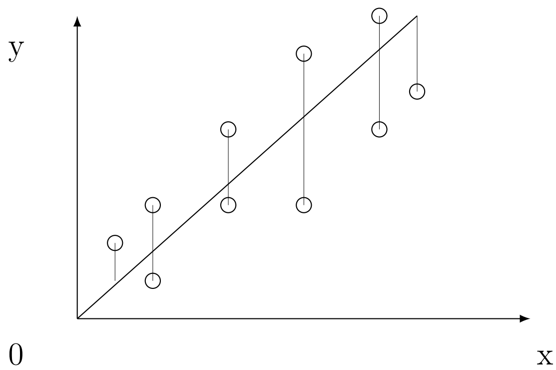
La retta ai minimi quadratici è la retta che minizza i quadrati degli errori (cioè delle lunghezze dei segmenti verticali.)

La somma dei quadrati degli errori è

$$S(m, q) = \sum_{i=1}^{n}(y_i - mx_i - q)^2$$

vogliamo m e q in modo che queta quantità sia minima.

$$S(m, q) = \sigma_y^2 + m^2\sigma_x^2 - em\sigma_{x,y} + (\overline{y} - q - m\overline{x})^2$$



Osservazione: Sia $\overline{y} = m\overline{x} + q$, il punto $(\overline{x}, \overline{y}) \in$ retta è $S(m, q) = \sigma_y^2 + m^2\sigma_x^2 - 2m\sigma_{x,y} \implies m = \frac{-b}{2a} = -\sigma_{x,y}\frac{1}{2\sigma_x^2} = \frac{\sigma_{x,y}}{\sigma_x^2}$.

Definizione 2.18 (*Media geometrica*)

La media geometrica permette di ottenere la variazione percentile media dei fattori moltiplicativi:

$$\overline{x_g} = \sqrt[n]{x_1 \cdot \cdots \cdot x_n}$$

$$\overline{x_g}^n = x_1 \cdot \cdots \cdot x_n$$

Osservazione: Ogni variazione percentile corrisponde ad'una moltiplicazione.

La **media armonica** è l'inverso della media degli inversi.

3 Probabilità

> "Si occupa di prevedere quanto è facile/possibile che qualcosa accada. Consiste in passaggi logici rigorosi partendo da un modello fisso (spazio di probabilità)."

Definizione 3.1 (*Fenomeno*)

Un fenomeno è qualcosa che acacde e che porta ad'un esito o risultato.

Un fenomeno può essere:

- **Deterministico** se il risultato può essere predetto con esattezza.
- **Aleatorio** se il risultato è imprevedibile.

Definizione 3.2 (*Evento*)

Un evento è un insieme di possibili risultati.

Definizione 3.3 (*Valutazione di probabilità*)

La valutazione di probabilità è una funzione che ad'ogni evento associa un numero tanto più grande quanto riteniamo che l'evento possa accadere.

Definizione 3.4 (*Evento coerente*)

Sia Ω l'insieme dei risultati. Un evento è un sotto insieme di Ω di cui ha senso calcolare la valutazione di probabilità, ossia:

1. *Se $A_1, \ldots$ sono eventi allora $\bigcup_i A_i$ è un evento.*
2. *Se A è un evento allora A^C è un evento.*
3. *Ω è un evento ($\Omega \in \mathscr{A}$).*

Osservazione: Una collezione di sotto insiemi di ω che soddisfa tutti i presupposti si dice **famiglia coerente d'eventi**, con simbolo $\mathscr{A}$.

Osservazione: Non tutti i sotto insiemi di Ω sono eventi.

La valutazione di probabilità, P, $P : \mathscr{A} \to \mathbb{R}_{\geqslant 0}$, deve soddisfare le proprietà:

1. $P(\Omega) = 1$.
2. $P(A) \geqslant 0, \forall$ *evento* A.

3. Se $A_1, \ldots$ sono eventi disgiunti allora

$$P(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$$

Osservazione: P non ha dominio Ω ma l'insieme degli eventi. Non calcoliamo la P di un risultato ma di un evento.

Definizione 3.5 (*Probabilità uniforme*)

La probabilità è uniforme se:

1. *Se Ω è finito con $|\Omega| = n$.*
2. *Se ogni sotto insieme di Ω è un evento.*
3. *Se ω_1 e ω_2 sono due risultati allora $P(\{\omega_1\}) = P(\{\omega_2\})$.*

Dalle proprietà della valutazione di probabilità deduciamo anche

$$P(\omega_1) + \cdots + P(\omega_n) = P(\Omega) = 1$$

In generale abbiamo quindi

$$P(\omega) = \frac{1}{n}, \forall \omega \in \Omega$$

Definizione 3.6 (*Probabilità eventi*)

Sia $A \in \Omega, A = \{\omega_1, \ldots, \omega_k\}$

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{\#risultatifavorevoli}{\#risultatipossibili}$$

Ragionamento: $P(A) = P(\omega_1) + \cdots + P(\omega_k) = \frac{1}{n} + \cdots + \frac{1}{n} = \frac{k}{n}$, se $|A| = k$.
Osservazione: Vale uno spazio con proprietà uniforme.

Definizione 3.7 (*Non-esempio*)

Un non-esempio è qualcosa che non funziona.

Considerazioni elementari

- Se E è un evento allora E^C è un evento.
- $E \cup E^C = \Omega$ è un uninoe disguinta.

- Se $P(E) + P(E^C) = 1$ allora $P(E^C) = 1 - P(E)$.

Osservazione: Il principio di inclusione-esclusione vale anche per l'unione di più di due probabilità.

Definizione 3.8 (*Probabilità condizionata*)

Chiamiamo probabilità condizionata la probabilità che accada l'evento B sapendo che accade l'evento A prima di B.

$$P(B \mid A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

In altre parole riparametrizziamo la probabilità di B da Ω al sotto insieme codiviso con A.

Osservazione: Ponendo $P'(B) = P(B \mid A)$ allora P' soddisfa le proprietà delle valutazioni di probabilità:

- $P'(\Omega) = P(\Omega \mid A) = \frac{P(\Omega \cap A)}{P(A)} = 1$.
- $P'(A_1 \cup A_2) = P'(A_1) + P'(A_2)$ se A_1, A_2 sono disgiunti.

Osservazione: $P(A \cap B) = P(B \mid A)P(A)$.

Definizione 3.9 (*Formula delle probabilità totali*)

Sia Ω partizionato in $\{A_1, A_2, \dots\}$. Per sapere la probabilità d'un evento B condizionato da un qualsiasi altro evento.

$$P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(B \cap A_i) = \sum_{i=1}^{n} P(B \mid A)P(A)$$

Definizione 3.10 (*Formula di Bayes*)

Siano A, B eventi.

$$P(B \mid A) = \frac{P(A \mid B)P(B)}{P(A)}$$

Dimostrazione Definizione 3.10 : Siano $P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$ e $P(B \mid A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$. Allora $P(A \cap B) = P(A \mid B)P(B) = P(B \mid A)P(A) = P(A \cap B)$. ■

Definizione 3.11 (*Eventi indipendenti*)

A e B sono eventi indipendenti se sapere che accade uno dei due non cambia la probabilità che accada l'altro.

$$P(B \mid A) = P(B)$$

$$P(A \mid B) = P(A)$$

Dato che $P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = P(A)$ allora $P(A \cap B) = P(A)P(B)$.

Definizione 3.12 (*Variabili Aleatorie*)

Sia Ω uno spazio di probabilità, A un insieme coerente di eventi e P la valutazione di probabilità.

*Una **variabile aleatoria** è una funzione $X : \Omega \to \mathbb{R}$ tale che $\forall a \in \mathbb{R}, \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \leqslant a\}$, oppure $X \leqslant a$, deve essere un evento.*

Per una variabile aleatoria non ha senso scrivere $P(X)$, ma ha senso scrivere $P(X \leqslant a)$.

Definizione 3.13 (*Funzione di ripartizione*)

Sia X una variabile aleatoria. La sua funzione di ripartizione F_X è una funzione $F_X : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita come $F_X(t) = P(X \leqslant t)$.