Mathe_Übungen_Abgabe

Inf19 Gruppe B4

27. April 2020

Lösung Übung 1

Aufgabe 1

a) $\langle a_n \rangle = \langle \frac{10^6}{n} \rangle$
$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{10^6}{n} = \lim\limits_{n\to\infty} (10^6 \cdot \frac{1}{n}) = 10^6 \cdot \lim\limits_{n\to\infty} (\frac{1}{n}) = 10^6 \cdot 0 = \underline{0}$

b) $\langle a_n \rangle = \langle \frac{\sqrt{n}}{n} \rangle$
$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n}}{n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = \underline{0}$
da $\sqrt(n)$ über alle Grenzen wächst.

c) $\langle a_n \rangle = \langle (-\frac{3}{5})^n + 1 \rangle$
$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} [(-\frac{3}{5})^n + 1] = \lim\limits_{n\to\infty} (-\frac{3}{5})^n + \lim\limits_{n\to\infty} 1 = 0 + 1 = \underline{1}$

d) $\langle a_n \rangle = \langle \cos(n \cdot \frac{\pi}{2}) \rangle$
Konvergiert die Folge?
$\Rightarrow$ Nutzung Theorem: Eine Folge konvergiert genau dann, wenn sie beschränkt und monoton ist.

Prüfung der Schranken (trivial für unmodulierten Cosinus):
$\bullet \sup a_n = 1$
$\bullet \inf a_n = -1$

Prüfung der Monotonie:
Fälle der Werte in der Folge:

- $n \mod 4 = 0 \to \cos(4k \cdot \frac{\pi}{2}) = 1; k \in \mathbb{N}$
- $n \mod 4 = 1$ od. $3 \to \cos((2k+1) \cdot \frac{\pi}{2}) = 1; k \in \mathbb{N}$
- $n \mod 4 = 2 \to \cos((4k+2) \cdot \frac{\pi}{2}) = -1; k \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow$ **KEINE** Monotonie vorhanden
$\Rightarrow$ Folge konvergiert nicht und es gibt keinen Grenzwert.

Aufgabe 2 a) $\langle a_n \rangle = \langle \frac{2 \cdot n^2 - n + 1}{n^2 + 1} \rangle$

$\lim\limits_{n \to \infty} a_n = \lim\limits_{n \to \infty} \frac{2 \cdot n^2 - n + 1}{n^2 + 1} = \lim\limits_{n \to \infty} \frac{2 - \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}}{1 + \frac{1}{n^2}} = \frac{2}{1} = \underline{2}$

b) $\langle a_n \rangle = \langle \frac{n-1}{n \cdot \sqrt{n}} \rangle$

$\lim\limits_{n \to \infty} a_n = \lim\limits_{n \to \infty} \frac{n-1}{n \cdot \sqrt{n}} = \lim\limits_{n \to \infty} \frac{\frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{n \cdot \sqrt{n}}}{1} = \underline{0}$

da alle Brüche im Zähler den Grenzwert 0 haben (Permanenzeigenschaften bzgl. Potenzen und Wurzeln -> Zurückführbar auf $\frac{1}{n}$)

Aufgabe 3 $\langle a_n \rangle = \langle \frac{(n-1)^2}{2 \cdot n^2+1} \rangle$

$\langle b_n \rangle = \langle \frac{1-n}{3 \cdot n+1} \rangle$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{(n-1)^2}{2 \cdot n^2+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2-2n+1}{2 \cdot n^2+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{1-\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}}{2+\frac{1}{n^2}} = \underline{\frac{1}{2}}$$

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1-n}{3 \cdot n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{-1+\frac{1}{n}}{3+\frac{1}{n}} = \underline{-\frac{1}{3}}$$

a) $c_n = a_n + b_n$

$$\lim_{n\to\infty} c_n = \lim_{n\to\infty} a_n + \lim_{n\to\infty} b_n = \frac{1}{2} + (-\frac{1}{3}) = \underline{\frac{1}{6}}$$

b) $c_n = b_n - a_n$

$$\lim_{n\to\infty} c_n = \lim_{n\to\infty} b_n - \lim_{n\to\infty} a_n = -\frac{1}{3} - (\frac{1}{2}) = \underline{-\frac{5}{6}}$$

c) $c_n = a_n \cdot b_n$

$$\lim_{n\to\infty} c_n = \lim_{n\to\infty} a_n \cdot \lim_{n\to\infty} b_n = \frac{1}{2} \cdot (-\frac{1}{3}) = \underline{-\frac{1}{6}}$$

d) $c_n = \frac{a_n}{b_n}$

$$\lim_{n\to\infty} c_n = \frac{\lim_{n\to\infty} a_n}{\lim_{n\to\infty} b_n} = \frac{\frac{1}{2}}{-\frac{1}{3}} = \underline{-\frac{3}{2}}$$

gültig für $n \geq 2$.

e) $c_n = \|b_n\|$

$$\lim_{n\to\infty} c_n =$$
$$\lim_{n\to\infty} \|b_n\| = \left\| \lim_{n\to\infty} b_n \right\| =$$
$$\underline{\frac{1}{3}}$$

f) $c_n = \sqrt{8 \cdot a_n}$

$$\lim_{n\to\infty} c_n = \lim_{n\to\infty} \left(\sqrt{8} \cdot \sqrt{a_n}\right) =$$
$$2\sqrt{2} \cdot \lim_{n\to\infty} \sqrt{a_n} = 2\sqrt{2} \cdot \sqrt{\lim_{n\to\infty} a_n} =$$
$$2\sqrt{2} \cdot \sqrt{\frac{1}{2}} = 2\sqrt{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = \underline{2}$$

Aufgabe 4 a) $\langle a_n \rangle = \langle \frac{n^2+10}{n+1} \rangle$

$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^2+10}{n+1}$

reziproke Folge: $\left\| \frac{n+1}{n^2+10} \right\|$

$\lim\limits_{n\to\infty} \left\| \frac{n+1}{n^2+10} \right\| = \left\| \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n+1}{n^2+10} \right\| = \left\| \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}{1+\frac{10}{n^2}} \right\| = \|0\| = \underline{0}$

$\rightarrow$ reziproke Folge ist Nullfolge $\rightarrow$ a_n wächst über jede Grenze.

b) $\langle a_n \rangle = \langle \frac{b_q \cdot n^q + b_{q-1} \cdot n^{q-1} + \cdots + b_0}{c_p \cdot n^p + c_{p-1} \cdot n^{p-1} + \cdots + c_0} \rangle$

(a_n stellt einen allgemeinen Bruch aus zwei Polynomen dar.)

Fallunterscheidung:

1.Fall: q<p: Nullfolge
s. Handschriftliche Bearbeitung

2.Fall: q=p: $\frac{b_q}{c_p}$

$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{b_q \cdot n^q + b_{q-1} \cdot n^{q-1} + \cdots + b_0}{c_p \cdot n^p + c_{p-1} \cdot n^{p-1} + \cdots + c_0} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{b_q \cdot n^0 + b_{q-1} \cdot n^{-1} + \cdots + b_0 \cdot n^{-q}}{c_q \cdot n^0 + c_{q-1} \cdot n^{-1} + \cdots + c_0 \cdot n^{-q}} = \underline{\frac{b_q}{c_p}}$

3.Fall: q>p: Wächst über jede Grenze (Beweis siehe Fall 1 für reziproke Folge)

Lösung Übung 1 - Abgabe

Aufgabe 1 a) $\langle a_n \rangle = \langle \frac{10^6}{n} \rangle$

$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{10^6}{n} = \lim\limits_{n\to\infty} (10^6 \cdot \frac{1}{n}) = 10^6 \cdot \lim\limits_{n\to\infty} (\frac{1}{n}) = 10^6 \cdot 0 = \underline{0}$

c) $\langle a_n \rangle = \langle (-\frac{3}{5})^n + 1 \rangle$

$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} [(-\frac{3}{5})^n + 1] = \lim\limits_{n\to\infty} (-\frac{3}{5})^n + \lim\limits_{n\to\infty} 1 = 0 + 1 = \underline{1}$

Aufgabe 2 a) $\langle a_n \rangle = \langle \frac{2 \cdot n^2 - n + 1}{n^2 + 1} \rangle$

$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{2 \cdot n^2 - n + 1}{n^2 + 1} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{2 - \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}}{1 + \frac{1}{n^2}} = \frac{2}{1} = \underline{2}$

Aufgabe 3 $\langle a_n \rangle = \langle \frac{(n-1)^2}{2 \cdot n^2 + 1} \rangle$

$\langle b_n \rangle = \langle \frac{1-n}{3 \cdot n + 1} \rangle$

$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{(n-1)^2}{2 \cdot n^2 + 1} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^2 - 2n + 1}{2 \cdot n^2 + 1} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1 - \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2}}{2 + \frac{1}{n^2}} = \underline{\frac{1}{2}}$

$\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1-n}{3 \cdot n + 1} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{-1 + \frac{1}{n}}{3 + \frac{1}{n}} = \underline{-\frac{1}{3}}$

a) $c_n = a_n + b_n$

$\lim\limits_{n\to\infty} c_n = \lim\limits_{n\to\infty} a_n + \lim\limits_{n\to\infty} b_n = \frac{1}{2} + (-\frac{1}{3}) = \underline{\frac{1}{6}}$

b) $c_n = b_n - a_n$

$\lim\limits_{n\to\infty} c_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n - \lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\frac{1}{3} - (\frac{1}{2}) = \underline{-\frac{5}{6}}$

c) $c_n = a_n \cdot b_n$

$\lim\limits_{n\to\infty} c_n = \lim\limits_{n\to\infty} a_n \cdot \lim\limits_{n\to\infty} b_n = \frac{1}{2} \cdot (-\frac{1}{3}) = \underline{-\frac{1}{6}}$

d) $c_n = \frac{a_n}{b_n}$

$\lim\limits_{n\to\infty} c_n = \frac{\lim_{n\to\infty} a_n}{\lim_{n\to\infty} b_n} = \frac{\frac{1}{2}}{-\frac{1}{3}} = \underline{-\frac{3}{2}}$

gültig für $n \geq 2$.

e) $c_n = \|b_n\|$

$\lim\limits_{n\to\infty} c_n =$

$\lim\limits_{n\to\infty} \|b_n\| = \left\| \lim\limits_{n\to\infty} b_n \right\| =$

$\underline{\frac{1}{3}}$

f) $c_n = \sqrt{8 \cdot a_n}$

$\lim\limits_{n\to\infty} c_n = \lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt{8} \cdot \sqrt{a_n} \right) =$

$2\sqrt{2} \cdot \lim\limits_{n \to \infty} \sqrt{a_n} = 2\sqrt{2} \cdot \sqrt{\lim\limits_{n \to \infty} a_n} =$

$2\sqrt{2} \cdot \sqrt{\frac{1}{2}} = 2\sqrt{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = \underline{2}$

Aufgabe 4 a) $\langle a_n \rangle = \langle \frac{n^2+10}{n+1} \rangle$

$\lim\limits_{n \to \infty} a_n = \lim\limits_{n \to \infty} \frac{n^2+10}{n+1}$

reziproke Folge: $\left\| \frac{n+1}{n^2+10} \right\|$

$\lim\limits_{n \to \infty} \left\| \frac{n+1}{n^2+10} \right\| = \left\| \lim\limits_{n \to \infty} \frac{n+1}{n^2+10} \right\| = \left\| \lim\limits_{n \to \infty} \frac{\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}}{1 + \frac{10}{n^2}} \right\| = \|0\| = \underline{0}$

$\rightarrow$ reziproke Folge ist Nullfolge $\rightarrow$ a_n wächst über jede Grenze.

Lösung Übung 2 - Abgabe

Aufgabe 7 b) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ mit $a_n = \frac{1}{\sqrt[n]{n}}$

Ist a$_n eine Nullfolge? Dann msste die reziproke Folge$ rez$_n = \sqrt[n]{n}$ über jede Grenze wachsen.

Es gilt auf jeden Fall $rez_n \geq 0$ aufgrund der Definition von Wurzeln. Also muss rez_n wachsen (bis auf endlich viele Ausnahmen).

$\Rightarrow$ Prüfung auf Monotonie

$\sqrt[n+1]{n+1} \geq \sqrt[n]{n}$

$\sqrt[n+1]{n+1}^{n+1} \geq \sqrt[n]{n}^{n+1}$

n+1 $\geq n \cdot \sqrt[n]{n}$

$\frac{1}{n} \geq \sqrt[n]{n}$

Das ist im Unendlichen betrachtet ein Widerspruch. $\sqrt[n]{n}$ müsste kleiner sein als $\frac{1}{n}$, was jedoch eine Nullfolge ist. Somit müsste rez_n kleiner als eine Nullfolge sein um über alle Grenzen zu wachsen. Dies ist ein eindeutiger Widerspruch. (Sorry für den seltsamen Beweis, aber das war der erste der nach 5 oder 6 Ansätzen „funkioniert“hat.)

$\rightarrow \frac{1}{\sqrt[n]{n}}$ ist keine Nullfolge $\rightarrow$ Die Reihe muss divergieren!

Aufgabe 8 b) $a_n = \frac{2^{n-1}}{n!}$; $s = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$

$\lim_{n\to\infty} \frac{\|a_{n+1}\|}{\|a_n\|} =$

$\lim_{n\to\infty} \frac{2^n}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{2^{n-1}} =$

$\lim_{n\to\infty} \frac{2}{n+1} = 0$

$0 < 1 \rightarrow$ Quotientenkriterium erfüllt $\rightarrow$ Reihe konvergiert.

c) $a_k = \frac{2 \cdot k^2}{(k+1)\cdot 3^k}$; $s = \sum_{k=1}^{\infty} a_k$

$\lim_{n\to\infty} \frac{\|a_{k+1}\|}{\|a_k\|} =$

$\lim_{n\to\infty} \frac{2\cdot k^3}{(k+2)\cdot 3^{k+1}} \cdot \frac{(k+1)\cdot 3^k}{2 \cdot k^2} =$

$\lim_{n\to\infty} \frac{(k+1)\cdot(k^2+2k+1)}{(k+2)\cdot 3 \cdot k^2} =$

$\lim_{n\to\infty} \frac{k^3+3k^2+3k+1}{3k^3+6k^2} = \frac{1}{3}$

$\frac{1}{3} < 1 \rightarrow$ Quotientenkriterium erfüllt $\rightarrow$ Reihe konvergiert.

Aufgabe 9 $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(2^k)}{3^k}$

Untersuchung mit dem Leibniz-Kriterium:

1. alternierender Teil? $\rightarrow \sin(2^k)$ alterniert zwischen -1 und 1. ✓
2. monoton fallend?
   $\frac{1}{3^k} \geq \frac{1}{3^{k+1}}$

$1 \geq \frac{1}{3}$ ✓

3. Nullfolge? $\rightarrow \frac{1}{3^k} = (\frac{1}{3})^k$ ist Nullfolge. ✓

Konvergiert anhand des Leibniz-Kriteriums.

Aufgabe 10 a) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot (1 + (\frac{1}{10})^n)$

Untersuchung mit dem Leibniz-Kriterium:

1. alternierender Teil? $\rightarrow (-1)^{n+1}$ alterniert. ✓
2. monoton fallend?
   $(1 + (\frac{1}{10})^n) \geq (1 + (\frac{1}{10})^{n+1})$
   $1 \geq \frac{1}{10}$ ✓
3. Nullfolge? Nein! Die Folge hat den Grenzwert 1! ×

Konvergiert nicht anhand des Leibniz-Kriteriums.

b) $s = \sum_{n=1}^{\infty} \cdot \frac{1}{\sqrt{n}}$

Untersuchung mit dem Leibniz-Kriterium:

1. alternierender Teil? $\rightarrow (-1)^{n+1}$ alterniert. ✓
2. monoton fallend?
   $\frac{1}{\sqrt{n}} \geq \frac{1}{\sqrt{n+1}}$
   $\sqrt{n+1} \geq \sqrt{n}$
   $n + 1 \geq n$
   $1 \geq 0$ ✓
3. Nullfolge? Ja! Majorisiert durch $\frac{1}{n}$ ✓

Konvergiert anhand des Leibniz-Kriteriums.