

Mathe_Übungen_Abgabe

Inf19 Gruppe B4

19. April 2020

Lösung Übung 1

Aufgabe 1 a) $\langle a_n \rangle = \langle \frac{10^6}{n} \rangle$
 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{10^6}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} (10^6 \cdot \frac{1}{n}) = 10^6 \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} (\frac{1}{n}) = 10^6 \cdot 0 = \underline{0}$

b) $\langle a_n \rangle = \langle \frac{\sqrt{n}}{n} \rangle$
 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n}}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = \underline{0}$
da \sqrt{n} über alle Grenzen wächst.

c) $\langle a_n \rangle = \langle (-\frac{3}{5})^n + 1 \rangle$
 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} [(-\frac{3}{5})^n + 1] = \lim_{n \rightarrow \infty} (-\frac{3}{5})^n + \lim_{n \rightarrow \infty} 1 = 0 + 1 = \underline{1}$

d) $\langle a_n \rangle = \langle \cos(n \cdot \frac{\pi}{2}) \rangle$
Konvergiert die Folge?
 \Rightarrow Nutzung Theorem: Eine Folge konvergiert genau dann, wenn sie beschränkt und monoton ist.

Prüfung der Schranken (trivial für unmodulierten Cosinus):

- $\sup a_n = 1$
- $\inf a_n = -1$

Prüfung der Monotonie:

Fälle der Werte in der Folge:

- $n \bmod 4 = 0 \rightarrow \cos(4k \cdot \frac{\pi}{2}) = 1; k \in \mathbb{N}$
- $n \bmod 4 = 1 \text{ od. } 3 \rightarrow \cos((2k+1) \cdot \frac{\pi}{2}) = 0; k \in \mathbb{N}$
- $n \bmod 4 = 2 \rightarrow \cos((4k+2) \cdot \frac{\pi}{2}) = -1; k \in \mathbb{N}$

\Rightarrow **KEINE** Monotonie vorhanden

\Rightarrow Folge konvergiert nicht und es gibt keinen Grenzwert.

Aufgabe 2 a) $\langle a_n \rangle = \langle \frac{2 \cdot n^2 - n + 1}{n^2 + 1} \rangle$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 \cdot n^2 - n + 1}{n^2 + 1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 - \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}}{1 + \frac{1}{n^2}} = \frac{2}{1} = \underline{2}$$

b) $\langle a_n \rangle = \langle \frac{n-1}{n \cdot \sqrt{n}} \rangle$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n-1}{n \cdot \sqrt{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{n \cdot \sqrt{n}}}{1} = \underline{0}$$

da alle Brüche im Zähler den Grenzwert 0 haben (Permanenzeigenschaften bzgl. Potenzen und Wurzeln -> Zurückführbar auf $\frac{1}{n}$)

Aufgabe 3 $\langle a_n \rangle = \langle \frac{(n-1)^2}{2 \cdot n^2 + 1} \rangle$

$$\langle b_n \rangle = \langle \frac{1-n}{3 \cdot n + 1} \rangle$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n-1)^2}{2 \cdot n^2 + 1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 - 2n + 1}{2 \cdot n^2 + 1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2}}{2 + \frac{1}{n^2}} = \underline{\underline{\frac{1}{2}}}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1-n}{3 \cdot n + 1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-1 + \frac{1}{n}}{3 + \frac{1}{n}} = \underline{\underline{-\frac{1}{3}}}$$

a) $c_n = a_n + b_n$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n + \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \frac{1}{2} + \left(-\frac{1}{3}\right) = \underline{\underline{\frac{1}{6}}}$$

b) $c_n = a_n - b_n$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n - \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \frac{1}{2} - \left(-\frac{1}{3}\right) = \underline{\underline{\frac{5}{6}}}$$

c) $c_n = a_n \cdot b_n$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) = \underline{\underline{-\frac{1}{6}}}$$

d) $c_n = \frac{a_n}{b_n}$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} a_n}{\lim_{n \rightarrow \infty} b_n} = \frac{\frac{1}{2}}{-\frac{1}{3}} = \underline{\underline{-\frac{3}{2}}}$$

gültig für $n \geq 2$.

e) $c_n = \|b_n\|$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} c_n =$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|b_n\| = \left\| \lim_{n \rightarrow \infty} b_n \right\| =$$

$$\underline{\underline{\frac{1}{3}}}$$

f) $c_n = \sqrt{8 \cdot a_n}$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{8} \cdot \sqrt{a_n}) =$$

$$2\sqrt{2} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{a_n} = 2\sqrt{2} \cdot \sqrt{\lim_{n \rightarrow \infty} a_n} =$$

$$2\sqrt{2} \cdot \sqrt{\frac{1}{2}} = 2\sqrt{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = \underline{\underline{2}}$$

- Aufgabe 4 a) $\langle a_n \rangle = \langle \frac{n^2+10}{n+1} \rangle$
 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2+10}{n+1}$
 reziproke Folge: $\left\| \frac{n+1}{n^2+10} \right\|$
 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left\| \frac{n+1}{n^2+10} \right\| = \left\| \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n^2+10} \right\| = \left\| \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}}{1 + \frac{10}{n^2}} \right\| = \|0\| = \underline{0}$
 \rightarrow reziproke Folge ist Nullfolge $\rightarrow a_n$ wächst über jede Grenze.
- b) $\langle a_n \rangle = \langle \frac{b_q \cdot n^q + b_{q-1} \cdot n^{q-1} + \dots + b_0}{c_p \cdot n^p + c_{p-1} \cdot n^{p-1} + \dots + c_0} \rangle$
 $(a_n \text{ stellt einen allgemeinen Bruch aus zwei Polynomen dar.})$

Fallunterscheidung:

1. Fall: $q < p$: Nullfolge
 s. Handschriftliche Bearbeitung
2. Fall: $q = p$: $\frac{b_q}{c_p}$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_q \cdot n^q + b_{q-1} \cdot n^{q-1} + \dots + b_0}{c_p \cdot n^p + c_{p-1} \cdot n^{p-1} + \dots + c_0} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_q \cdot n^0 + b_{q-1} \cdot n^{-1} + \dots + b_0 \cdot n^{-q}}{c_q \cdot n^0 + c_{q-1} \cdot n^{-1} + \dots + c_0 \cdot n^{-q}} = \frac{b_q}{c_p}$$
3. Fall: $q > p$: Wächst über jede Grenze (Beweis siehe Fall 1 für reziproke Folge)

Lösung Übung 1 - Abgabe

Aufgabe 1 a) $\langle a_n \rangle = \langle \frac{10^6}{n} \rangle$
 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{10^6}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} (10^6 \cdot \frac{1}{n}) = 10^6 \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} (\frac{1}{n}) = 10^6 \cdot 0 = \underline{0}$

c) $\langle a_n \rangle = \langle (-\frac{3}{5})^n + 1 \rangle$
 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} [(-\frac{3}{5})^n + 1] = \lim_{n \rightarrow \infty} (-\frac{3}{5})^n + \lim_{n \rightarrow \infty} 1 = 0 + 1 = \underline{1}$

Aufgabe 2 a) $\langle a_n \rangle = \langle \frac{2 \cdot n^2 - n + 1}{n^2 + 1} \rangle$
 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 \cdot n^2 - n + 1}{n^2 + 1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 - \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}}{1 + \frac{1}{n^2}} = \frac{2}{1} = \underline{2}$

Aufgabe 3 $\langle a_n \rangle = \langle \frac{(n-1)^2}{2 \cdot n^2 + 1} \rangle$
 $\langle b_n \rangle = \langle \frac{1-n}{3 \cdot n + 1} \rangle$
 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n-1)^2}{2 \cdot n^2 + 1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 - 2n + 1}{2 \cdot n^2 + 1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2}}{2 + \frac{1}{n^2}} = \underline{\frac{1}{2}}$
 $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1-n}{3 \cdot n + 1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-1 + \frac{1}{n}}{3 + \frac{1}{n}} = \underline{-\frac{1}{3}}$

a) $c_n = a_n + b_n$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n + \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \frac{1}{2} + (-\frac{1}{3}) = \underline{\frac{1}{6}}$$

b) $c_n = a_n - b_n$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n - \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \frac{1}{2} - (-\frac{1}{3}) = \underline{\frac{5}{6}}$$

c) $c_n = a_n \cdot b_n$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \frac{1}{2} \cdot (-\frac{1}{3}) = \underline{-\frac{1}{6}}$$

d) $c_n = \frac{a_n}{b_n}$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} a_n}{\lim_{n \rightarrow \infty} b_n} = \frac{\frac{1}{2}}{-\frac{1}{3}} = \underline{-\frac{3}{2}}$$

gültig für $n \geq 2$.

e) $c_n = \|b_n\|$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} c_n =$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|b_n\| = \left\| \lim_{n \rightarrow \infty} b_n \right\| =$$

$$\underline{\frac{1}{3}}$$

f) $c_n = \sqrt{8 \cdot a_n}$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{8} \cdot \sqrt{a_n}) =$$

$$2\sqrt{2} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{a_n} = 2\sqrt{2} \cdot \sqrt{\lim_{n \rightarrow \infty} a_n} =$$

$$2\sqrt{2} \cdot \sqrt{\frac{1}{2}} = 2\sqrt{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = \underline{2}$$

Aufgabe 4 a) $\langle a_n \rangle = \langle \frac{n^2+10}{n+1} \rangle$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2+10}{n+1}$$

$$\text{reziproke Folge: } \left\| \frac{n+1}{n^2+10} \right\|$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\| \frac{n+1}{n^2+10} \right\| = \left\| \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n^2+10} \right\| = \left\| \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}}{1 + \frac{10}{n^2}} \right\| = \|0\| = \underline{0}$$

\rightarrow reziproke Folge ist Nullfolge $\rightarrow a_n$ wächst über jede Grenze.