

POLITECHNIKA ŁÓDZKA

SZYBKIE ALGORYTMY

Techniki zwiększenie efektywności algorytmów

Prowadzący zajęcia:

prof. dr hab. Mykhaylo YATSYMIRSKYY

Autor:

Filip RYNKIEWICZ



Politechnika
Łódzka

2016-11-21

Spis treści

1	Informacje o sprzęcie testowym	2
2	Przyjęte własność	2
3	Algorytm sortowania przez wstawianie	3
3.1	Dla dwóch elementów	3
3.1.1	Oszacowanie złożoności	3
3.1.1.1	Optymistyczna	3
3.1.1.2	Pesymistyczna	4
3.1.1.3	Średnia	4
3.1.2	Kod	5
3.2	Dla trzech elementów	6
3.2.1	Oszacowanie złożoności	6
3.2.1.1	Optymistyczna	6
3.2.1.2	Pesymistyczna	6
3.2.1.3	Średnia	6
3.2.2	Kod	6
3.3	Wyniki	6
4	Algorytm sortowania bąbelkowego	9
4.1	Dla dwóch elementów	9
4.2	Oszacowanie złożoności	9
4.2.0.1	Optymistyczna	9
4.2.0.2	Pesymistyczna	10
4.2.0.3	Średnia	10
4.2.1	Kod	10
4.3	Dla trzech elementów	11
4.3.1	Oszacowanie złożoności	11
4.3.1.1	Optymistyczna	11
4.3.1.2	Pesymistyczna	11
4.3.1.3	Średnia	11
4.3.2	Kod	11
4.4	Wyniki	11

5	Algorytm sortowania przez wybieranie	14
5.1	Dla dwóch elementów	14
5.1.1	Oszacowanie złożoności	14
5.1.1.1	Optymistyczna	14
5.1.1.2	Pesymistyczna	14
5.1.1.3	Średnia	15
5.1.2	Kod	15
5.2	Dla trzech elementów	16
5.2.1	Oszacowanie złożoności	16
5.2.1.1	Optymistyczna	16
5.2.1.2	Pesymistyczna	16
5.2.1.3	Średnia	16
5.2.2	Kod	16
5.3	Wyniki	17

1 Informacje o sprzęcie testowym

Do pomiaru czasu zostały wykorzystane funkcje *QueryPerformanceCounter* oraz *QueryPerformanceFrequency* z biblioteki **windows.h**. Wszystkie testy zostały wykonane na maszynie z systemem Windows 8.1Pro 64, z procesorem Intel(R) Core(TM) i7-5700HQ CPU @ 2.70GHz. Testy zostały przeprowadzone na kompilatorze *mingw32-c++.exe (GCC) 5.3.0* z flagą *-std=gnu++11* zapewniającą wsparcie *C++11*.

2 Przyjęte własność

Jako optymistyczny przypadek została przyjęta sytuacja w której algorytm ma za zadanie posortować już posortowaną tablicę.

Jako pesymistyczny przypadek przyjmuję się sytuacje w której algorytm ma posortować tablicę posortowaną w odwrotnym kierunku niż pożądaną.

Jako średni przypadek zostało przyjęta sytuacja w której tablica zawiera w sobie elementy losowe.

Każde porównanie algorytmów zostało przeprowadzone na tych samych danych wejściowych. Wszystkie algorytmy, te zmodyfikowane oraz te dla par, zostały napisane przez autora.

3 Algorytm sortowania przez wstawianie

3.1 Dla dwóch elementów

Każde iteracja zaczyna się od elementu $V[i + 2]$ ¹.

Pierwszym krokiem tego sortowania będzie wybranie pary (x', y') . Po wybraniu pary (x', y') , jest ona wstępnie sortowana rosnąco, potem następuje porównywanie elementu y' z elementem z , który poprzedza wybraną parę oraz indeks $z \in |V|$. Dopóki $z > y'$ wykonuje się przesunięcie całej pary przed liczbę z . Za każdym razem liczba z jest liczbą poprzedzającą liczbę x' . Jeżeli $z < y'$ algorytm przechodzi do porównania $z > x'$. Jeżeli zostanie spełniony ten warunek liczba mniejsza z pary zostaje przestawiona przed liczbą z .

3.1.1 Oszacowanie złożoności

3.1.1.1 Optymistyczna

W tym przypadku złożoność obliczeniowa będzie wynosiła $O(n)$. Wynika to z faktu że :

- Pierwsza pętla *for*(4 linijka) zostanie wykonana dokładnie $\frac{n}{2}$ razy.
- Porównanie elementów w parze(6 linijka), i posortowanie jej zawsze zajmie $\frac{n}{2}$ porównań.
- Pierwsza zagnieżdżona pętla *while*(13 linijka) zostanie wykonana 0 razy.
- Druga zagnieżdżona pętla *while*(20 linijka) zostanie wykonana 0 razy.
- Jeżeli tablica jest o rozmiarze nieparzystym dodatkowo zostanie wykonane 0 iteracji(31 linijka).

$$T \approx \frac{n}{2} \tag{1}$$

gdzie T to oszacowana ilość operacji a n rozmiar tablicy do posortowania.

Zerowa ilość przejść w przypadku wszystkich pętli *while* wynika z faktu że zawarte w nich instrukcje zawsze będą warunkiem kończącym pętlę, zatem nigdy nie zostaną wykonane.

¹Indeks $i + 2$ ze zbioru V , gdzie i jest kolejna iteracja algorytmu.

3.1.1.2 Pesymistyczna

Złożoność obliczeniowa będzie wynosiła $O(n^2)$.

- Pierwsza pętla *for*(4 linijka) zostanie wykonana dokładnie $\frac{n}{2}$ razy.
- Porównanie elementów w parze(6 linijka), i posortowanie jej zawsze zajmie $\frac{n}{2}$ porównań.
- Pierwsza zagnieżdżona pętla *while*(13 linijka) zostanie wykonana $2n$ razy.
- Druga zagnieżdżona pętla *while*(20 linijka) zostanie wykonana 0 razy.
- Jeżeli tablica jest o rozmiarze nieparzystym dodatkowo zostanie wykonane n iteracji(31 linijka).

$$T \approx \frac{n}{2} \cdot \left(\frac{n}{2} + 2n + 0\right) + n \approx \frac{5n^2}{4}$$

gdzie T to oszacowana ilość operacji a n rozmiar tablicy do posortowania.

Ponieważ obie pętle *while* korzystają z tego samego iteratora, zostało przyjęte że obie w sumie wykonają się n razy, więc średnio każda wykona się $\frac{n}{2}$.

3.1.1.3 Średnia

Złożoność obliczeniowa będzie wynosiła $O(n^2)$.

SPRAWDZ ZŁOŻONOSC PETLI WHILE!

- Pierwsza pętla *for*(4 linijka) zostanie wykonana dokładnie $\frac{n}{2}$ razy.
- Porównanie elementów w parze(6 linijka), i posortowanie jej zawsze zajmie $\frac{n}{2}$ porównań.
- Pierwsza zagnieżdżona pętla *while*(13 linijka) zostanie wykonana $\approx \frac{n \cdot (n-1)}{2}$ razy.
- Druga zagnieżdżona pętla *while*(20 linijka) zostanie wykonana $\approx \frac{n \cdot (n-1)}{2}$ razy.
- Jeżeli tablica jest o rozmiarze nieparzystym dodatkowo zostanie wykonane n iteracji(31 linijka).

$$T \approx \frac{n}{2} \cdot (n) + (n - 2)$$

gdzie T to oszacowana ilość operacji a n rozmiar tablicy do posortowania.

3.1.2 Kod

Algorytm 1: Sortowanie przez wstawianie dla par

```

1 void sort(std::vector<int> &toSort)
2 {
3     const int sizeofArray=toSort.size()-(toSort.size()%2);
4     for(int i=0; i<sizeofArray; i+=2)
5     {
6         if(toSort[i] > toSort[i+1])
7         {
8             std::swap(toSort[i],toSort[i+1]);
9         }
10    const int pom1 = toSort[i];
11    const int pom2 = toSort[i+1];
12    int j = i-1;
13    while(j>=0 && toSort[j]>pom2)
14    {
15        toSort[j+2] = toSort[j];
16        j--;
17    }
18    toSort[j+2] = pom2;
19    toSort[j+1] = pom1;
20    while(j>=0 && toSort[j]>pom1)
21    {
22        toSort[j+1] = toSort[j];
23        --j;
24    }
25    toSort[j+1] = pom1;
26 }
27 if(toSort.size()%2==1)
28 {
29     const int pom = toSort[toSort.size()-1];
30     int k = toSort.size()-2;
31     while(k>=0 && toSort[k]>pom)
32     {
33         toSort[k+1] = toSort[k];
34         --k;
35     }
36     toSort[k+1] = pom;

```

```
37     }  
38 }
```

3.2 Dla trzech elementów

Każde iteracja zaczyna się od elementu $V[i + 3]^2$.

Pierwszym krokiem tego sortowania będzie wybranie trojek (x', y', z) . Po wybraniu trojki, jest ona wstępnie sortowana rosnąco. Wybierz liczbę w która zawsze jest elementem poprzedzającym najmniejszy element z trojki (x', y', z') . Następnie zostaną wykonane następujące akcje :

- Dopóki $w > z'$ przesuń całą trojkę przed w , wybierz nowe w . Jeżeli warunek zostanie niespełniony przejdź do następnego kroku.
- Dopóki $w > y'$ przesuń parę (x', y') przed w , wybierz nowe w . Jeżeli warunek zostanie niespełniony przejdź do następnego kroku.
- Dopóki $w > x'$ przesuń x' przed w , wybierz nowe w . Jeżeli warunek zostanie niespełniony przejdź do kolejnej iteracji.

3.2.1 Oszacowanie złożoności

3.2.1.1 Optymistyczna

3.2.1.2 Pesymistyczna

3.2.1.3 Średnia

3.2.2 Kod

Algorytm 2: Sortowanie przez wstawianie dla trójek

```
1 void sort(std::vector<int>&toSort)  
2 {  
3     const int arrayDivider = (toSort.size()%3);  
4     if(toSort.size()%3!=0)  
5     {  
6         for(int i=1; i<arrayDivider; i++)  
7         {  
8             const int pom = toSort[i];
```

²Indeks $i + 3$ ze zbioru V , gdzie i jest kolejna iteracja algorytmu.

```

9      int j = i-1;
10     while(j>=0 && toSort[j]>pom)
11     {
12         toSort[j+1] = toSort[j];
13         --j;
14     }
15     toSort[j+1] = pom;
16 }
17 }
18 for(int i=arrayDivider; i<toSort.size(); i+=3)
19 {
20     if(toSort[i] < toSort[i+1])
21     {
22         if(toSort[i+2]<toSort[i])
23         {
24             std::swap(toSort[i],toSort[i+2]);
25         }
26     }
27     else
28     {
29         if(toSort[i+1]<toSort[i+2])
30         {
31             std::swap(toSort[i],toSort[i+1]);
32         }
33         else
34         {
35             std::swap(toSort[i],toSort[i+2]);
36         }
37     }
38     if(toSort[i+2]<toSort[i+1])
39     {
40         std::swap(toSort[i+1],toSort[i+2]);
41     }
42     const int pom1 = toSort[i];
43     const int pom2 = toSort[i+1];
44     const int pom3 = toSort[i+2];
45     int j = i-1;
46     while(j>=0 && toSort[j]>pom3)
47     {
48         toSort[j+3] = toSort[j];
49         j--;
50     }
51     toSort[j+3] = pom3;
52     toSort[j+2] = pom2;
53     toSort[j+1] = pom1;

```



```

54     while(j>=0 && toSort[j]>pom2)
55     {
56         toSort[j+2] = toSort[j];
57         j--;
58     }
59     toSort[j+2] = pom2;
60     toSort[j+1] = pom1;
61     while(j>=0 && toSort[j]>pom1)
62     {
63         toSort[j+1] = toSort[j];
64         --j;
65     }
66     toSort[j+1] = pom1;
67 }
68 };

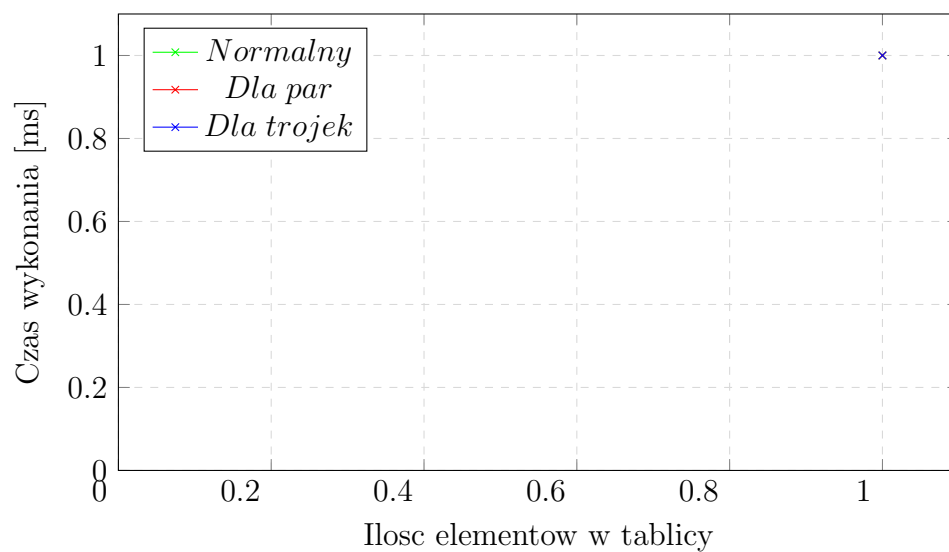
```

3.3 Wyniki

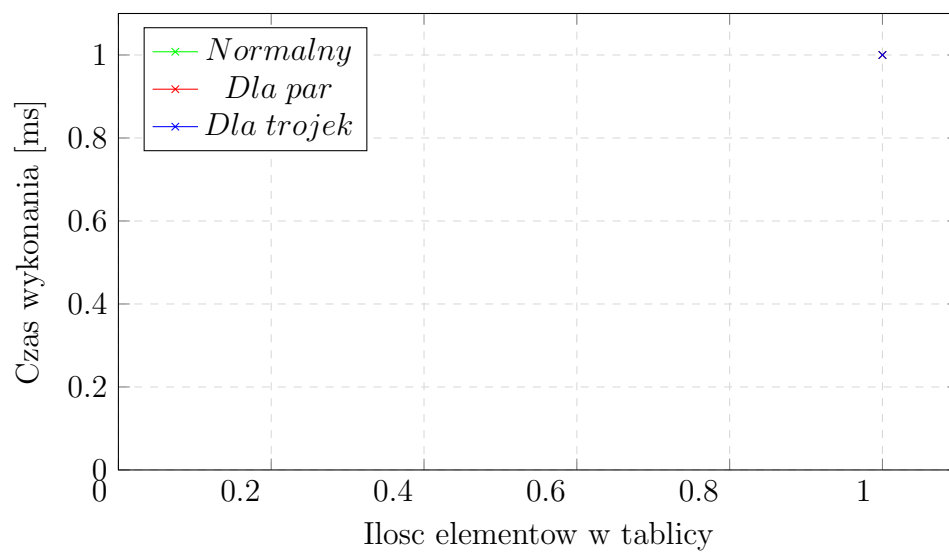
Rys. 1 przedstawia wyniki dla tablicy z losowymi elementami. Na wykresie można zauważyć przyspieszenie względem standardowego algorytmu. Przyspieszenie to wynosi $\approx 34\%$. Opisana wcześniej złożoność dla tego przypadku jest taka sama jak dla standardowej implementacji. Jednakże fakt że algorytm bierze pod uwagę parę i najpierw sortuje po największym elemencie a potem po najmniejszym zmniejsza znacząco ilość porównań. Doprowadza to do tego że teoretyczne i maksymalne przyspieszenie powinno wynieść $\approx 50\%$ przy tym pomyśle, uwzględniając idealną implementację.

Rys. 2 przedstawia wyniki dla tablicy która została już posortowana. Jak można zauważyć implementacja standardowa jest szybsza niż zaimplementowana tutaj. Jednakże różnica w czasie działania obu funkcji wynosi około $0.1ms$, więc można uznać że są takie same. Ponieważ jedyną akcją która jest zależna od rozmiaru tablicy jest pętla przestawiająca pary oraz pętla przeszukująca tablice co dwa elementy złożoność obliczeniowa będzie liniowa $O(n)$.

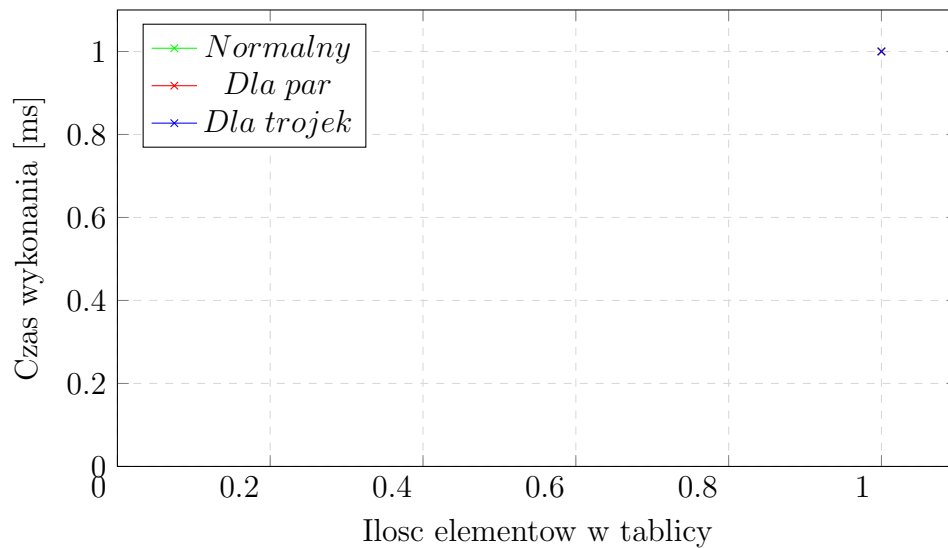
Rys. 3 przedstawia wyniki dla pesymistycznego ułożenia tablicy. W tym wypadku implementacja algorytmu dla par działa o $\approx 50\%$ szybciej od standardowej implementacji. Wynika to z faktu że, tak samo jak w średnim przypadku, iteracja pętla odpowiedzialna za przestawianie par wynosi $\frac{n-2}{2}$ przez co faktycznie algorytm przyspiesza do $\approx 150\%$ szybkości algorytmu podstawowego.



Rys. 1: Wykres dla tablicy ze elementami losowymi



Rys. 2: Wykres dla tablicy z najlepszym rozkładem elementów



Rys. 3: Wykres dla tablicy z najgorszym rozkładem elementów

4 Algorytm sortowania bąbelkowego

4.1 Dla dwóch elementów

Podstawowa wersja tego algorytmu polega na porównywaniu ze sobą dwóch kolejnych elementów $(x, y) \in V$ i zmianie ich kolejności, mając tylko jeden bąbelek który wypływa na początek lub na koniec zbioru.

Zakładając że mamy porównywać dwie liczby, zostało przyjęte że są dwa bąbelki. Jeden który idzie na początek zbioru V oraz drugi który idzie na koniec zbioru V .

Dla każdej pary $(x', y') \in V$ składającej się z kolejnych elementów ze zbioru V :

- Posortuj parę $(x', y)'$ rosnąco
- Dla każdej liczby z poprzedzającej x' zamień ze sobą te elementy jeżeli

$$x' < z$$

- Dla każdej liczby w następującej y' zamień ze sobą te elementy jeżeli

$$y' > w$$

4.2 Oszacowanie złożoności

4.2.0.1 Optymistyczna Najlepszy przypadek tego algorytmu ma złożoność obliczeniową $O(n)$.

- Pierwsza pętla(3 linijka) *for* jest zależna od rozmiaru tablicy i zostanie wykonana dokładnie $n - 1$

$$T \approx n - 1$$

gdzie T to oszacowana ilość operacji a n rozmiar tablicy do posortowania.

4.2.0.2 Pesymistyczna Najgorszy przypadek algorytmu sortowania bąbelkowego dla par ma złożoność obliczeniową $O(n^2)$.

- Pierwsza pętla(3 linijka) *for* jest zależna od rozmiaru tablicy i zostanie wykonana dokładnie $n - 1$
- Pętla *while*(10 linijka) w najgorszym przypadku wykona się n razy
- Pętla *while*(15 linijka) w najgorszym przypadku wykona się n razy

$$T \approx (n - 1) \cdot (2n)$$

gdzie T to oszacowana ilość operacji a n rozmiar tablicy do posortowania.

4.2.0.3 Średnia Dla losowych elementów w tablicy sortowanie to ma złożoność obliczeniową $O(n^2)$.

- Pierwsza pętla(3 linijka) *for* jest zależna od rozmiaru tablicy i zostanie wykonana dokładnie $n - 1$
- Pętla *while*(10 linijka) w tym przypadku wykona się $\frac{2}{n}$ razy
- Pętla *while*(15 linijka) w tym przypadku wykona się $\frac{2}{n}$ razy

$$T \approx (n - 1) \cdot \left(\frac{2}{n} + \frac{2}{n}\right) = (n - 1)n$$

gdzie T to oszacowana ilość operacji a n rozmiar tablicy do posortowania.

4.2.1 Kod

Algorytm 3: Sortowanie bąbelkowe dla par

```
1 void sort(std::vector<int> &toSort)
2 {
3     for(int i= 0; i<(toSort.size()-1); i++)
4     {
5         int minElem=i,maxElem=i+1;
6         if(toSort[minElem]>toSort[maxElem])
7         {
8             std::swap(toSort[minElem],toSort[maxElem]);
9         }
10        while(minElem>0 && toSort[minElem]<toSort[minElem-1])
11        {
12            std::swap(toSort[minElem],toSort[minElem-1]);
13            minElem--;
14        }
15        while(maxElem<(toSort.size()-1) && toSort[maxElem]>toSort[
16            ↪ maxElem+1])
17        {
18            std::swap(toSort[maxElem],toSort[maxElem+1]);
19            maxElem++;
20        }
21    }
```

4.3 Dla trzech elementów

4.3.1 Oszacowanie złożoności

4.3.1.1 Optymistyczna

4.3.1.2 Pesymistyczna

4.3.1.3 Średnia

4.3.2 Kod

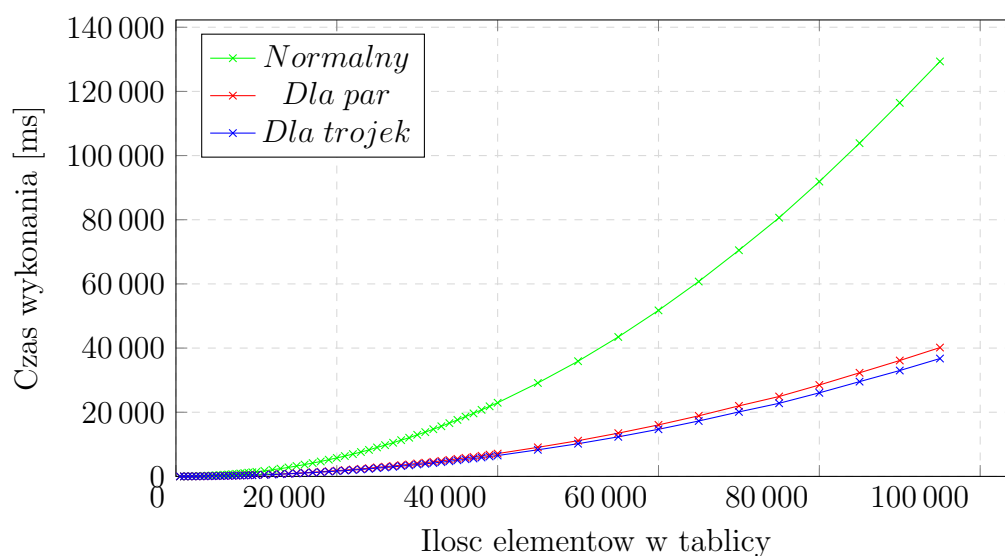
4.4 Wyniki

Rys. 4 przedstawia efekt porównania działania obu algorytmów dla tablic z losowymi elementami. Z przedstawionego wykresu wyraźnie widać przyspieszenie. Maksymalne przyspieszenie dla tego algorytmu wynosi $\approx 70\%$. Dzięki

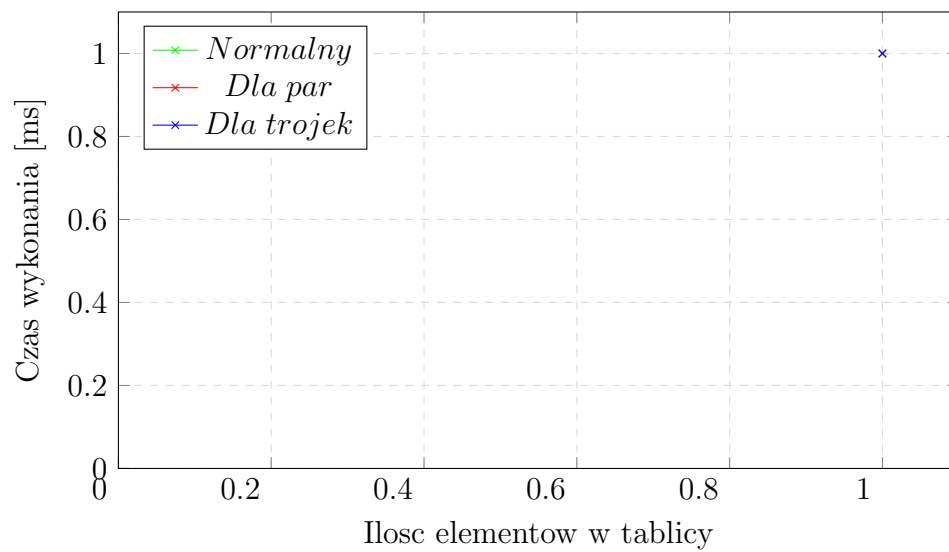
zastosowaniu wewnętrznych pętli *while* które sterują zachowaniem bąbelków można bardzo szybko przyspieszyć algorytm. Dzięki temu że średnio każda pętla wykonuje się połowę rozmiaru tablicy. Wier teoretyczne przyspieszenie powinno być co najmniej 50%.

Rys. 5 reprezentuje graficznie otrzymane wyniki z porównania algorytmu sortowania bąbelkowego dla par i normalnego dla posortowanej tablicy. Ponieważ widoczna na wykresie czerwona linia, reprezentująca sortowanie dla par, jest zawsze bliska zeru, można wyciągnąć wniosek. Sortowanie to ma złożoność obliczeniową $O(n)$. Wier przyspieszenie wynosi $\approx 99\%$

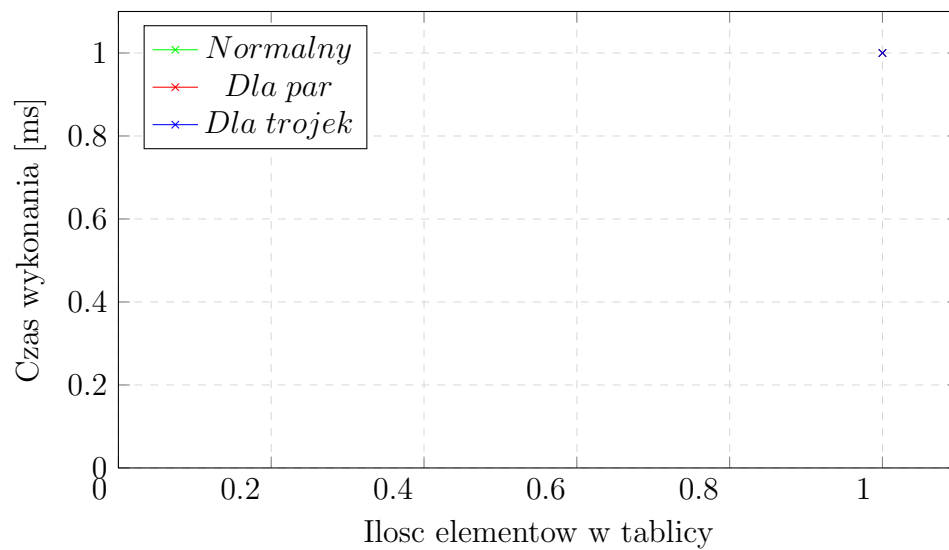
Rys. 6 przedstawia wyniki dla tablicy posortowanej w drugą stronę. Przyspieszenie algorytmu wynosi w tym wypadku $\approx 50\%$. Ponieważ używamy dwóch bąbelków, w porównaniu do użycia jednego, zmniejsza czas wykonania o 50%.



Rys. 4: Wykres dla tablicy ze elementami losowymi



Rys. 5: Wykres dla tablicy z najlepszym rozkładem elementów



Rys. 6: Wykres dla tablicy z najgorszym rozkładem elementów

5 Algorytm sortowania przez wybieranie

5.1 Dla dwóch elementów

Podstawowa wersja algorytmu zakłada wybieranie najmniejszej lub największej wartości z zbioru. Ten pomysł wybiera największą oraz najmniejszą wartość.

- Pobierz element który znajduje się na początku, *begin*, zbioru V .
- Pobierz element który znajduje się na końcu, *end*, zbioru V .
- Zakładając że pobieramy element najmniejszy *min* oraz element największy *max* ze zbioru V , zamień *min* z *begin* a *max* z *end*.
- Ustaw początek zbioru *begin* na element z indeksem o jeden większy niż *begin*, a koniec na element z indeksem o jeden mniejszym niż *end*.

5.1.1 Oszacowanie złożoności

5.1.1.1 Optimistyczna Najlepszy przypadek tego algorytmu ma złożoność obliczeniową $O(n^2)$.

- Pętla *while* (11 linijka) wykonuje się zawsze $\frac{n}{2}$, ponieważ przy każdej iteracji usuwane są 2 elementy.
- Pętla *for* (14 linijka) wykonuje się zawsze $\frac{n}{2}$, ponieważ zawsze wykonuje się tyle samo razy co poprzednia.

$$T \approx \frac{n}{2} \cdot \frac{n}{2} = \frac{n^2}{4}$$

gdzie T to oszacowana ilość operacji a n rozmiar tablicy do posortowania.

5.1.1.2 Pesymistyczna Najgorszy przypadek algorytmu sortowania przez wybieranie dla par ma złożoność obliczeniową $O(n^2)$.

- Pętla *while* (11 linijka) wykonuje się zawsze $\frac{n}{2}$, ponieważ przy każdej iteracji usuwane są 2 elementy.

- Pętla *for* (14 linijka) wykonuje się zawsze $\frac{n}{2}$, ponieważ zawsze wykonuje się tyle samo razy co poprzednia.

$$T \approx \frac{n}{2} \cdot \frac{n}{2} = \frac{n^2}{4}$$

gdzie T to oszacowana ilość operacji a n rozmiar tablicy do posortowania.

5.1.1.3 Średnia Dla losowych elementów w tablicy sortowanie to ma złożoność obliczeniową $O(n^2)$.

- Pętla *while* (11 linijka) wykonuje się zawsze $\frac{n}{2}$, ponieważ przy każdej iteracji usuwane są 2 elementy.
- Pętla *for* (14 linijka) wykonuje się zawsze $\frac{n}{2}$, ponieważ zawsze wykonuje się tyle samo razy co poprzednia.

$$T \approx \frac{n}{2} \cdot \frac{n}{2} = \frac{n^2}{4}$$

gdzie T to oszacowana ilość operacji a n rozmiar tablicy do posortowania.

5.1.2 Kod

Algorytm 4: Sortowanie przez wybieranie dla par

```

1 void sort(std::vector<int> &toSort)
2 {
3     int vectorSize=0;
4     if(toSort.size()%2!=0)
5     {
6         vectorSize++;
7         std::iter_swap((std::min_element(toSort.begin(),toSort.end
           ↪  ())),toSort.begin());
8     }
9     std::vector<int>::iterator _begin = toSort.begin()+
           ↪  vectorSize;
10    std::vector<int>::iterator _end = toSort.end() - 1;
11    while (_begin < _end)
12    {
13        std::vector<int>::iterator it=_begin,_min=it,_max=it;
```

```

14     for (it = _begin; it <= _end; ++it)
15     {
16         if ((*it) < (*_min))
17         {
18             _min = it;
19         }
20         else if ((*it) > (*_max))
21         {
22             _max = it;
23         }
24     }
25     std::iter_swap(_min, _begin);
26     if(_begin==_max)
27     {
28         _max=_min;
29     }
30     std::iter_swap(_max, _end);
31     ++_begin;
32     --_end;
33 }
34 }

```

5.2 Dla trzech elementów

5.2.1 Oszacowanie złożoności

5.2.1.1 Optymistyczna

5.2.1.2 Pesymistyczna

5.2.1.3 Średnia

5.2.2 Kod

Algorytm 5: Sortowanie przez wybieranie dla par

```

1 void sort(std::vector<int> &toSort)
2 {
3
4 }

```

5.3 Wyniki

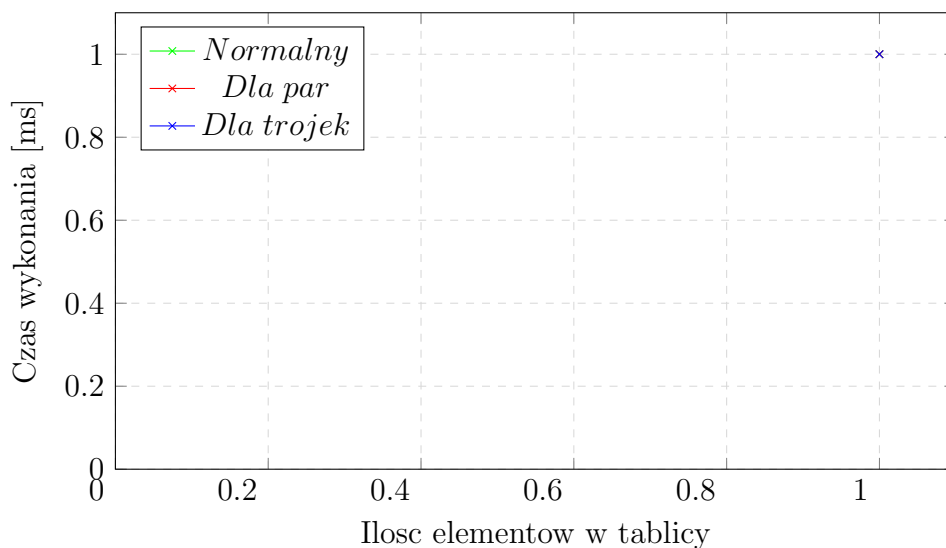
Jak widać na powyższych założeniach teoretycznych każdy z przykładów ma taką samą złożoność obliczeniową. Wynika to z faktu że każda pętla musi być wykonana zawsze i wymaganą ilość razy.

Rys.7 przedstawia porównanie szybkości wykonywania się obliczeń dla tablicy z danymi losowymi. Przyspieszenie wynosi $\approx 40\%$.

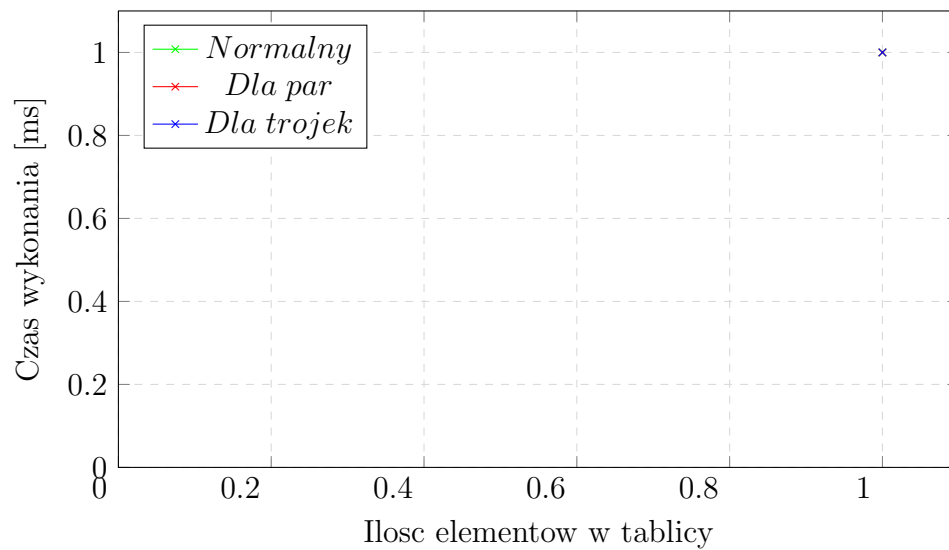
Rys.8 przedstawia najgorszy z trzech możliwych wynik gdzie przyspieszenie wynosi $\approx 21\%$.

Rys.9 reprezentuje dane pomiarowe na których widać że przyspieszenie wynosi $\approx 41\%$.

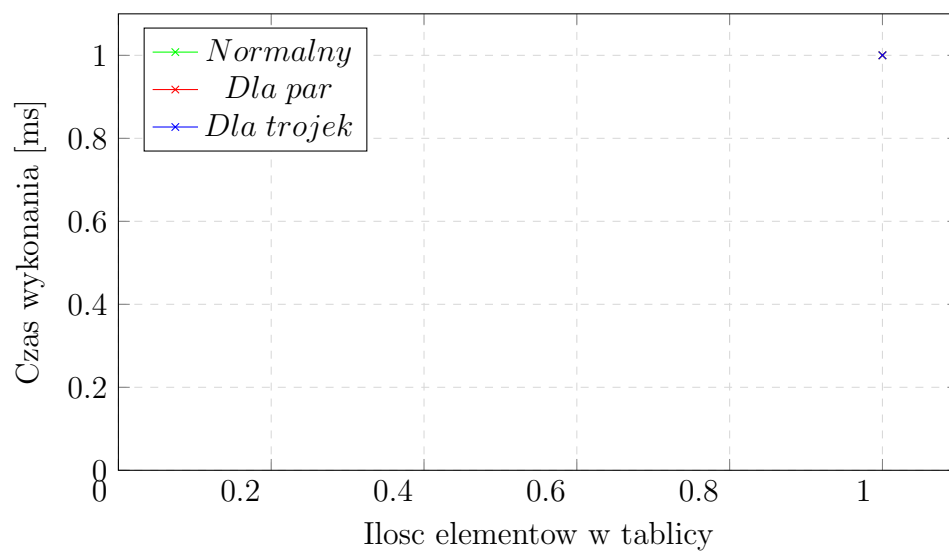
Ponieważ każde z przypadków sortowań ma taką samą złożoność obliczeniową całe przyspieszenie jest zależne od znalezienia wartości maksymalnej i minimalnej. Ponieważ w algorytmie dla par przeszukujemy tablice wejściową i wybieramy od razu obydwie wartości, to teoretyczne przyspieszenie powinno wynieść $\approx 50\%$.



Rys. 7: Wykres dla tablicy ze elementami losowymi



Rys. 8: Wykres dla tablicy z najlepszym rozkładem elementów



Rys. 9: Wykres dla tablicy z najgorszym rozkładem elementów