Politechnika Łódzka

Szybkie algorytmy

Techniki zwiększenie efektywności algorytmów

Prowadzący zajęcia:

prof. dr hab. Mykhaylo Yatsymirskyy

Autor:

Filip Rynkiewicz

Politechnika Łódzka

2016-11-16

1 Informacje o sprzęcie testowym

Do pomiaru czasu zostały wykorzystane funkcje *QueryPerformanceCounter* oraz *QueryPerformanceFrequency* z biblioteki **windows.h**. Wszystkie testy zostały wykonane na maszynie z systemem Windows 8.1Pro 64, z procesorem Intel(R) Core(TM) i7-5700HQ CPU @ 2.70GHz. Testy zostały przeprowadzone na kompilatorze *mingw32-c++.exe (GCC) 5.3.0* z flagą *-std=gnu++11* zapewniającą wsparcie *C++11*.

2 Przyjęte własność

Jako optymistyczny przypadek została przyjęta sytuacja w której algorytm ma za zadanie posortować już posortowaną tablice.
Jako pesymistyczny przypadek przyjmuję się sytuacje w której algorytm ma posortować tablice posortowaną w odwrotnym kierunku niż pożądany.
Jako średni przypadek zostało przyjęta sytuacja w której tablica zawiera w sobie elementy losowe.
Każde porównanie algorytmów zostało przeprowadzone na tych samych danych wejściowych. Wszystkie algorytmy, te zmodyfikowane oraz te dla par, zostały napisane przez autora.

3 Algorytm sortowania przez wstawianie

Dla dwóch elementów

Początkowym krokiem algorytmu jest posortowanie par (x, y) w zbiorze V, gdzie każda para $(x, y) \in V$, tak aby pierwsza liczba x była zawsze liczba mniejsza od liczby y. Indeksy liczby x jest zawsze o jeden mniejszy od indeksu liczby y w zbiorze.
Kolejnym krokiem tego sortowania będzie wybranie pary (x', y'). Pary wybierane są poprzez przesuwanie od indeksu 2 zbioru V, ponieważ zakładamy ze pierwsza para jest posortowana, zawsze o 2 indeksy. Każde przejście zaczyna się od elementu $V[i + 2]$[1].
Po wybraniu pary (x', y') następuje porównywanie elementu y' z elementem z, który poprzedza wybrana parę oraz indeks $z \in |V|$. Dopóki $z > y'$ wykonuje

[1]Indeks $i + 2$ ze zbioru V, gdzie i jest kolejna iteracja algorytmu.

się przesuniecie całej pary przed liczbę z. Za każdym razem liczba z jest liczba poprzedzająca liczbę x'. Jeżeli $z < y'$ algorytm przechodzi do porównania $z > x'$. Jeżeli zostanie spełniony ten warunek liczba mniejsza z pary zostaje przestawiona przed liczba z.

Oszacowanie złożoności

Optymistyczna

W tym przypadku złożoność obliczeniowa będzie wynosiła $O(n)$. Wynika to z faktu że :

- Pierwsza pętla *for*(4 linijka) zostanie wykonana dokładnie $\frac{n}{2}$ razy.
- Druga pętla *for*(11 linijka) zostanie wykonana $\frac{n-2}{2}$ razy.
- Pierwsza zagnieżdżona pętla *while*(16 linijka) zostanie wykonana 0 razy.
- Druga zagnieżdżona pętla *while*(23 linijka) zostanie wykonana 0 razy.
- Jeżeli tablica jest o rozmiarze nieparzystym dodatkowo zostanie wykonane 0 iteracji(34 linijka).

$$T \approx \frac{n}{2} + \frac{n-2}{2} = n - 1 \tag{1}$$

gdzie T to oszacowana ilość operacji a n rozmiar tablicy do posortowania. Zerowa ilość przejść w przypadku wszystkich pętli *while* wynika z faktu że zawarte w nich instrukcje zawsze będą warunkiem kończącym pętlę, zatem nigdy nie zostaną wykonane.

Pesymistyczna

Złożoność obliczeniowa będzie wynosiła $O(n^2)$.

- Pierwsza pętla *for*(4 linijka) zostanie wykonana dokładnie $\frac{n}{2}$ razy.
- Druga pętla *for*(11 linijka) zostanie wykonana dokładnie $\frac{n-2}{2}$ razy.
- Pierwsza zagnieżdżona pętla *while*(16 linijka) zostanie wykonana $\approx \frac{n}{2}$ razy.

- Druga zagnieżdżona pętla *while*(23 linijka) zostanie wykonana $\approx \frac{n}{2}$ razy.
- Jeżeli tablica jest o rozmiarze nieparzystym dodatkowo zostanie wykonane $n - 2$ iteracji(34 linijka).

$$T \approx \frac{n}{2} + \frac{n-2}{2} \cdot (n) + (n-2) = \frac{n^2}{2} + \frac{n}{2} - 2$$

gdzie T to oszacowana ilość operacji a n rozmiar tablicy do posortowania.

Ponieważ obie pętle *while* korzystają z tego samego iteratora, zostało przyjęte że obie w sumie wykonają się n razy, więc średnio każda wykona się $\frac{n}{2}$.

Średnia

Złożoność obliczeniowa będzie wynosiła $O(n^2)$.

- Pierwsza pętla *for*(4 linijka) zostanie wykonana dokładnie $\frac{n}{2}$ razy.
- Druga pętla *for*(11 linijka) zostanie wykonana dokładnie $\frac{n-2}{2}$ razy.
- Pierwsza zagnieżdżona pętla *while*(16 linijka) zostanie wykonana $\approx \frac{2}{n}$ razy.
- Druga zagnieżdżona pętla *while*(23 linijka) zostanie wykonana $\approx \frac{2}{n}$ razy.
- Jeżeli tablica jest o rozmiarze nieparzystym dodatkowo zostanie wykonane $n - 2$ iteracji(34 linijka).

$$T \approx \frac{n}{2} + \frac{n-2}{2} \cdot (n) + (n-2) = \frac{n^2}{2} + \frac{n}{2} - 2$$

gdzie T to oszacowana ilość operacji a n rozmiar tablicy do posortowania.

Kod

Algorytm 1: Sortowanie przez wstawianie dla par

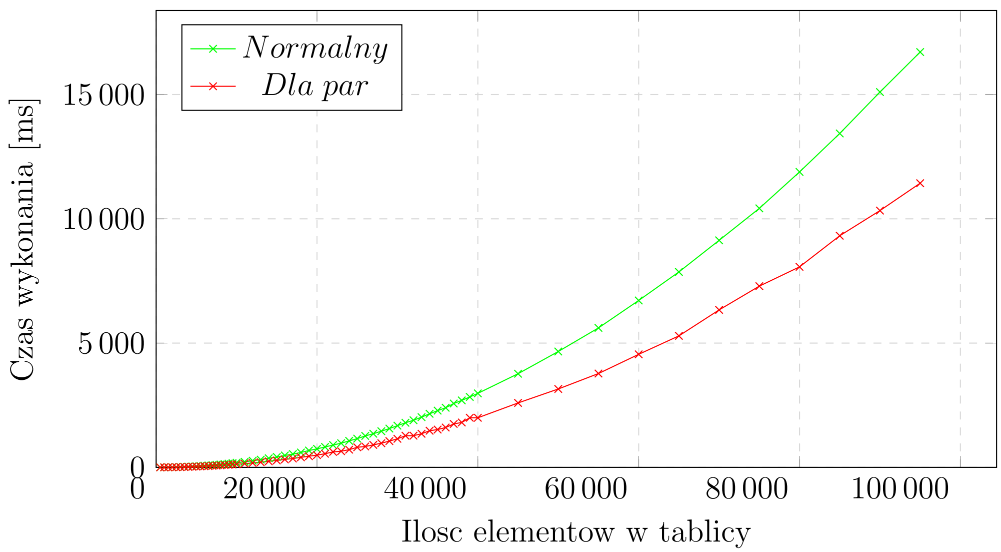
```
void sort(std::vector<int> &toSort)
{
 const int sizeOfArray=toSort.size()-(toSort.size()%2);
 for(int i=0; i<sizeOfArray; i+=2)
  {
   if(toSort[i] > toSort[i+1])
    {
     std::swap(toSort[i],toSort[i+1]);
    }
  }
 for(int i=2; i<sizeOfArray; i+=2)
  {
   const int pom1 = toSort[i];
   const int pom2 = toSort[i+1];
   int j = i-1;
   while(j>=0 && toSort[j]>pom2)
    {
     toSort[j+2] =  toSort[j];
     j--;
    }
   toSort[j+2] = pom2;
   toSort[j+1] = pom1;
   while(j>=0 && toSort[j]>pom1)
    {
     toSort[j+1] = toSort[j];
     --j;
    }
   toSort[j+1] = pom1;
 }
 if(toSort.size()%2==1)
  {
   const int pom = toSort[toSort.size()-1];
   int k = toSort.size()-2;
   while(k>=0 && toSort[k]>pom)
    {
     toSort[k+1] = toSort[k];
     --k;
    }
   toSort[k+1] = pom;
  }
}
```

Wyniki

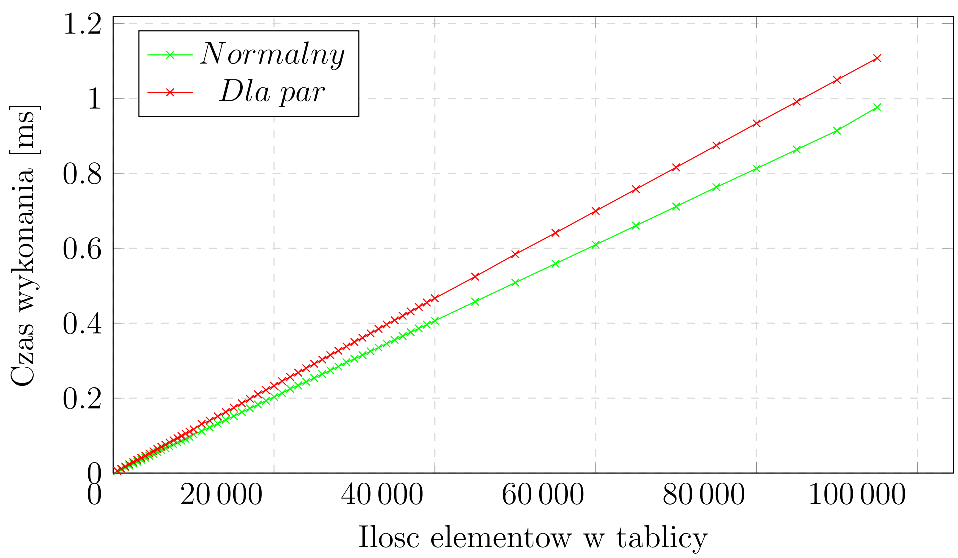
Rys. 1 przedstawia wyniki dla tablicy z losowymi elementami. Na wykresie można zauważyć przyspieszenie względem standardowego algorytmu. Przyspieszenie to wynosi $\approx 34\%$.Opisana wcześniej złożoność dla tego przypadku jest taka sama jak dla standardowej implementacji. Jednakże fakt że algorytm bierze pod uwagę parę i najpierw sortuje po największym elemencie a potem po najmniejszym zmniejsza znacząco ilość porównań. Doprowadza to do tego że teoretyczne i maksymalne przyspieszenie powinno wynieść $\approx 50\%$ przy tym pomyśle, uwzględniając idealną implementację.

Rys. 2 przedstawia wyniki dla tablicy która została już posortowana. Jak można zauważyć implementacja standardowa jest szybsza niż zaimplementowana tutaj. Jednakże różnica w czasie działania obu funkcji wynosi około $0.1ms$, wiec można uznać że są takie same. Ponieważ jedyną akcją która jest zależna od rozmiaru tablicy jest pętla przestawiająca pary oraz pętla przeszukująca tablice co dwa elementy złożoność obliczeniowa będzie liniowa $O(n)$.

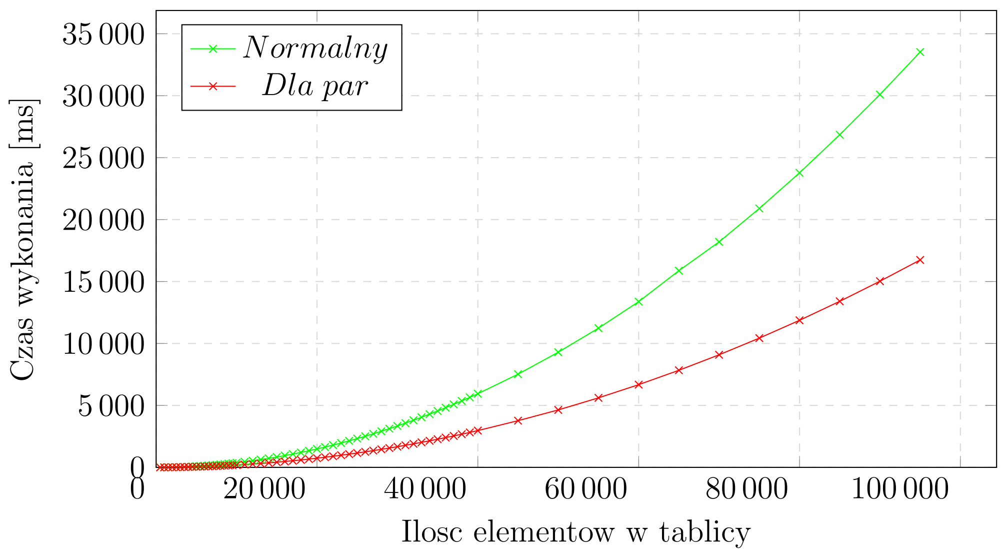
Rys. 3 przedstawia wyniki dla pesymistycznego ułożenia tablicy. W tym wypadku implementacja algorytmu dla par działa o $\approx 50\%$ szybciej od standardowej implementacji. Wynika to z faktu że, tak samo jak w średnim przypadku, iteracja pętla odpowiedzialna za przestawianie par wynosi $\frac{n-2}{2}$ przez co faktycznie algorytm przyspiesza do $\approx 150\%$ szybkości algorytmu podstawowego.



Rys. 1: Wykres dla tablicy ze elementami losowymi



Rys. 2: Wykres dla tablicy z najlepszym rozkładem elementów



Rys. 3: Wykres dla tablicy z najgorszym rozkładem elementów

4 Algorytm sortowania bąbelkowego

Dla dwóch elementów

Podstawowa wersja tego algorytmu polega na porównywaniu ze sobą dwóch kolejnych elementów $(x, y) \in V$ i zmianie ich kolejności, mając tylko jeden bąbelek który wypływa na początek lub na koniec zbioru.
Zakładając ze mamy porównywać dwie liczby, zostało przyjęte ze są dwa bąbelki. Jeden który idzie na początek zbioru V oraz drugi który idzie na koniec zbioru V.
Dla każdej pary $(x', y') \in V$ składającej się z kolejnych elementów ze zbioru V:

- Posortuj parę $(x', y)'$ rosnąco
- Dla każdej liczby z poprzedzającej x' zamień ze sobą te elementy jeżeli

$$x' < z$$

- Dla każdej liczby w nastepujacej y' zamień ze sobą te elementy jeżeli

$$y' > w$$

Kod

Algorytm 2: Sortowanie bąbelkowe dla par

```
1  void sort(std::vector<int> &toSort)
2  {
3   for(int i= 0; i<(toSort.size()-1); i++)
4   {
5    int minElem=i,maxElem=i+1;
6    if(toSort[minElem]>toSort[maxElem])
7     {
8      std::swap(toSort[minElem],toSort[maxElem]);
9     }
10   while(minElem>0 && toSort[minElem]<toSort[minElem-1])
11    {
12     std::swap(toSort[minElem],toSort[minElem-1]);
13     minElem--;
14    }
15   while(maxElem<(toSort.size()-1) && toSort[maxElem]>toSort[
       ↪ maxElem+1])
16    {
17     std::swap(toSort[maxElem],toSort[maxElem+1]);
18     maxElem++;
19    }
20  }
21 }
```

Oszacowanie złożoności

Optymistyczna

Najlepszy przypadek tego algorytmu ma złożoność obliczeniową $O(n)$.

- Pierwsza pętla(3 linijka) *for* jest zależna od rozmiaru tablicy i zostanie wykonana dokładnie $n-1$

$$T \approx n - 1$$

gdzie T to oszacowana ilość operacji a n rozmiar tablicy do posortowania.

Pesymistyczna

Najgorszy przypadek algorytmu sortowania bąbelkowego dla par ma złożoność obliczeniową $O(n^2)$.

- Pierwsza pętla(3 linijka) *for* jest zależna od rozmiaru tablicy i zostanie wykonana dokładnie $n-1$
- Pętla *while*(10 linijka) w najgorszym przypadku wykona się n razy
- Pętla *while*(15 linijka) w najgorszym przypadku wykona się n razy

$$T \approx (n-1) \cdot (2n)$$

gdzie T to oszacowana ilość operacji a n rozmiar tablicy do posortowania.

Średnia

Dla losowych elementów w tablicy sortowanie to ma złożoność obliczeniową $O(n^2)$.

- Pierwsza pętla(3 linijka) *for* jest zależna od rozmiaru tablicy i zostanie wykonana dokładnie $n-1$
- Pętla *while*(10 linijka) w tym przypadku wykona się $\frac{2}{n}$ razy
- Pętla *while*(15 linijka) w tym przypadku wykona się $\frac{2}{n}$ razy

$$T \approx (n-1) \cdot (\frac{2}{n} + \frac{2}{n}) = (n-1)n$$

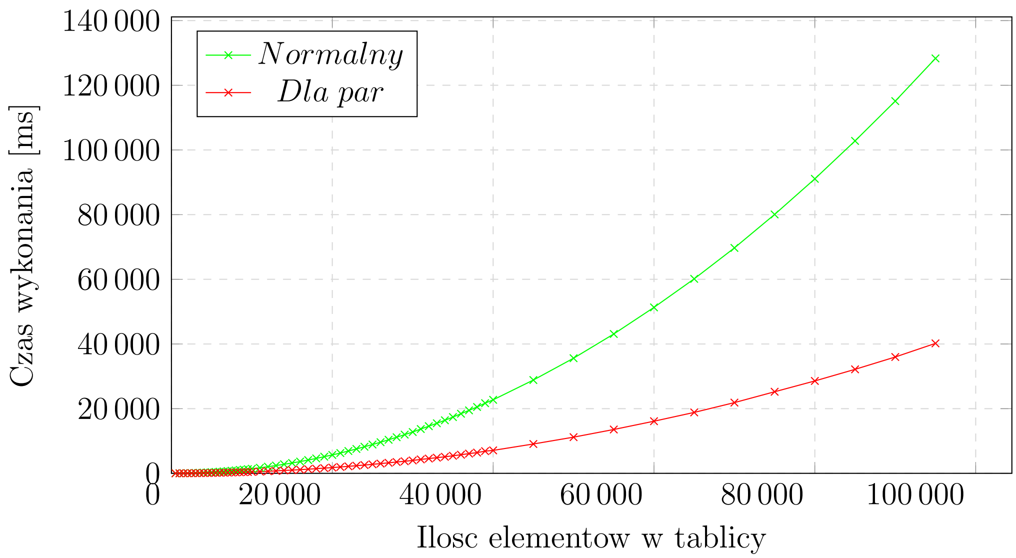
gdzie T to oszacowana ilość operacji a n rozmiar tablicy do posortowania.

Wyniki

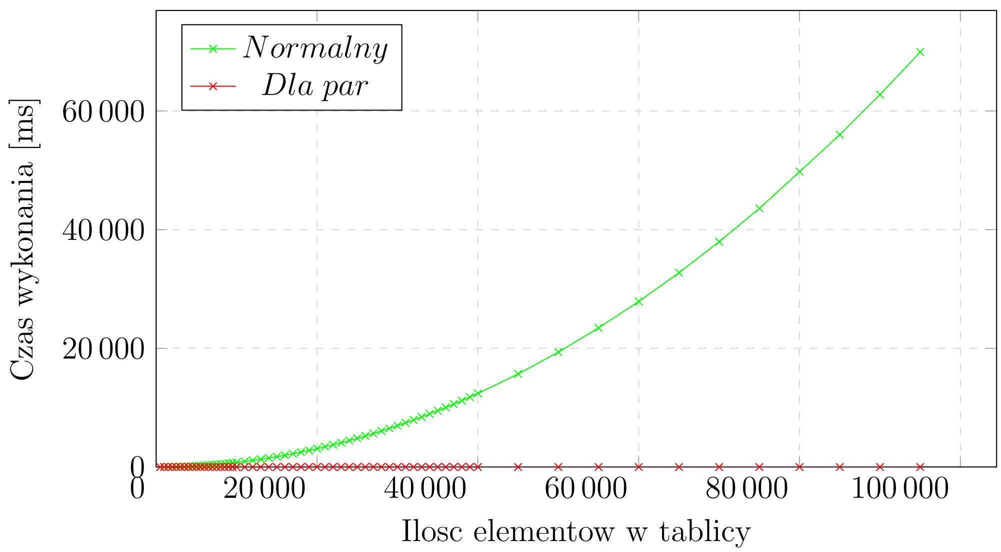
Rys. 4 przedstawia efekt porównania działania obu algorytmów dla tablic z losowymi elementami. Z przedstawionego wykresu wyraźnie widać przyspieszenie. Maksymalne przyspieszenie dla tego algorytmu wynosi $\approx 70\%$. Dzięki zastosowaniu wewnętrznych pętli *while* które sterują zachowaniem bąbelków można bardzo szybko przyspieszyć algorytm. Dzięki temu że średnio każda pętla wykonuję się połowę rozmiaru tablicy. Wiec teoretyczne przyspieszenie powinno być co najmniej 50%.

Rys. 5 reprezentuje graficznie otrzymane wyniki z porównania algorytmu sortowania bąbelkowego dla par i normalnego dla posortowanej tablicy. Ponieważ widoczna na wykresie czerwona linia, reprezentująca sortowanie dla par, jest zawsze bliska zeru, mozna wyciągnać wniosek. Sortowanie to ma złożoność obliczeniową $O(n)$. Wiec przyspieszenie wynosi $\approx 99\%$

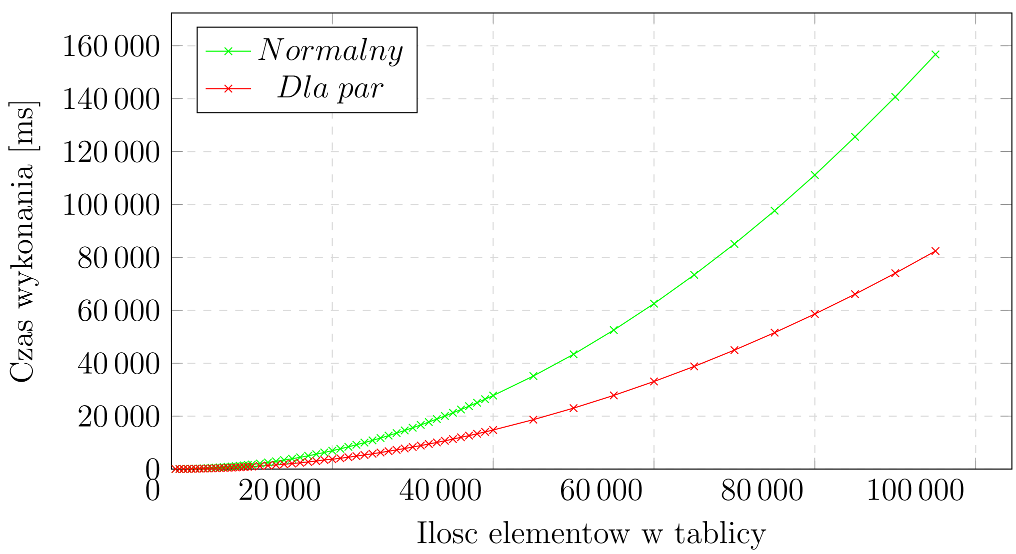
Rys. 6 przedstawia wyniki dla tablicy posortowanej w druga stronę. Przyspieszenie algorytmu wynosi w tym wypadku $\approx$ 50%. Ponieważ używamy dwóch bąbelków, w porównaniu do użycia jednego , zmniejsza czas wykonania o 50%.



Rys. 4: Wykres dla tablicy ze elementami losowymi



Rys. 5: Wykres dla tablicy z najlepszym rozkładem elementów



Rys. 6: Wykres dla tablicy z najgorszym rozkładem elementów

5 Algorytm sortowania przez wybieranie

Dla dwóch elementów

Podstawowa wersja algorytmu zakłada wybieranie najmniejszej lub największej wartości z zbioru. Ten pomysł wybiera największą oraz najmniejszą wartość.

- Pobierz element który znajduję się na początku, *begin*, zbioru V.
- Pobierz element który znajduję się na końcu, *end*, zbioru V.
- Zakładając że pobieramy element najmniejszy *min* oraz element największy *max* ze zbioru V, zamień *min* z *begin* a *max* z *end*.
- Ustaw początek zbioru *begin* na element z indeksem o jeden większy niż *begin*, a koniec na element z indeksem o jeden mniejszym niż *end*.

Kod

Algorytm 3: Sortowanie przez wybieranie dla par

```
void sort(std::vector<int> &toSort)
{
 int vectorSize=0;
 if(toSort.size()%2!=0)
  {
   vectorSize++;
   std::iter_swap((std::min_element(toSort.begin(),toSort.end())),toSort.begin());
  }
 std::vector<int>::iterator _begin = toSort.begin()+vectorSize;
 std::vector<int>::iterator _end = toSort.end() - 1;
 while (_begin < _end)
  {
   std::vector<int>::iterator it=_begin,_min=it,_max=it;
   for (it = _begin; it <= _end; ++it)
    {
     if ((*it) < (*_min))
      {
       _min = it;
      }
     else if ((*it) > (*_max))
```

```
21         {
22          _max = it;
23         }
24       }
25   std::iter_swap(_min,_begin);
26   if(_begin==_max)
27    {
28     _max=_min;
29    }
30   std::iter_swap(_max,_end);
31   ++_begin;
32   --_end;
33    }
34 }
```

Optymistyczna

Najlepszy przypadek tego algorytmu ma złożoność obliczeniową $O(n^2)$.

- Pętla *while*(11 linijka) wykonuje się zawsze $\frac{n}{2}$, ponieważ przy każdej iteracji usuwane są 2 elementy.
- Pętla *for*(14 linijka) wykonuje się zawsze $\frac{n}{2}$, ponieważ zawsze wykonuje się tyle samo razy co poprzednia.

$$T \approx \frac{n}{2} \cdot \frac{n}{2} = \frac{n^2}{4}$$

gdzie T to oszacowana ilość operacji a n rozmiar tablicy do posortowania.

Pesymistyczna

Najgorszy przypadek algorytmu sortowania przez wybieranie dla par ma złożoność obliczeniową $O(n^2)$.

- Pętla *while*(11 linijka) wykonuje się zawsze $\frac{n}{2}$, ponieważ przy każdej iteracji usuwane sa 2 elementy.
- Pętla *for*(14 linijka) wykonuje się zawsze $\frac{n}{2}$, ponieważ zawsze wykonuje sie tyle samo razy co poprzednia.

$$T \approx \frac{n}{2} \cdot \frac{n}{2} = \frac{n^2}{4}$$

gdzie T to oszacowana ilość operacji a n rozmiar tablicy do posortowania.

Średnia

Dla losowych elementów w tablicy sortowanie to ma złożoność obliczeniową $O(n^2)$.

- Pętla *while*(11 linijka) wykonuje się zawsze $\frac{n}{2}$, ponieważ przy każdej iteracji usuwane są 2 elementy.
- Pętla *for*(14 linijka) wykonuje się zawsze $\frac{n}{2}$, ponieważ zawsze wykonuje się tyle samo razy co poprzednia.

$$T \approx \frac{n}{2} \cdot \frac{n}{2} = \frac{n^2}{4}$$

gdzie T to oszacowana ilość operacji a n rozmiar tablicy do posortowania.

Wyniki

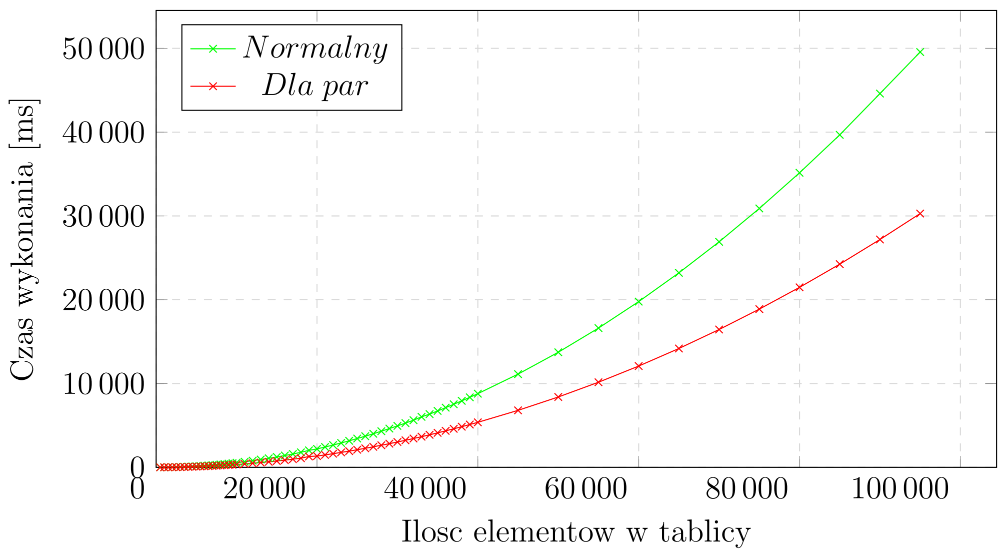
Jak widać na powyższych założeniach teoretycznych każdy z przykładów ma taką samą złożoność obliczeniową. Wynika to z faktu że każda pętla musi być wykonana zawsze i wymaganą ilość razy.

Rys.7 przedstawia porównanie szybkości wykonywania się obliczeń dla tablicy z danymi losowymi. Przyspieszenie wynosi $\approx 40\%$.

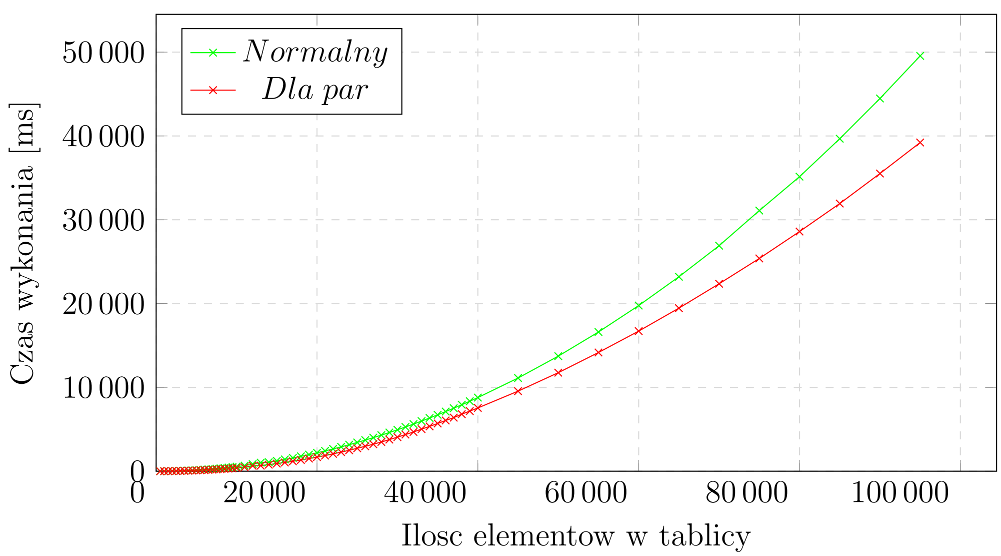
Rys.8 przedstawia najgorszy z trzech możliwych wynik gdzie przyspieszenie wynosi $\approx 21\%$.

Rys.9 reprezentuje dane pomiarowe na których widać ze przyspieszenie wynosi $\approx 41\%$.

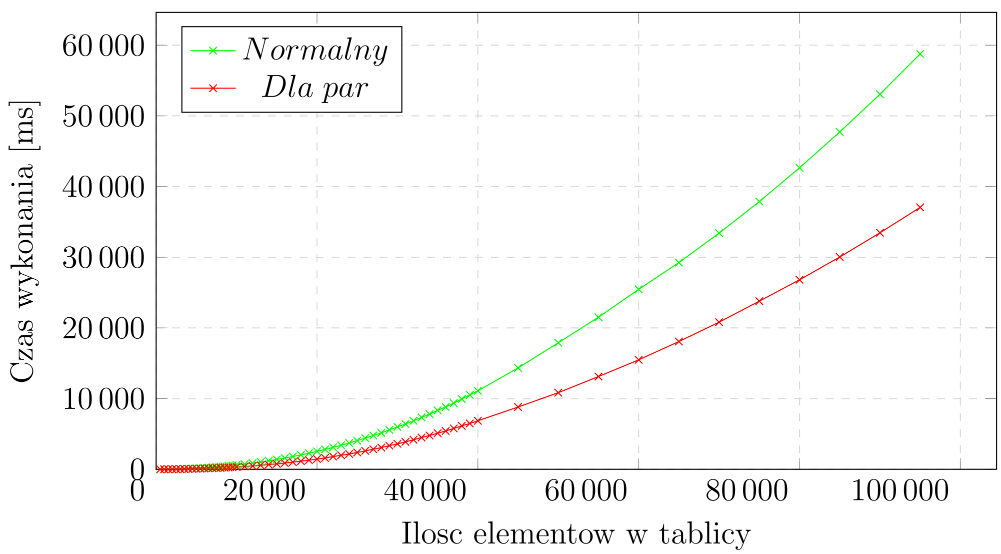
Ponieważ każde z przypadków sortowań ma taką samą złożoność obliczeniową całe przyspieszenie jest zależne od znalezienia wartości maksymalnej i minimalnej. Ponieważ w algorytmie dla par przeszukujemy tablice wejściową i wybieramy od razu obydwie wartości, to teoretyczne przyspieszenie powinno wynieść $\approx 50\%$.



Rys. 7: Wykres dla tablicy ze elementami losowymi



Rys. 8: Wykres dla tablicy z najlepszym rozkładem elementów



Rys. 9: Wykres dla tablicy z najgorszym rozkładem elementów