Vorlesung "Fuzzy- und unscharfe Systeme"

Vorlesungsscript
Sommersemester 2009

Dr. Roland Schmiedel
Bauhaus-Universität Weimar

0. Einleitung

fuzzy verschwommen, **unscharf**

- Das Prinzip der Zweiwertigkeit (Aussagenlogik) stößt bei "naiven" Begriffen der Umgangssprache auf Grenzen
- Frage, ob Begriff auf vorgegebenen Gegenstand zutrifft, kann nicht klar mit ja oder nein beantwortet werden
- Traditionelle Mathematik und mathematische Modellierung schafft definitorische Abgrenzung, Begriffe werden gegenüber dem Alltag präzise gefaßt
- die ersten Versuche, "unscharfe Begriffe" mathematisch ernst zu nehmen, kamen von Anwenderseite, insbesonder von systemtheoretisch orientierten Ingenieurwissenschaftlern

Geschichte

Platon	es müßte eine dritte Region zwischen wahr und falsch geben
Aristoteles	Gesetz vom ausgeschlossenen Dritten, zweiwertige Logik prägt Entwicklung logischer und mathematischer Systeme
Russel	The law of excluded middle is true when precise symbols are employed, but it is not true when symbols are vague, as, in fact, all symbols are (1923).
Lukasiewicz	mehrwertige Logiken, Bsp. wahr (1) – falsch (0) – möglich (1/2) erster Hinweis auf unendlichwertige Logik (alle Zahlen im Intervall $[0,1]$)
Lotfi Zadeh	Fuzzy-Set Theorie (1965)

Modelle
- Beschreibung ingenieur- oder naturwissenschaftlicher Systeme mittels mathematischer Modelle (Differentialgleichungssysteme, stochastische Systeme, logische Systeme, ...).
- In komplexen Systemen erhebliche Idealisierungen notwendig, um mathematisches Modell abzuleiten. Mit den wachsenden Möglichkeiten der Computertechnologie lassen sich immer komplexere Systeme handhaben, gleichzeitig wachsen aber auch konzeptionelle Anforderungen (Systeme - Softwarepakete müssen überschaubar bleiben). Datenbanken nehmen an Umfang zu, verlieren aber Wert, wenn Nutzer nicht in der Lage ist, relevante Informationen und Daten sinnvoll zu extrahieren.
- Vereinfachung komplexer Systeme durch kalkulierbare Tolerierung eines Anteils an Impräzision, Unsicherheit und Vagheit schon in der Modellierungsphase, daraus resultierender Informationsverlust muß hingenommen werden. Führt zu

Fuzzy-Systemen - gezielte Verwendung "unpräziser" Informationen zur Komplexitätsreduktion

Nachteil	grobe Modelle, begnügen sich mit einer für die Anwendung ausreichenden Genauigkeit, bergen damit Gefahr, wichtige Eigenschaften realer Systeme außer acht zu lassen
Vorteil	Güte eines Modells ist nicht am Präzisionsgrad der eingehenden Informationen zu messen, sondern an Gütekriterien wie Adäquatheit, Effizienz, Korrektheit, Benutzerfreundlichkeit, ... Ein komplexitätsreduziertes Modell, das "unpräzise" Informationen einbezieht, kann in bezug auf bestimmte Gütekriterien durchaus besser sein, als ein Modell, das nur präzise Informationen zuläßt und damit schwieriger zu handhaben ist.

Arten imperfekten Wissens
- **Vagheit** - intrinsische Unschärfe
  Unschärfe menschlicher Empfindungen: schnell, jung, groß, vertretbarer Gewinn
  abhängig von Person, aber auch von Betrachtungsumgebung
- **Impräzision** - informationale Unsicherheit
  Begriff zwar exakt definierbar, zugehörige Information nicht beschaffbar, weil z.B. Messung (zum gegebenen Zeitpunkt) nicht möglich oder zu teuer ist
  Schwierigkeiten bei Aggregation aller Informationen zu Gesamturteil
  Beispiel: kreditwürdig (= zahlt Kredit wie vereinbart zurück)

- **unscharfe Relation** - die Aussagen über die in Relation stehenden Größen sind nicht dichotom (wahr - falsch) z.B. "nicht viel größer", "ungefähr gleich", "fast genau so groß"

Die Quantifizierung derartiger Aussagen erfolgt über den Grad für die Wahrheit der Aussage (Kompatibilitätsmaß)

Unterschied der Fuzzy-Unschärfe zur stochastischen Unsicherheit (Unschärfe)

Fuzzy-Unschärfe	stochastischen Unsicherheit
ordnet jedem konkreten Element Grad für die Wahrheit der Aussage zu	liefert Wahrscheinlichkeit für das Eintreten eines Ereignisses, hat keinen Bezug zu konkretem Element
→ Fuzzy-Unschärfe ist **lokal**	→ stochastische Unsicherheit ist **global**

Anwendungsgebiete:

- komplexe Regelungs- und Steuerungsaufgaben (unscharfer Regler)
  Durch Beschränkung auf für Anwendungszwecke ausreichende Genauigkeit kann auf unangemessene numerische oder theoretische Präzision verzichtet werden.
- Mustererkennung (Sprach- und Bilderkennung, Prozeßüberwachung)
- Mathematik (Fuzzy-Optimierung)
- Medizin, Psychologie (automatische Analyse- und Diagnoseunterstützung)
- technische Geräte (Waschmaschinen, Fotokameras, Steuerung von U-Bahnen, ...)
  Fuzzy-Logic , Fuzzy control , fuzzygesteuert

usw.

1. Grundlagen der Theorie der Fuzzy-Mengen

1.1. Fuzzy-Mengen

Definition 1.1: Mengenbegriff nach Cantor
Eine **Menge** ist eine Zusammenfassung von bestimmten wohlunterscheidbaren Objekten unserer Anschauung oder unseres Denkens zu einem Ganzen.
Die Objekte heißen **Elemente** der Menge

Ist A eine Menge, so gilt für ein beliebiges Objekt a entweder $a \in A$ oder $a \notin A$.
Die Aussage, ein Element gehört zu einer Menge, ist wahr oder falsch im Sinne der zweiwertigen Logik.
Klassische Mengen sind scharf abgegrenzt.

Ziel: Erweiterung des Mengenbegriffs auf "unscharfe" Menge, so daß klassischer Mengenbegriff als Spezialfall enthalten ist.

Sei X eine (klassische) Grundmenge von Objekten. Die Menge A kann dann durch eine charakteristische Funktion $\mu_A : X \to \{0,1\}$ beschrieben werden, wobei $\forall x \in X$ gilt:

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{falls } x \in A \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Definition 1.2: Sei X eine Grundmenge von Objekten. Eine Menge von geordneten Paaren
$\tilde{A} = \{(x, \mu_A(x)) : x \in X\}$ mit $\mu_A : X \to [0,1]$
heißt **unscharfe Menge** (Fuzzy-Menge, fyzzy-set) auf X, die Funktion $\mu_A(x)$ **Zugehörigkeitsfunktion** (charakteristische Funktion).

Die Zugehörigkeitsfunktion $\mu_A(x)$ gibt den Grad der Zugehörigkeit des Elementes x zur Menge $\tilde{A}$ an.

Darstellung von Fuzzy-Mengen
- Eine Fuzzy-Menge $\tilde{A}$ ist durch die Grundmenge X und ihre Zugehörigkeitsfunktion $\mu_A(x)$ gegeben.
- Ist X speziell eine endliche Menge, so kann die Fuzzy-Menge auch mit Hilfe eine Tabelle gegeben werden.

Dieser Zugehörigkeitsgrad einer fuzzy-Menge ist als "theoretische" Größe exakt, aber beachte:
- Dieser Grad ist im allgemeinen Ausdruck einer subjektiven Einschätzung von Individuen oder Gruppen
- Zugehörigkeitswert kann von X abhängen
- Zugehörigkeitswerte können theoretisch beliebig genau abgestuft werden, praktisch aber kaum möglich.

Interpretiert man $\mu_A(x)$ so, daß Elemente $x \in X$ mit $\mu_A(x) = 1$ mit Sicherheit zur Menge A gehören und Elemente mit $\mu_A(x) = 0$ mit Sicherheit nicht zur Menge A gehören, dann ist das Konzept der unscharfen Menge eine Erweiterung des Cantorschen Mengenbegriffes im folgenden Sinn:
Schränkt man den Wertebereich von $\mu_A(x)$ auf $\{0,1\}$ ein, so kann jede unscharfe Menge $\tilde{A} = \{(x, \mu_A(x)) : x \in X\}$ mit nur diesen Zugehörigkeitswerten als Äquivalent einer gewöhnlichen Menge $A = \{x \in X : \mu_A(x) = 1\} \subseteq X$ angesehen werden. Eine solche Menge nennt man auch **scharf**.

Zur Beschreibung einer klassischen Menge werden nur die Objekte mit Zugehörigkeitsgrad 1 (d.h. größer Null) herangezogen. Analoges Vorgehen bei unscharfen Mengen führt zum Begriff Stützmenge.

Definition 1.3: Die Menge $\operatorname{supp}(\tilde{A}) = \{x \in X : \mu_A(x) > 0\}$ (sprich: Support von $\tilde{A}$) ist eine (klassische) Teilmenge von X und heißt **Stützmenge** (oder **Träger**) der unscharfen Menge $\tilde{A}$

Definition 1.4: Eine unscharfe Menge $\tilde{A} = \{(x, \mu_A(x)) : x \in X\}$ heißt
- **leere unscharfe Menge**, falls $\mu_A(x) = 0 \quad \forall x \in X$, Bezeichnung $\tilde{\emptyset}$
- **unscharfe Universalmenge**, falls $\mu_A(x) = 1 \quad \forall x \in X$, Bezeichnung $\tilde{X}$
- **Singleton**, falls $\mu_A(c) = 1$ und $\mu_A(x) = 0 \quad \forall x \neq c$

Die Stützmenge von $\tilde{\emptyset}$ ist $\emptyset$, die von $\tilde{X}$ ist X.

Definition 1.5 Die **Höhe** einer unscharfen Menge $\tilde{A}$ auf X ist die kleinste obere Schranke von $\mu_A(x)$, d.h.

$$\operatorname{hgt}(\tilde{A}) = \sup_{x \in X} \mu_A(x) \qquad \text{(bzw. } \operatorname{hgt}(\tilde{A}) = \max_{x \in X} \mu_A(x)\text{, falls dieses existiert).}$$

Eine unscharfe Menge $\tilde{A}$ mit $\operatorname{hgt}(\tilde{A}) = 1$ heißt **normal** oder **normalisiert**, sie heißt **subnormal** im Falle $\operatorname{hgt}(\tilde{A}) < 1$.

Offensichtlich läßt sich jede nichtleere unscharfe Menge $\tilde{A}$ normalisieren, indem man die Zugehörigkeitsfunktion $\mu_A(x)$ durch die Höhe von $\tilde{A}$ dividiert. Ergebnis ist die neue Fuzzy-Menge $\tilde{A}'$ mit

$$\mu_{A'}(x) = \frac{1}{\operatorname{hgt}(A)} \mu_A(x) \text{ und } \operatorname{hgt}(A') = 1$$

Neben der Stützmenge ist es sinnvoll, weitere gewöhnliche Teilmengen von X zu betrachten, deren Elemente dadurch charakterisiert sind, daß sie eine Mindestzugehörigkeit besitzen.

Definition 1.6 Sei $\tilde{A} = \{(x, \mu_A(x)) : x \in X\}$ eine unscharfe Menge. Für eine reelle Zahl $\alpha \in [0,1]$ heißt die gewöhnliche Menge

- $A^{\geq\alpha} = \{x \in X : \mu_A(x) \geq \alpha\}$ **α-Schnitt** von $\tilde{A}$
- $A^{>\alpha} = \{x \in X : \mu_A(x) > \alpha\}$ **stenger α-Schnitt** von $\tilde{A}$

Der Schnitt $A^{\geq 1} = \{x \in X : \mu_A(x) = 1\}$ heißt **Kern oder Toleranz** von $\tilde{A}$.

Es gilt $\operatorname{supp}(\tilde{A}) = A^{>0}$

Die Bedeutung der α-Schnitte für die Anwendung besteht darin, daß sich jede Fuzzy-Menge über ihre α-Schnitte charakterisieren läßt. Es gilt der folgende Satz

Satz 1.7: **Darstellungssatz**

- Jeder unscharfen Menge $\tilde{A}$ sind eindeutig die Familien ihrer α-Schnitte $A^{\geq\alpha}$ und strengen α-Schnitte $A^{>\alpha}$ zugeordnet.
- Beide Familien sind monotone Familien von Teilmengen von X, d.h.
  $\alpha < \beta \quad \Rightarrow \quad A^{>\alpha} \supseteq A^{>\beta} \quad \text{und} \quad A^{\geq\alpha} \supseteq A^{\geq\beta}$
- es gilt $\mu_A(x) = \sup_{\alpha \in [0,1]} \{\alpha \mid x \in A^{\geq\alpha}\}$

Darstellungssatz liefert Möglichkeit der "horizontalen Repräsentation" von Fuzzy-Mengen.
Viele Begriffe der klassischen Mengenlehre lassen sich auf unscharfe Mengen erweitern:

Definition 1.8: Die Menge aller unscharfen Mengen auf einer Menge X wird als **Fuzzy-Potenzmenge** bezeichnet, Bezeichnung $\tilde{P}(X)$.

Definition 1.9: Zwei unscharfe Mengen $\tilde{A}, \tilde{B} \in \tilde{P}(X)$ heißen genau dann **gleich**, d.h. $\tilde{A} = \tilde{B}$, wenn

$$\mu_A(x) = \mu_B(x) \quad \forall x \in X.$$

Definition 1.10: **Fuzzy-Teilmenge (Inklusion):**
Sind $\tilde{A}, \tilde{B} \in \tilde{P}(X)$ unscharfe Mengen, so heißt $\tilde{A}$ genau dann Fuzzy-Teilmenge von $\tilde{B}$, d.h. $\tilde{A} \subseteq \tilde{B}$, wenn $\mu_A(x) \leq \mu_B(x) \quad \forall x \in X$

Folgerungen:

- $\forall \tilde{A} \in \tilde{P}(X)$ gilt $\tilde{\emptyset} \subseteq \tilde{A}$
- $\tilde{A} = \tilde{B}$ genau dann, wenn $\tilde{A} \subseteq \tilde{B}$ und $\tilde{B} \subseteq \tilde{A}$
- $\tilde{A} \subseteq \tilde{B} \quad \Rightarrow \quad \operatorname{supp}(\tilde{A}) \subseteq \operatorname{supp}(\tilde{B})$
- $\tilde{A} \subseteq \tilde{B}$ und $\tilde{B} \subseteq \tilde{C} \quad \Rightarrow \quad \tilde{A} \subseteq \tilde{C}$ (Transitivität)

Die Inklusion ist reflexiv ($\tilde{A} \subseteq \tilde{A}$), antisymmetrisch ($\tilde{A} \subseteq \tilde{B} \wedge \tilde{B} \subseteq \tilde{A} \Rightarrow \tilde{A} = \tilde{B}$) und transitiv, d.h. die Inklusion bildet eine Halbordnung auf $\tilde{P}(X)$ (Inklusion ist eine Ordnungsrelation).

Spezielle Fuzzy-Mengen sind Fuzzy-Zahlen. Zu deren Definition benötigt man den Begriff der Konvexität einer unscharfen Menge.

Zur Erinnerung:
Eine (klassische) Menge $A \subset \mathbb{R}^n$ heißt konvex, wenn für alle Paare $a, b \in A$ auch

$$\lambda a + (1-\lambda)b \in A \quad \forall \lambda \in (0,1)$$

eine Funktion f(x) heißt konvex, wenn der Definitionsbereich $D(f)$ konvex ist und für alle Paare $a, b \in D(f)$ gilt:

$$f(\lambda a + (1-\lambda)b) \leq \lambda f(a) + (1-\lambda)f(b) \quad \forall \lambda \in (0,1)$$

Definition 1.11: Eine unscharfe Menge $\tilde{A} = \{(x, \mu_A(x)) : x \in X\}$ auf einer konvexen Menge X heißt **konvex**, wenn $\mu_A(\lambda a + (1-\lambda)b) \geq \min\{\mu_A(a), \mu_A(b)\} \quad \forall a, b \in X \quad \forall \lambda \in [0,1]$

Bemerkung:
- Die Eigenschaft, eine Fuzzy-Menge A ist konvex, impliziert nicht, daß $\mu_A(x)$ konvex (oder konkav) ist
- Eine unscharfe Menge ist genau dann konvex, wenn alle α-Schnitte konvexe Mengen sind.

Definition 1.12: Eine konvexe, normalisierte unscharfe Menge $\tilde{A}$ auf der Menge der rellen Zahlen $\mathbb{R}$ heißt **Fuzzy-Zahl**, wenn
- es genau eine reelle Zahl x_0 mit $\mu_A(x_0) = 1$ gibt und
- $\mu_A(x)$ stückweise stetig ist

Die Zahl x_0 heißt **Gipfelpunkt** von $\tilde{A}$.

Die Fuzzy-Zahl $\tilde{A}$ heißt **positiv** (Schreibweise $\tilde{A} > 0$), wenn $\mu_A(x) = 0 \quad \forall x \leq 0$,
sie heißt **negativ** (Schreibweise $\tilde{A} < 0$), wenn $\mu_A(x) = 0 \quad \forall x \geq 0$.

Definition 1.13: Eine unscharfe Menge $\tilde{Z}$ auf einer abzählbaren Grundmenge $X \subset \mathbb{R}$ heißt **diskrete Fuzzy-Zahl**, wenn eine Fuzzy-Zahl $\tilde{A}$ existiert, für die $\mu_Z(x) = \mu_A(x) \quad \forall x \in X$

Gegeben sei eine diskrete Fuzzy-Zahl $\tilde{Z}$ mit endlicher Grundmenge. Eine einfache Möglichkeit, eine entsprechend Definition 1.13 zugehörige Fuzzy-Zahl $\tilde{A}$ anzugeben ist, die Punkte $(x, \mu_Z(x))$ durch einen Polygonzug miteinander zu verbinden.

Definition 1.14: Eine konvexe, normalisierte unscharfe Menge $\tilde{A}$ auf der Menge der rellen Zahlen $\mathbb{R}$ heißt **Fuzzy-Intervall**, wenn
- es zwei verschiedene reelle Zahlen x_1, x_2 gibt so daß $\mu_A(x) = 1 \quad \forall x \in [x_1, x_2]$ und
- $\mu_A(x)$ stückweise stetig ist

Der Begriff einer Fuzzy-Zahl läßt sich auf den $\mathbb{R}^n$ erweitern.

Definition 1.15: Eine konvexe, normalisierte unscharfe Menge $\tilde{A}$ auf $\mathbb{R}^n$ heißt **Fuzzy-Punkt**, wenn
- es genau ein x_0 mit $\mu_A(x_0) = 1$ gibt und
- $\mu_A(x)$ stetig ist

1.2. Operatoren auf Fuzzy-Mengen
1.2.1. Maximum- und Minimumoperator

Für klassische Mengen sind Mengenoperatoren bekannt. Es ist naheliegend, diese auf Fuzzy-Mengen zu übertragen. Ziel sind widerspruchsfreie Erweiterungen, d.h. die für Fuzzy-Mengen definierten Operatoren sollen bei Beschränkung auf die Bewertungsmenge $\{0,1\}$ mit den klassischen Operatoren übereinstimmen. Es wird sich zeigen, daß es mehrere widerspruchsfreie Erweiterungen gibt.

Das Komplement einer Menge $A \subset X$ ist $\bar{A} = \{x \in X : x \notin A\}$, d.h.

$$\mu_{\bar{A}}(x) = \begin{cases} 1 & \text{falls } \mu_A(x) = 0 \\ 0 & \text{falls } \mu_A(x) = 1 \end{cases}$$

Ist $\alpha = \mu_A(x)$ der Grad der Zugehörigkeit eines Elementes x zu einer Fuzzy-Menge $\tilde{A}$, so ist naheliegend, den Grad der Zugehörigkeit von x zum Komplement von $\tilde{A}$ auf $(1-\alpha)$ zu setzen.

Definition 1.16: Sei $\tilde{A} \in \tilde{P}(X)$ eine Fuzzy-Menge mit der Zugehörigkeitsfunktion $\mu_A(x)$. Die Fuzzy-Menge $\tilde{A}^c = \{(x, \mu_{A^c}(x)) : x \in X, \mu_{A^c}(x) = 1 - \mu_A(x)\}$ heißt **Komplement** von $\tilde{A}$.

Folgerung: $\left(\tilde{A}^c\right)^c = \tilde{A}$

$\tilde{A} \subseteq \tilde{B} \quad \Leftrightarrow \quad \tilde{B}^c \subseteq \tilde{A}^c$

Durchschnitt und Vereinigung von Mengen sind wie folgt definiert:

$A \cap B = \{x \in X : x \in A \text{ und } x \in B\}$

$A \cup B = \{x \in X : x \in A \text{ oder } x \in B\}$

Beschreibung mittels charakteristischer Funktion liefert:

$$\mu_{A\cap B}(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } \mu_A(x) = \mu_B(x) = 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$\mu_{A\cup B}(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } \mu_A(x) = \mu_B(x) = 0 \\ 1 & \text{sonst} \end{cases}$$

Andere Möglichkeiten, dies in geschlossener Form auszudrücken sind:

$\mu_{A\cap B}(x) = \min\{\mu_A(x), \mu_B(x)\}$ <u>oder</u> $\mu_{A\cap B}(x) = \mu_A(x)\cdot\mu_B(x)$ <u>oder</u> ...

$\mu_{A\cup B}(x) = \max\{\mu_A(x), \mu_B(x)\}$ <u>oder</u> $\mu_{A\cup B}(x) = \mu_A(x) + \mu_B(x) - \mu_A(x)\cdot\mu_B(x)$ <u>oder</u> ...

Verschiedene Möglichkeiten für Erweiterung möglich, zunächst Min- bzw. Max-Operator

Definition 1.17: Seien $\tilde{A}, \tilde{B} \in \tilde{P}(X)$ Fuzzy-Mengen.

- Als **Durchschnitt** (intersection) der Mengen $\tilde{A}$ und $\tilde{B}$ bezeichnet man die Fuzzy-Menge $\tilde{A} \cap \tilde{B}$ mit der Zugehörigkeitsfunktion $\mu_{A\cap B}(x) = \min\{\mu_A(x), \mu_B(x)\} \quad \forall x \in X$
- Als **Vereinigung** (union) der Mengen $\tilde{A}$ und $\tilde{B}$ bezeichnet man die Fuzzy-Menge $\tilde{A} \cup \tilde{B}$ mit der Zugehörigkeitsfunktion $\mu_{A\cup B}(x) = \max\{\mu_A(x), \mu_B(x)\} \quad \forall x \in X$

Satz 1.18: Folgende Gesetze für klassische Mengen gelten auch für Fuzzy-Mengen bei Verwendung des in Definition 1.16 definierten Komplement-Operators und des in Definition 1.17 definierten Max- bzw. Min-Operators:

- Kommutativgesetze: $\tilde{A} \cap \tilde{B} = \tilde{B} \cap \tilde{A}$ $\qquad \tilde{A} \cup \tilde{B} = \tilde{B} \cup \tilde{A}$
- Assoziativgesetze: $\left(\tilde{A} \cap \tilde{B}\right) \cap \tilde{C} = \tilde{A} \cap \left(\tilde{B} \cap \tilde{C}\right)$ $\qquad \left(\tilde{A} \cup \tilde{B}\right) \cup \tilde{C} = \tilde{A} \cup \left(\tilde{B} \cup \tilde{C}\right)$

- Distributivgesetze: $\tilde{A} \cap (\tilde{B} \cup \tilde{C}) = (\tilde{A} \cap \tilde{B}) \cup (\tilde{A} \cap \tilde{C})$ $\quad (\tilde{A} \cup (\tilde{B} \cap \tilde{C}) = (\tilde{A} \cup \tilde{B}) \cap (\tilde{A} \cup \tilde{C})$
- Adjunktivgesetze: $\tilde{A} \cap (\tilde{B} \cup \tilde{A}) = \tilde{A}$ $\quad \tilde{A} \cup (\tilde{B} \cap \tilde{A}) = \tilde{A}$
- de Morgansche Gesetze: $(\tilde{A} \cap \tilde{B})^c = \tilde{B}^c \cup \tilde{A}^c$ $\quad (\tilde{A} \cup \tilde{B})^c = \tilde{B}^c \cap \tilde{A}^c$

  Es gilt nicht das Komplementaritätsgesetz, d.h. es ist:
- $\tilde{A} \cap \tilde{A}^c \neq \emptyset$ (Gesetz vom Widerspruch)
- $\tilde{A} \cup \tilde{A}^c \neq X$ (Gesetz vom ausgeschlossenen Dritten)

Wegen der hohen Übereinstimmung der Eigenschaften werden der Min-Operator und der Max-Operator als natürliche Erweiterung der klassischen Mengenoperationen Durchschnitt und Vereinigung angesehen. (Es existieren auch andere Erweiterungen, die aber nicht alle Eigenschaften des Satzes 1.18 erfüllen).
Min- und Max-Operatoren verkörpern deshalb das "logische und" bzw. das "logische oder" bei der Verknüpfung von Fuzzy-Mengen (sind aber nicht boolesch)

1.2.2. Weitere Operatoren und die t-Norm

Bei der Durchschnittsbildung kann nie ein Zugehörigkeitswert angenommen werden, der größer als der Minimalwert, bei der Vereinigung nie einer, der kleiner als der Maximalwert ist. Für beide Verknüpfungen gilt, daß kein Zugehörigkeitswert zwischen Minimum und Maximum angenommen werden kann, d.h. extreme Bewertungen können nicht ausgeglichen werden.

Bei der Berechnung der Zugehörigkeitswerte des Durchschnittes und der Vereinigung geht in das Ergebnis jeweils nur ein Zugehörigkeitswert ein. Der andere kann variiert werden, ohne daß sich das Ergebnis ändert.
Ziel: Suche nach Alternativen für Operatoren "Durchschnitt" (Und-Operatoren) und "Vereinigung" (Oder-Operatoren) (vgl. 1.2.1.) .
Hinweis: Im folgenden werden wir die Verknüpfung zweier Fuzzy-Mengen durch einen Und-Operator mit $\tilde{A} \sqcap \tilde{B}$, durch einen Oder-Operator mit $\tilde{A} \sqcup \tilde{B}$ bezeichnen, wobei die Operationszeichen zur Unterscheidung indiziert werden.

Definition 1.19: Seien $\tilde{A}, \tilde{B} \in \tilde{P}(X)$ Fuzzy-Mengen.

Als **algebraisches Produkt** der Fuzzy-Mengen $\tilde{A}$ und $\tilde{B}$ bezeichnet man die Fuzzy-Menge $\tilde{A} \sqcap_a \tilde{B}$ mit der Zugehörigkeitsfunktion $\mu_{A \sqcap_a B}(x) = \mu_A(x) \cdot \mu_B(x) \quad \forall x \in X$

Das algebraische Produkt ist ein Und-Operator (Verallgemeinerung des Durchschnitts zweier Mengen). Ziel ist die Definition eines "passenden" Oder-Operators, so daß möglichst viele der in Satz 1.18 enthaltenen Gesetze gültig sind, insbesondere scheint die Forderung nach Gültigkeit des de Morganschen Gesetzes sinnvoll ($\circ$ symbolisiert den noch unbekannten Oder-Operator):

$$(\tilde{A} \circ \tilde{B})^c = \tilde{A}^c \sqcap_a \tilde{B}^c$$

Definition 1.20: Als **algebraische Summe** der Fuzzy-Mengen $\tilde{A}$ und $\tilde{B}$ bezeichnet man die Fuzzy-Menge $\tilde{A} \sqcup_a \tilde{B}$ mit der Zugehörigkeitsfunktion $\mu_{A \sqcup_a B}(x) = \mu_A(x) + \mu_B(x) - \mu_A(x) \cdot \mu_B(x) \quad \forall x \in X$

Satz 1.21: Für das algebraische Produkt (als Und-Operator) und die algebraische Summe (als zugehöriger Oder-Operator) zweier Fuzzy-Mengen gelten folgende Gesetze:
- Kommutativgesetze: $\tilde{A} \sqcap_a \tilde{B} = \tilde{B} \sqcap_a \tilde{A}$ $\quad \tilde{A} \sqcup_a \tilde{B} = \tilde{B} \sqcup_a \tilde{A}$
- Assoziativgesetze: $(\tilde{A} \sqcap_a \tilde{B}) \sqcap_a C = \tilde{A} \sqcap_a (\tilde{B} \sqcap_a \tilde{C})$ $\quad (\tilde{A} \sqcup_a \tilde{B}) \sqcup_a \tilde{C} = \tilde{A} \sqcup_a (\tilde{B} \sqcup_a \tilde{C})$
- de Morgansche Gesetze: $(\tilde{A} \sqcup_a \tilde{B})^c = \tilde{A}^c \sqcap_a \tilde{B}^c$ $\quad (\tilde{A} \sqcap_a \tilde{B})^c = \tilde{A}^c \sqcup_a \tilde{B}^c$

  Sie sind nicht distributiv und nicht adjunktiv. Es gelten nicht die Komplementaritätsgesetze.

Es sind weitere Und- und Oder-Operatoren denkbar und sinnvoll. Für systematische Untersuchungen sollten **Mindestforderungen** gestellt werden:

- der Zugehörigkeitswert von x in der zusammengefaßten Menge hängt nur von den Zugehörigkeitswerten von x in den Ausgangsmengen ab, d.h. es handelt sich um binäre Operatoren $t:[0,1]\times[0,1]\to[0,1]$
- die Operatoren sind kommutativ und assoziativ
- die Operatoren sind monoton wachsend in beiden Variablen

Diese Mindestforderungen führen zu den Begriffen t-Norm (triangular-Norm) und t-Conorm.

Definition 1.22: Eine Funktion $t:[0,1]\times[0,1]\to[0,1]$ heißt **t-Norm**, wenn

- $t(1,a)=t(a,1)=a \quad \forall a\in X$
- $t(a,b)=t(b,a) \quad \forall a,b\in X$ kommutativ
- $t(a,t(b,c))=t(t(a,b),c) \quad \forall a,b,c\in X$ assoziativ
- $t(a,b)\le t(c,d) \quad$ wenn $a<c, b<d$ monoton

Eine Funktion $s:[0,1]\times[0,1]\to[0,1]$ heißt **t-Conorm**, wenn

- $s(0,a)=s(a,0)=a \quad \forall a\in X$
- $s(a,b)=s(b,a) \quad \forall a,b\in X$ kommutativ
- $s(a,s(b,c))=s(s(a,b),c) \quad \forall a,b,c\in X$ assoziativ
- $s(a,b)\le s(c,d) \quad$ wenn $a<c, b<d$ monoton

Der Durchschnitt $\tilde{A}\cap\tilde{B}$ und das algebraische Produkt $\tilde{A}\sqcap_a \tilde{B}$ sind t-Normen,
die Vereinigung $\tilde{A}\cup\tilde{B}$ und die algebraische Summe $\tilde{A}\sqcup_a \tilde{B}$ sind t-Conormen.

Satz 1.23: Ist $t(x,y)$ eine t-Norm, so ist $s(x,y)=1-t(1-x,1-y)$ eine t-Conorm.

Eine t-Norm beschreibt eine Und-Verknüpfung, eine t-Conorm eine Oder-Verknüpfung.
Jeder t-Norm wird durch Satz 1.23 eine t-Conorm zugeordnet.
Wird eine Und-Verknüpfung durch eine t-Norm und die entsprechende Oder-Verknüpfung durch die nach Satz 1.23 zugeordnete t-Conorm beschrieben, so gelten für diese Verknüpfungskombination die de Morganschen Gesetze.

Bemerkung: Mit jeder t-Norm kann eine widerspruchsfreie Erweiterung der klassischen Mengenoperationen konstruiert werden, denn für jede t-Norm und zugehörige t-Conorm gilt:
$t(0,0)=0$, $t(1,1)=1$ und $t(1,0)=t(0,1)=0$
$s(1,1)=1$, $s(0,0)=0$ und $s(0,1)=s(1,0)=1$

Definition 1.24: Seien $\tilde{A},\tilde{B}\in\tilde{P}(X)$ Fuzzy-Mengen.

Als **beschränktes Produkt** der Fuzzy-Mengen $\tilde{A}$ und $\tilde{B}$ bezeichnet man die Fuzzy-Menge $\tilde{A}\sqcap_b \tilde{B}$ mit der Zugehörigkeitsfunktion $\mu_{A\sqcap_b B}(x)=\max\{0,\mu_A(x)+\mu_B(x)-1\} \quad \forall x\in X$

Als **beschränktes Summe** der Fuzzy-Mengen $\tilde{A}$ und $\tilde{B}$ bezeichnet man die Fuzzy-Menge $\tilde{A}\sqcup_b \tilde{B}$ mit der Zugehörigkeitsfunktion $\mu_{A\sqcup_b B}(x)=\min\{1,\mu_A(x)+\mu_B(x)\} \quad \forall x\in X$

Satz 1.25: Das beschränktes Produkt ist eine t-Norm, die beschränkte Summe die nach Satz 1.23 zugeordnete t-Conorm. Die beschränkten Operatoren sind kommutativ und assoziativ, sie sind nicht distributiv und nicht adjunktiv. Sie erfüllen jedoch das Komplementaritätsgesetz.

Satz 1.26: Für einen durch eine beliebige t-Norm definierten Und-Operator $\tilde{A}\sqcap\tilde{B}$ und den durch die zugehörige t-Conorm definierten Oder-Operator $\tilde{A}\sqcup\tilde{B}$ gilt stets $\tilde{A}\sqcap\tilde{B}\subseteq\tilde{A}\cap\tilde{B}$ und $\tilde{A}\cup\tilde{B}\subseteq\tilde{A}\sqcup\tilde{B}$.

Definition 1.27: Seien $\tilde{A},\tilde{B}\in\tilde{P}(X)$ Fuzzy-Mengen.

Als **drastisches Produkt** der Fuzzy-Mengen $\tilde{A}$ und $\tilde{B}$ bezeichnet man die Fuzzy-Menge $\tilde{A}\sqcap_d\tilde{B}$ mit der Zugehörigkeitsfunktion

$$\mu_{A\sqcap_d B}(x)=\begin{cases}\mu_A(x) & \text{für } \mu_B(x)=1\\ \mu_B(x) & \text{für } \mu_A(x)=1\\ 0 & \text{sonst}\end{cases}\qquad \forall x\in X$$

Als **drastische Summe** der Fuzzy-Mengen $\tilde{A}$ und $\tilde{B}$ bezeichnet man die Fuzzy-Menge $\tilde{A}\sqcup_d\tilde{B}$ mit der Zugehörigkeitsfunktion

$$\mu_{A\sqcup_d B}(x)=\begin{cases}\mu_A(x) & \text{für } \mu_B(x)=0\\ \mu_B(x) & \text{für } \mu_A(x)=0\\ 1 & \text{sonst}\end{cases}\qquad \forall x\in X$$

Satz 1.28: Für einen durch eine beliebige t-Norm definierten Und-Operator $\tilde{A}\sqcap\tilde{B}$ und den durch die zugehörige t-Conorm definierten Oder-Operator $\tilde{A}\sqcup\tilde{B}$ gilt stets $\tilde{A}\sqcap_d\tilde{B}\subseteq\tilde{A}\sqcap\tilde{B}$ und $\tilde{A}\sqcup\tilde{B}\subseteq\tilde{A}\sqcup_d\tilde{B}$. Insbesondere gilt insgesamt

$$\tilde{A}\sqcap_d\tilde{B}\subseteq\tilde{A}\sqcap_b\tilde{B}\subseteq\tilde{A}\sqcap_a\tilde{B}\subseteq\tilde{A}\cap\tilde{B}\quad\text{und}\quad\tilde{A}\cup\tilde{B}\subseteq\tilde{A}\sqcup_a\tilde{B}\subseteq\tilde{A}\sqcup_b\tilde{B}\subseteq\tilde{A}\sqcup_d\tilde{B}$$

1.2.3. Kompensatorische Operatoren

Mittels t-Normen beschriebene Und-Operatoren führen zu pessimistischen Bewertungen, da die negative Bewertung eines Teilaspektes zu einer negativen Gesamtbewertung unabhängig von den restlichen Teilaspekten führt. In praktischen Situationen sinnvoll, Kompromißmöglichkeiten zu schaffen, bei denen die pessimistische Beurteilung eines Teilaspektes durch positive Bewertungen der restlichen Teilaspekte teilweise ausgeglichen (kompensiert) werden können. Ziel ist also Schaffung eines Und-Operators, der oberhalb des Min-Operators angesiedelt ist.
Andererseits darf der Kompromiß gewisse Grenzen nicht überschreiten, insbesondere sollte die Gesamtbewertung nicht besser sein als die optimistischste Teilbewertung. Es ist deshalb naheliegend, kompensatorische Operatoren zu definieren, die zwischen Minimum- und Maximum-Operatoren liegen.
Als Folge dieser Kompromißbereitschaft geht die klare sprachliche Trennung zwischen "und" und "oder" verloren. Mit wachsender Kompromißbereitschaft bewegt man sich von "und" zum "oder".

Definition 1.29: Seien $\tilde{A},\tilde{B}\in\tilde{P}(X)$ Fuzzy-Mengen.

Als **arithmetisches Mittel** der Fuzzy-Mengen $\tilde{A}$ und $\tilde{B}$ bezeichnet man die Fuzzy-Menge $\tilde{C}$ mit der Zugehörigkeitsfunktion $\mu_C(x)=\frac{1}{2}\left(\mu_A(x)+\mu_B(x)\right)\quad\forall x\in X$

Definition 1.30: Seien $\tilde{A},\tilde{B}\in\tilde{P}(X)$ Fuzzy-Mengen.

Als **geometrisches Mittel** der Fuzzy-Mengen $\tilde{A}$ und $\tilde{B}$ bezeichnet man die Fuzzy-Menge $\tilde{C}$ mit der Zugehörigkeitsfunktion $\mu_C(x)=\sqrt{\mu_A(x)\cdot\mu_B(x)}\quad\forall x\in X$

Beide Operatoren sind weder t-Norm noch t-Conorm.

Satz 1.31: Sind $\tilde{C}$ das arithmetische Mittel und $\tilde{D}$ das geometrische Mittel zweier beliebiger Fuzzy-Mengen $\tilde{A},\tilde{B}\in\tilde{P}(X)$, so gilt stets

$$\tilde{A}\cap\tilde{B}\subseteq\tilde{D}\subseteq\tilde{C}\subseteq\tilde{A}\cup\tilde{B}$$

Durch die oben definierten Operatoren ist der "Grad der Kompensation" fest vorgegeben. Interessant wäre aber ein Operator, dessen Kompensationsgrad variabel, d.h. in Abhängigkeit von einer konkreten Situation einstellbar ist.

Möglichkeiten zur Verallgemeinerung

- Für geometrisches Mittel gilt:

$$\left[\mu_A(x)\cdot\mu_B(x)\right]^{1/2} = \mu_A(x)^{1/2}\cdot\mu_B(x)^{1/2} = \left(\min\{\mu_A(x),\mu_B(x)\}\right)^{1/2}\cdot\left(\max\{\mu_A(x),\mu_B(x)\}\right)^{1/2}$$

Das geometrische Mittel enthält Durchschnitt und Vereinigung als Faktoren mit gleichem Gewicht $1/2$.
Durch Einführung eines Kompensationsgrades γ, $0 \le \gamma \le 1$ kann ein Operator mit der Zugehörigkeitsfunktion $\min\{\mu_A(x),\mu_B(x)\}^{1-\gamma}\cdot\max\{\mu_A(x),\mu_B(x)\}^{\gamma}$ variabel zwischen dem Min-Operator ($\gamma = 0$) und dem Max-Operator ($\gamma = 1$) eingestellt werden.
Nachteile der Min- und Max-Operatoren werden vererbt (Informationsverlust, insbesondere bei der Verknüpfung von mehr als zwei Mengen)

- Ersetzen Min- und Max-Operator durch algebraisches Produkt und algebraische Summe

$$\left(\mu_{A\sqcap_a B}(x)\right)^{1-\gamma}\cdot\left(\mu_{A\sqcup_a B}(x)\right)^{\gamma} = \left(\mu_A(x)\cdot\mu_B(x)\right)^{1-\gamma}\cdot\left(\mu_A(x)+\mu_B(x)-\mu_A(x)\cdot\mu_B(x)\right)^{\gamma}$$

Die Zugehörigkeitsfunktion ist somit variabel zwischen dem algebraischen Produkt ($\gamma = 0$) und der algebraischen Summe ($\gamma = 1$) einstelltbar.

Definition 1.32: Seien $\tilde{A},\tilde{B} \in \tilde{P}(X)$ Fuzzy-Mengen.
Als **γ-Verknüpfung** der Fuzzy-Mengen $\tilde{A}$ und $\tilde{B}$ bezeichnet man die Fuzzy-Menge $\tilde{A}\cdot_\gamma\tilde{B}$ mit der Zugehörigkeitsfunktion

$$\mu_{A\cdot_\gamma B}(x) = \left(\mu_{A\sqcap_a B}(x)\right)^{1-\gamma}\cdot\left(\mu_{A\sqcup_a B}(x)\right)^{\gamma} = \left(\mu_A(x)\cdot\mu_B(x)\right)^{1-\gamma}\cdot\left(\mu_A(x)+\mu_B(x)-\mu_A(x)\cdot\mu_B(x)\right)^{\gamma}$$

und einem beliebigen Kompensationsgrad $\gamma \in [0,1]$.

Problem: Wie ist γ in konkreter Anwendungssituation zu wählen?

Ist für ein $x \in X$ bei bekanntem $\mu_A(x) \ne 0$ und $\mu_B(x) \ne 0$ auch der Zugehörigkeitsgrad $\mu_{A\cdot_\gamma B}(x)$ zur Menge $\tilde{A}\cdot_\gamma\tilde{B}$ bekannt, so läßt sich γ durch Auflösung der Zugehörigkeitsfunktion nach γ berechnen:

$$\gamma(x) = \frac{\log\mu_{A\cdot_\gamma B}(x) - \log\mu_A(x) - \log\mu_B(x)}{\log\left(\mu_A(x)+\mu_B(x)-\mu_A(x)\cdot\mu_B(x)\right) - \log\mu_A(x) - \log\mu_B(x)}$$

Damit scheint folgende Vorgehensweise angebracht:

- Für eine (repräsentative) endliche Teilmenge $X_0 \subseteq X$ werden die Zugehörigkeitsgrade (empirisch) festgelegt.
- Für jedes $x \in X_0$ wird das entsprechende $\gamma(x)$ berechnet.
- Der Kompensationsgrad ergibt sich als arithmetisches Mittel dieser $\gamma(x)$

$$\hat{\gamma} = \frac{1}{|X_0|}\sum_{x\in X_0}\gamma(x) \quad \text{mit} \quad |X_0| = \sum_{x\in X_0}\mu_{X_0}(x) \quad \text{(d.h. Anzahl der Elemente in } X_0\text{)}$$