2. Arithmetik der Fuzzy-Zahlen
2.1. Das Erweiterungsprinzip

In Kapitel 1 wurde die klassische Mengentheorie auf Fuzzy-Mengen erweitert.
In diesem Kapitel sollen mathematische Konzepte für reelle Zahlen / Mengen (Rechenregeln, Funktionen, ...) auf Fuzzy-Zahlen / Fuzzy-Mengen übertragen werden. Ziel ist wiederum eine Erweiterung der klassischen Regeln auf Fuzzy-Mengen, geleistet wird dies durch das Erweiterungsprinzip.

Betrachtet man eine Abbildung $f : X \to Y$, so wird eine (geeignete) Teilmenge $A \subseteq X$ durch f auf eine Menge $B = f(A) \subseteq Y$ abgebildet. Die Menge B heißt Bildmenge der Menge A bei der Abbildung f. Die Menge A selbst heißt Urbildmenge von B. Die Menge B kann wieder durch ihre charakteristische Funktion dargestellt werden:

$$\mu_B(y) = \begin{cases} 1 & \text{falls} \quad y = f(x),\ x \in A \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Ist $\tilde{A}$ eine Fuzzy-Menge auf X, so wird das Bild $\tilde{B} = f(\tilde{A})$ eine Fuzzy-Menge auf Y.
Ist f eine injektive Abbildung, d.h. gibt es für jedes $y \in Y$ höchstens ein x mit $f(x) = y$, so ist naheliegend, den Zugehörigkeitswert $\mu_B(y)$ dem Zugehörigkeitswert $\mu_A(x)$ des entsprechenden x zu $\tilde{A}$ gleichzusetzen.
Gibt es zu einem $y \in Y$ mehr als ein Urbild, d.h. besteht die Menge $f^{-1}(y) = \{x \in X : f(x) = y\}$ aus mehr als einem Element, so ist naheliegend, $\mu_B(y) = \sup\limits_{x \in f^{-1}(y)} \mu_A(x)$ zu setzen.

Definition 2.1: Gegeben seien
- die Grundmengen X und Y
- die Fuzzy-Menge $\tilde{A} \in \tilde{P}(X)$ mit der Zugehörigkeitsfunktionen $\mu_A(x)$
- eine Abbildung $f : X \to Y$

Das **Erweiterungsprinzip** definiert für die Abbildung $f(\tilde{A})$ eine Fuzzy-Menge $\tilde{B}$ auf Y mit

$$\mu_B(y) = \begin{cases} \sup\limits_{x \in f^{-1}(y)} \mu_A(x) & \text{falls} \ f^{-1}(y) \neq \emptyset \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Das **kartesische Produkt** $A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n$ der (klassischen) Mengen $A_i, i = 1, 2, \ldots, n$ ist definiert als $A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) : x_i \in A_i\}$.
Jede der Mengen $A_i \subseteq X_i$ kann entsprechend Kapitel 1 durch deren charakteristische Funktion $\mu_{A_i}(x)$ beschrieben werden. Die charakteristische Funktion des kartesischen Produktes $A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n \subseteq X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n$ läßt sich dann wie folgt angeben:

$$\mu_{A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \begin{cases} 1 & \mu_{A_1}(x_1) = \mu_{A_2}(x_2) = \cdots = \mu_{A_n}(x_n) = 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

bzw. in geschlossener Form $\mu_{A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \min\{\mu_{A_1}(x_1), \mu_{A_2}(x_2), \ldots, \mu_{A_n}(x_n)\}$.

Definition 2.2: Das **kartesische Produkt** der Fuzzy-Mengen $\tilde{A}_i \in P(X_i), \quad i = 1, 2, \ldots, n$ ist die Fuzzy-Menge $\tilde{A}_1 \otimes \tilde{A}_2 \otimes \cdots \otimes \tilde{A}_n$ im Produktraum $X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n$ mit der Zugehörigkeitsfunktion

$$\mu_{A_1 \otimes A_2 \otimes \cdots \otimes A_n}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \min\{\mu_{A_1}(x_1), \mu_{A_2}(x_2), \ldots, \mu_{A_n}(x_n)\}$$

Ist f eine Funktion mehrerer Variabler, so ergibt sich aus Definition 2.1 unter Beachtung der Definition des kartesischen Produktes folgendes allgemeine **Erweiterungsprinzip**

Definition 2.3: Gegeben seien

- die Grundmengen $X_1, X_2, \ldots, X_n$ und Y
- die Fuzzy-Mengen $\tilde{A}_i \in P(X_i)$ mit den Zugehörigkeitsfunktionen $\mu_i(x), \quad i = 1, \ldots, n$
- eine Abbildung $f: X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n \to Y$

Das Erweiterungsprinzip definiert für die Abbildung $f(\tilde{A}_1, \tilde{A}_2, \ldots, \tilde{A}_n)$ eine Fuzzy-Menge $\tilde{B}$ auf Y mit

$$\mu_B(y) = \begin{cases} \sup\limits_{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in f^{-1}(y)} \min\{\mu_1(x_1), \mu_2(x_2), \ldots, \mu_n(x_n)\} & \text{falls } f^{-1}(y) \neq \emptyset \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Die in Definition 2.3 angegebene Möglichkeit, Abbildungen auf Fuzzy-Mengen zu übertragen, ist die übliche, aber durchaus nicht einzige. Der Zugehörigkeitswert $\mu_B(y)$ berechnet sich hier aus dem Supremum der Zugehörigkeitswerte aller zum Ergebnis $y = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ führenden n-Tupel $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, deren Zugehörigkeitswerte ihrerseits nach Definition 2.2 berechnet werden.

Wichtigste Anwendung des Erweiterungsprinzips ist die Übertragung algebraischer Operatoren (Addition, Multiplikation, ...) auf Fuzzy-Mengen, insbesondere Fuzzy-Zahlen.

Ist $*$ ein binärer Operator für reelle Zahlen, so verwenden wir im folgenden das Symbol $\circledast$ für den entsprechenden erweiterten Operator für Fuzzy-Zahlen. Wird also ein binärer Operator $*$ auf der Menge der reellen Zahlen mit Hilfe des Erweiterungsprinzips auf einen Operator $\circledast$ erweitert, der zwei Fuzzy-Zahlen $\tilde{A}, \tilde{B} \in \tilde{P}(\mathbb{R})$ verknüpft, so ergibt sich die Fuzzy-Menge $\tilde{A} \circledast \tilde{B} \in \tilde{P}(\mathbb{R})$ mit der Zugehörigkeitsfunktion

$$\mu_{A \circledast B}(y) = \begin{cases} \sup\limits_{(x_1, x_2) \in f^{-1}(y)} \min\{\mu_A(x_1), \mu_B(x_2)\} & \text{falls } f^{-1}(y) \neq \emptyset \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Hieraus ist unmittelbar ablesbar, daß im Falle der Kommutativität bzw. Assoziativität des Operators $*$ dies auch für den erweiterten Operator gilt.

Der Aufwand zur Bestimmung der durch die erweiterten Operatoren definierten Fuzzy-Mengen ist im allgemeinen hoch, deshalb im folgenden Beschränkung auf speziell strukturierte Fuzzy-Zahlen.

2.2. Erweiterte Operatoren für Fuzzy-Zahlen vom LR-Typ

Eine Fuzzy-Zahl war charakterisiert durch folgende Eigenschaften:

- sie besitzt genau einen Gipfelpunkt x_0 mit $\mu(x_0) = 1$
- sie ist konvex, d.h. die Zugehörigkeitsfunktion $\mu(x)$ ist links vom Gipfelpunkt monoton wachsend und rechts vom Gipfelpunkt monoton fallend.

Läßt man für diese beiden Teiläste der Zugehörigkeitsfunktion nur bestimmte Typen von Funktionen, sogenannte Referenzfunktionen zu, so erhält man Fuzzy-Zahlen vom LR-Typ

Definition 2.4: Eine Funktion $g: [0, \infty) \to [0,1]$ heißt **Referenzfunktion**, wenn

- $g(0) = 1$
- g ist monoton fallend in gesamten Definitionsbereich

Allgemein verbreitete Referenzfunktionen sind

- $g(t) = \max\{0, 1 - t\}$
- $g(t) = \max\{0, 1 - t^\lambda\} \qquad \lambda > 0$
- $g(t) = (1 + t^\lambda)^{-1} \qquad \lambda > 0$
- $g(t) = \exp(-t^\lambda) \qquad \lambda > 0$

wobei λ ein frei wählbarer Parameter ist. Alle diese Funktionen sind sogar streng monoton fallend.

Definition 2.5: $\tilde{A} \in P(\mathbb{R})$ heißt **Fuzzy-Zahl vom LR-Typ oder LR-Fuzzy-Zahl**, wenn gilt

$$\mu_A(x) = \begin{cases} L\left(\dfrac{a-x}{\alpha}\right) & \text{für} \quad x \le a \quad \text{und} \quad \alpha > 0 \\ R\left(\dfrac{x-a}{\beta}\right) & \text{für} \quad x \ge a \quad \text{und} \quad \beta > 0 \end{cases}$$

wobei $L(t)$ und $R(t)$ geeignete Referenzfunktionen sind.
Die Zahlen α und β heißen linke bzw. rechte Spannweite.
$\tilde{A}$ wird abkürzend geschrieben als $\tilde{A} = (a, \alpha, \beta)_{LR}$

Entsprechend kann auch ein Fuzzy-Intervall von LR-Typ definiert werden:

Definition 2.6: $\tilde{A} \in P(\mathbb{R})$ heißt **Fuzzy-Intervall vom LR-Typ oder LR-Fuzzy-Intervall**, wenn gilt

$$\mu_A(x) = \begin{cases} L\left(\dfrac{m_1-x}{\alpha}\right) & \text{für} \quad x \le m_1 \quad \text{und} \quad \alpha > 0 \\ 1 & \text{für} \quad m_1 < x \le m_2 \\ R\left(\dfrac{x-m_2}{\beta}\right) & \text{für} \quad x > m_2 \quad \text{und} \quad \beta > 0 \end{cases}$$

wobei $L(t)$ und $R(t)$ geeignete Referenzfunktionen sind.
Die verkürzte Notation lautet hier $\tilde{A} = (m_1, m_2, \alpha, \beta)_{LR}$

Ist bei einer LR-Fuzzy-Zahl $\tilde{A} = (a, \alpha, \beta)_{LL}$ insbesondere $L(t) = R(t) = \max\{0, 1-t\}$, so nennt man sie auch triangulär und schreibt sie als $\tilde{A} = (a, \alpha, \beta)_{tri}$.

Ist $\tilde{A} = (a, \alpha, \beta)_{LR}$ eine LR-Fuzzy-Zahl, so entsteht die Fuzzy-Zahl $-\tilde{A}$ (erweiterte Negation) durch Spiegelung der Zugehörigkeitsfunktion an der Achse $x = 0$, somit gilt $-\tilde{A} = (-a, \beta, \alpha)_{RL}$ (linke und rechte Spannweite werden vertauscht!). Insbesondere wird eine trianguläre Fuzzy-Zahl wieder in eine solche überführt.

Satz 2.7: Sind $\tilde{A} = (a, \alpha, \beta)_{LR}$ und $\tilde{B} = (b, \gamma, \delta)_{LR}$ LR-Fuzzy-Zahlen vom gleichen LR-Typ, so wird durch das Erweiterungsprinzip eine erweiterte Addition dieser Fuzzy-Zahlen definiert. Sind die Referenzfunktionenen über den Stützmengen stetig und streng monoton, so ist das Ergebnis wieder eine LR-Fuzzy-Zahl gleichen Typs:
$(a, \alpha, \beta)_{LR} \oplus (b, \gamma, \delta)_{LR} = (a + b, \alpha + \gamma, \beta + \delta)_{LR}$

Als Folgerung ergibt sich für die skalare Multiplikation einer LR-Fuzzy-Zahl $\tilde{A} = (a, \alpha, \beta)_{LR}$ mit einer Zahl $\lambda > 0$ die LR-Fuzzy-Zahl gleichen Typs mit $\lambda \cdot \tilde{A} = (\lambda a, \lambda\alpha, \lambda\beta)_{LR}$. Bei Multiplikation mit einem Skalar $\lambda < 0$ ergibt sich aus der LR-Fuzzy-Zahl $\tilde{A} = (a, \alpha, \beta)_{LR}$ die RL-Fuzzy-Zahl $\lambda \cdot \tilde{A} = (\lambda a, \lambda\beta, \lambda\alpha)_{RL}$

Die erweiterte Addition ist nach dem Erweiterungsprinzip auch für LR-Fuzzy-Zahlen unterschiedlichen Typs definiert. Es läßt sich zeigen, daß auch in diesem Fall eine LR-Fuzzy-Zahl entsteht, deren Referenzfunktionen $L(t)$ und $R(t)$ relativ einfach berechenbar sind.

Die **erweiterte Subtraktion** zweier Fuzzy-Zahlen $\tilde{A}$ und $\tilde{B}$ wird mittels $\tilde{A} - \tilde{B} = \tilde{A} + (-\tilde{B})$ auf die erweiterte Addition zurückgeführt. Dabei ist zu beachten,daß die Typen von $\tilde{A}$ und $(-\tilde{B})$ übereinstimmen, d.h. ist $\tilde{A}$ eine LR-Fuzzy-Zahl, so sollte $\tilde{B}$ eine RL-Fuzzy-Zahl sein. Für die Subtraktion von triangulären Fuzzy-Zahlen gilt insbesondere: $(a_1, \alpha_1, \beta_1)_{tri} \ominus (a_2, \alpha_2, \beta_2)_{tri} = (a_1 - a_2, \alpha_1 + \beta_2, \alpha_2 + \beta_1)_{tri}$