3. Fuzzy-Regler

3.1. Prinzipielle Arbeitsweise eines Fuzzy-Reglers

Fuzzy-Regler sind eine sehr einfache Ausführung eines regelbasierten Expertensystems (RES).

Regelbasierte Expertensysteme (RES) modellieren nicht das System selbst, sondern einen Experten, der in der Lage ist, das System zu handhaben. Ziel ist dabei, dieses Expertenwissen auch Nichtexperten zugänglich zu machen in dem Sinne, daß sie auf der Grundlage des RES Entscheidungen treffen können.

Die wesentlichen Bestandteile eines RES sind
- eine **Wissensbasis**, die das zur Verfügung stehende Wissen enthält. Das sind zum einen **Fakten**, zum anderen aber auch **Regeln**, wie dieses Wissen genutzt werden kann.
- ein **Dialogmodul**, über den sowohl der Experte (Wissenserzeugung), als auch der Anwender (Wissensabfrage) auf die Wissensbasis zugreifen kann. Die Wissensabfrage erfolgt dabei über eine
- **Inferenz-Maschine**. Sie beinhaltet Methoden, wie die Regeln der Wissensbasis genutzt werden können, um Schlußfolgerungen in konkreten Prozeßsituationen zu ziehen.
- weitere Bausteine (siehe Literatur)

Die Kommunikation der RES mit den Experten und Anwendern erfolgt dabei in einer quasi-natürlichen Sprachumgebung.

Bei einem **Fuzzy-Regler** besteht die Wissensbasis aus einer Regelbank, die sprachlich (linguistisch) formuliertes Wissen von Experten über den zu regelnden Prozeß in Form von Regeln

"IF <Bedingungen> THEN <Folgerungen>"

enthält. Diese Regeln werden vom Experten (Entwickler) für spezielle Situationen explizit formuliert, beziehen sich also auf konkrete Aufgabenstellungen. Sie stellen "unscharf" formuliertes Wissen dar.
In einer konkreten Anwendungssituation sind die Eingangsgrößen des Reglers auf der Basis dieser unscharfen Systembeschreibung auf dessen Ausgangsgrößen abzubilden. Dazu sind in Situationen, bei denen für die konkreten Eingangswerte keine Regel explizit gegeben ist, mit Hilfe der Methode des **approximativen Schließens** die vorhandenen Regeln zu verknüpfen. Dies leistet die Inferenz-Maschine, sie arbeitet also auf der Basis einer unscharfen Regelbank und erzeugt aus unscharfen Eingangsgrößen unscharfe Ausgangsgrößen.
Die eigentlichen Eingangswerte (z.B. Meßwerte) sind meist scharfe Zahlen, sie müssen auf die im Regler verwendeten unscharfen Größen transformiert werden. Dieser Prozeß heißt **Fuzzifikation** der Eingangssignale. Entsprechend sind aus den berechneten unscharfen Ausgangsgrößen feste Einstellwerte für die Stellgrößen des Reglers zu ermitteln. Dieser Prozeß heißt entsprechend **Defuzzifikation** der Ausgangsgrößen.

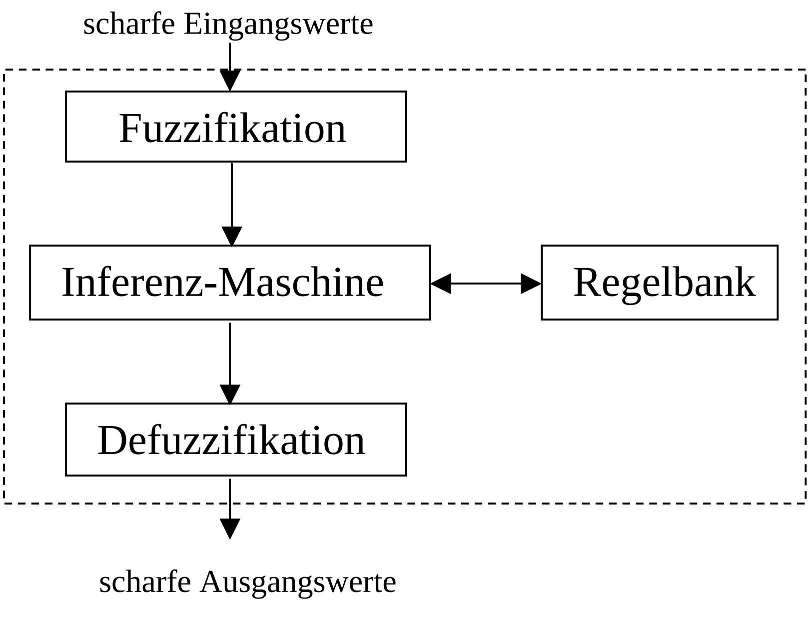

Abb.: Prinzip eines Fuzzy-Reglers

Folgende **Schlüsselkonzepte** sind für das Verständnis der Arbeitsweise eines Fuzzy-Reglers näher zu untersuchen:
- Linguistische Variable
- Fuzzifikation der Eingangswerte
- Approximatives Schließen
- Defuzzifikation der Ausgangsgrößen

3.2. Linguistische Variable und Fuzzifikation der Eingangswerte

Die Kommunikation von Experten und Anwendern mit dem Fuzzy-Regler erfolgt teilweise in einer quasi-natürlichen Sprache auf der Grundlage von linguistischen Ausdrücken. Diese bestehen aus linguistischen Variablen, die durch linguistische Operatoren miteinander verknüpft sind. Die wertemäßige Beschreibung der linguistischen Variablen erfolgt durch unscharfe Mengen auf einer numerischen Werteskala.

Definition 3.1: Eine **linguistische Variable (LV)** ist ein Tripel $LV = (T, X, M)$ mit

T Menge der Terme (linguistischen Werte), die die LV annehmen kann
X Grundmenge numerischer Werte, auf die die Terme abgebildet werden
M Menge von Fuzzy-Mengen über X, die den Termen aus T zugeordnet sind

Linguistische Terme können mit Modifikatoren verändert werden. Modifikatoren sind einstellige Operatoren auf einer linguistischen Werteskala. Ihre Anwendung auf einen Term $\tau \in T$ einer linguistischen Variablen führt auf einen neuen Term τ'. Aus der Zugehörigkeitsfunktion $\mu_\tau(x)$ für τ wird eine neue Zugehörigkeitsfunktion $\mu_{\tau'}(x)$ für τ' abgeleitet.

Ist $\tilde{A} = \{(x, \mu_A(x)) : x \in X\}$ eine beliebige Fuzzy-Menge, so können zunächst folgende Operatoren definiert werden:
- $CON(\tilde{A})$ mit $\mu_{CON}(x) = (\mu_A(x))^2$ Konzentration
- $DIL(\tilde{A})$ mit $\mu_{DIL}(x) = (\mu_A(x))^{1/2}$ Dehnung
- $INT(\tilde{A})$ mit $\mu_{INT}(x) = \begin{cases} 2(\mu_A(x))^2 & \mu_A(x) \le 0.5 \\ 1-2(1-\mu_A(x))^2 & \mu_A(x) > 0.5 \end{cases}$ Kontrastverstärkung

Ist nun dem Term $\tau \in T$ einer linguistischen Variablen $LV = (T, X, M)$ die Fuzzy-Menge $\tilde{M}_\tau = \{(x, \mu_\tau(x)) : x \in X\} \in M$ zugeordnet, so lassen sich zum Beispiel mit Hilfe der eben genannten Operatoren folgende Modifikatoren definieren:
- sehr τ' = sehr τ mit $\tilde{M}_{\tau'} = CON(\tilde{M}_\tau)$
- ziemlich τ' = ziemlich τ mit $\tilde{M}_{\tau'} = DIL(\tilde{M}_\tau)$
- nicht sehr τ' = nicht sehr τ mit $\tilde{M}_{\tau'} = (CON(\tilde{M}_\tau))^c$
- sehr sehr τ' = sehr sehr τ mit $\tilde{M}_{\tau'} = CON(CON(\tilde{M}_\tau))$
- ziemlich nicht τ' = ziemlich nicht τ mit $\tilde{M}_{\tau'} = DIL((\tilde{M}_\tau)^c)$

Linguistische Terme einer linguistischen Variablen können mit linguistischen Verknüpfungsoperatoren verknüpft werden. Diese sind Fuzzy-Operatoren, die auf die durch die Terme definierten Fuzzy-Mengen wirken und somit eine neue Fuzzy-Menge erzeugen, die dem neuen Term zugeordnet wird.

Fuzzifikation der Eingangswerte
Die Eingangswerte sind in der Regel scharfe Zahlen, sie müssen auf die im Regler verwendeten unscharfen Größen, d.h. auf die Werteskala der zugehörigen linguistischen Variablen abgebildet werden. Wird eine LV durch n Terme τ_i mit den Zugehörigkeitsfunktionen $\mu_i(x)$ beschrieben, dann entsteht aus dem Eingangswert x

ein fuzzifizierter n-dimensionaler Eingangsvektor $s(x) = (\mu_1(x), \mu_2(x), \ldots, \mu_n(x))^T$. Dieser Vektor heißt auch "Sympathievektor" des Eingangswertes, seine Koordinaten "Aktivierungsgrade" der Terme.
Die Tatsache, daß die Eingangswerte auf unscharfe Mengen abgebildet werden, läßt es sinnvoll erscheinen, bei den Eingangswerten keine hohen Genauigkeitsforderungen zu stellen, diese also als meßfehlerbehaftete Größen selbst als unscharfe Größen aufzufassen. Die Aktivierungsgrade sind in diesem Fall durch Verknüpfung von Fuzzy-Mengen zu bestimmen.

3.3. Approximatives Schließen

Die Regelbank eines Fuzzy-Reglers besteht aus endlich vielen WENN-DANN-Regeln, die mit Hilfe von linguistischen Variablen das Systemverhalten beschreiben. Diese Regeln legen für bestimmte Eingangswertkombinationen die zugehörigen Ausgangswertkombinationen fest. In einer konkreten Situation sind zunächst die einzelnen Regeln auf ihre Anwendbarkeit zu überprüfen. Da aber die Eingangswerte im allgemeinen nicht exakt mit den in den Regeln fest gelegten Bedingungen übereinstimmen, können mit ihrer Hilfe nur unscharfe Schlußfolgerungen zur Steuerung des Systems gezogen werden. Diese Vorgehensweise wird als approximatives Schließen bezeichnet. Zum Verständnis dieser Vorgehensweise sind einige Begriffe notwendig:

Definition 3.2: Sind A_i, $i = 1, 2, \ldots, n$ (klassische) Mengen, so heißt eine Teilmenge $R \subseteq A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n$ des kartesischen Produktes dieser Mengen eine **n-stellige Relation auf** $A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n$

Die Zugehörigkeit eines Punktes $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ zur Relation R kann explizit angegeben werden, oder implizit mit Hilfe von die Relation definierenden Bedingungen erfolgen. Da sowohl das kartesische Produkt, als auch die Relation R klassische Mengen sind, lassen sich beide mit einer charakteristischen Funktion $\mu_{KP}(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ bzw. $\mu_R(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ mit Funktionswerten aus $\{0,1\}$ beschreiben und es gilt für alle $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ $\mu_R(x_1, x_2, \cdots, x_n) \le \mu_{KP}(x_1, x_2, \cdots, x_n)$. Damit ergibt sich wieder die Möglichkeit, den Begriff der Relation auf Fuzzy-Mengen zu übertragen.

Definition 3.3: Sind X_i, $i = 1, 2, \ldots, n$ Grundmengen, so heißt eine Fuzzy-Menge $\tilde{R} = \{((x_1, x_2, \cdots, x_n), \mu_R(x_1, x_2, \cdots, x_n)) : (x_1, x_2, \cdots, x_n) \in X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n\}$ eine **n-stellige Fuzzy-Relation auf** $X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n$.
Sind $\tilde{A}_i$ Fuzzy-Mengen auf X_i, so heißt eine Fuzzy-Menge $\tilde{R} \subseteq \tilde{A}_1 \otimes \tilde{A}_2 \otimes \cdots \otimes \tilde{A}_n$ eine **n-stellige Fuzzy-Relation zwischen den Fuzzy-Mengen** $\tilde{A}_i$.

Fuzzy-Relationen sind nach Definition Fuzzy-Mengen auf der Grundmenge $X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n$, auf sie sind damit alle Mengenoperationen für Fuzzy-Mengen anwendbar. Sind $\tilde{R} = \{((x_1, x_2, \cdots, x_n), \mu_R(x_1, x_2, \cdots, x_n))\}$ und $\tilde{S} = \{((x_1, x_2, \cdots, x_n), \mu_S(x_1, x_2, \cdots, x_n))\}$ zwei Fuzzy-Relationen auf der gleichen Grundmenge $X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n$, so ergibt sich zum Beispiel für den Durchschnitt $\tilde{R} \cap \tilde{S}$ und die Vereinigung $\tilde{R} \cup \tilde{S}$
$\mu_{R \cap S}(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \min\{\mu_R(x_1, x_2, \cdots, x_n), \mu_S(x_1, x_2, \cdots, x_n)\}$ bzw.
$\mu_{R \cup S}(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \max\{\mu_R(x_1, x_2, \cdots, x_n), \mu_S(x_1, x_2, \cdots, x_n)\}$

Von besonderer Bedeutung sind zweistellige Relationen. Ist $\tilde{R}$ eine zweistellige Relation auf $X \times Y$ mit endlichen Grundmengen X und Y, so kann sie auch als Matrix angegeben werden. Sind $\tilde{R}$ auf $X \times Y$ und $\tilde{S}$ auf $Y \times Z$ zwei zweistellige Relationen mit einem gemeinsamen Grundraum Y, so läßt sich auch der klassische Begriff der Verkettung von Relationen auf Fuzzy-Relationen übertragen.

Definition 3.4: Seien $R(x, y)$ mit $R \subseteq X \times Y$ und $S(y, z)$ mit $S \subseteq Y \times Z$ zwei (klassische) zweistellige Relationen. Die Menge aller Wertepaare $(x, z) \in X \times Z$, für die mindestens ein $y \in Y$ mit $(x, y) \in R \ \wedge \ (y, z) \in S$ existiert, heißt **Verkettung** von R und S: $R \circ S \subseteq X \times Z$

Im Hinblick auf die angestrebte Übertragung auf Fuzzy-Relationen läßt sich dies unter Zuhilfenahme der charakteristischen Funktion wie folgt ausdrücken: Ein Paar (x,z) gehört genau dann zu $R \circ S \subseteq X \times Z$, d.h. $\mu_{R \circ S}(x,z) = 1$ genau dann, wenn mindestens ein $y \in Y$ existiert mit $\mu_R(x,y) = \mu_S(y,z) = 1$ bzw. $\min\{\mu_R(x,y), \mu_S(y,z)\} = 1$ bzw. $\mu_R(x,y) \cdot \mu_S(y,z) = 1$. Für klassische Relationen gilt also $\mu_{R \circ S}(x,z) = \sup_{y \in Y} \min\{\mu_R(x,y), \mu_S(y,z)\}$ bzw. $\mu_{R \circ S}(x,z) = \sup_{y \in Y}(\mu_R(x,y) \cdot \mu_S(y,z))$. Beide Beziehungen können zur Übertragung des Begriffes Verkettung auf Fuzzy-Relationen verwendet werden.

Definition 3.5: Seien $\tilde{R}(x,y)$ und $\tilde{S}(y,z)$ zwei Fuzzy-Relationen $\tilde{R} = \{((x,y), \mu_R(x,y)) : (x,y) \in X \times Y\}$ und $\tilde{S} = \{((y,z), \mu_S(y,z)) : (y,z) \in Y \times Z\}$.

Die Fuzzy-Menge $\tilde{R} \circ_{MM} \tilde{S} = \{((x,z), \mu_{R \circ_{MM} S}(x,z)) : (x,z) \in X \times Z\}$ mit

- $\mu_{R \circ_{MM} S}(x,z) = \sup_{y \in Y} \min\{\mu_R(x,y), \mu_S(y,z)\}$ heißt **Max-Min-Verkettung**
- $\mu_{R \circ_{MP} S}(x,z) = \sup_{y \in Y}\{\mu_R(x,y) \cdot \mu_S(y,z)\}$ heißt **Max-Prod-Verkettung**

von $\tilde{R}$ und $\tilde{S}$

Eine Fuzzy-Menge $\tilde{A}$ auf einer Grundmenge X kann als einstellige Relation aufgefaßt werden. Ist $\tilde{R} = \{((x,y), \mu_R(x,y)) : (x,y) \in X \times Y\}$ eine Fuzzy-Relation auf $X \times Y$, so kann $\tilde{A}$ mit $\tilde{R}$ verkettet werden:

$\tilde{A} \circ_{MM} \tilde{R}$: $\mu_{A \circ_{MM} R}(y) = \sup_{x \in X} \min\{\mu_A(x), \mu_R(x,y)\}$.

Fuzzy-Relationen bilden die Grundlage für die Fuzzy-Inferenz, deren Gegenstand das fuzzy-logische Schließen ist. Eine Inferenz besteht aus einer oder mehreren Regeln in Form von Implikationen, einer Wertvorgabe für den Bedingungsteil der Implikation und einer Folgerung. Ein häufig verwendeter Lösungsansatz für die Aufgabe, die aktuellen Eingabewerte mit den Regeln zu verknüpfen und daraus Folgerungen abzuleiten, ist auf der Schlußfigur "Modus ponens" (Abtrennungsregel) der klassischen Logik gegründet.

Definition 3.6: Als "Modus ponens" (Abtrennungsregel) bezeichnet man die Schlußfigur

$a \rightarrow b$	"wenn a dann b"
a	"nun gilt a"
b	"also gilt b"

(oder kurz: $(a \rightarrow b) \wedge a \rightarrow b$)

Der Modus ponens ist eine Tautologie, d.h. $(a \rightarrow b) \wedge a \Rightarrow b$ ist eine aussagenlogische Folgerung.

Seien nun u und v zwei Variable mit den möglichen Werten x_0 bzw. y_0, und gibt es für die Aussagen "$u = x_0$" und "$v = y_0$" nur die Wahrheitswerte "wahr" oder "falsch", so läßt sich der Modus ponens schreiben in der Form:

Implikation:	WENN	$u = x_0$	DANN	$v = y_0$
Prämisse:		$u = x_0$		
Folgerung:				$v = y_0$

(oder kurz: $(x_0 \Rightarrow y_0) \wedge x_0 \rightarrow y_0$).

Der Modus ponens ist dann folgendermaßen zu interpretieren: Ist die Expertenregel "$x_0 \Rightarrow y_0$" wahr und ist die Wertvorgabe $u = x_0$, so kann die Folgerung $v = y_0$ gezogen werden. Bei der Anwendung des Modus ponens auf Fuzzy-Systeme entstehen zwei Probleme:

- ist die Expertenregel "$x_0 \Rightarrow y_0$" wahr, aber der Eingabewert $u \neq x_0$, welches Ergebnis soll dann für die Ausgabevariable v erzeugt werden?
- ist die Implikation unscharf, d.h. besitzt sie als Fuzzy-Implikation Wahrheitswerte kleiner als 1, so gilt der Modus ponens nicht mehr.

Für das fuzzy-logische Schließen sind also andere Wege zu beschreiten, die sich auf den Begriff der Fuzzy-Relation stützen.

Definition 3.7: Sei $\tilde{R} = \{((x,y), \mu_R(x,y)) : (x,y) \in X \times Y\}$ eine zweistellige Fuzzy-Relation und $\tilde{A} = \{(x, \mu_A(x)) : x \in X\}$ eine Fuzzy-Menge (einstellige Relation) auf X. Durch die Verkettung $\tilde{A} \circ \tilde{R}$ wird $\tilde{A}$ in eine Fuzzy-Menge $\tilde{B} = \{(y, \mu_B(y)) : y \in Y\}$ abgebildet. Diese heißt **Fuzzy-Inferenz-Bild** von $\tilde{A}$ bezüglich der Relation $\tilde{R}$.

Sind in Definition 3.7 sowohl die zweistellige Relation $\tilde{R}$, als auch der erste Variablenwert scharf, so entsteht durch das Inferenzbild eine Relationalgleichung, die den Wertebereich der zweiten Variablen einschränkt.

Ist $\tilde{R}$ eine Fuzzy-Relation, so beschränkt die Festlegung des ersten Variablenwertes den Wertebereich der zweiten nur unscharf. Diese Unschärfe kann sowohl durch die Unschärfe der Relation als auch durch Vorgabe eines unscharfen Wertes entstehen.
Ist $\tilde{R}$ eine Fuzzy-Relation zwischen zwei Variablen u über X und v über Y, so wird durch die scharfe Wertzuweisung $u = x_0,\ x_0 \in X$ der Wertebereich von v durch die Fuzzy-Menge $\tilde{B}(y) = \tilde{R}(x_0, y)$ eingeschränkt, d.h. durch $\tilde{R}$ wird jedem $x_0 \in X$ eine Fuzzy-Menge $\tilde{B}(y) = \tilde{R}(x_0, y)$ zugeordnet. Wird $\tilde{B}(y)$ mit β (im Sinne einer linguistischen Entsprechung) bezeichnet, so erhält man also eine WENN-DANN-Regel
WENN $u = x_0$ DANN $v = \beta$, in der die Relation explizit nicht vorkommt. Diese Zuordnung ist aber nicht umkehrbar eindeutig, da unterschiedlichen Werten x die gleiche Menge $\tilde{B}(y)$ zugeordnet werden kann. Eine Fuzzy-Relation führt somit eindeutig auf eine WENN-DANN-Regel, die Umkehrung gilt aber nicht.
Fuzzy-Relationen eignen sich also zum Modellieren von Fuzzy-Implikationen in Form von WENN-DANN-Regeln in dem Sinne, daß jede Fuzzy-Relation eindeutig auf eine WENN-DANN-Regel führt. Bei Anwendungen wie Fuzzy-Reglern besteht aber gerade die Aufgabe, zu vorgegebenen WENN-DANN-Regeln zugehörige Fuzzy-Relationen zu finden. Zu dieser Problematik kehren wir später zurück.

3.4 Der erweiterte Modus ponens

Zum erweiterten Modus ponens gelangt man, indem man für die Implikation (Expertenregel) und die Wertvorgabe unscharfe Werte zuläßt, um daraus nach formalen Regeln unscharfe Folgerungen abzuleiten. Der erweiterte Modus ponens verwendet folgendes Schema:

$$\begin{array}{llll} \text{WENN} & u = \alpha & \text{DANN} & v = \beta \\ & u = \alpha' & & \\ \hline & & & v = \beta'' \end{array}$$

(oder kurz: $(\alpha \Rightarrow \beta) \wedge \alpha' \to \beta''$)

Dabei sind
- u und v linguistische Variablen
- α und α' Terme über dem Grundbereich X mit zugehöriger Fuzzy-Menge $\tilde{A}(x)$ bzw. $\tilde{A}'(x)$
- β ein Term über dem Grundbereich Y mit zugehöriger Fuzzy-Menge $\tilde{B}(y)$

Der erweiterte Modus ponens ist folgendermaßen zu interpretieren:
- Es gibt eine Regel, die dem Term α den Term β zuordnet (Regel, Implikation)
- α' ist ein gegenüber α leicht modifizierter Wert, für den keine eigenständige Regel definiert ist (Prämisse)

- mit Hilfe der für α gegebenen Regel $\alpha \Rightarrow \beta$ soll durch approximatives Schließen auch für α' ein Term β'' als unscharfe Folgerung aus α' angegeben werden.

Die Unschärfe von β'' entsteht einerseits durch die Unschärfe der eingehenden Werte α, β und α' selbst, andererseits aber auch durch den Folgerungsalgorithmus als Umsetzung des erweiterten Modus ponens in einen mathematischen Formalismus.

Wir hatten gesehen, daß bei Vorgabe einer Fuzzy-Relation $\tilde{R}$ zwischen zwei Variablen u über X und v über Y und eines Termes α als Wert für u ein Term β als Wert für die Variable v bestimmt wird und somit eine Regel WENN $u = \alpha$ DANN $v = \beta$ modelliert wird.

Sind nun umgekehrt eine Regel WENN $u = \alpha$ DANN $v = \beta$ und ein modifizierter Term α' vorgegeben, so besteht nun das Problem darin, eine geeignete Fuzzy-Relation $\tilde{R}(x,y)$ zu bestimmen, die

1. die WENN-DANN-Regel modelliert **und**
2. für den modifizierten Term α' eine sinnvolle approximative Folgerung β'' liefert.

Eine allgemeine Vorgehensweise zum Schließen unter unscharfen Aussagen wird nach Delgado wie folgt vorgeschlagen:

0. Die Terme α und α' einer linguistischen Variablen u über einem Grundbereich X und der Term β einer linguistischen Variablen v über einem Grundbereich Y seien durch ihre zugehörigen Fuzzy-Mengen $\tilde{A}, \tilde{A}'$ und $\tilde{B}$ gegeben. Außerdem sei eine Regel "WENN $u = \alpha$ DANN $v = \beta$" vorgegeben.
1. Wähle eine Implikationsrelation, d.h. eine Verknüpfung $I\left(\tilde{A}, \tilde{B}\right)$, die die Regel $\alpha \to \beta$ in eine unscharfe Relation $\tilde{R}_1 \subseteq P(X \times Y)$ umsetzt:
   $\tilde{R}_1(x, y) = I\left(\tilde{A}(x), \tilde{B}(y)\right)$
2. Bestimme ausgehend von $\tilde{A}'$ und $\tilde{R}_1$ eine Relation $\tilde{R}_2 \subseteq P(X \times Y)$ aus
   $\tilde{R}_2(x, y) = \tilde{A}'(x) \sqcap_{\square} \tilde{R}_1(x, y)$
   wobei "$\sqcap_{\square}$" ein zunächst beliebiger UND-Operator bzgl. der x-Werte ist. Das bedeutet, die Relation $\tilde{R}_2(x, y)$ gilt, wenn sowohl $\tilde{A}'(x)$ als auch $\tilde{R}_1(x, y)$ gelten, also inhaltlich, wenn die Regel gilt und v den Wert α' angenommen hat.
3. Variante 1: Für alle $y \in Y$ ergibt sich $\tilde{B}''(y)$ aus $\mu_{B''}(y) = \mathrm{hgt}_{x \in X}\, \tilde{R}_2(x, y)$.
   Variante 2: Für alle $y \in Y$ ergibt sich $\tilde{B}''(y)$ aus $\mu_{B''}(y) = \min\left\{\mathrm{hgt}_{x \in X}\left(\tilde{R}_2(x, y)\right), \mu_B(y)\right\}$.
   Die zusätzliche Minimumbildung sichert, daß $\tilde{B}''(y) \subseteq \tilde{B}(y)$ ist, d.h. es können keine Schlußfolgerungen für solche Werte des Grundbereiches gezogen werden, die von der Regel nicht entsprechend abgedeckt sind.

Für eine Realisierung des erweiterten Modus ponens bleiben zwei Fragen zu beantworten:

1. Frage: welche Implikationsrelation $\tilde{R}_1$ ist im Punkt 1 zu wählen und

2. Frage: welcher (dazu passende) UND-Operator $\sqcap_{\square}$ ist in Punkt 2 zu verwenden.

In Abhängigkeit von der Beantwortung dieser Fragen entstehen verschiedene Varianten.

3.5 Beispiele für den erweiterte Modus ponens

Der erweiterte Modus ponens nach **Mamdani**

Beim unscharfen Schließen nach Mamdani werden die beiden Fragen wie folgt beantwortet:
Frage 1: Verwende das kartesische Produkt als Implikationsrelation:

$$\tilde{R}_1 = \tilde{A} \otimes \tilde{B}$$

Frage 2: Verwende den Durchschnitt von Fuzzy-Mengen als UND-Operator:

$$\tilde{R}_2\left(x, y\right) = \tilde{A}'(x) \cap \tilde{R}_1(x, y)$$

Die Zugehörigkeitsfunktion $\mu_{B''}(y)$ der Folgerung $\tilde{B}''(y)$ ergibt sich somit aus

Schritt 1: $\mu_{R_1}(x, y) = \min\left\{\mu_A(x), \mu_B(y)\right\}$

Schritt 2: $\mu_{R_2}(x, y) = \min\left\{\mu_{A'}(x), \min\left\{\mu_A(x), \mu_B(y)\right\}\right\} = \min\left\{\mu_{A'}(x), \mu_A(x), \mu_B(y)\right\}$

Schritt 3 (Variante 1):

$$\begin{aligned}\mu_{B''}(y) &= \sup_{x\in X} \min\left\{\mu_{A'}(x), \mu_A(x), \mu_B(y)\right\}\\ &= \sup_{x\in X} \min\left\{\mu_{A\cap A'}(x), \mu_B(y)\right\}\\ &= \min\left\{\sup_{x\in X} \mu_{A\cap A'}(x), \mu_B(y)\right\}\\ &= \min\left\{\mathrm{hgt}\left(\tilde{A} \cap \tilde{A}'\right), \mu_B(y)\right\}\end{aligned}$$

Setzt man $\lambda = \mathrm{hgt}\left(\tilde{A} \cap \tilde{A}'\right)$, so ergeben sich zwei Fälle:

- ist $\lambda = 1$, d.h. ist der Bedingungsteil der Regel vollständig erfüllt, so ist $\tilde{B}''(y) = \tilde{B}(y)$
- ist $\lambda < 1$, so ist $\mu_{B''}(y) = \min\left[\lambda, \mu_B(y)\right]$, d.h. die Zugehörigkeitsfunktion $\mu_B(y)$ wird in der Höhe λ abgeschnitten. Die Größe λ heißt "Aktivierungsgrad" der Regel . Die Bedingung $\tilde{B}''(y) \subseteq \tilde{B}(y)$ wird automatisch erfüllt.

Das kartesische Produkt ist eine sehr einfache Implikationsrelation zur Beantwortung der ersten Frage. Andere Möglichkeiten lassen sich analog zu der in der klassischen Logik gültigen Äquivalenz $\left(A \to B\right) \Leftrightarrow \left(A^c \vee B\right)$ ableiten. Da der ODER-Operator gleiche Grundbereiche voraussetzt, müssen sowohl $\tilde{A}^c(x)$ als auch $\tilde{B}(y)$ auf den gemeinsamen Grundbereich $X \times Y$ erweitert werden. Dies wird durch Bildung der kartesischen Produkte $\tilde{A}^c \times Y$ und $X \times \tilde{B}$ erreicht. Für den ODER-Operator stehen unterschiedliche Möglichkeiten zur Verfügung, so daß folgende Varianten für die Beantwortung der ersten Frage existieren

- Vereinigung: $\left(\tilde{A}^c \times Y\right) \cup \left(X \times \tilde{B}\right)$ (Kleen-Dienes)
- algebraische Summe: $\left(\tilde{A}^c \times Y\right) \sqcup_a \left(X \times \tilde{B}\right)$ (Reichenbach)
- beschränkte Summe: $\left(\tilde{A}^c \times Y\right) \sqcup_b \left(X \times \tilde{B}\right)$ (Lukasiewicz)

Alle diese Varianten verwenden für den UND-Operator zur Beantwortung der zweiten Frage das beschränkte Produkt.

Eine weitere Möglichkeit für eine Implikationsrelation (zur Beantwortung der 1. Frage) ist die Gödel-Implikation, die gemeinsam mit dem Durchschmitt als UND-Operator (zur Beantwortung der 2. Frage) verwendet wird.

Definition 3.8: Die **Gödel-Verknüpfung** zweier Fuzzy-Mengen $\tilde{A} \in P(X)$ und $\tilde{B} \in P(Y)$ ist definiert durch die Fuzzy-Menge $\tilde{A} \odot \tilde{B} \in P(X, Y)$ mit

$$\mu_{A\odot B}(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{für } \mu_A(x) \le \mu_B(y) \\ \mu_B(y) & \text{sonst} \end{cases}$$

Die Bestimmung einer Relation $\tilde{R}(x,y)$ zu vorgegebenen Fuzzy-Mengen $\tilde{A}(x)$ und $\tilde{B}(y)$ entspricht der Lösung einer Relationalgleichung $\tilde{B} = \tilde{A} \circ \tilde{R}$. Die Gödel-Verknüpfung spielt eine besondere Rolle, da folgender Satz gilt

Satz 3.9: Ist die Gödel-Verknüpfung $\tilde{A} \odot \tilde{B}$ Lösung der Relationalgleichung $\tilde{B} = \tilde{A} \circ_{MM} \tilde{R}$, so ist sie die bezüglich der Inklusion größte Lösung.
Ist die Gödel-Verknüpfung keine Lösung der Relationalgleichung, so ist die Relationalgleichung nicht lösbar.

3.6 Unscharfe Relationalgleichungssysteme

Die Ausführungen der Kapitel 3.4 und 3.5 hatten die Konstruktion einer Relation $\tilde{R}$ zu einer WENN-DANN-Regel $\alpha \to \beta$ zu einem vorgegeben Termenpaar zweier linguistischer Variablen zum Inhalt. Sind $\tilde{A}$ und $\tilde{B}$ die zu α und β gehörenden Fuzzy-Mengen, so war $\tilde{R}$ so zu bestimmen, daß die Relationalgleichung $\tilde{B} = \tilde{A} \circ \tilde{R}$ erfüllt wird.
Verknüpft eine Regelbank zwei linguistische Variablen u und v miteinander, dann wird es für die Terme dieser Variablen in der Regel mehrere Regeln $\alpha_i \to \beta_i,\ i = 1,..,q$ geben. Der Wunsch liegt nahe, diese Regeln mit **einer** Relation $\tilde{R}$ zu beschreiben, die die Relationalgleichungen $\tilde{B}_i = \tilde{A}_i \circ \tilde{R},\ i = 1,..,q$ erfüllen. Es handelt sich also um ein Relationalgleichungssystem. Dieses ist nicht in allen Fällen lösbar, d.h. es existiert nicht immer eine gemeinsame Fuzzy-Relation., die alle Relationalgleichungen $\tilde{B}_i = \tilde{A}_i \circ \tilde{R}$ gleichzeitig erfüllt.
Im folgenden beschränken wir uns auf die Max-Min-Verkettung von Relationen. Es gilt dann der

Satz 3.10: Ein Relationalgleichungssystem $\tilde{B}_i = \tilde{A}_i \circ \tilde{R},\ i = 1,..,q$ besitzt genau dann mindestens eine Lösung $\tilde{R}$, wenn $\tilde{C} = \bigcap_{i=1}^{q} \left(\tilde{A}_i \odot \tilde{B}_i \right)$ mit der Gödel-Verknüpfung $\tilde{A} \odot \tilde{B}$ eine Lösung ist.
$\tilde{C}$ ist dann die bezüglich Inklusion größte Lösung für $\tilde{R}$.
Existiert keine Lösung, so ist $\tilde{C}$ eine günstige Näherungslösung für $\tilde{R}$.

Eine zweite, einfachere Möglichkeit, Relationalgleichungssysteme näherungsweise zu lösen, besteht darin, die Regeln nicht duch eine einzige unscharfe Relation $\tilde{R}$ zu beschreiben, sondern zunächst für jede Relational-gleichung nach den in 3.4 bzw. 3.5 behandelten Verfahren eine Relation $\tilde{R}_i$ zu bestimmen und diese Relationen anschließend zu einer gemeinsamen Relation zusammenzufassen.

Als Beispiel für eine solche Vorgehensweise sei die **Max-Min-Inferenz-Methode** angeführt. Diese bestimmt für jede einzelne Relationalgleichung eine Relation $\tilde{R}_i = \tilde{A}_i \otimes \tilde{B}_i$ (vgl. 3.5). Diese Relationen werden durch Vereinigungsbildung zu einer Gesamtrelation $\tilde{R} = \bigcup_{1}^{q} \tilde{R}_i$ zusammengefasst. Der Ausgangswert $v = \beta''$ berechnet sich dann aus $\tilde{B}'' = \tilde{A}' \circ_{MM} \left(\bigcup_{1}^{q} \tilde{R}_i \right) = \bigcup_{1}^{q} \left(\tilde{A}' \circ_{MM} \tilde{R}_i \right)$, mit der Zugehörigkeitsfunktion

$$\begin{aligned}
\mu_{B''}(y) &= \sup_{x \in X} \min\left[\mu_{A'}(x), \max_i \left(\min\left(\mu_{A_i}(x), \mu_{B_i}(y) \right) \right) \right] \\
&= \sup_{x \in X} \max_i \min\left(\mu_{A'}(x), \mu_{A_i}(x), \mu_{B_i}(y) \right) \\
&= \max_i \sup_{x \in X} \min\left(\mu_{A_i \cap A'}(x), \mu_{B_i}(y) \right) \\
&= \max_i \min\left(\lambda_i, \mu_{B_i}(y) \right)
\end{aligned}$$

Dabei ist $\lambda_i = \sup_{x \in X} \mu_{A_i \cap A'}(x) = \mathrm{hgt}\left(\tilde{A}_i \cap \tilde{A}' \right)$ der Aktivierungsgrad der i-ten Regel.

3.7 Defuzzifikation

Das Ergebnis des fuzzy-logischen Schließens ist eine Fuzzy-Menge $\tilde{B}(y)$ für die Ausgangsgröße. Um einen scharfen Stellwert y_0 zu erhalten, muß diese Menge noch defuzzifiziert werden. Dafür gibt es verschiedene Verfahren. Ein gebräuchliches Verfahren sind folgende:

Fall 1: $\tilde{B}(y)$ ist eine diskrete Fuzzy-Menge

a) als Stellgröße y_0 wird dasjenige $y \in Y$ gewählt, für das $\mu_B(y)$ maximal ist. Gibt es mehrere y_i, für die $\mu_B(y)$ maximal wird, wählt man das kleinste oder das größte dieser y_i oder wählt den arithmetischen Mittelwert $y_0 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i$ (bzw. das diesem Wert am nächsten liegende y_i)

b) berechne den mit den Zugehörigkeitsgraden gewichteten Mittelwert der Fuzzy-Menge $\tilde{B}(y)$, d.h.

$$y_0 = \frac{\sum_i y_i\ \mu_B(y_i)}{\sum_i \mu_B(y_i)}$$ (bzw. das diesem Wert am nächsten liegende y_i)

Fall 2: $\tilde{B}(y)$ ist eine Fuzzy-Menge über stetigem Grundbereich

a) Die Wahl erfolgt wie im Fall 1 a).

b) Die Stellgröße y_0 ist der Abszissenwert des Schwerpunktes der Fläche unterhalb der Zugehörigkeitsfunktion $\mu_B(y)$. Mittels Integration erhält man also

$$y_0 = \frac{\int_Y y\mu_B(y)\,dy}{\int_Y \mu_B(y)\,dy}$$

(**Schwerpunkt-Methode** oder Centroiden-Methode).
Die Integration erfolgt in der Regel approximativ mit Hilfe eines numerischen Integrationsverfahrens.

c) Um die aufwendige (numerische) Integration zu umgehen, läßt sich eine im allgemeinen ausreichende Näherung für y_0 angeben, indem man einen gewichteten Mittelwert der Zentralwerte (d.h. Schwerpunktsabszissen) $\hat{y}_i$ der einzelnen Resultatmengen $\tilde{B}_i = \tilde{A}_i \circ \tilde{R}$ aller Regeln berechnet, wobei als Gewichte die Aktivierungsgrade der entsprechenden Regeln verwendet werden:

$$y_0 = \frac{\sum_{i=1}^{q} \beta_i \hat{y}_i}{\sum_{i=1}^{q} \beta_i}$$