unscharfe Menge
$\tilde{A} = \{(x, \mu_A(x)) : x \in X\}$ mit $\mu_A : X \to [0,1]$

Stützmenge $\operatorname{supp}(\tilde{A}) = \{x \in X : \mu_A(x) > 0\}$

leere unscharfe Menge
falls $\mu_A(x) = 0 \quad \forall x \in X$, Bezeichnung $\tilde{\varnothing}$

unscharfe Universalmenge
falls $\mu_A(x) = 1 \quad \forall x \in X$, Bezeichnung $\tilde{X}$

Höhe $\operatorname{hgt}(\tilde{A}) = \sup_{x \in X} \mu_A(x)$

normal $\operatorname{hgt}(\tilde{A}) = 1)$ subnormal $\operatorname{hgt}(\tilde{A}) < 1$

Bsp.:
$\frac{1}{3}(x-5)^2 \prec 1$

$|x-5| < \sqrt{3} \Rightarrow 5-\sqrt{3} \le x < 5+\sqrt{3}$

Fuzzy-Potenzmenge $\tilde{P}(X)$

Inklusion $\tilde{A} \subseteq \tilde{B} \Leftrightarrow \mu_A(x) \le \mu_B(x) \quad \forall x \in X$

Gleichheit $\tilde{A} = \tilde{B} \Leftrightarrow \mu_A(x) = \mu_B(x) \quad \forall x \in X$.

α-Schnitt von $\tilde{A}$ $\quad A^{\ge\alpha} = \{x \in X : \mu_A(x) \ge \alpha\}$

strenger α-Schnitt $\quad A^{>\alpha} = \{x \in X : \mu_A(x) > \alpha\}$

Kern $\quad A^{\ge 1} = \{x \in X : \mu_A(x) = 1\}$

Fuzzy-Zahl, wenn
*es genau eine reelle Zahl x_0 mit $\mu_A(x_0) = 1$
$\Leftrightarrow$ sie muss normal sein
* $\mu_A(x)$ stückweise stetig ist

Diskrete Fuzzy-Zahl
*wie FuzzyZahl, nur nicht stetig

Fuzzy-Intervall
*es gibt 2 versch. reelle Zahlen mit
$x_1, x_2 \ \mu_A(x) = 1 \quad \forall x \in [x_1, x_2]$
* $\mu_A(x)$ stückweise stetig ist

Fuzzy-Punkt
*es genau ein x_0 mit $\mu_A(x_0) = 1$ gibt und
* $\mu_A(x)$ stückweise stetig ist

Kompensatorische Operatoren

arithmetisches Mittel $\dfrac{\tilde{A}+\tilde{B}}{2}$

$\mu_{\frac{\tilde{A}+\tilde{B}}{2}}(x) = \frac{1}{2}(\mu_A(x) + \mu_B(x)) \quad \forall x \in X$

geometrisches Mittel $\sqrt{\tilde{A} \cdot \tilde{B}}$

$\mu_{\sqrt{\tilde{A}\cdot\tilde{B}}}(x) = \sqrt{\mu_A(x) \cdot \mu_B(x)} \quad \forall x \in X$

γ-Verknüpfung $\tilde{A} \cdot_\gamma \tilde{B}$

$\mu_{A \cdot_\gamma B}(x) = (\mu_{A \cdot B}(x))^{1-\gamma} \cdot (\mu_{A+B}(x))^{\gamma}$

---

kartesische Produkt
$\mu_{A_1 \otimes A_2 \otimes \cdots \otimes A_n}(x_1, x_2, \ldots, x_n) =$

$\min\{\mu_{A_1}(x_1), \mu_{A_2}(x_2), \ldots, \mu_{A_n}(x_n)\}$

Komplement $\tilde{A}^c = \{(x, \mu_{A^c}(x)) : x \in X, \mu_{A^c}(x) = 1 - \mu_A(x)\}$

Durchschnitt $\tilde{A} \cap \tilde{B}$ t-Norm
$\mu_{A \cap B}(x) = \min\{\mu_A(x), \mu_B(x)\} \quad \forall x \in X$

Vereinigung $\tilde{A} \cup \tilde{B}$ t-Conorm
$\mu_{A \cup B}(x) = \max\{\mu_A(x), \mu_B(x)\} \quad \forall x \in X$

→kommut., assoz., distributiv, adjunktiv,
de Morgan für $\cup \cap$

algebraisches Produkt $\tilde{A} \cdot \tilde{B}$ t-Norm
$\mu_{A \cdot B}(x) = \mu_A(x) \cdot \mu_B(x) \quad \forall x \in X$

algebraische Summe $\tilde{A} + \tilde{B}$ t-Conorm
$\mu_{A+B}(x) = \mu_A(x) + \mu_B(x) - \mu_A(x) \cdot \mu_B(x) \quad \forall x \in X$

→kommut., assoz., de Morgan

beschränktes Produkt $\tilde{A}\ \text{ó}\ \tilde{B}$ t-Norm
$\mu_{A \text{ó} B}(x) = \max\{0, \mu_A(x) + \mu_B(x) - 1\} \quad \forall x \in X$

beschränktes Summe $\tilde{A}\ \text{ò}\ \tilde{B}$ t-Conorm
$\mu_{A \text{ò} B}(x) = \min\{1, \mu_A(x) + \mu_B(x)\} \quad \forall x \in X$

drastisches Produkt $\tilde{A} \mathbin{\overline{\cap}} \tilde{B}$ t-Norm

$$\mu_{A \overline{\cap} B}(x) = \begin{cases} \mu_A(x) & \text{für } \mu_B(x) = 1 \\ \mu_B(x) & \text{für } \mu_A(x) = 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad \forall x \in X$$

drastische Summe $\tilde{A} \mathbin{\underline{\cup}} \tilde{B}$ t-Conorm

$$\mu_{A \underline{\cup} B}(x) = \begin{cases} \mu_A(x) & \text{für } \mu_B(x) = 0 \\ \mu_B(x) & \text{für } \mu_A(x) = 0 \\ 1 & \text{sonst} \end{cases} \quad \forall x \in X$$

t-Norm
$t(0,0) = 0$ und $t(1,a) = t(a,1) = a \quad \forall a \in X$
$t(a,b) = t(b,a) \quad \forall a,b \in X$ kommutativ
$t(a,t(b,c)) = t(t(a,b),c) \quad \forall a,b,c \in X$ assoziativ
$t(a,b) \le t(c,d)$ wenn $a \le c, b \le d$ monoton

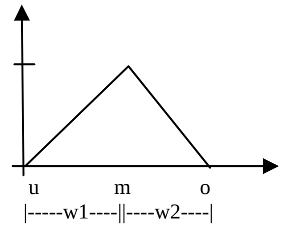
t-Conorm
$s(1,1) = 1$ und $s(0,a) = s(a,0) = a \quad \forall a \in X$
$s(a,b) = s(b,a) \quad \forall a,b \in X$ kommutativ
$s(a,s(b,c)) = s(s(a,b),c) \quad \forall a,b,c \in X$ assoziativ
$s(a,b) \le s(c,d)$ wenn $a \le c, b \le d$ monoton

Ist $t(x,y)$ eine t-Norm, so ist
$s(x,y)=1-t(1-x,1-y)$ eine t-Conorm

Es gilt:
$\tilde{A} \mathbin{\overline{\cap}} \tilde{B} \subseteq \tilde{A}\ \text{ó}\ \tilde{B} \subseteq \tilde{A} \cdot \tilde{B} \subseteq \tilde{A} \cap \tilde{B}$
und $\tilde{A} \cup \tilde{B} \subseteq \tilde{A} + \tilde{B} \subseteq \tilde{A}\ \text{ò}\ \tilde{B} \subseteq \tilde{A} \mathbin{\underline{\cup}} \tilde{B}$

Def.: Referenzfunktion:
g(0)=1, g monoton fallend
Funktionsarten:
$g_1(t) = \max\{0, 1-t\}$
$g_2(t) = \max\{0, 1-t^\lambda\} \qquad \lambda > 0$
$g_3(t) = (1+t^\lambda)^{-1} \qquad \lambda > 0$
$g_4(t) = \exp(-t^\lambda) \qquad \lambda > 0$

Modus Ponens
$(a \to b) \wedge a \to b$



$$\mu_A(x) = \begin{cases} \dfrac{x-u}{w1} & u \le x \le m \\ \dfrac{o-x}{w2} & m \le x \le o \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Erweiterungsprinzip

$$\mu_B(y) = \begin{cases} \sup\limits_{(x_1,x_2,\ldots,x_n) \in f^{-1}(y)} \min\{\mu_1(x_1), \mu_2(x_2), \ldots, \mu_n(x_n)\} & \text{falls } f^{-1}(y) \ne \varnothing \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

geg.: *die Grundmengen $X_1, X_2, \ldots, X_n$ und Y
*die Fuzzy-Mengen $\tilde{A}_i \in P(X_i)$ mit den Zugehörigkeitsfunktionen $\mu_i(x), \quad i = 1, \ldots, n$
*eine Abbildung
$f : X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n \to Y$

$\delta[((a \to b) \wedge a) \to b] = \min\{1, 1 + \delta(b) - \delta((a \to b) \wedge a)\}$
$= \min\{1; 1 + \delta(b) - \min(\delta(a \to b); \delta(a)\}$
$= \min\{1; 1 + \delta(b) - \min\{\delta(\min\{1; 1 + \delta(b) - \delta(a)\}; \delta(a)\}\}$

check mittels Zahlen!!
$\delta(a) = 0,7 \qquad \delta(b) = 0,2$
$\delta(M_P) = \min\{1; 1,2 - 0,5\} = 0,7 \ne 1$
→ ist kein allgemeingültiger Ausdruck
→ Modus Ponens gilt nicht bei Fuzzy!!!!

$$\gamma(x) = \frac{\log \mu_{A \cdot_\gamma B}(x) - \log \mu_A(x) - \log \mu_B(x)}{\log(\mu_A(x) + \mu_B(x) - \mu_A(x) \cdot \mu_B(x)) - \log \mu_A(x) - \log \mu_B(x)}$$

$$\hat{\gamma} = \frac{1}{|X_0|} \sum_{x \in X_0} \gamma(x)$$

Zu Urbildern:

Gibt es zu einem $y \in Y$ mehr als ein Urbild, d.h. besteht die Menge
$f^{-1}(y) = \{x \in X : f(x) = y\}$ aus mehr als einem Element, so ist nahe liegend,
$\mu_B(y) = \sup_{x \in f^{-1}(y)} \mu_A(x)$ zu setzen.

LR-Fuzzy-Zahl

$$\mu_A(x) = \begin{cases} L\left(\frac{a-x}{\alpha}\right) & \text{für } x \le a \text{ und } \alpha > 0 \\ R\left(\frac{x-a}{\beta}\right) & \text{für } x \ge a \text{ und } \beta > 0 \end{cases}$$

L(t) und R(t) sind Ref.funktionen. Abkürzend: $\tilde{A} = (a, \alpha, \beta)_{LR}$

Bei **Fuzzy-Intervall** entsprechend noch weiterer Bereich mit Wert 1, abkürzend: $\tilde{A} = (m_1, m_2, \alpha, \beta)_{LR}$

Triangulär: Beide Seiten haben Ref.Funktion g1: $\tilde{A} = (a, \alpha, \beta)_{tri}$

Nach Erw.prinzip Addition und Subtraktion:

$(a,\alpha,\beta)_{LR} \oplus (b,\gamma,\delta)_{LR} = (a+b, \alpha+\gamma, \beta+\delta)_{LR}$

$\tilde{A}_1 = (a,\alpha,\beta)_{LL}$ $\quad -\tilde{A}_1 = (-a,\beta,\alpha)_{LL}$

$\tilde{A}_1(-)\tilde{A}_1 = \tilde{A}_1 \oplus (-\tilde{A}_1) = (a,\alpha,\beta)_{LL} + (-a,\beta,\alpha)_{LL} = (0, \alpha+\beta, \alpha+\beta)_{LL}$

Fuzzy-Regler: allgemein:

Bestandteile: Wissensbasis, Dialogmodul (Zugriff auf Wissensbasis), Inferenz-Maschine (diese zieht Schlussfolgerungen)….

Linguistische Variable: Tripel LV = (T, X, M)

Beispiel: T={langsam, schnell}, X = [0, 200], $M = \{\tilde{M}_l, \tilde{M}_m, \tilde{M}_s\}$

Modifikatoren:

einstellige Operatoren, sie werden auf Term der LV angewendet.

- **Konzentration** $CON(\tilde{A})$ mit $\mu_{CON}(x) = (\mu_A(x))^2$
- **Dehnung** $DIL(\tilde{A})$ mit $\mu_{DIL}(x) = (\mu_A(x))^{1/2}$
- **Kontrastverstärkung** $INT(\tilde{A})$ mit

$$\mu_{INT}(x) = \begin{cases} 2(\mu_A(x))^2 & \mu_A(x) \le 0.5 \\ 1 - 2(1-\mu_A(x))^2 & \mu_A(x) > 0.5 \end{cases}$$

ANWENDUNG:

- sehr τ' = sehr τ mit $\tilde{M}_{\tau'} = CON(\tilde{M}_\tau)$
- ziemlich τ' = ziemlich τ mit $\tilde{M}_{\tau'} = DIL(\tilde{M}_\tau)$
- nicht sehr τ' = nicht sehr τ mit $\tilde{M}_{\tau'} = (CON(\tilde{M}_\tau))^c$
- sehr sehr τ' = sehr sehr τ mit $\tilde{M}_{\tau'} = CON(CON(\tilde{M}_\tau))$
- ziemlich nicht τ' = ziemlich nicht τ mit $\tilde{M}_{\tau'} = DIL((\tilde{M}_\tau)^c)$

n-stellige Fuzzy-Relation auf $X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n$

$\tilde{R} = \{((x_1, x_2, \cdots, x_n), \mu_R(x_1, x_2, \cdots, x_n)) : (x_1, x_2, \cdots, x_n) \in X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n\}$

n-stellige Fuzzy-Relation zwischen den Fuzzy-Mengen

$\tilde{A}_i . \tilde{R} \subseteq \tilde{A}_1 \otimes \tilde{A}_2 \otimes \cdots \otimes \tilde{A}_n$

Max-Min-Verkettung von $\tilde{R}$ und $\tilde{S}$

$\tilde{R} \circ_{MM} \tilde{S} = \{((x,z), \mu_{R \circ_{MM} S}(x,z)) : (x,z) \in X \times Z\}$ mit

$\mu_{R \circ_{MM} S}(x,z) = \sup_{y \in Y} \min\{\mu_R(x,y), \mu_S(y,z)\}$

Max-Prod-Verkettung von $\tilde{R}$ und $\tilde{S}$

$\tilde{R} \circ_{MP} \tilde{S} = \{((x,z), \mu_{R \circ_{MP} S}(x,z)) : (x,z) \in X \times Z\}$ mit

$\mu_{R \circ_{MP} S}(x,z) = \sup_{y \in Y} \{\mu_R(x,y) \cdot \mu_S(y,z)\}$

Fuzzy-Inferenz-Bild von $\tilde{A}$ bezüglich der Relation $\tilde{R}$:

$\tilde{R} = \{((x,y), \mu_R(x,y)) : (x,y) \in X \times Y\}$ eine zweistellige Fuzzy-Relation und $\tilde{A} = \{(x, \mu_A(x)) : x \in X\}$ eine Fuzzy-Menge (einstellige Relation) auf X. Durch die Verkettung $\tilde{A} \circ \tilde{R}$ wird $\tilde{A}$ in eine Fuzzy-Menge $\tilde{B} = \{(x, \mu_B(y)) : y \in Y\}$ abgebildet.

Einstellige Relation:

$\tilde{A} \circ_{MM} \tilde{R}: \quad \mu_{A \circ_{MM} R}(x,y) = \sup_{x \in X} \min\{\mu_A(x), \mu_R(x,y)\}$.

Erweiterter Modus Ponens:

Vorgehensweise zum schließen unter unscharfen Aussagen:

0. Gegeben sind: **Terme** α und α' einer LV u über Grundbereich X und der Term β einer LV v über einem Grundbereich Y: durch Fuzzy-Mengen $\tilde{A}$, $\tilde{A}'$ und $\tilde{B}$ gegeben.
   Zusätzlich Regel "WENN $u = \alpha$ DANN $v = \beta$ ".
1. Wähle eine **Implikationsrelation** , d.h. eine Verknüpfung $I(\tilde{A}, \tilde{B})$, die die Regel $\alpha \to \beta$ in eine unscharfe Relation $\tilde{R}_I \subseteq P(X \times Y)$ umsetzt:
   $\tilde{R}_I(x,y) = I(\tilde{A}(x), \tilde{B}(y))$
2. Bestimme ausgehend von $\tilde{A}'$ und $\tilde{R}_I$ eine **Relation**
   $\tilde{R}_T \subseteq P(X \times Y)$ aus $\tilde{R}_T(x,y) = \tilde{A}'(x) \bullet \tilde{R}_I(x,y)$
   wobei " $\bullet$ " ein zunächst beliebiger **UND-Operator** bzgl. der x-Werte ist, die Relation $\tilde{R}_T(x,y)$ gilt, wenn sowohl $\tilde{A}'(x)$ als auch $\tilde{R}_I(x,y)$ gelten.
4. Für alle $y \in Y$ folgt $\tilde{B}''(y)$ aus $\tilde{B}''(y) = hgt_{x \in X}(\tilde{R}_T(x,y))$

NACH MAMDANI:

- Implikationsregel: $\tilde{R}_I = \tilde{A} \otimes \tilde{B}$
- UND-Operator: Durchschnitt $\tilde{R}_T(x,y) = \tilde{A}'(x) \cap \tilde{R}_I(x,y)$

=> $\mu_{B''}(y) = \min\left[hgt(\tilde{A} \cap \tilde{A}'), \mu_B(y)\right] \le \mu_B(y)$

$\lambda = hgt(\tilde{A} \cap \tilde{A}')$; wenn $\lambda = 1$ ist $\tilde{B}''(y) = \tilde{B}(y)$, wenn $\lambda < 1$, so ist $\mu_{B''}(y) = \min[\lambda, \mu_B(y)]$, d.h. die Zugehörigkeitsfunktion $\mu_B(y)$ wird in der Höhe λ abgeschnitten. Die Größe λ heißt "Aktivierungsgrad" der Regel

Gödel-Implikation - ist unten (˙):

$$\mu_G(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{für } \mu_A(x) \le \mu_B(y) \\ \mu_B(y) & \text{sonst} \end{cases}$$

UND-Operator ist der Durchschnitt

Relationalgleichungssystem:

$\tilde{C} = \bigcap_{i=1}^{q} (\tilde{A}_i (\cdot) \tilde{B}_i)$, dabei muss c dann eine Lösung sein. (bzgl. Inklusion größte). Wenn nicht, dann zumindest Näherungslösung

Max-Min-Inferenzmethode

- $\tilde{R}_i = \tilde{A}_i \otimes \tilde{B}_i$ zu jeder Relationalgleichung bestimmen
- mit $\tilde{R} = \bigcup_1^q \tilde{R}_i$ zusammenfassen

-> $\tilde{B}'' = \tilde{A}' \circ_{MM} \left(\bigcup_1^q \tilde{R}_i\right) = \bigcup_1^q (\tilde{A}' \circ_{MM} \tilde{R}_i)$

$\mu_{B''}(y) = \max_i \min(\beta_i, \mu_{B_i}(y))$

$\beta_i = \sup_{x \in X} \mu_{A_i \cap A'}(x) = hgt(\tilde{A}_i \cap \tilde{A}')$ ist Aktivierungsgrad der i-ten Regel.

Indirekter Beweis: Gegenannahme!! dann zum Wdspr. führen

$\tilde{A} \subseteq \tilde{B} \Leftrightarrow \mu_A(x) \le \mu_B(x) \quad \forall x \in X$

$\Rightarrow \exists x \in X$ mit $\mu_A(x) > 0 \wedge \mu_B(x) = 0$

das ist Widerspruch -> q.e.d