

# Pendel

Milena Mensching Justus Weyers

2022-12-06

## Versuch 1

### Ziel

Bestimmung der Erdbeschleunigung  $g$ . Dafür soll ein Pendel verwendet werden. Dafür wird der Zusammenhang der Schwingungsdauer (Periodendauer)  $T$  mit der Pendellänge  $L$  und der Erdbeschleunigung  $g$  verwendet. Es gilt:

$$T(L, g) = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g}}$$

In diesem Versuch soll  $L$  bekannt sein und  $g$  untersucht werden.

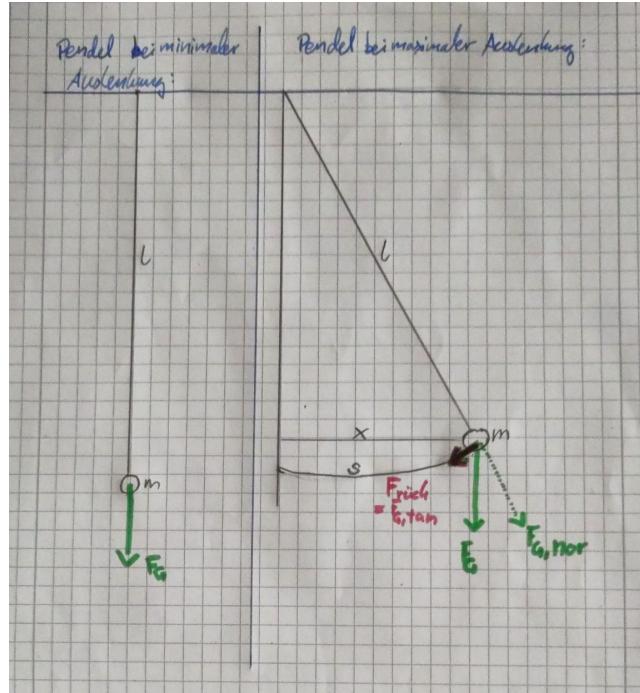


Abbildung 1: Wirkende Kräfte

Der genannte Zusammenhang ergibt sich aus der Eigenschaft eines Fadenpendels nach einer kleinen Auslenkung  $x$  harmonisch zu schwingen. Die der Auslenkung entgegenwirkende Kraft, die Rückstellkraft  $F_{Rück}$ , ist proportional und entgegengesetzt zu  $x$ . Sie ist die resultierende Kraft aus der Gewichtskraft des Massenstücks am Pendel (der Faden wird als masselos angenommen) und der Zentripetalkraft (Zugkraft,

durch den Faden in Richtung des Rotations-/Befestigungspunktes). Mit einer Kleinwinkelannäherung gilt für  $F_{Rück}$  folgender Zusammenhang:

$$F_{Rück} = m * \ddot{x} = -\frac{g}{l} * m * x \quad (1)$$

Werden neben der Luftreibung auch andere, dem System "Fadenpendel" Energie entnehmende Effekte verachlässigt, handelt es sich bei dem Pendel und der nun periodisch stattfindenden Umwandlung von potentieller Energie, am Punkte der Maximalauslenkung, in kinetische Energie, am Punkt der maximalen Geschwindigkeit, um einen harmonischen Oszillator. Die Auslenkung  $x$  aus Formel ist dabei zeitabhängig und kann wie alle harmonischen Schwingungen durch Amplitude  $\hat{x}$  und Winkelgeschwindigkeit  $\omega$  beschrieben werden:

$$x(t, \omega) = \hat{x} \cdot \cos(\omega \cdot t) \quad (2)$$

Die Winkelgeschwindigkeit ist dabei abhängig von Erdbeschleunigung und Pendellänge, vergleiche Formel 1, sie beträgt  $\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}$ . Über diese Winkelgeschwindigkeit kann mit dem Zusammenhang  $T = 2\pi\omega$  die Periodendauer für einen Pendelschlag bestimmt werden als:

$$T(L) = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g}} \quad (3)$$

## Materialien

- Stativ
- Pendel aus Angelschnur und Metallzylinder
- Maßband
- Messschieber
- Klebeband
- Stoppuhr
- Berechnungen finden in Excel und R statt

## Versuchsaufbau

- Aufstellung des Stativs, Befestigung oberhalb des Tisches
- Befestigung des Maßbandes am Stativ mit Hilfe von Klebeband

## Durchführung

Nach dem Versuchsaufbau wird mit der Versuchsdurchführung begonnen. Dazu wird die Pendellänge vermessen, indem am Maßband die Position des Dreieckspunktes (L1) und die Position der Oberkante des Zylindergewichtes abgelesen werden (L2). Die Höhe des Zylindergewichtes wird mit einem Messschieber vermessen (L3).

Im Anschluss wird die Periodendauer für diese Pendellänge bestimmt. Dazu wird das Pendel aus der Ruheposition ausgelenkt und nach ein paar Pendelschlägen mit der Zeitmessung begonnen. Die Zeit wird beim Durchgang durch den Ort der maximalen Geschwindigkeit sowohl gestartet als auch gestoppt, um die Reaktionszeit möglichst kurz zu halten. Es werden insgesamt 5 Messungen durchgeführt um einen Mittelwert bilden zu können.

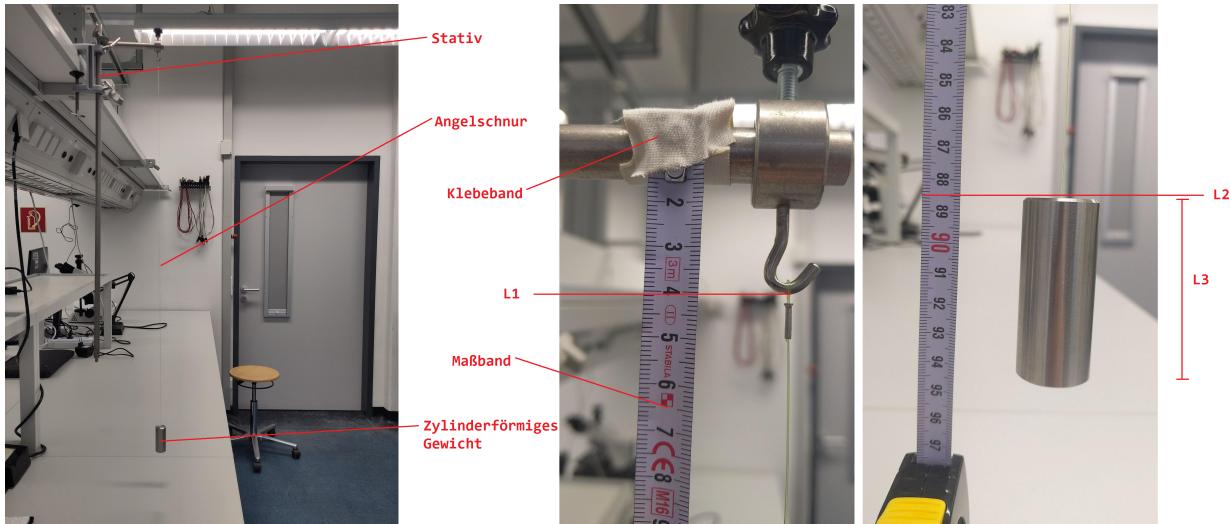


Abbildung 2: Versuchsaufbau

## Fehlerquellen

Beim Auslenken des Pendels gibt es **unregelmäßige Bewegungen (Wackeln)**, die entgegen der Pendelbahn laufen.

Beim Abmessen der Pendellänge ist der **personenbezogene Ablesefehler** zu erwähnen. Diesen versuchten wir weitestgehend zu eliminieren, indem nur eine Person eine vollständige Datenreihe aufnahm.

Außerdem verlängert die **Reaktionszeit** sowohl bei Start als auch bei Stopp der Messung tendenziell die gemessene Periodendauer. Um diesen Fehler möglichst gering zu halten, wurden zehn Periodendurchläufe gemessen und die Periodendauer danach gemittelt. Auch hier nahm nur eine Person die Datenreihe auf, um die Reaktionszeit ähnlich zu halten.

Folgende Annahmen mussten darüber hinaus getroffen werden:

- Bewegung des Pendelkörpers und des Fadens verläuft reibungsfrei
- Masse des Fadens wird vernachlässigt
- Der Pendelkörper wird nur um eine kleine Strecke ausgelenkt
- Die Angelschnur ist inelastisch

## Messungen

Im Laufe von Versuch 1 wurden folgende Messwerte aufgenommen, auf die sich in der folgenden Auswertung bezogen wird:

Tabelle 1: Messwerte aus Versuch 1

Messgröße	Wert
L1: Position Drehpunkt [cm]	4.00
L2: Position Fadenende [cm]	88.50
L3: Höhe Zylinder [cm]	5.87
10-Periodendauer [s]	18.75
10-Periodendauer [s]	18.72
10-Periodendauer [s]	18.85

Messgröße	Wert
10-Periodendauer [s]	18.85
10-Periodendauer [s]	18.72

Die fünf Punkte “10-Periodendauer [s]” sind die fünfmal durchgeführten Messungen, aus denen der Mittelwert berechnet werden soll.

## Auswertung

### Pendellänge L und Unsicherheit $u_L$

Die Pendellänge  $L$  wird bestimmt, indem die Differenz von  $L_1$  und  $L_2$  berechnet wird, siehe Tabelle im Abschnitt *Messungen*. Es wird auch darauf geachtet, die Distanz von der Pendeloberkante bis zum Massenschwerpunkt des Pendels dazuzurechnen. Dafür wird die Massenverteilung in dem Metallzylinder-Gewicht als homogen angenommen. Die zu der Fadenlänge zu addierende Länge entspricht dann der halben Zylinderhöhe  $L_3$ . Der Bestwert der errechneten Pendellänge  $L$  beträgt dann:

$$\begin{aligned} L &= L_2 - L_1 + \frac{L_3}{2} \\ &= 0,885m - 0,04m + \frac{0,0587}{2}m \\ &= 0,87435m. \end{aligned}$$

```
# Bestwert Pendellänge in Metern
0.885-0.04+0.0587/2
```

```
## [1] 0.87435
```

Die Unsicherheit der Pendellänge setzt sich aus den zu  $L_1$ ,  $L_2$  und  $L_3$  gehörigen Messunsicherheiten zusammen:

$$\begin{aligned} u_L &= \sqrt{\left(\frac{\partial L}{\partial L_2} \cdot u_{Massband}\right)^2 + \left(\frac{\partial L}{\partial L_1} \cdot u_{Massband}\right)^2 + \left(\frac{\partial L}{\partial L_3} \cdot u_{Messschieber}\right)^2} \\ &= \sqrt{u_{Massband}^2 * \left(\frac{\partial L}{\partial L_2}^2 + \frac{\partial L}{\partial L_1}^2\right) + \left(\frac{\partial L}{\partial L_3} * u_{Messschieber}\right)^2} \\ &= \sqrt{\left(\frac{10^{-3}m}{2\sqrt{6}}\right)^2 * (1^2 + (-1)^2) + \left(0,5 * \frac{10^{-4}m}{2\sqrt{6}}\right)^2} \\ &\approx 0,29 \cdot 10^{-4}m \end{aligned} \tag{4}$$

Mit:

- Messunsicherheit des Maßbandes:  $u_{Massband} = \frac{10^{-3}m}{2\sqrt{6}}$
- Messunsicherheit des Messschiebers:  $u_{Messschieber} = \frac{10^{-4}m}{2\sqrt{6}}$

```
# Berechnung von u_L in R
sqrt(2*((10**-3)/(2*sqrt(6)))**2)+((10**-4)/(2*sqrt(6)))**2)
```

```
## [1] 0.0002893959
```

Damit beträgt die Pendellänge für Versuch 1  $L = (0,87435 \pm 0.00029)m$ .

### Periodendauer T und Unsicherheit $u_T$

Als Zeit für zehn Perioden  $T_{10T}$  in Sekunden wird der Mittelwert der fünf Messungen aus der Tabelle im Abschnitt *Messungen* berechnet.

```
T_10T <- mean(Werte[4:8])
T_10T
```

```
## [1] 18.778
```

Die mittlere Periodendauer  $T$  in Sekunden wird bestimmt, indem  $T_{10T}$  durch die Anzahl von Perioden  $n = 10$  geteilt wird.

$$T_{10T} = n * T \Leftrightarrow T = \frac{18,778s}{10} = 1.8778s$$

Die Messunsicherheit der digitalen Stoppuhr  $u_{Stoppuhr}$  ist die Unsicherheit für  $T_{10T}$ . Deren kleinste ablesbare Größenordnung waren sind Millisekunden. Damit folgt für  $u_{10T}$ :  $u_{10T} = \frac{a}{2\sqrt{3}} = \frac{0,01s}{2\sqrt{3}} \approx 0,0029s$ .

Die Unsicherheit der Periodendauer  $u_T$  ist für zehn Perioden dann ein Zehntel der Messunsicherheit für zehn Perioden, also  $u_T = 0.00029s$ .

Damit ergibt sich die Periodendauer als:  $T = (1.87780 \pm 0.00029)s$ .

### Berechnung der Erdbeschleunigung g und der Unsicherheit $u_g$

Mit den Bestwerten für die Pendellänge  $L$  und die Periodendauer  $T$  kann der Bestwert der Erdbeschleunigung  $g$  berechnet werden. In Formel 3 eingesetzt ergibt sich mit  $L = 0,8744m$  und  $T = 1,878s$ :

$$\begin{aligned} g &= \frac{4 * \pi^2 * l}{T^2} \\ &\Rightarrow = \frac{4 * \pi^2 * 0,87435m}{(1,8778s)^2} \\ &= 9,789182 \frac{m}{s^2} \end{aligned}$$

```
(4*pi**2*0.87435)/(1.8778**2)
```

```
## [1] 9.789182
```

Messunsicherheit  $u_g$  der Erdbeschleunigung  $g$ :

$$\begin{aligned}
 u_g &= \sqrt{\left(\frac{\partial g}{\partial T} * u_T\right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial l} * u_l\right)^2} \\
 &= \sqrt{\left(\frac{-8 * \pi^2 * l}{T^3} * u_T\right)^2 + \left(\frac{4 * \pi^2}{T^2} * u_l\right)^2} \\
 \Rightarrow &= \sqrt{\left(\frac{-8\pi^2 * (0,87435m)}{(1,8778s)^3} * (0,00029s)\right)^2 + \left(\frac{4\pi^2}{(1,8778s)^2} * (0,00029m)\right)^2} \\
 u_g &\approx \pm 0,0044 \frac{m}{s^2}
 \end{aligned}$$

```
# Berechnung von u_g in R
sqrt(( (-8*pi**2*0.87435)/(1.8778)**3 *0.00029)**2+( (4*pi**2)/(1.8778)**2 *0.00029 )**2)

## [1] 0.004436673
```

Damit haben wir in Versuch 1 eine Erdbeschleunigung von  $g = (9,7891 \pm 0,0044) \frac{m}{s^2}$  gemessen.

## Interpretation

Der Literaturwert von  $g = 9,81 \frac{m}{s^2}$  liegt damit nicht im Fehlerintervall. Eventuell kann in einem Versuch, bei dem die Pendellänge variiert wird ein besseres Ergebnis erzielt werden.

*Vielelleicht hier noch 'nen Ast abbrechen.*

## Versuch 2

Der zweite Versuch läuft analog zum ersten Versuch. Allerdings werden statt nur einer Messreihe 5 verschiedene - jeweils mit einer anderen Fadenlänge - gemessen. Um die Pendellängen zu variieren wurde der Faden für kürzere Fadenlängen mit Klebeband am Zylinder stückchenweise festgeklebt. Für längere Pendellängen wurden weitere Stücke Angelschnur an das Pendel geknotet.

### Fehlerquellen

Die Fehlerquellen sind ebenfalls die selben wie beim ersten Versuch. Allerdings ist hierbei zu bemerken, dass die Reaktionszeit bei kürzeren Fadenlängen und daraus resultierenden kürzeren Periodendauern verhältnismäßig zunimmt. Auch von der Bahn abweichende Bewegungen nehmen bei kürzeren Pendellängen zu. Auch ist nicht untersucht, wie sich Klebeband bzw. Knoten im Faden auf das Pendelverhalten auswirken.

### Messungen

In die zu diesem Versuch gehörigen Werte wurden auch die Messwerte aus Versuch 1 integriert. Es wurde wieder so verfahren, dass pro Pendellänge fünf Messungen der Zeit für 10 Perioden gemessen und der Mittelwert berechnet wurde.

Die Messwerte sind die folgenden:

	Versuch 1	Versuch 2	Versuch 3	Versuch 4	Versuch 5	Versuch 6	Versuch 7
L1:Oberes_Ende_in_cm	4.0000	4.0000	4.0000	4.0000	4.0000	4.0000	4.0000
L2:UnteresEnde_in_cm	88.5000	74.3000	58.6000	46.0000	30.3000	114.9000	148.6000
L3:Zylinderhoehe_in_cm	5.8700	5.8700	5.8700	5.8700	5.8700	5.8700	5.8700
Pendellaenge_L	87.4435	73.2435	57.5435	44.9435	29.2435	113.8435	147.5435
Zeit_fuer_10-Perioden_1	18.7500	17.2200	15.4700	13.4400	10.8500	21.5000	24.3700
Zeit_fuer_10-Perioden_2	18.7200	17.2800	15.4400	13.5000	10.9700	21.4400	24.4400
Zeit_fuer_10-Perioden_3	18.8500	17.1800	15.5000	13.5000	10.9400	21.4400	24.4400
Zeit_fuer_10-Perioden_4	18.8500	17.2800	15.5600	13.5300	11.0300	21.5000	24.4700
Zeit_fuer_10-Perioden_5	18.7200	17.2500	15.4400	13.5300	10.9100	21.4700	24.7300
10-Perioden_Mittelwert	18.7800	17.2400	15.4800	13.5000	10.9400	21.4700	24.4900

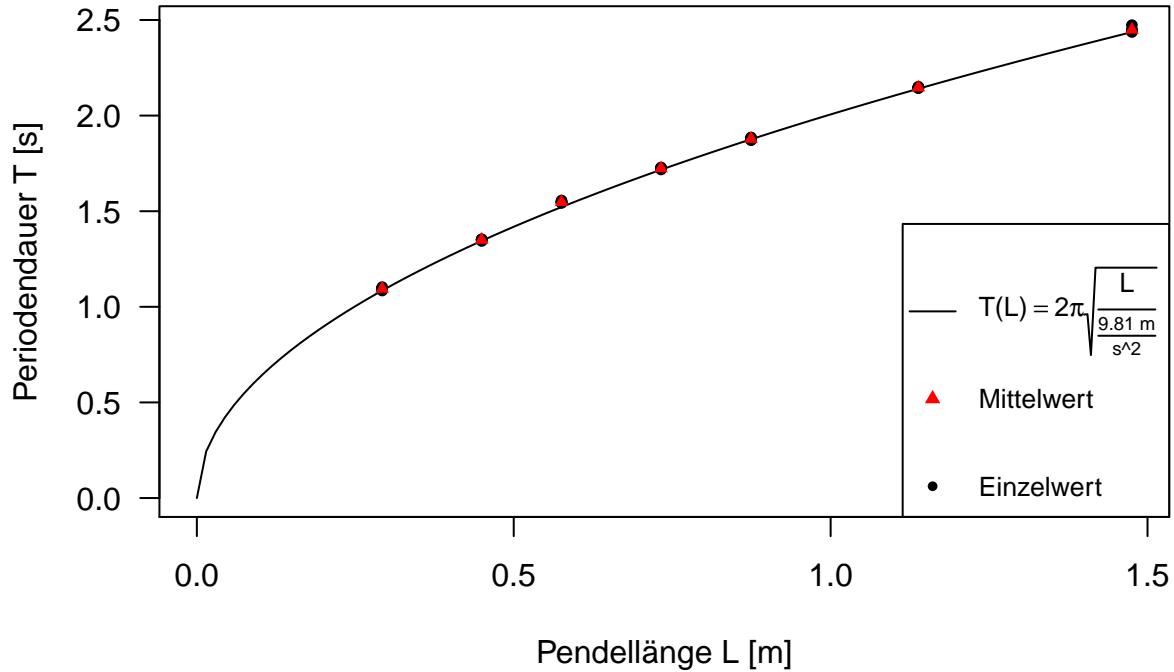
### Auswertung

#### Bereits aus Versuch 1 bekannte Größen

Damit sind die Werte für die Pendellänge sowie deren konstante Unsicherheit  $u_L = 0,00029m$ , siehe Formel 4, bekannt. Ebenso sind die Werte für die Periodendauer  $T$  bekannt, diese entsprechen einem Zehntel der Zeit für die gemessenen zehn Perioden. Die Unsicherheit für  $T$  ist auch aus Versuch 1 übernehmbar, diese beträgt  $u_T = 0,00029s$ .

## Graphische Darstellung der Messwerte

Zur Veranschaulichung der Messwerte wird die Periodendauer  $T$  gegen die Pendellänge aufgetragen:



In diesem Diagramm sind die Fehlerbalken nicht sichtbar, was an den kleinen Fehlern liegt. Als Ersatz wurde zur Validierung der Messwerte die Funktion  $T(L) = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$  mit dem Literaturwert der Erdbeschleunigung für Berlin von  $g \approx 9,81 \frac{m}{s^2}$  eingezeichnet. Daran wird ersichtlich, dass die Messwerte alles in allem ganz gut sind.

## Linearisierung

Mittels einer Linearisierung erfolgt die Berechnung von  $g$  für diesen Versuch. Quadrierung von Formel 3 ergibt:

$$T^2 = 4\pi^2 \frac{L}{g}$$

Daraus folgt eine Geradengleichung der Form  $T^2(L) = k(L) = a * L + y$  mit der Steigung  $a = \frac{4\pi^2}{g}$  und dem y-Achsenabschnitt  $y$ . Nach der Quadrierung der Messwerte für  $T$  kann eine lineare Regression durchgeführt werden. Eine Prüfung der Korrelation liefert einen Korrelationskoeffizienten von 0,9998.

```
# Berechnung der linearisierten Funktionswerte
xlin=WerteT$Pendellaenge_L/100 # in m
ylin=(WerteT$`10-Perioden_Mittelwert`/10)**2 # in s
# Korrelationskoeffizient
cor(x=xlin, y=ylin, method='pearson')
```

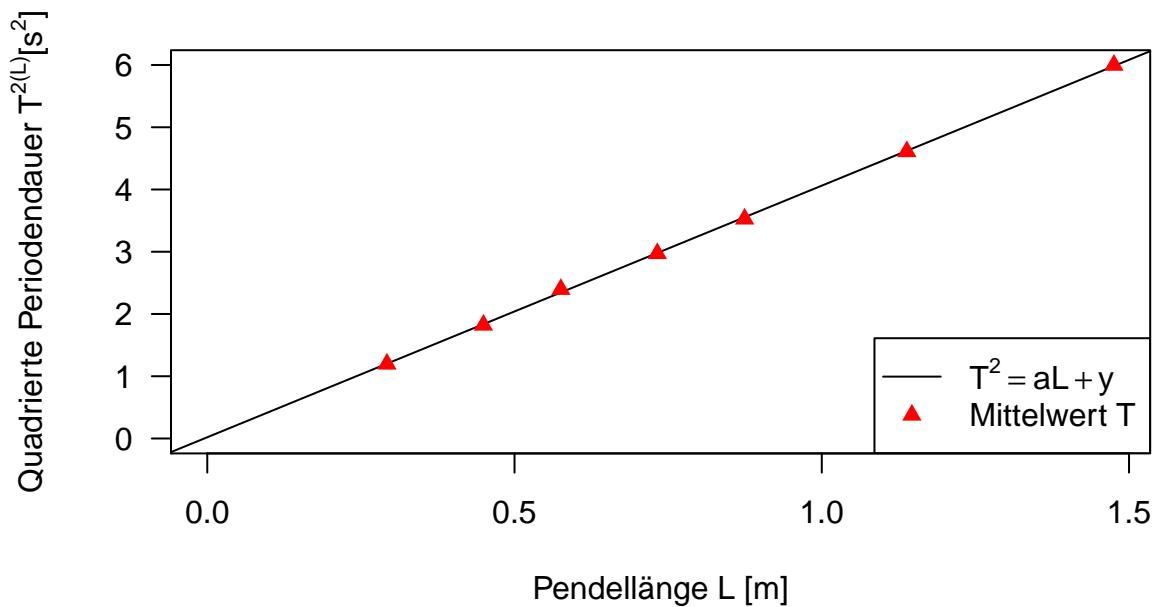
```
## [1] 0.9998811
```

Die lineare Regression erfolgt in R mittels QR-Faktorisierung in der lm()-Funktion.

```
lm(ylin~xlin)
```

```
##  
## Call:  
## lm(formula = ylin ~ xlin)  
##  
## Coefficients:  
## (Intercept)      xlin  
##     0.01952     4.04209
```

Im folgenden Schaubild ist die Funktionsgerade der linearen Regression zusehen. Dabei ist die Steigung  $a = \frac{4\pi^2}{g} = 4,04209$  und der y-Achsenabschnitt  $y = 0,01952$ . Ebenfalls eingezeichnet sind die quadrierten Mittelwerte Messwerten für die Periodendauer  $T$  bei den untersuchten Pendellängen.



### Berechnung der Erdbeschleunigung

Aus der Steigung  $a$  kann die Erdbeschleunigung  $g$  bestimmt werden:

$$\begin{aligned} a &= \frac{4\pi^2}{g} \\ \Rightarrow g &= \frac{4\pi^2}{4,04209} \\ &= 9,766832901879 \left[ \frac{m}{s^2} \right] \end{aligned}$$

## Weiter mit Fehlerrechnung g

wie?

### Todos:

- Der/Die Student/in konnte seine/ihre Messergebnisse der zwei Messmethoden vergleichen (5 Punkte).
- Der/Die Student/in konnte beurteilen welche der beiden Methoden richtiger oder präziser ist (5 Punkte).
- Der/Die Student/in konnte Ursachen für systematische Abweichungen bei den unterschiedlichen Messmethoden finden (10 Punkte).
- Rückschlüsse sind klar dargestellt und beziehen sich auf die eigenen Messdaten und deren Analyse (5 Punkte).