

Widerstandsmessungen

Milena Mensching, Justus Weyers

2023-01-11

Experiment

Thema

Bestimmung von Widerständen auf direkte und indirekte Weise. Dazu werden die Beträge der zwei zu untersuchenden Widerstände durch Ablesen der Farbcodes, durch Widerstandsmessungen mit einem Multimeter und auf indirekte Weise in einem Schaltkreis ermittelt.

Material

- Zwei Multimeter
- Breadboard
- Jumperwire, Bananenstecker und Krokodilklemmen
- Netzgerät
- Zwei Widerstände unbekannter Größe

Auslesen der Widerstandsfarbcodes

Als erste Methode zur Bestimmung des Widerstandes werden die Bauteilspezifikationen auf dem Widerstand selbst abgelesen. Im folgenden wird von "Widerstand 1" und "Widerstand 2" gesprochen.



Abbildung 1: Foto von Widerstand 1

Die Farbreihenfolge auf dem Widerstand ist *Braun, Schwarz, Schwarz, Gelb, Braun*. Dementsprechend kodiert der, im Folgenden als R_1 bezeichnete, Widerstand für $R_1 = (100 \cdot 10^4 \pm 1\%) \Omega \Leftrightarrow R_1 = (1,00 \pm 0,01) M\Omega$.



Abbildung 2: Foto von Widerstand 2

Widerstand 2 ist als Widerstand von 1Ω gekennzeichnet. Aus Datenblättern im Internet geht hervor, dass auch dieser eine Toleranz von $\pm 1\%$ aufweist (<https://de.rs-online.com/web/p/durchsteckwiderstände/1249328>). Dies bedeutet einen Widerstand von $R_2 = (1,00 \pm 0,01)\Omega$ für dieses Bauteil.

Direkte Messung

Messungen der Widerstände mit dem Multimeter liefert Werte von:

- $R_1 = 1,005M\Omega$
- $R_2 = 1,0\Omega$

Messunsicherheiten der direkten Messung

Die Messunsicherheit der direkten Messung ergibt sich aus der Messunsicherheit der digitalen Skala:

$$u_{Skala} = \frac{a}{2\sqrt{3}}$$

$$1.Widerstand : u_1 = \frac{0,001M\Omega}{2\sqrt{3}} \approx \pm 0,00029M\Omega$$

$$2.Widerstand : u_2 = \frac{0,1\Omega}{2\sqrt{3}} \approx \pm 0,029\Omega$$

```
0.001/(2*sqrt(3)) #Unsicherheit 1
```

```
## [1] 0.0002886751
```

```
0.1/(2*sqrt(3)) #Unsicherheit 2
```

```
## [1] 0.02886751
```

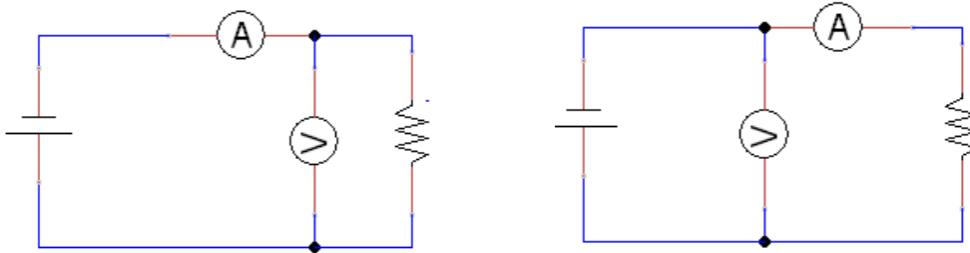


Abbildung 3: Schaltkreise zur indirekten Widerstandsmessung. Links: Variante a). Rechts: Variante b). Quelle: Universität Potsdam, Institut für Physik und Astronomie, Grundpraktikum, Skript zum Versuch E1.

Indirekte Widerstandsmessung

Die indirekte Bestimmung der Widerstände in einem Stromkreis erfolgt in zwei Varianten. Diese unterscheiden sich in der Art des Schaltungsaufbaus. In Abbildung 3 ist der Unterschied zwischen den Varianten a) und b) erkennbar. In Variante a) wird das Voltmeter parallel zum Widerstand geschaltet, in Variante b) parallel zur Spannungsquelle.

Bei der Berechnung der Widerstände aus den gemessenen Werten werden zwei Annahmen/Vereinfachungen getroffen:

- Durch das Voltmeter findet Stromfluss statt. Der tatsächliche Innenwiderstand beträgt ca. $10M\Omega$, wie Datenblättern des Messgerätes aus dem Internet entnommen und auch experimentell überprüft wurde.
- Das Amperemeter hat keinen Innenwiderstand. In den Datenblättern gab es keine Angaben zum Innenwiderstand des Amperemeters und auch experimentell konnte kein Widerstand bestimmt werden.

Verwendetes Datenblatt: <https://asset.conrad.com/media10/add/160267/c1/-/en/000124501DS01/datasheet-124501-voltcraft-vc250-handheld-multimeter-digital-cat-iii-600-v-display-counts-2000.pdf>.

Aufbau (a)

Mithilfe der Kabel und des Breadboards wurde der Skizze a) entsprechende Stromkreis aufgebaut:

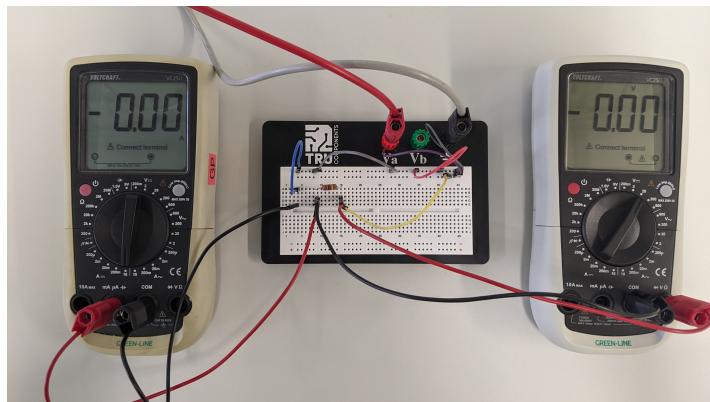


Abbildung 4: Aufbau auf Breadboard für Variante a) der indirekten Widerstandsmessung. Im Bild ist zudem bereits der Widerstand 1 eingebaut.

Folgende Werte wurden gemessen:

- Widerstand 1 (Messung bei 5,0V)
 - Spannung: 5,04V
 - $5,4 \mu\text{A}$
- Widerstand 2 (Messung bei 0,6V)
 - Spannung: 0,15 V
 - 150,3 mA

Gerätespezifische Messunsicherheiten

Die Messunsicherheiten von Spannung und Strom ergeben sich aus der Messunsicherheit der digitalen Skala.

$$u_{Skala} = \frac{a}{2\sqrt{3}}$$

1. Widerstand :

$$\text{Spannung : } u_{U1a} = \frac{0,01V}{2\sqrt{3}} \approx 0,0029V$$

$$\text{Strom : } u_{I1a} = \frac{0,1\mu\text{A}}{2\sqrt{3}} \approx 0,029\mu\text{A}$$

2. Widerstand :

$$\text{Spannung : } u_{U2a} = \frac{0,01V}{2\sqrt{3}} \approx 0,0029V$$

$$\text{Strom : } u_{I2a} = \frac{0,1mA}{2\sqrt{3}} \approx 0,029mA$$

```
0.01/(2*sqrt(3)) #Unsicherheit Spannung 1,2
```

```
## [1] 0.002886751
```

```
0.1/(2*sqrt(3)) #Unsicherheit Strom 1,2
```

```
## [1] 0.02886751
```

Folglich liegen die gemessenen Größen bei:

Widerstand 1:

- $U1a = (5,0400 \pm 0,0029)V$
- $I1a = (5,400 \pm 0,029)\mu\text{A}$

Widerstand 2:

- $U2a = (0,1500 \pm 0,0029)V$
- $I2a = (150,300 \pm 0,029)mA$

Berechnung der Widerstände

Es gilt das Ohmsche Gesetz:

$$U = I \cdot R \Leftrightarrow R = \frac{U}{I}$$

R = Widerstand

U = Spannung

I = Strom

Für die Widerstände ergeben sich somit für Aufbau (a) Bestwerte von:

$$\begin{aligned} 1. \text{Widerstand} : R &= \frac{U}{I} = \frac{5,0400V}{5,4\mu A} \approx 933333,3\Omega \\ 2. \text{Widerstand} : R &= \frac{U}{I} = \frac{0,1500V}{150,3mA} \approx 0,998004\Omega \end{aligned}$$

```
#Widerstand 1
(5.04/(5.4*10**-6))
```

```
## [1] 933333.3
```

```
#Widerstand 2
(0.15/(150.3*10**-3))
```

```
## [1] 0.998004
```

Messunsicherheiten

Die Messunsicherheit für die indirekt bestimmten Widerstände ergibt sich mit folgender Formel:

$$\begin{aligned} u_R &= \sqrt{\left(\frac{\partial R}{\partial U} \cdot u_U\right)^2 + \left(\frac{\partial R}{\partial I} \cdot u_I\right)^2} \\ u_R &= \sqrt{\left(\frac{1}{I} \cdot u_U\right)^2 + \left(\frac{-U}{I^2} \cdot u_I\right)^2} \\ 1. \text{Widerstand} : u_{R1a} &= \sqrt{\left(\frac{1}{5,4\mu A} \cdot 0,0029V\right)^2 + \left(\frac{-5,04V}{5,4\mu A^2} \cdot 0,029\mu A\right)^2} \approx \pm 5000\Omega \\ 2. \text{Widerstand} : u_{R2a} &= \sqrt{\left(\frac{1}{150,300mA} \cdot 0,0029V\right)^2 + \left(\frac{0,1500V}{150,300mA^2} \cdot 0,029mA\right)^2} \approx \pm 0,019\Omega \end{aligned}$$

```
# Unsicherheit Widerstand 1
sqrt(((1/(5.4*10**-6))*0.0029)**2+(5.04/((5.4*10**-6)**2)*0.029*10**-6)**2)
```

```
## [1] 5041.033
```

```
# Unsicherheit Widerstand 2
sqrt(((1/(150.3*10**-3))*0.0029)**2+(0.15/((150.3*10**-3)**2)*0.029*10**-3)**2)
```

```
## [1] 0.0192957
```

Die Widerstände für den Aufbau (a) ergeben sich somit insgesamt zu:

- $R1a = (933300 \pm 5000)\Omega = (0,9333 \pm 0,0050)M\Omega$
- $R2a = (0,998 \pm 0,019)\Omega$

Die Widerstände liegen in den richtigen Größenordnungen. Die bestimmten Widerstände lassen sich im Rahmen ihrer Unsicherheiten nicht mit den Sollwerten von $10M\Omega$ und 1Ω , wie sie im Vorfeld bestimmt wurden, vereinbaren. Grund für die falschen Messergebnisse können z.B. die zum Voltmeter und dem Amperemeter getroffenen Annahmen sein.

Aufbau (b)

Anschließend wurde der Schaltkreis, Versuchsvariante b) entsprechend, umgebaut:

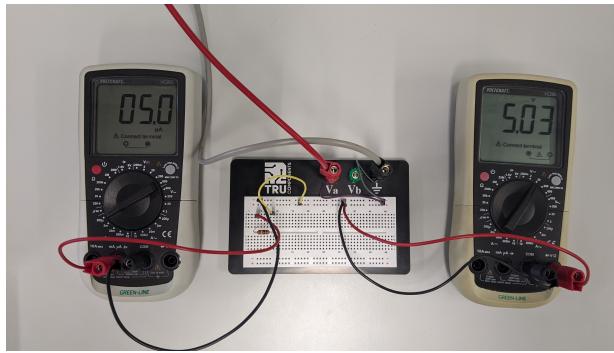


Abbildung 5: Aufbau auf Breadboard für Variante b) der indirekten Widerstandsmessung.

Folgende Werte wurden gemessen:

- Widerstand 1 (Messung bei 5,0V)
 - Spannung: 5,03V
 - Strom: $5,0 \mu\text{A}$
- Widerstand 2 (Messung bei 0,8V)
 - Spannung: 0,4 V
 - Strom: 101,8 mA

Gerätespezifische Messunsicherheiten

Die Messunsicherheiten von Spannung und Strom sind identisch zu denen im Aufbau (a). Folglich liegen die gemessenen Größen bei:

- $U1b = (5,0300 \pm 0,0029)V$
- $I1b = (5,000 \pm 0,029)\mu\text{A}$
- $U2b = (0,4000 \pm 0,0029)V$
- $I2b = (101,800 \pm 0,029)m\text{A}$

Berechnung der Widerstände

Es gilt das Ohmsche Gesetz:

$$U = I \cdot R \Leftrightarrow R = \frac{U}{I}$$

R = Widerstand

U = Spannung

I = Strom

Für die Widerstände ergeben sich somit für Aufbau (b) Bestwerte von:

$$\begin{aligned}1.\text{Widerstand} : R &= \frac{U}{I} = \frac{5,0300V}{5,000\mu A} \approx 1006000\Omega \\2.\text{Widerstand} : R &= \frac{U}{I} = \frac{0,4000V}{101,800mA} \approx 3,929273\Omega\end{aligned}$$

```
(5.03/(5*10**-6)) #Widerstand 1
```

```
## [1] 1006000
```

```
(0.4/(101.8*10**-3)) #Widerstand 2
```

```
## [1] 3.929273
```

Messunsicherheiten

Die Messunsicherheit für die indirekt bestimmten Widerstände ergibt sich mit folgender Formel:

$$\begin{aligned}u_R &= \sqrt{\left(\frac{\partial R}{\partial U} \cdot u_U\right)^2 + \left(\frac{\partial R}{\partial I} \cdot u_I\right)^2} \\u_R &= \sqrt{\left(\frac{1}{I} \cdot u_U\right)^2 + \left(\frac{-U}{I^2} \cdot u_I\right)^2} \\1.\text{Widerstand} : u_{R1b} &= \sqrt{\left(\frac{1}{5,000\mu A} \cdot 0,0029V\right)^2 + \left(\frac{-5,0300V}{5,000\mu A^2} \cdot 0,029\mu A\right)^2} \approx \pm 5900\Omega \\2.\text{Widerstand} : u_{R2b} &= \sqrt{\left(\frac{1}{101,800mA} \cdot 0,0029V\right)^2 + \left(\frac{0,4000V}{101,800mA^2} \cdot 0,029mA\right)^2} \approx \pm 0,029\Omega\end{aligned}$$

```
# Unsicherheit Widerstand 1
```

```
sqrt(((1/(5*10**-6))*0.0029)**2+(5.03/((5*10**-6)**2)*0.029*10**-6)**2)
```

```
## [1] 5863.556
```

```
# Unsicherheit Widerstand 2
```

```
sqrt(((1/(101.8*10**-3))*0.0029)**2+(0.4/((101.8*10**-3)**2)*0.029*10**-3)**2)
```

```
## [1] 0.02850921
```

Die Widerstände für den Aufbau (b) ergeben sich somit insgesamt zu:

- $R1b = (1006000 \pm 5900)\Omega$
- $R2b = (3,929 \pm 0,029)\Omega$

Die Widerstände liegen in den richtigen Größenordnungen. Die bestimmten Widerstände lassen sich im Rahmen ihrer Unsicherheiten nicht mit den Sollwerten von $10M\Omega$ und 1Ω , wie sie im Vorfeld bestimmt wurden, vereinbaren. Besonders für Widerstand 2 ist im Experiment ein etwa vier mal höherer Wert bestimmt worden. Grund für die falschen Messergebnisse können z.B. die zum Voltmeter und dem Amperemeter getroffenen Annahmen sein.

Modellbildungsprozess

Bei unserem Versuch handelt es sich um ein Testexperiment, bei dem wir auf der Grundlage des Ohmschen Gesetzes Widerstände indirekt messen. Es sollen nun zwei Modelle erstellt werden, anhand derer die Widerstände der verwendeten elektrischen Widerstandsbauteile in den jeweiligen Schaltungen vorhergesagt werden können. Die Modelle sollen den Schaltungen nachempfundene Widerstandsschaltungen sein, in denen Amperemeter und Voltmeter durch Widerstände ersetzt werden. Das bedeutet allerdings auch, dass unser Messsystem und das physikalisch System nicht voneinander zu trennen sind.

Annahmen

Sowohl für Schaltung a), als auch für Schaltung b) wird grundsätzlich (vereinfachend) angenommen, dass das Voltmeter dabei einen Widerstand von $10M\Omega$ und das Amperemeter einen Innenwiderstand von 0Ω hat (vergleiche Ausführungen dazu bei der indirekten Widerstandsmessung). Eine weitere Annahme ist, dass der Schaltungsdräht keinen Widerstand hat.

Modell für Schaltung a)

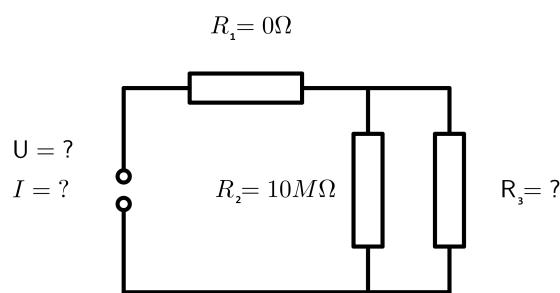


Abbildung 6: Modell zur Schaltung a)

Input:

Systemparameter:

- Spannung U an der Spannungsquelle
- Stromstärke I im gesamten Stromkreis

Randbedingungen:

- Widerstand Amperemeter $R_1: 0\Omega$
- Widerstand Voltmeter $R_2: 10M\Omega$

Output:

- Widerstand des unbekannten Widerstandes R_3

Modelldomäne Innerhalb des Modells wird der Widerstand R_3 mittels folgender Formel berechnet:

$$\left(\frac{1}{(R_{ges} - R_1)} - \frac{1}{R_2} \right) \ast \ast - 1$$

Diese röhrt von den bekannten Gesetzen zu dem Widerstand in Reihen- und Parallelschaltung, sowie dem Ohmschen Gesetz her.

Implementierung als R-Funktion mit zwei Argumenten:

```
# ---- Schaltung a)
# INPUT: Spannung, Stromstärke
# OUTPUT: Benötigter Widerstand
schaltungA <- function(U0, I0){
  # Randbedingungen
  R1 = 0 # Widerstand Amperemeter
  R2 = 10e6 # Widerstand Voltmeter
  # Berechnung des Gesamtwiderstandes
  Rges = U0/I0
  # Berechnung des benötigten R
  R3 = (1/(Rges-R1)-1/R2)**-1
  print("Widerstände in Schaltung a) in Ohm:")
  print(paste("R1: ", R1))
  print(paste("R2: ", R2))
  print(paste("R3: ", R3))
  print(paste("R_ges: ", Rges))
}
```

Wird das Modell mit den gemessenen Werten ausgeführt (das gemessene U und I entsprechen bei Schaltung a) den Einstellungen an der Spannungsquelle), erhält man mit diesem Modell folgenden Output:

```
# Testen mit gemessenen Werten für Widerstand 1
schaltungA(U0=5, I0=5.4e-06)
```

```
## [1] "Widerstände in Schaltung a) in Ohm:"
## [1] "R1:  0"
## [1] "R2:  1e+07"
## [1] "R3:  1020408.16326531"
## [1] "R_ges:  925925.925925926"
```

Der auf diese Weise ermittelte Wert für Widerstand 1 ($R_3 \approx 1020000\Omega$) ist etwas besser, als der Wert aus dem Experiment ($R_{1a} \equiv R_3 = (933300 \pm 5000)\Omega$), bei dessen Bestimmung die Wirkung von Voltmeter und Amperemeter vernachlässigt wurde.

Für Widerstand 2 sieht das etwas anders aus:

```
# Testen mit gemessenen Werten für Widerstand 2
schaltungA(U0=0.15, I0=0.1503)
```

```
## [1] "Widerstände in Schaltung a) in Ohm:"
## [1] "R1: 0"
## [1] "R2: 1e+07"
## [1] "R3: 0.998004091617175"
## [1] "R_ges: 0.998003992015968"
```

Widerstand 2 wird hier, wie in der indirekten Messung als $R_{1b} \equiv R_3 \approx 0,9980\Omega$ ermittelt. Dass es hierbei eine größere Übereinstimmung gegeben hat, als für Widerstand 1 lässt sich so erklären, dass das parallel geschaltete Voltmeter neben dem $10M\Omega$ -Widerstand für einen zum Widerstand parallel verlaufenden Stromfluss eine vergleichsweise größere Rolle gespielt hat, als neben dem 1Ω -Widerstand. Der Fehler ist entsprechend im letzteren Fall kleiner.

Modell für Schaltung b)

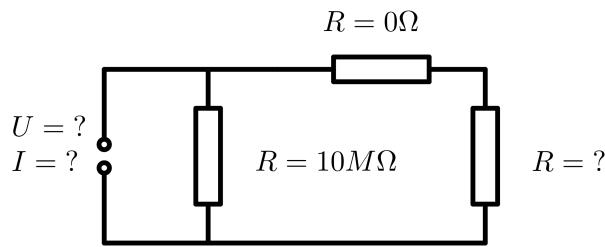


Abbildung 7: Modell zur Schaltung b)

Die Modellparameter, Rahmenbedingungen, Grenzen, Annahmen, Vereinfachungen, Inputs und Outputs sind die gleichen wie in für Schaltung a).

Der Unterschied zu dem Modell für Schaltung a) besteht in einer anderen Formel zur Berechnung des Widerstandes R_3 :

$$R_3 = \left(\frac{1}{R_{ges}} - \frac{1}{R_2} \right)^{-1}$$

Implementierung als R-Funktion:

```
# ---- Schaltung b)
# INPUT: Spannung, Stromstärke
# OUTPUT: Benötigter Widerstand
schaltungB <- function(U0, I13){
  # Randbedingungen
  R1 = 0 # Widerstand Ampermeter
  R2 = 10e6 # Widerstand Voltmeter
  # Berechnung des Gesamtwiderstandes
  IO = I13 + U0/R2
  Rges = U0/IO
  # Berechnung des benötigten R
```

```

R3 = (1/Rges-1/R2)**-1
print("Widerstände in Schaltung b) in Ohm:")
print(paste("R1: ", R1))
print(paste("R2: ", R2))
print(paste("R3: ", R3))
print(paste("R_ges: ", Rges))
}

```

Ein Problem stellt aber dar, dass beim Durchführen des Experiments vergessen worden ist, die Stromstärke an der Spannungsquelle abzulesen. Es werden stattdessen für diese Modelltest die mit den Multimetern bestimmten Werte eingesetzt. Dabei geht allerdings der Strom, der durch das Voltmeter geflossen ist in der Berechnung unter. Das Modell wird also falsch benutzt.

Die Ergebnisse der folgenden Modelltests sind also nur im Kontext mit dieser Problematik genießbar

Für Widerstand 1 gibt das Modell folgenden (falschen) Output:

```

# Testen mit gemessenen Werten
schaltungB(U0=5.03, I13=5e-06)

```

```

## [1] "Widerstände in Schaltung b) in Ohm:"
## [1] "R1: 0"
## [1] "R2: 1e+07"
## [1] "R3: 1006000"
## [1] "R_ges: 914046.883518081"

```

Dieser Wert entspricht dann exakt dem indirekt bestimmten Widerstandswert. Auch für Widerstand 2 gibt das Modell (falscherweise) den Messwert aus:

```

schaltungB(U0=0.4, I13=0.1018)

```

```

## [1] "Widerstände in Schaltung b) in Ohm:"
## [1] "R1: 0"
## [1] "R2: 1e+07"
## [1] "R3: 3.92927308447937"
## [1] "R_ges: 3.92927154056128"

```

Fazit

Zusammenfassend lässt sich also sagen, dass mit den verwendeten Modellen für die Schaltungen a) und b) gute Werte für den zu untersuchenden Widerstand R_3 vorhergesagt werden können. Für Schaltung a) konnten mit dem entsprechenden Modell sogar ein genauerer Wert vorhergesagt werden, als dies bei der indirekten Widerstandsmessung möglich war.