

Pendel

Milena Mensching Justus Weyers

2022-12-08

Versuch 1

Ziel

Bestimmung der Erdbeschleunigung g . Dafür soll ein Pendel verwendet werden. Es wird der Zusammenhang der Schwingungsdauer (Periodendauer) T mit der Pendellänge L und der Erdbeschleunigung g verwendet. Es gilt:

$$T(L, g) = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g}}$$

In diesem Versuch soll L bekannt sein und g untersucht werden.

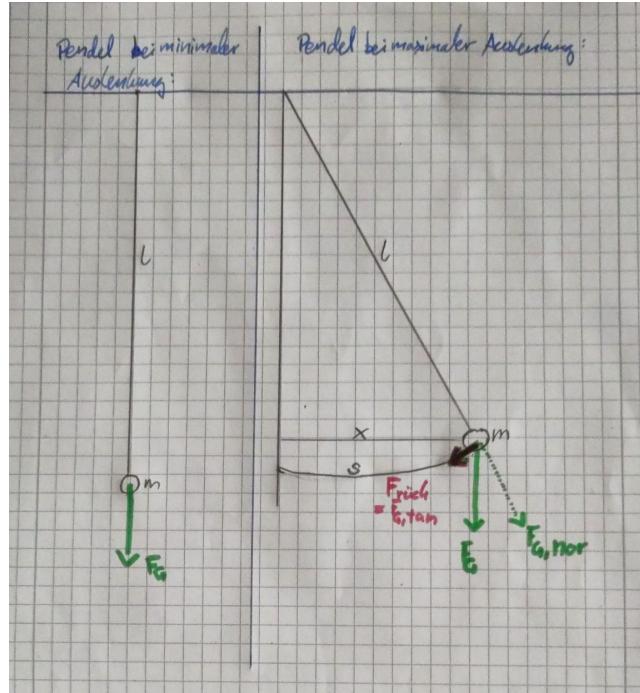


Abbildung 1: Wirkende Kräfte

Der genannte Zusammenhang ergibt sich aus der Eigenschaft eines Fadenpendels nach einer kleinen Auslenkung x harmonisch zu schwingen. Die der Auslenkung entgegenwirkende Kraft, die Rückstellkraft $F_{Rück}$, ist proportional und entgegengesetzt zu x . Sie ist die resultierende Kraft aus der Gewichtskraft des Massenstücks am Pendel (der Faden wird als masselos angenommen) und der Zentripetalkraft (Zugkraft,

durch den Faden in Richtung des Rotations-/Befestigungspunktes). Mit einer Kleinwinkelannäherung gilt für $F_{Rück}$ folgender Zusammenhang:

$$F_{Rück} = m * \ddot{x} = -\frac{g}{l} * m * x \quad (1)$$

Werden neben der Luftreibung auch andere, dem System “Fadenpendel” Energie entnehmende Effekte vernachlässigt, handelt es sich bei dem Pendel und der nun periodisch stattfindenden Umwandlung von potentieller Energie, am Punkte der Maximalauslenkung, in kinetische Energie, am Punkt der maximalen Geschwindigkeit, um einen harmonischen Oszillator. Die Auslenkung x aus Formel 1 ist dabei zeitabhängig und kann wie alle harmonischen Schwingungen durch Amplitude \hat{x} und Winkelgeschwindigkeit ω beschrieben werden:

$$x(t, \omega) = \hat{x} \cdot \cos(\omega \cdot t) \quad (2)$$

Die Winkelgeschwindigkeit ist dabei abhängig von Erdbeschleunigung und Pendellänge, vergleiche Formel 1, sie beträgt $\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}$. Über diese Winkelgeschwindigkeit kann mit dem Zusammenhang $T = 2\pi\omega$ die Periodendauer für einen Pendelschlag bestimmt werden als:

$$T(L) = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g}} \quad (3)$$

Materialien

- Stativ
- Pendel aus Angelschnur und Metallzylinder
- Maßband
- Messschieber
- Klebeband
- Stoppuhr
- Berechnungen finden in Excel und R statt

Versuchsaufbau

- Aufstellung des Stativs, Befestigung oberhalb des Tisches
- Befestigung des Maßbandes am Stativ mit Hilfe von Klebeband

Durchführung

Nach dem Versuchsaufbau wird mit der Versuchsdurchführung begonnen. Dazu wird die Pendellänge vermessen, indem am Maßband die Position des Dreieckspunktes (L1) und die Position der Oberkante des Zylindergewichtes abgelesen werden (L2). Die Höhe des Zylindergewichtes wird mit einem Messschieber vermessen (L3).

Im Anschluss wird die Periodendauer für diese Pendellänge bestimmt. Dazu wird das Pendel aus der Ruheposition ausgelenkt und nach ein paar Pendelschlägen mit der Zeitmessung begonnen. Die Zeit wird beim Durchgang durch den Ort der maximalen Geschwindigkeit sowohl gestartet als auch gestoppt, um die Reaktionszeit möglichst kurz zu halten. Es werden insgesamt 5 Messungen durchgeführt um einen Mittelwert bilden zu können.

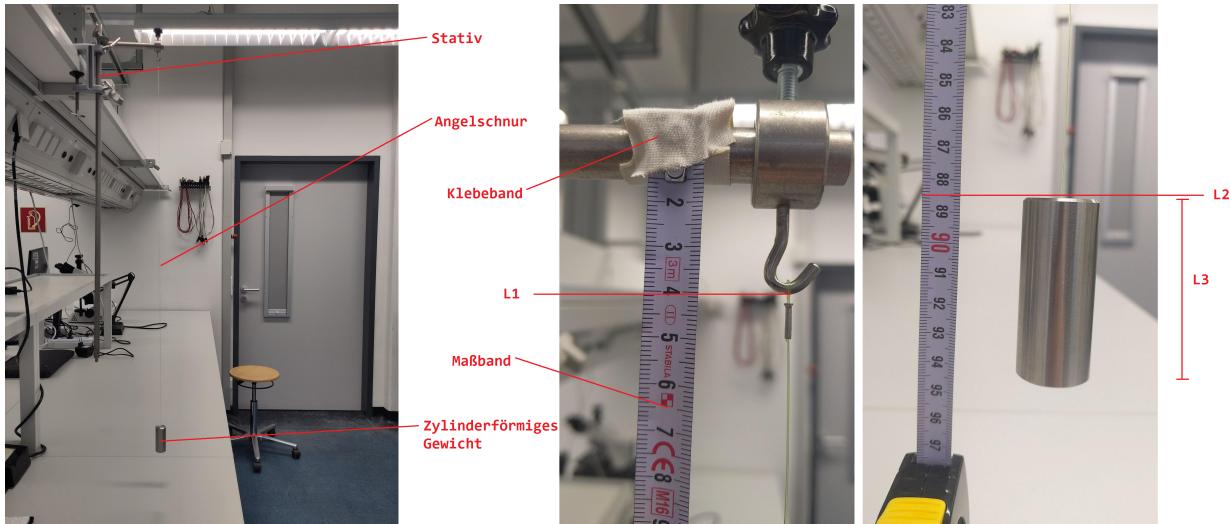


Abbildung 2: Versuchsaufbau

Fehlerquellen

Beim Auslenken des Pendels gibt es **unregelmäßige Bewegungen (Wackeln)**, die entgegen der Pendelbahn laufen.

Beim Abmessen der Pendellänge ist der **personenbezogene Ablesefehler** zu erwähnen. Diesen versuchten wir weitestgehend zu eliminieren, indem nur eine Person eine vollständige Datenreihe aufnahm.

Außerdem verlängert die **Reaktionszeit** sowohl bei Start als auch bei Stopp der Messung tendenziell die gemessene Periodendauer. Um diesen Fehler möglichst gering zu halten, wurden zehn Periodendurchläufe gemessen und die Periodendauer danach gemittelt. Auch hier nahm nur eine Person die Datenreihe auf, um die Reaktionszeit ähnlich zu halten.

Folgende Annahmen mussten darüber hinaus getroffen werden:

- Bewegung des Pendelkörpers und des Fadens verläuft reibungsfrei
- Masse des Fadens wird vernachlässigt
- Der Pendelkörper wird nur um eine kleine Strecke ausgelenkt
- Die Angelschnur ist inelastisch

Messungen

Im Laufe von Versuch 1 wurden folgende Messwerte aufgenommen, auf die sich in der folgenden Auswertung bezogen wird:

Tabelle 1: Messwerte aus Versuch 1

Messgröße	Wert
L1: Position Drehpunkt [cm]	4.00
L2: Position Fadenende [cm]	88.50
L3: Höhe Zylinder [cm]	5.87
10-Periodendauer [s]	18.75
10-Periodendauer [s]	18.72
10-Periodendauer [s]	18.85

Messgröße	Wert
10-Periodendauer [s]	18.85
10-Periodendauer [s]	18.72

Die fünf Punkte “10-Periodendauer [s]” sind die fünfmal durchgeführten Messungen, aus denen der Mittelwert berechnet werden soll.

Auswertung

Pendellänge L und Unsicherheit u_L

Die Pendellänge L wird bestimmt, indem die Differenz von L_1 und L_2 berechnet wird, siehe Tabelle im Abschnitt *Messungen*. Es wird auch darauf geachtet, die Distanz von der Pendeloberkante bis zum Massenschwerpunkt des Pendels dazuzurechnen. Dafür wird die Massenverteilung in dem Metallzylinder-Gewicht als homogen angenommen. Die zu der Fadenlänge zu addierende Länge entspricht dann der halben Zylinderhöhe L_3 . Der Bestwert der errechneten Pendellänge L beträgt dann:

$$\begin{aligned} L &= L_2 - L_1 + \frac{L_3}{2} \\ &= 0,885m - 0,04m + \frac{0,0587}{2}m \\ &= 0,87435m. \end{aligned}$$

```
# Bestwert Pendellänge in Metern
0.885-0.04+0.0587/2
```

```
## [1] 0.87435
```

Die Unsicherheit der Pendellänge setzt sich aus den zu L_1 , L_2 und L_3 gehörigen Messunsicherheiten zusammen:

$$\begin{aligned} u_L &= \sqrt{\left(\frac{\partial L}{\partial L_2} \cdot u_{Massband}\right)^2 + \left(\frac{\partial L}{\partial L_1} \cdot u_{Massband}\right)^2 + \left(\frac{\partial L}{\partial L_3} \cdot u_{Messschieber}\right)^2} \\ &= \sqrt{u_{Massband}^2 * \left(\frac{\partial L}{\partial L_2}^2 + \frac{\partial L}{\partial L_1}^2\right) + \left(\frac{\partial L}{\partial L_3} * u_{Messschieber}\right)^2} \\ &= \sqrt{\left(\frac{10^{-3}m}{2\sqrt{6}}\right)^2 * (1^2 + (-1)^2) + (0,5 * \frac{10^{-4}m}{2\sqrt{6}})^2} \\ &\approx 0,29 \cdot 10^{-4}m \end{aligned} \tag{4}$$

Mit:

- Messunsicherheit des Maßbandes: $u_{Massband} = \frac{10^{-3}m}{2\sqrt{6}}$
- Messunsicherheit des Messschiebers: $u_{Messschieber} = \frac{10^{-4}m}{2\sqrt{6}}$

```
# Berechnung von u_L in R
sqrt(2*((10**-3)/(2*sqrt(6)))**2)+((10**-4)/(2*sqrt(6)))**2)
```

```
## [1] 0.0002893959
```

Damit beträgt die Pendellänge für Versuch 1 $L = (0,87435 \pm 0.00029)m$.

Periodendauer T und Unsicherheit u_T

Als Zeit für zehn Perioden T_{10T} in Sekunden wird der Mittelwert der fünf Messungen aus der Tabelle im Abschnitt *Messungen* berechnet.

```
T_10T <- mean(Werte[4:8])
T_10T
```

```
## [1] 18.778
```

Die mittlere Periodendauer T in Sekunden wird bestimmt, indem T_{10T} durch die Anzahl von Perioden $n = 10$ geteilt wird.

$$T_{10T} = n * T \Leftrightarrow T = \frac{18,778s}{10} = 1.8778s$$

Die Messunsicherheit der digitalen Stoppuhr $u_{Stoppuhr}$ ist die Unsicherheit für T_{10T} . Deren kleinste ablesbare Größenordnung sind Millisekunden. Damit folgt für u_{10T} : $u_{10T} = \frac{a}{2\sqrt{3}} = \frac{0,01s}{2\sqrt{3}} \approx 0,0029s$.

Die Unsicherheit der Periodendauer u_T ist für zehn Perioden dann ein Zehntel der Messunsicherheit für zehn Perioden, also $u_T = 0.00029s$.

Damit ergibt sich die Periodendauer als: $T = (1.87780 \pm 0.00029)s$.

Berechnung der Erdbeschleunigung g und der Unsicherheit u_g

Mit den Bestwerten für die Pendellänge L und die Periodendauer T kann der Bestwert der Erdbeschleunigung g berechnet werden. In Formel 3 eingesetzt ergibt sich mit $L = 0,8744m$ und $T = 1,878s$:

$$\begin{aligned} g &= \frac{4 * \pi^2 * l}{T^2} \\ &\Rightarrow = \frac{4 * \pi^2 * 0,87435m}{(1,8778s)^2} \\ &= 9,789182 \frac{m}{s^2} \end{aligned}$$

```
(4*pi**2*0.87435)/(1.8778**2)
```

```
## [1] 9.789182
```

Messunsicherheit u_g der Erdbeschleunigung g :

$$\begin{aligned}
 u_g &= \sqrt{\left(\frac{\partial g}{\partial T} * u_T\right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial l} * u_l\right)^2} \\
 &= \sqrt{\left(\frac{-8 * \pi^2 * l}{T^3} * u_T\right)^2 + \left(\frac{4 * \pi^2}{T^2} * u_l\right)^2} \\
 \Rightarrow &= \sqrt{\left(\frac{-8\pi^2 * (0,87435m)}{(1,8778s)^3} * (0,00029s)\right)^2 + \left(\frac{4\pi^2}{(1,8778s)^2} * (0,00029m)\right)^2} \\
 u_g &\approx \pm 0,0044 \frac{m}{s^2}
 \end{aligned}$$

```
# Berechnung von u_g in R
sqrt(( (-8*pi**2*0.87435)/(1.8778)**3 *0.00029)**2+( (4*pi**2)/(1.8778)**2 *0.00029 )**2)

## [1] 0.004436673
```

Damit haben wir in Versuch 1 eine Erdbeschleunigung von $g = (9,7891 \pm 0,0044) \frac{m}{s^2}$ gemessen.

Interpretation

Der Literaturwert von $g = 9,81 \frac{m}{s^2}$ liegt damit nicht im Fehlerintervall. Eventuell kann in einem Versuch, bei dem die Pendellänge variiert wird ein besseres Ergebnis erzielt werden.

Versuch 2

Der zweite Versuch läuft analog zum ersten Versuch. Allerdings werden statt einer Messreihe 5 verschiedene - jeweils mit einer anderen Fadenlänge - Messreihen aufgenommen. Um die Pendellängen zu variieren wurde der Faden für kürzere Fadenlängen mit Klebeband am Zylinder stückchenweise festgeklebt. Für längere Pendellängen wurden weitere Stücke Angelschnur an das Pendel geknotet.

Fehlerquellen

Die Fehlerquellen sind dieselben wie beim ersten Versuch. Allerdings ist hierbei zu bemerken, dass die Reaktionszeit bei kürzeren Fadenlängen und daraus resultierenden kürzeren Periodendauern verhältnismäßig zunimmt. Auch von der Bahn abweichende Bewegungen nehmen bei kürzeren Pendellängen zu. Zudem ist nicht untersucht, wie sich Klebeband bzw. Knoten im Faden auf das Pendelverhalten auswirken.

Messungen

In die zu diesem Versuch gehörigen Werte wurden auch die Messwerte aus Versuch 1 integriert. Es wurde wieder so verfahren, dass pro Pendellänge fünf Messungen der Zeit für 10 Perioden gemessen und der Mittelwert berechnet wurde.

Die Messwerte sind die folgenden:

	Versuch 1	Versuch 2	Versuch 3	Versuch 4	Versuch 5	Versuch 6	Versuch 7
L1:Oberes_Ende_in_cm	4.0000	4.0000	4.0000	4.0000	4.0000	4.0000	4.0000
L2:UnteresEnde_in_cm	88.5000	74.3000	58.6000	46.0000	30.3000	114.9000	148.6000
L3:Zylinderhoehe_in_cm	5.8700	5.8700	5.8700	5.8700	5.8700	5.8700	5.8700
Pendellaenge_L	87.4435	73.2435	57.5435	44.9435	29.2435	113.8435	147.5435
Zeit_fuer_10-Perioden_1	18.7500	17.2200	15.4700	13.4400	10.8500	21.5000	24.3700
Zeit_fuer_10-Perioden_2	18.7200	17.2800	15.4400	13.5000	10.9700	21.4400	24.4400
Zeit_fuer_10-Perioden_3	18.8500	17.1800	15.5000	13.5000	10.9400	21.4400	24.4400
Zeit_fuer_10-Perioden_4	18.8500	17.2800	15.5600	13.5300	11.0300	21.5000	24.4700
Zeit_fuer_10-Perioden_5	18.7200	17.2500	15.4400	13.5300	10.9100	21.4700	24.7300
10-Perioden_Mittelwert	18.7800	17.2400	15.4800	13.5000	10.9400	21.4700	24.4900

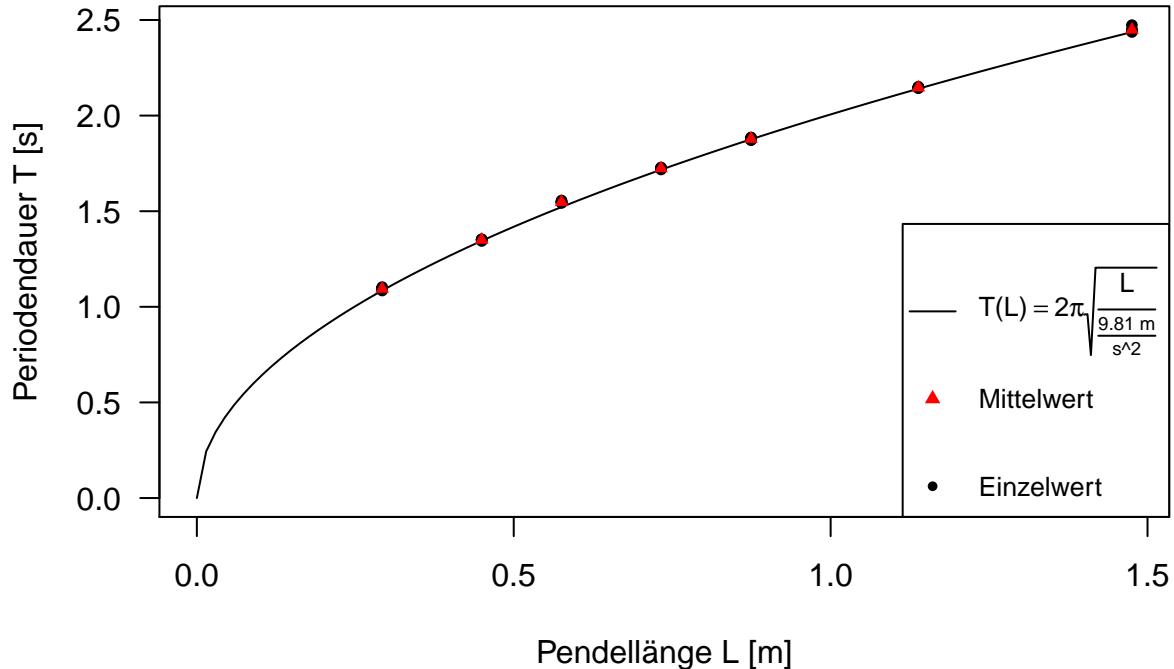
Auswertung

Bereits aus Versuch 1 bekannte Größen

Damit sind die Werte für die Pendellänge sowie deren konstante Unsicherheit $u_L = 0,00029m$, siehe Formel 4, bekannt. Ebenso sind die Werte für die Periodendauer T bekannt, diese entsprechen einem Zehntel der Zeit für die gemessenen zehn Perioden. Die Unsicherheit für T ist auch aus Versuch 1 übernehmbar, diese beträgt $u_T = 0,00029s$.

Graphische Darstellung der Messwerte

Zur Veranschaulichung der Messwerte wird die Periodendauer T gegen die Pendellänge aufgetragen:



In diesem Diagramm sind die Fehlerbalken nicht sichtbar, was an den kleinen Fehlern liegt. Als Ersatz wurde zur Validierung der Messwerte die Funktion $T(L) = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$ mit dem Literaturwert der Erdbeschleunigung für Berlin von $g \approx 9,81 \frac{m}{s^2}$ eingezeichnet. Daran wird ersichtlich, dass die Messwerte alles in allem ganz gut sind.

Linearisierung

Mittels einer Linearisierung erfolgt die Berechnung von g für diesen Versuch. Quadrierung von Formel 3 ergibt:

$$T^2 = 4\pi^2 \frac{L}{g}$$

Daraus folgt eine Geradengleichung der Form $T^2(L) = k(L) = a * L + y$ mit der Steigung $a = \frac{4\pi^2}{g}$ und dem y-Achsenabschnitt y . Nach der Quadrierung der Messwerte für T kann eine lineare Regression durchgeführt werden. Eine Prüfung der Korrelation liefert einen Korrelationskoeffizient von 0,9998.

```
# Berechnung der linearisierten Funktionswerte
xlin=WerteT$Pendellaenge_L/100 # in m
ylin=(WerteT$`10-Perioden_Mittelwert`/10)**2 # in s
# Korellationskoeffizient
cor(x=xlin, y=ylin, method='pearson')
```

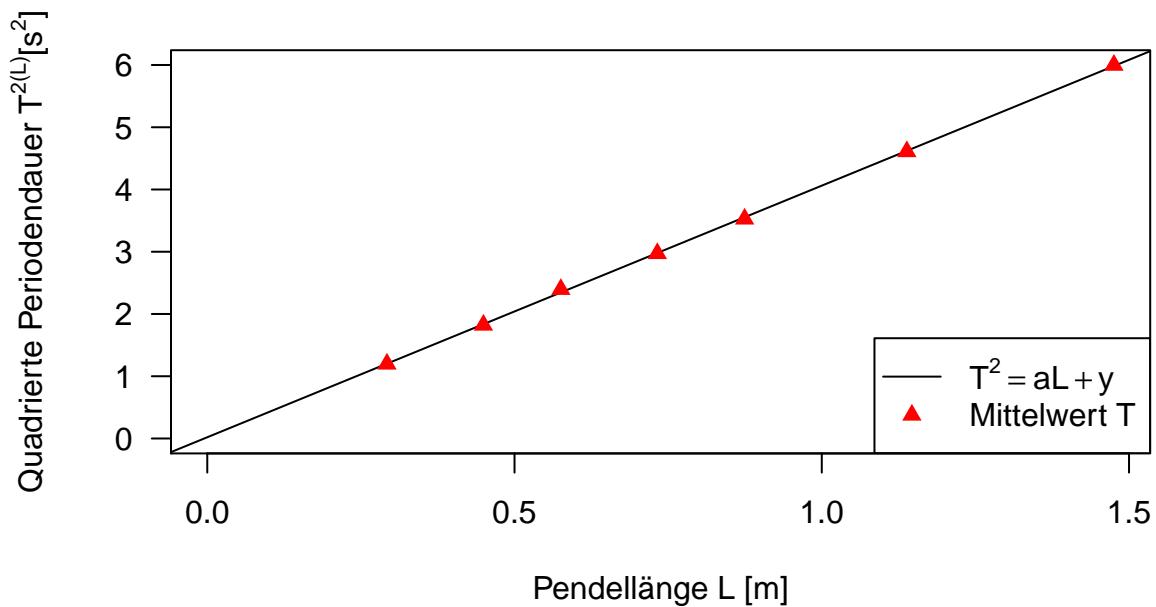
```
## [1] 0.9998811
```

Die lineare Regression erfolgt in R mittels QR-Faktorisierung in der `lm()`-Funktion.

```
lm <- lm(ylin~xlin);lm

##
## Call:
## lm(formula = ylin ~ xlin)
##
## Coefficients:
## (Intercept)      xlin
##       0.01952     4.04209
```

Im folgenden Schaubild ist die Funktionsgerade der linearen Regression zusehen. Dabei ist die Steigung $a = \frac{4\pi^2}{g} = 4,04209$ und der y-Achsenabschnitt $y = 0,01952$. Ebenfalls eingezeichnet sind die quadrierten Mittelwerte der Messwerte für die Periodendauer T bei den untersuchten Pendellängen.



Berechnung der Erdbeschleunigung

Aus der Steigung a kann die Erdbeschleunigung g bestimmt werden:

$$\begin{aligned} a &= \frac{4\pi^2}{g} \\ \Rightarrow g &= \frac{4\pi^2}{4,04209} \\ &= 9,766832901879 \left[\frac{m}{s^2} \right] \end{aligned}$$

Berechnung von u_g

Bei der Berechnung der Linearen Regression gibt die R Funktion lm() folgenden Output:

```
summary(lm)
```

```
##  
## Call:  
## lm(formula = ylin ~ xlin)  
##  
## Residuals:  
##      1       2       3       4       5       6       7  
## -0.027180 -0.007911  0.050824 -0.013677 -0.004733 -0.011566  0.014242  
##  
## Coefficients:  
##             Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)  
## (Intercept)  0.01952   0.02447   0.798   0.461  
## xlin         4.04209   0.02788 144.976 2.96e-10 ***  
## ---  
## Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1  
##  
## Residual standard error: 0.02804 on 5 degrees of freedom  
## Multiple R-squared:  0.9998, Adjusted R-squared:  0.9997  
## F-statistic: 2.102e+04 on 1 and 5 DF,  p-value: 2.962e-10
```

Mangels besseren Wissens nehmen wir den Standardfehler der Steigung a , wegen $g = 4\pi^2/a$, als Unsicherheit für g . Damit haben wir mit dem zweiten Versuchsansatz eine Erdbelebung von $g = (9,767 \pm 0,028) \frac{m}{s^2}$.

Interpretation

Auch dieser Wert ist niedriger als der Literaturwert der Erdbeschleunigung für Deutschland mit $g \approx 9,81 \frac{m}{s^2}$. Trotz des im Vergleich zum ersten Versuchsansatz größeren Fehlers, liegt der Literaturwert auch nicht im Fehlerintervall der bestimmten Erdbeschleunigung.

Vergleich der Versuche

- Versuch: $g = (9,7891 \pm 0,0044) \frac{m}{s^2}$
- Versuch: $g = (9,767 \pm 0,024) \frac{m}{s^2}$

In Versuch 1 ist sowohl das präzisere, als auch das akkurate Ergebnis erzielt worden, als in Versuch 2.