

Widerstandsmessungen

Milena Mensching, Justus Weyers

2023-01-11

Experiment

Thema

Bestimmung von Widerständen auf direkte und indirekte Weise. Dazu werden die Beträge der zwei zu untersuchenden Widerstände durch ablesen der Farbcodes, durch Widerstandsmessungen mit einem Multimeter und in einem Schaltkreis ermittelt.

Material

- Zwei Multimeter
- Breadboard
- Jumperwire, Bananenstecker und Krokodilklemmen
- Netzgerät
- Zwei Widerstände unbekannter Größe

Auslesen der Widerstandsfarbcodes

Als erste Methode zur Bestimmung des Widerstandes werden die Bauteilspezifikationen auf dem Widerstand selbst abgelesen. Im folgenden wird von "Widerstand 1" und "Widerstand 2" gesprochen.



Abbildung 1: Foto von Widerstand 1

Die Farbreihenfolge auf dem Widerstand ist *Braun, Schwarz, Schwarz, Gelb, Braun*. Dementsprechend kodiert der im Folgenden als R_1 bezeichnete Widerstand für $R_1 = (100 \cdot 10^4 \pm 1\%) \Omega \Leftrightarrow R_1 = (1,00 \pm 0,01) M\Omega$.

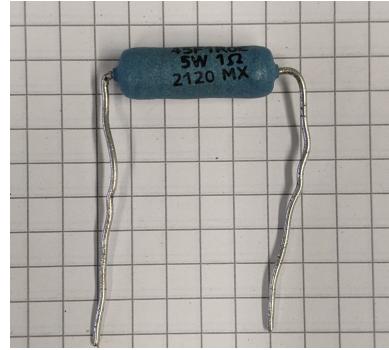


Abbildung 2: Foto von Widerstand 2

Widerstand 2 ist als Widerstand von 1Ω gekennzeichnet. Aus Datenblättern im Internet geht hervor, dass auch dieser eine Toleranz von $\pm 1\%$ aufweist (<https://de.rs-online.com/web/p/durchsteckwiderstände/1249328>). Dies bedeutet einen Widerstand von $R_2 = (1,00 \pm 0,01)\Omega$ für dieses Bauteil.

Direkte Messung

Messungen der Widerstände mit dem Multimeter liefert Werte von:

- $R_1 = 1,005M\Omega$
- $R_2 = 1,0\Omega$

Messunsicherheiten der direkten Messung

Die Messunsicherheit der direkten Messung ergibt sich aus der Messunsicherheit der digitalen Skala:

$$u_{Skala} = \frac{a}{2\sqrt{3}}$$

$$1.Widerstand : u_1 = \frac{0,001M\Omega}{2\sqrt{3}} \approx \pm 0,00029M\Omega$$

$$2.Widerstand : u_2 = \frac{0,1\Omega}{2\sqrt{3}} \approx \pm 0,029\Omega$$

```
0.001/(2*sqrt(3)) #Unsicherheit 1
```

```
## [1] 0.0002886751
```

```
0.1/(2*sqrt(3)) #Unsicherheit 2
```

```
## [1] 0.02886751
```

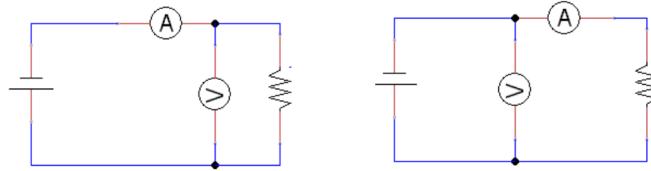


Abbildung 3: Schaltkreise zur indirekten Widerstandsmessung. Links: Variante a). Rechts: Variante b). Quelle: Universität Potsdam, Institut für Physik und Astronomie, Grundpraktikum, Skript zum Versuch E1.

Indirekte Widerstandsmessung

Die indirekte Bestimmung der Widerstände in einem Stromkreis erfolgt in zwei Varianten. Diese Unterscheiden sich in der Art des Schaltungsaufbaus. In Abbildung ... ist der Unterschied zwischen den Varianten a) und b) erkennlich.

In Variante a) wird das Voltmeter parallel zum Widerstand geschaltet, in Variante b) parallel zur Spannungsquelle.

Bei der Berechnung der Widerstände aus den gemessenen Werten werden zwei Annahmen/Vereinfachungen getroffen:

- Durch das Voltmeter findet Stromfluss statt. Der tatsächliche Innenwiderstand beträgt ca. $10M\Omega$, wie Datenblättern des Messgerätes aus dem Internet entnommen und auch experimentell überprüft wurde.
- Das Amperemeter hat keinen Innenwiderstand. In den Datenblättern gab es keine Angaben zum Innenwiderstand des Amperemeters und auch experimentell konnte kein Widerstand bestimmt werden.

Verwendetes Datenblatt: <https://asset.conrad.com/media10/add/160267/c1/-/en/000124501DS01/datasheet-124501-voltcraft-vc250-handheld-multimeter-digital-cat-iii-600-v-display-counts-2000.pdf>.

Aufbau (a)

Mithilfe der Kabel und des Breadboards wurde folgender Stromkreis aufgebaut:

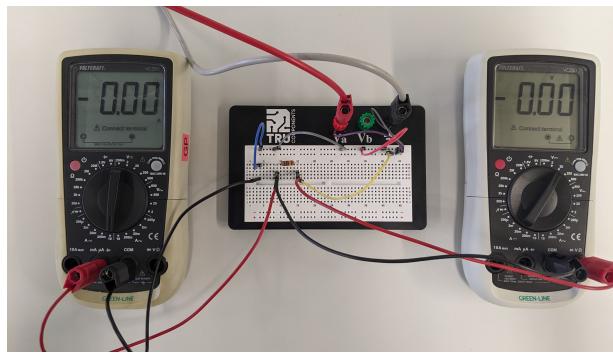


Abbildung 4: Aufbau auf Breadboard für Variante a) der indirekten Widerstandsmessung. Im Bild ist zudem bereits der Widerstand 1 eingebaut.

Folgende Werte wurden gemessen:

- Widerstand 1 (Messung bei 5,0V)

- Spannung: 5,04V
- $5,4 \mu\text{A}$
- Widerstand 2 (Messung bei 0,6V)
 - Spannung: 0,15 V
 - 150,3 mA

Gerätespezifische Messunsicherheiten

Die Messunsicherheiten von Spannung und Strom ergeben sich aus der Messunsicherheit der digitalen Skala

$$u_{Skala} = \frac{a}{2\sqrt{3}}$$

1.Widerstand :

$$\text{Spannung : } u_{U1a} = \frac{0,01V}{2\sqrt{3}} \approx 0,0029V$$

$$\text{Strom : } u_{I1a} = \frac{0,1\mu\text{A}}{2\sqrt{3}} \approx 0,029\mu\text{A}$$

2.Widerstand :

$$\text{Spannung : } u_{U2a} = \frac{0,01V}{2\sqrt{3}} \approx 0,0029V$$

$$\text{Strom : } u_{I2a} = \frac{0,1mA}{2\sqrt{3}} \approx 0,029mA$$

```
0.01/(2*sqrt(3)) #Unsicherheit Spannung 1,2
```

```
## [1] 0.002886751
```

```
0.1/(2*sqrt(3)) #Unsicherheit Strom 1,2
```

```
## [1] 0.02886751
```

Folglich liegen die gemessenen Größen bei:

- $U1a = (5,0400 \pm 0,0029)V$
- $I1a = (5,400 \pm 0,029)\mu\text{A}$
- $U2a = (0,1500 \pm 0,0029)V$
- $I2a = (150,300 \pm 0,029)mA$

Berechnung der Widerstände

Es gilt das Ohmsche Gesetz:

$$U = I \cdot R \Leftrightarrow R = \frac{U}{I}$$

R = Widerstand

U = Spannung

I = Strom

Für die Widerstände ergeben sich somit für Aufbau (a) Bestwerte von:

$$1. \text{Widerstand} : R = \frac{U}{I} = \frac{5,0400V}{5,4\mu A} \approx 933333,3\Omega$$
$$2. \text{Widerstand} : R = \frac{U}{I} = \frac{0,1500V}{150,3mA} \approx 0,998004\Omega$$

```
(5.04/(5.4*10**-6)) #Widerstand 1
```

```
## [1] 933333.3
```

```
(0.15/(150.3*10**-3)) #Widerstand 2
```

```
## [1] 0.998004
```

Messunsicherheiten

Die Messunsicherheit für die indirekt bestimmten Widerstände ergibt sich mit folgender Formel:

$$u_R = \sqrt{\left(\frac{\partial R}{\partial U} \cdot u_U\right)^2 + \left(\frac{\partial R}{\partial I} \cdot u_I\right)^2}$$
$$u_R = \sqrt{\left(\frac{1}{I} \cdot u_U\right)^2 + \left(\frac{-U}{I^2} \cdot u_I\right)^2}$$
$$1. \text{Widerstand} : u_{R1a} = \sqrt{\left(\frac{1}{5,4\mu A} \cdot 0,0029V\right)^2 + \left(\frac{-5,04V}{5,4\mu A^2} \cdot 0,029\mu A\right)^2} \approx \pm 5000\Omega$$
$$2. \text{Widerstand} : u_{R2a} = \sqrt{\left(\frac{1}{150,300mA} \cdot 0,0029V\right)^2 + \left(\frac{0,1500V}{150,300mA^2} \cdot 0,029mA\right)^2} \approx \pm 0,019\Omega$$

```
# Unsicherheit Widerstand 1
```

```
sqrt(((1/(5.4*10**-6))*0.0029)**2+(5.04/((5.4*10**-6)**2)*0.029*10**-6)**2)
```

```
## [1] 5041.033
```

```
# Unsicherheit Widerstand 2
```

```
sqrt(((1/(150.3*10**-3))*0.0029)**2+(0.15/((150.3*10**-3)**2)*0.029*10**-3)**2)
```

```
## [1] 0.0192957
```

Die Widerstände für den Aufbau (a) ergeben sich somit insgesamt zu:

- $R1a = (933300 \pm 5000)\Omega = (0,9333 \pm 0,0050)M\Omega$
- $R2a = (0,998 \pm 0,019)\Omega$

Die Widerstände liegen in den richtigen Größenordnungen. Die bestimmten Widerstände lassen sich im Rahmen ihrer Unsicherheiten nicht mit den Sollwerten von $10M\Omega$ und 1Ω , wie sie im Vorfeld bestimmt wurden vereinbaren. Grund für die falschen Messergebnisse können z.B. die zum Voltmeter und dem Ampermeter getroffenen Annahmen sein.

Aufbau (b)

Anschließend wurde der Schaltkreis, Versuchsvariante b) entsprechend, umgebaut:

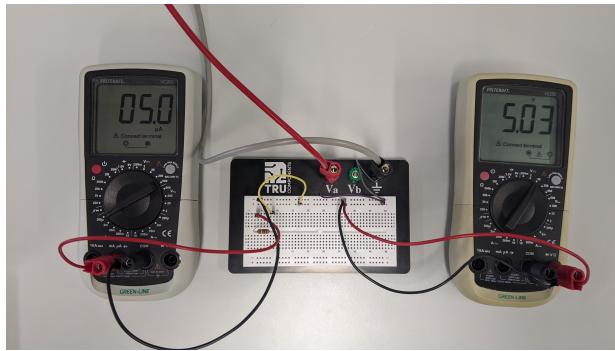


Abbildung 5: Aufbau auf Breadboard für Variante b) der indirekten Widerstandsmessung.

Folgende Werte wurden gemessen:

- Widerstand 1 (Messung bei 5,0V)
 - Spannung: 5,03V
 - Strom: 5,0 μ A
- Widerstand 2 (Messung bei 0,8V)
 - Spannung: 0,4 V
 - Strom: 101,8 mA

Gerätespezifische Messunsicherheiten

Die Messunsicherheiten von Spannung und Strom sind identisch zu denen im Aufbau (a). Folglich liegen die gemessenen Größen bei:

- $U_{1b} = (5,0300 \pm 0,0029)V$
- $I_{1b} = (5,000 \pm 0,029)\mu A$
- $U_{2b} = (0,4000 \pm 0,0029)V$
- $I_{2b} = (101,800 \pm 0,029)mA$

Berechnung der Widerstände

Es gilt das Ohmsche Gesetz:

$$U = I \cdot R \Leftrightarrow R = \frac{U}{I}$$

R = Widerstand

U = Spannung

I = Strom

Für die Widerstände ergeben sich somit für Aufbau (b) Bestwerte von:

$$1. \text{Widerstand} : R = \frac{U}{I} = \frac{5,0300V}{5,000\mu A} \approx 1006000\Omega$$

$$2. \text{Widerstand} : R = \frac{U}{I} = \frac{0,4000V}{101,800mA} \approx 3,929273\Omega$$

```
(5.03/(5*10**-6)) #Widerstand 1
```

```
## [1] 1006000
```

```
(0.4/(101.8*10**-3)) #Widerstand 2
```

```
## [1] 3.929273
```

Messunsicherheiten

Die Messunsicherheit für die indirekt bestimmten Widerstände ergibt sich mit folgender Formel:

$$u_R = \sqrt{\left(\frac{\partial R}{\partial U} \cdot u_U\right)^2 + \left(\frac{\partial R}{\partial I} \cdot u_I\right)^2}$$

$$u_R = \sqrt{\left(\frac{1}{I} \cdot u_U\right)^2 + \left(\frac{-U}{I^2} \cdot u_I\right)^2}$$

$$1. \text{Widerstand} : u_{R1b} = \sqrt{\left(\frac{1}{5,000\mu A} \cdot 0,0029V\right)^2 + \left(\frac{-5,0300V}{5,000\mu A^2} \cdot 0,029\mu A\right)^2} \approx \pm 5900\Omega$$

$$2. \text{Widerstand} : u_{R2b} = \sqrt{\left(\frac{1}{101,800mA} \cdot 0,0029V\right)^2 + \left(\frac{0,4000V}{101,800mA^2} \cdot 0,029mA\right)^2} \approx \pm 0,029\Omega$$

```
# Unsicherheit Widerstand 1
```

```
sqrt(((1/(5*10**-6))*0.0029)**2+(5.03/((5*10**-6)**2)*0.029*10**-6)**2)
```

```
## [1] 5863.556
```

```
# Unsicherheit Widerstand 2
```

```
sqrt(((1/(101.8*10**-3))*0.0029)**2+(0.4/((101.8*10**-3)**2)*0.029*10**-3)**2)
```

```
## [1] 0.02850921
```

Die Widerstände für den Aufbau (b) ergeben sich somit insgesamt zu:

- $R1b = (1006000 \pm 5900)\Omega$
- $R2b = (3,929 \pm 0,029)\Omega$

Die Widerstände liegen in den richtigen Größenordnungen. Die bestimmten Widerstände lassen sich im Rahmen ihrer Unsicherheiten nicht mit den Sollwerten von $10M\Omega$ und 1Ω , wie sie im Vorfeld bestimmt wurden vereinbaren. Besonders für Widerstand 2 ist im Experiment ein etwa vier mal höherer Wert bestimmt worden. Grund für die falschen Messergebnisse können z.B. die zum Voltmeter und dem Ampermeter getroffenen Annahmen sein.

Modellbildungsprozess

Bei unserem Versuch handelt es sich um ein Testexperiment, bei dem wir auf der Grundlage des Ohmschen Gesetzes Widerstände indirekt messen. Es soll nun ein Modell erstellt werden, anhand dessen die Widerstände der elektrischen Widerstandsbauteile in den jeweiligen Schaltungen vorhergesagt werden können.

Die Modelle sollen den Schaltungen nachempfundene Widerstandsschaltungen sein, in denen Amperemeter und Voltmeter durch Widerstände ersetzt werden.

Annahmen

Sowohl für Schaltung a), als auch für Schaltung b) wird grundsätzlich angenommen, dass das Voltmeter dabei einen Widerstand von $10M\Omega$ und das Amperemeter einen Innenwiderstand von 0Ω hat (vergleiche Ausführungen dazu bei der indirekten Widerstandsmessung). Eine weitere Annahme ist, dass der schaltungsdräht keinen Widerstand hat.

Modell für Schaltung a)

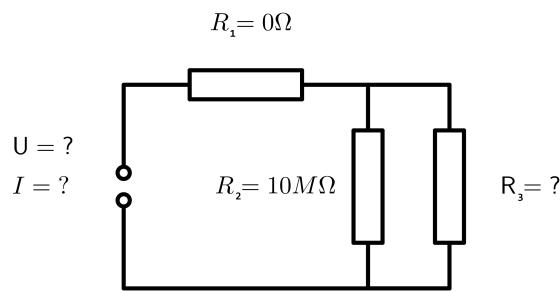


Abbildung 6: Modell zur Schaltung a)

Input:

Systemparameter:

- Spannung U an der Spannungsquelle
- Stromstärke I im gesamten Stromkreis

Randbedingungen:

- Widerstand Amperemeter $R_1: 0\Omega$
- Widerstand Voltmeter $R_2: 10M\Omega$

Output:

- Widerstand des unbekannten Widerstandes R_3

Modelldomäne Formel

Implementierung als R-Funktion mit zwei Argumenten:

```
# ---- Schaltung 1
# INPUT: Spannung, Stromstärke
# OUTPUT: Benötigter Widerstand
schaltung1 <- function(U0, I0){
  # Randbedingungen
  R1 = 0 # Widerstand Ampermeter
  R2 = 10e6 # Widerstand Voltmeter
  # Berechnung des Gesamtwiderstandes
  Rges = U0/I0
  # Berechnung des benötigten R
  R3 = (1/(Rges-R1)-1/R2)**-1
  print("Widerstände in der Schaltung in Ohm:")
  print(paste("R1: ", R1))
  print(paste("R2: ", R2))
  print(paste("R3: ", R3))
  print(paste("R_ges: ", Rges))
}
```

Wird das Modell mit den gemessenen Werten ausgeführt (das gemessene U und I entsprechen bei Schaltung a) den Einstellungen an der Spannungsquelle) erhält man mit diesem Modell folgenden Output:

```
# Testen mit gemessenen Werten für Widerstand 1
schaltung1(U0=5, I0=5.4e-06)
```

```
## [1] "Widerstände in der Schaltung in Ohm:"
## [1] "R1: 0"
## [1] "R2: 1e+07"
## [1] "R3: 1020408.16326531"
## [1] "R_ges: 925925.925925926"
```

```
# Testen mit gemessenen Werten für Widerstand 1
schaltung1(U0=0.15, I0=0.1503)
```

```
## [1] "Widerstände in der Schaltung in Ohm:"
## [1] "R1: 0"
## [1] "R2: 1e+07"
## [1] "R3: 0.998004091617175"
## [1] "R_ges: 0.998003992015968"
```