

LABORBUCH IM PHYSIKPRAKTIKUM

Milena Mensching Justus Weyers

11. Januar 2023

Inhaltsverzeichnis

Dehnbare Stoffe	4
Versuch 1	4
Ziel	4
Materialien	4
Versuchsaufbau	4
Durchführung	5
Fehlerquellen	6
Messung	6
Auswertung und Interpretation	6
Berechnung der Gewichts- und Zugkraft	6
Berechnung der Federkonstanten	7
Messwerte und errechnete Größen	10
Versuch 2	12
Ziel	12
Materialien	12
Versuchsaufbau	12
Durchführung	12
Fehlerquellen	13
Messung	13
Auswertung	13
Interpretation	15
Messwerte und errechnete Größen	15
Pendel	16
Versuch 1	16
Ziel	16
Materialien	17
Versuchsaufbau	17
Durchführung	17
Fehlerquellen	18
Messungen	18
Auswertung	19
Pendellänge L und Unsicherheit u_L	19
Periodendauer T und Unsicherheit u_T	20
Berechnung der Erdbeschleunigung g und der Unsicherheit u_g	20
Interpretation	21
Versuch 2	22
Fehlerquellen	22
Messungen	22
Auswertung	22
Bereits aus Versuch 1 bekannte Größen	22
Graphische Darstellung der Messwerte	23
Linearisierung	23
Berechnung der Erdbeschleunigung	24
Berechnung von u_g	24
Interpretation	25
Vergleich der Versuche	25

Kalorimeter	25
Versuch 1	25
Thema	25
Versuchsaufbau und Durchführung	25
Fehlerbetrachtung	26
Beobachtungen	26
Auswertung	27
Versuch 2	29
Thema	29
Versuchsaufbau	29
Fehlerbetrachtung	29
Durchführung	29
Beobachtungen	30
Auswertung	31
Bestimmung der Dichte der zwei Metalle	31
Bestimmung der Unsicherheiten für die Dichte	31
Bestimmung der spezifischen Wärmekapazität für die zwei Metalle	32
Unsicherheit der spezifische Wärmekapazität der Feststoffe	32
Unsicherheit spezifische Wärmekapazität oranges Metall	32
Unsicherheit spezifische Wärmekapazität graues Metall	33
Interpretation	34
Quellen	34
Brownsche Molekuelbewegung	34
Simulation	34
Experiment	36
Thema	36
Material	36
Versuchsaufbau und Durchführung	36
Durchführung	36
Fehlerbetrachtung	37
Beobachtungen	37
Umrechnung der Messwerte in Meter	38
Statistische Untersuchung	38
Auswertung	40
Berechnung der Diffusionskonstante	40
Berechnung der Boltzmannkonstante	41
Berechnung der Avogadrokonstante	41
Interpretation	42
Widerstandsmessungen	42
Experiment	42
Thema	42
Material	42
Auslesen der Widerstandsfarbcodes	42
Direkte Messung	43
Messunsicherheiten der direkten Messung	43
Indirekte Widerstandsmessung	44

Aufbau (a)	44
Gerätespezifische Messunsicherheiten	45
Berechnung der Widerstände	46
Messunsicherheiten	46
Aufbau (b)	47
Gerätespezifische Messunsicherheiten	47
Berechnung der Widerstände	48
Messunsicherheiten	48
Modellbildungsprozess	49
Annahmen	49
Modell für Schaltung a)	49
Modell für Schaltung b)	51
Fazit	52

Dehnbare Stoffe

Versuch 1

Ziel

Überprüfung der Anwendbarkeit des Hookeschen Modells auf ein Gummiband durch Bestimmung der Federkonstante

Materialien

- Stativ
- Gummiband
- Gewichte
- Maßband
- Haken
- Klebeband

Versuchsaufbau

- Aufstellung des Stativs, Befestigung am Tisch
- Befestigung des Hakens am Stativ
- Befestigung des Maßbandes am Stativ mit Hilfe von Klebeband
- Aufhängung des Gummibandes am Haken
- In das Gummiband aufgehängen werden die Gewichte daran aufgehängt



Abbildung 1: Versuchsaufbau 1



Abbildung 2: Versuchsaufbau 1, Nahansicht

Durchführung

Die Gewichte werden gewogen und die Messunsicherheiten berechnet. Die 10g und die 100g Gewichte lagen doppelt vor und waren jeweils gleich schwer. Sämtliche Gewichte stellten sich als zu leicht heraus. Nur die zwei 10g Gewichte wogen exakt 10,0g.

Tabelle 1: Verwendete Gewichte

Nominalgewicht	Einzelmasse_g
5g	4.8
10g (2x)	10.0
20g	19.8
50g	49.9
100g (2x)	99.5
200g	198.5

Die Gesamtmasse m_{ges} einer Gewichtskombination wird durch Addition der Teilmassen berechnet.

Die Gerätegenauigkeit berechnet sich zu: $u_{Gerät} = \sqrt{u_{Skala}^2 + u_{Waage}^2}$. Dabei ist u_{Skala} konstant bei $u_{Skala} = \frac{0,0001kg}{2\sqrt{3}} = 2,9 * 10^{-5}kg$. Für u_{Waage} wurde eine Messunsicherheit von 0,02g am Gerät abgelesen. Damit errechnet sich eine Gerätegenauigkeit von $u_{Gerät} = \sqrt{(2,9 * 10^{-5})^2 + (2 * 10^{-5})^2}kg = 3,5 * 10^{-5}kg$.

Für die Unsicherheit der aus n Gewichten kombinierten Masse M u_m gilt, da für alle Messungen dieselbe Waage benutzt wurde, der Zusammenhang:

$$u_m = \sum_{i=1}^n u_{m,i} = n * u_{Gerät}$$

Mit n : Anzahl der kombinierten Gewichte

```
# Skalenunsicherheit der Waage
u_Skala = (1*10**(-4))/(2*sqrt(3)) #kg
# Wagenunsicherheit
u_Waage = 0.02*10**(-3) # kg
# Geräteunsicherheit
u_Gerät = sqrt((u_Skala)^2+(u_Waage)^2)
# Massenunsicherheit
u_m = Gewichte$n_Gewichte*u_Gerät #kg
```

Zunächst wird die Länge des Gummibandes ohne zusätzliches Gewicht gemessen. Die Länge betrug 11,2 cm. Diese Länge muss später von allen Messwerten abgezogen werden, um nur die Auslenkung aus dem Nullzustand als Datensatz aufzunehmen.

Danach werden verschiedene Gewichte an das Gummiband gehängt und die entsprechende Elongation gemessen. Diese wird an der Unterkante des Gummibandes, sobald dieses nach dem Anbringen der Gewichte nicht mehr schwingt, abgelesen. Unsere Gruppe entschied sich zunächst dafür, eine Messreihe mit Intervallen von 5g durchzuführen. Nach den ersten 20 Messungen (bis 100g) entschieden wir uns dafür, die Intervalle auf 10g zu erhöhen, da wir zunächst den Aufwand unterschätzten und Daten mit einem Abstand von 10g immer noch zur Beurteilung der Federkonstante ausreichen.

Die Auslenkung wird am Maßband abgelesen (Messskala in mm). Dies bedeutet eine Ungenauigkeit der Elongation von:

$$u_x = \frac{a}{2\sqrt{6}} = \frac{0,001m}{2\sqrt{6}} = 2,0 * 10^{-4}m$$

```
# Auslenkungsungenauigkeit
u_x = 2.0*10**(-4) #m
```

Fehlerquellen

Bei den Fehlerquellen ist zunächst der **personenbezogene Ablesefehler** zu erwähnen. Diesen versuchten wir weitestgehend zu eliminieren, indem nur eine Person eine vollständige Datenreihe aufnahm.

Eine weitere Fehlerquelle kann die **Zeitabhängigkeit der Auslenkung** sein. Ein Gummiband kann nach einer gewissen Zeit mehr nachgeben, als bei der direkten Messung. Wir haben uns bemüht, die Messungen sehr direkt und ohne Verzug vorzunehmen. Die Zeitabhängigkeit haben wir jedoch nicht näher untersucht.

Besonders wichtig ist zu erwähnen, dass die Länge x_0 am Anfang und am Ende nicht übereinstimmten (11,2cm am Anfang zu 11,6cm am Ende). Dies ist auf die **konstante Dehnung des Gummibandes** zurückzuführen und wurde ebenfalls bei der Messung vernachlässigt.

Neben diesen Versuchsbezogenen Fehlerquellen sind Annahmen zu nennen, die das Hooksche Gesetz trifft. Diese können sich aber in der Realität anders darstellen. Dabei sind zu nennen:

- Vernachlässigung von Energieumwandlung (z.B.: durch Reibung, $W = F_s * s$)
- Lineare Kraft-Auslenkungs-Beziehung (Speziell im Falle des Gummibandes nur eingeschränkt anwendbar)
- Der Stoff soll dehnbar sein, die Elastizitätsgrenze darf jedoch nicht überschritten werden.
- Gleiches Verhalten bei und Dehnung und Entspannung der Feder/des Gummibandes

Messung

Mittels Excel werden die Daten aufgenommen und als csv-Datei exportiert. An dieser Stelle können die erhobenen Messwerte zum Zwecke der Interpretation aus dieser csv-Datei eingelesen werden. Die Werte sind auf der letzten Seite aufgeführt, zusammen mit errechneten Größen und zugehörigen Unsicherheiten.

```
# Einlesen der csv-Datei
Messreihe <- read.csv("Daten/Messreihe.csv", sep=";", dec = ",")

# Anbindung der bereits errechneten Unsicherheit der Masse
Messreihe <- cbind(Messreihe, u_m)

# Umbenennung der Spalten
colnames(Messreihe) <- c("n_Gewichte", "Sollwert_g", "Gewicht_g",
                        "Auslenkung1_cm", "Auslenkung2", "x_Haken",
                        "x_0_Ende", "u_m")
```

Auswertung und Interpretation

Berechnung der Gewichts- und Zugkraft

Zur Interpretation der Messergebnisse wird die Elongation x_i normiert, indem die Nullauslenkung, diese beträgt 11,2cm auf dem Maßband, von den anderen Messwerten subtrahiert wird, siehe entsprechenden Messwert für ein Gewicht von 0g im Abschnitt *Messwerte und errechnete Größen*.

Zudem wird, wie bei allen anderen Messgrößen auch, die Einheit in eine SI-Einheit umgerechnet, um den Einheitenbezug korrekt zu halten. In diesem Falle also in Meter.

Im Anschluss wird die Kraft $F_{G,i} = m_i * g$ in Newton berechnet, die für das Gewicht m_i auf das Gummiband wirkt. Die Erdbeschleunigung g wird auf $9,81 \frac{m}{s^2}$ festgesetzt. Im Folgenden wird, wenn die Unterscheidung zwischen Gewichts- und Zugkraft aufgrund der Betragsgleichheit im zu untersuchenden Ruhezustand unsinnig ist, von einer sematischen Unterscheidung von F_G und F_{Zug} abgesehen und stattdessen verallgemeinernd von der wirkenden Kraft F gesprochen. Neben der Kraft F wird auch die Unsicherheit der Kraft u_F berechnet.

Diese berechnet sich als:

$$\begin{aligned} u_F &= \frac{\partial F}{\partial m} * u_m \\ &= g * u_m \end{aligned}$$

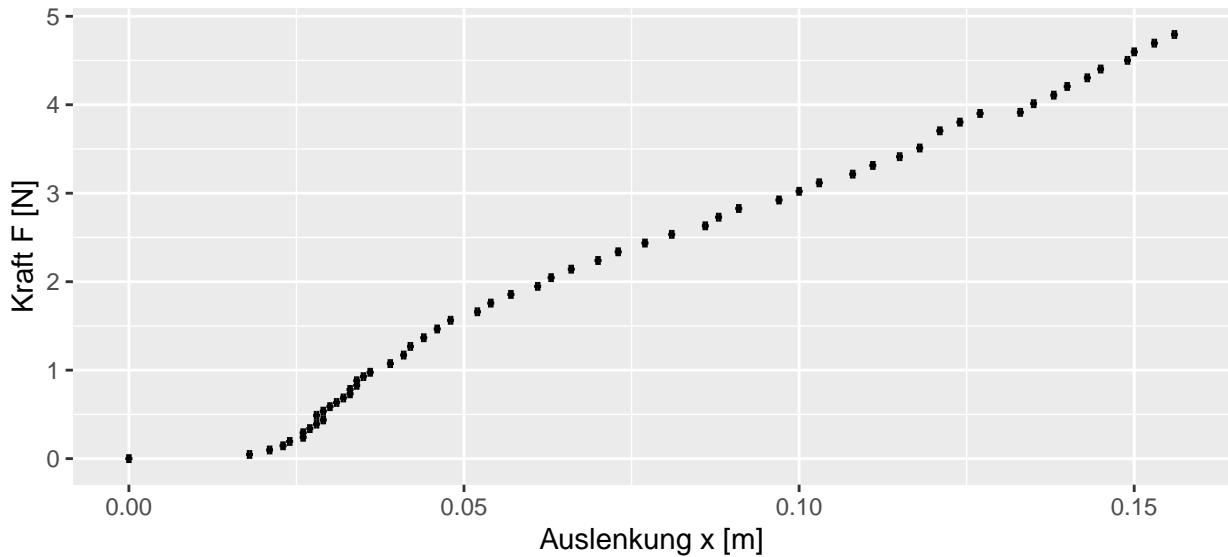
Nach der Rechnung wird ein Kraft-Auslenkung Schaubild erstellt.

```
# Nullwerte(x_0 = 11,2cm) abziehen
Messreihe$Auslenkung1_x0 <- Messreihe$Auslenkung1_cm - 11.2

# Einheitenbezug
Messreihe$Gewicht_kg <- Messreihe$Gewicht_g/1000 #g -> kg
Messreihe$Auslenkung1_x0_m <- Messreihe$Auslenkung1_x0/100 #cm -> m

# ERDBESCHLEUNIGUNG
g = 9.81 #m/s^2

# Berechnung von Kraft und u_Kraft
Messreihe$Kraft <- Messreihe$Gewicht_kg * g #N
Messreihe$u_Kraft <- g*u_m #N
```



Wird F gegen x_i aufgetragen, ergibt sich optisch ab einer Auslenkung von 5cm ein etwa linearer Zusammenhang. Fehlerbalken sind sowohl für die Auslenkung, als auch für die Kraft vorhanden, fallen aber sehr klein aus. Im Bereich zwischen einer Elongation von 0cm und 5cm kann das Ausdehnungsverhalten des Gummibandes unter einer Gewichtsbelastung nicht als linear betrachtet und nicht durch eine Federkonstante beschrieben werden. Für die Berechnung der Federkonstanten haben wir uns daher entschieden, die Werte für $x_i < 0,05m$ auszuschließen. Zugleich müssen wir dann allerdings feststellen, dass die errechnete Federkonstante nur im Intervall $x \in (0,05m, x_{max}]$ gilt.

Berechnung der Federkonstanten

Da die Gewichtskraft $F_G = m * g$ und die Zugkraft des Gummibandes $F_{Zug} = x * D$ im Ruhezustand im Gleichgewicht zueinander stehen, gilt folgende Formel:

$$F_G = m * g = D * x = F_{Zug}$$

Mit:

- D : Federkonstante
- m : Masse des Gewichtes,
- x : Auslenkung,
- g : Erdbeschleunigung ($9,81 \frac{m}{s^2}$).

Daraus ergibt sich für die Federkonstante D:

$$D = \frac{m * g}{x} \quad (1)$$

Diese wird für jede Auslenkung x_i berechnet.

```
Messreihe$Federkonstante <- Messreihe$Gewicht_kg*g/Messreihe$Auslenkung1_x0_m
```

Die Unsicherheit der einzelnen Werte der Federkonstanten u_D ergibt sich gemäß der Gaußschen-Fehlerfortpflanzung aus folgender Formel:

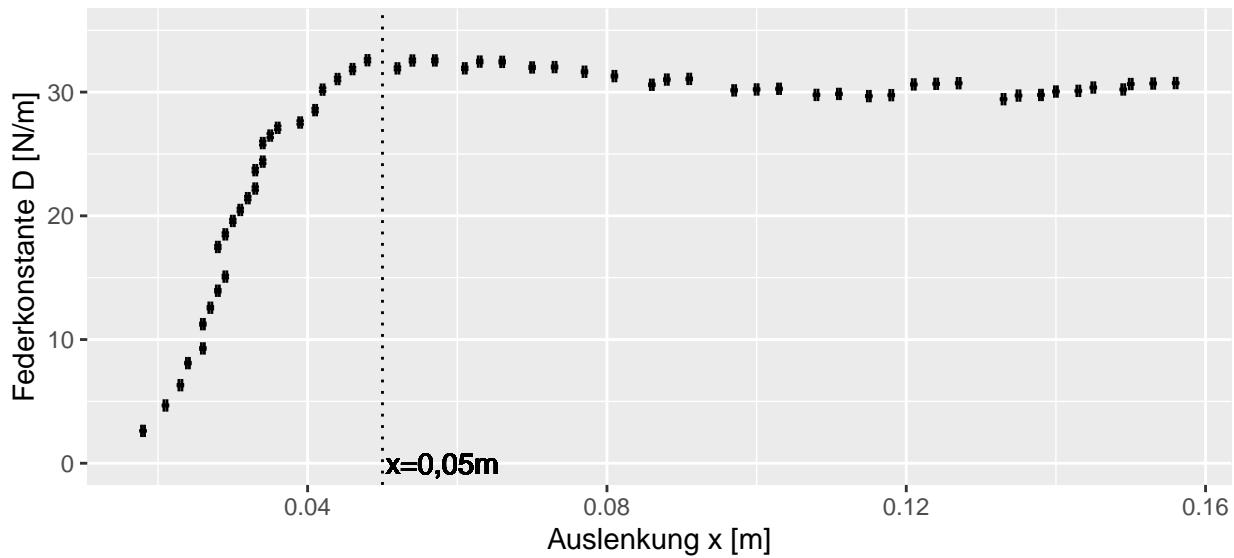
$$\begin{aligned} u_D &= \sqrt{\left(\frac{\partial D}{\partial m} * u_m\right)^2 + \left(\frac{\partial D}{\partial x} * u_x\right)^2} \\ u_D &= \sqrt{\left(\frac{g}{x} * u_m\right)^2 + \left(-\frac{m * g}{x^2} * u_x\right)^2} \end{aligned} \quad (2)$$

Berechnung in R:

```
# Funktion zur Berechnung der Messunsicherheit der Federkonstanten
# INPUT: x, m, u_m (glob: u_x)
# OUTPUT: u_D
u_D_funktion <- function(x,m, UM){
  sqrt(((g/x)*UM)**2+((-m*g/x**2)*u_x)**2)
}

# Berechnung der Unsicherheit der Federkonstanten
Messreihe$u_Federkonstante <- u_D_funktion(x=Messreihe$Auslenkung1_x0_m,
                                              m=Messreihe$Gewicht_kg,
                                              UM=Messreihe$u_m)
```

Wird die Federkonstante über die Elongation geplottet, zeigt sich wieder, dass diese erst ab einer Auslenkung von etwa 5 cm einen vergleichsweise stabilen Wert annimmt.



Daher haben wir uns entschieden, nur in dem beschriebenen Intervall $x \in (0, 05m, x_{max}]$ zu mitteln. Dort wird nach GUM der Mittelwert und die Standardabweichung des Mittelwertes berechnet, um ein Messergebnis und dessen Unsicherheit zu erhalten.

Mittelwert:

$$\bar{D} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n D_i \quad (3)$$

Standardabweichung:

$$\sigma_D = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (D_i - \bar{D})^2} \quad (4)$$

Standardabweichung des Mittelwertes:

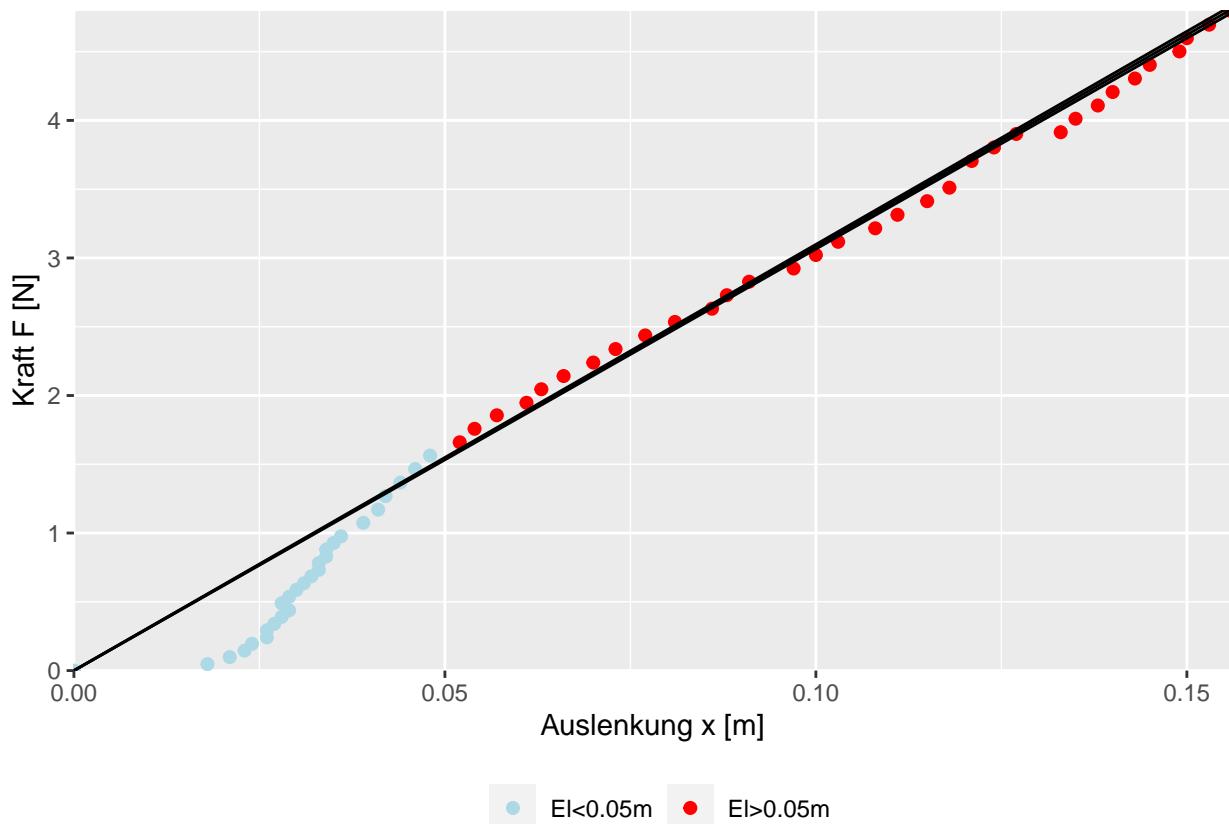
$$\sigma_{\bar{D}} = \frac{\sigma_D}{\sqrt{n}} \quad (5)$$

Tabelle 2: Statistische Größen zur bestimmten Federkonstante

	Werte
Mittelwert_MW	30.8162757
Standardabweichung_SD	0.9579652
SD_von_MW	0.1667603

Die bestimmte Federkonstante, für eine Auslenkung des Gummibandes im Bereich von 5,0 bis 26.8cm, beträgt also $D_1 = (30,82 \pm 0,17) \frac{N}{m}$

Hier wird die Federkonstante als Gerade noch einmal im Kraft-Auslenkungsschaubild dargestellt. Die in Blau eingefärbten Punkte sind diejenigen Punkte, die nicht in die Berechnung eingingen.



Angemerkt sei, dass für die Steigung der Federkonstanten der Mittelwert und die Mittelwerte ab- bzw. zuzüglich der Standardabweichung des Mittelwertes angenommen wurden. Die drei Geraden überlagern sich sehr stark. Ebenso wurde ein Nulldurchgang festgelegt, da bei keiner Krafteinwirkung keine Elongation stattfindet. Ebenso sei angemerkt, dass auf Fehlerbalken verzichtet wurde, da diese bereits im ersten Kraft-Auslenkungs Schaubild eingezeichnet wurden und zudem, aufgrund der kleinen Unsicherheiten, keinen graphischen Mehrwert bieten. Die Fehlerwerte könne außerdem im Abschnitt *Messwerte und errechnete Größen* nachgeschlagen werden.

Messwerte und errechnete Größen

Im Folgenden eine Auflistung der in diesem Versuch erhobenen Messwerte und der daraus errechneten Größen:

Mit:

- $n_m[-]$: Anzahl kombinierter Gewichte
- $m[\text{kg}]$: Masse der kombinierten Gewichte in Kilogramm
- $u_m[\text{kg}]$: Unsicherheit der Masse in Kilogramm
- $L[\text{cm}]$: Abgelesener Wert an Maßband in Zentimeter
- $EI[\text{m}]$: Elongation des Gummibandes in Meter
- $F[\text{N}]$: Kraft F in Newton
- $u_F[\text{N}]$: Unsicherheit der Kraft in Newton
- $D[\text{N/m}]$: Federkonstante D in Newton pro Meter
- $u_D[\text{N/m}]$: Unsicherheit der Federkonstante in Newton pro Meter

Tabelle 3: Messwerte

n_m[-]	m[kg]	u_m[kg]	L[cm]	El[m]	F[N]	u_F[N]	D[N/m]	u_D[N/m]
0	0.0000	0.0000000	11.2	0.000	0.0000	0.00000	NaN	NaN
1	0.0048	0.0000351	13.0	0.018	0.0471	0.00034	2.6160	0.0348
1	0.0100	0.0000351	13.3	0.021	0.0981	0.00034	4.6714	0.0474
2	0.0148	0.0000702	13.5	0.023	0.1452	0.00069	6.3125	0.0625
1	0.0198	0.0000351	13.6	0.024	0.1942	0.00034	8.0932	0.0690
2	0.0246	0.0000702	13.8	0.026	0.2413	0.00069	9.2818	0.0762
2	0.0298	0.0000702	13.8	0.026	0.2923	0.00069	11.2438	0.0905
3	0.0346	0.0001054	13.9	0.027	0.3394	0.00103	12.5713	0.1007
3	0.0398	0.0001054	14.0	0.028	0.3904	0.00103	13.9442	0.1062
4	0.0446	0.0001405	14.1	0.029	0.4375	0.00138	15.0871	0.1144
1	0.0499	0.0000351	14.0	0.028	0.4895	0.00034	17.4828	0.1255
2	0.0547	0.0000702	14.1	0.029	0.5366	0.00069	18.5037	0.1298
2	0.0599	0.0000702	14.2	0.030	0.5876	0.00069	19.5873	0.1326
3	0.0647	0.0001054	14.3	0.031	0.6347	0.00103	20.4744	0.1362
2	0.0699	0.0000702	14.4	0.032	0.6857	0.00069	21.4287	0.1356
3	0.0747	0.0001054	14.5	0.033	0.7328	0.00103	22.2063	0.1382
3	0.0797	0.0001054	14.5	0.033	0.7819	0.00103	23.6926	0.1470
4	0.0845	0.0001405	14.6	0.034	0.8289	0.00138	24.3807	0.1490
4	0.0897	0.0001405	14.6	0.034	0.8800	0.00138	25.8811	0.1575
5	0.0945	0.0001756	14.7	0.035	0.9270	0.00172	26.4870	0.1592
1	0.0995	0.0000351	14.8	0.036	0.9761	0.00034	27.1137	0.1509
2	0.1095	0.0000702	15.1	0.039	1.0742	0.00069	27.5435	0.1423
2	0.1193	0.0000702	15.3	0.041	1.1703	0.00069	28.5447	0.1403
3	0.1293	0.0001054	15.4	0.042	1.2684	0.00103	30.2008	0.1459
4	0.1393	0.0001405	15.6	0.044	1.3665	0.00138	31.0576	0.1446
2	0.1494	0.0000702	15.8	0.046	1.4656	0.00069	31.8612	0.1393
3	0.1594	0.0001054	16.0	0.048	1.5637	0.00103	32.5774	0.1374
3	0.1692	0.0001054	16.4	0.052	1.6599	0.00103	31.9202	0.1244
4	0.1792	0.0001405	16.6	0.054	1.7580	0.00138	32.5547	0.1232
5	0.1892	0.0001756	16.9	0.057	1.8561	0.00172	32.5623	0.1182
1	0.1985	0.0000351	17.3	0.061	1.9473	0.00034	31.9227	0.1048
2	0.2085	0.0000702	17.5	0.063	2.0454	0.00069	32.4664	0.1036
2	0.2183	0.0000702	17.8	0.066	2.1415	0.00069	32.4473	0.0989
3	0.2283	0.0001054	18.2	0.070	2.2396	0.00103	31.9946	0.0926
4	0.2383	0.0001405	18.5	0.073	2.3377	0.00138	32.0236	0.0897
2	0.2484	0.0000702	18.9	0.077	2.4368	0.00069	31.6468	0.0827
3	0.2584	0.0001054	19.3	0.081	2.5349	0.00103	31.2951	0.0783
3	0.2682	0.0001054	19.8	0.086	2.6310	0.00103	30.5935	0.0722
4	0.2782	0.0001405	20.0	0.088	2.7291	0.00138	31.0130	0.0722
5	0.2882	0.0001756	20.3	0.091	2.8272	0.00172	31.0686	0.0709
2	0.2980	0.0000702	20.9	0.097	2.9234	0.00069	30.1379	0.0625
3	0.3080	0.0001054	21.2	0.100	3.0215	0.00103	30.2148	0.0613
3	0.3178	0.0001054	21.5	0.103	3.1176	0.00103	30.2681	0.0596
4	0.3278	0.0001405	22.0	0.108	3.2157	0.00138	29.7752	0.0566
5	0.3378	0.0001756	22.3	0.111	3.3138	0.00172	29.8542	0.0560
3	0.3479	0.0001054	22.7	0.115	3.4129	0.00103	29.6774	0.0524
4	0.3579	0.0001405	23.0	0.118	3.5110	0.00138	29.7542	0.0518
4	0.3777	0.0001405	23.3	0.121	3.7052	0.00138	30.6218	0.0519
5	0.3877	0.0001756	23.6	0.124	3.8033	0.00172	30.6721	0.0514
6	0.3977	0.0002107	23.9	0.127	3.9014	0.00207	30.7200	0.0510
4	0.3990	0.0001405	24.5	0.133	3.9142	0.00138	29.4300	0.0455

n_m[-]	m[kg]	u_m[kg]	L[cm]	El[m]	F[N]	u_F[N]	D[N/m]	u_D[N/m]
5	0.4090	0.0001756	24.7	0.135	4.0123	0.00172	29.7207	0.0458
5	0.4188	0.0001756	25.0	0.138	4.1084	0.00172	29.7712	0.0449
6	0.4288	0.0002107	25.2	0.140	4.2065	0.00207	30.0466	0.0454
7	0.4388	0.0002458	25.5	0.143	4.3046	0.00241	30.1023	0.0454
5	0.4489	0.0001756	25.7	0.145	4.4037	0.00172	30.3704	0.0435
6	0.4589	0.0002107	26.1	0.149	4.5018	0.00207	30.2135	0.0429
6	0.4687	0.0002107	26.2	0.150	4.5979	0.00207	30.6530	0.0431
7	0.4787	0.0002458	26.5	0.153	4.6960	0.00241	30.6931	0.0431
8	0.4887	0.0002810	26.8	0.156	4.7941	0.00276	30.7317	0.0432

Versuch 2

Ziel

Untersuchung der Fragestellung, ob sich der Zusammenhang zwischen Kraft und Elongation verändert, wenn man die Angriffs Kraft auf einen Strang des Gummibandes anstatt auf zwei verteilt.

Eine Hypothese ist, dass die Auslenkung bei gleicher Gewichtskraft doppelt so hoch ist, weil die Kraft auf nur einen Strang wirkt.

Materialien

- Stativ
- Gummiband
- Gewichte
- Maßband
- Haken
- Klebeband
- Schere

Versuchsaufbau

- Analog zu Versuch 1, aber das Gummiband wurde vorher mit einer Schere zerschnitten und durch geknotete Schlaufen an Haken und Gewicht befestigt.



Abbildung 3: Versuchsaufbau 2

Durchführung

Analog zu Versuch 1. Wir haben uns dafür entschieden bis zur Marke von 100g in 5g - Intervallen und danach in 10g-Schritten zu messen, um die Daten dieser zwei Versuche gut vergleichen können. Da das Band



Abbildung 4: Versuchsaufbau 2, Nahansicht

allerdings viel stärker durch das Anbringen von Gewicht gedehnt wurde, konnten wir ab 360g keine Messungen mehr durchführen, da die Gewichte durch ihre Länge anfingen am Tisch aufzuliegen und so die Normalkraft die Gewichtskraft verfälscht hätte. Stattdessen haben wir den aus platztechnisch noch gut messbaren Wert für 400g (nur drei Gewichte) genommen und den Rest der Tabelle nicht ausgefüllt. Die Anfangsausdehnung x_0 lag in diesem Fall bei 15,8cm.

Fehlerquellen

Ein möglicher Faktor, der die Federkonstante verfälschen kann, ist neben den im Versuch 1 genannten Problemen, die Art der Befestigung, des nun einsträngigen Gummibandes. Diese geschah in Form eines Knotens am Haken. Dabei wurde ein Teil des Gummibandes verwendet, der im folgenden Versuch dann nicht gedehnt wurde.

Die dauerhafte Verlängerung des Gummibandes, die auch in Versuch 1 festgestellt wurde, beträgt für Versuch 2 6mm, von 15,8cm auf 16,4cm.

Messung

Auch hier wurden die gemessenen Längen in die gleiche csv-Datei gespeichert, wie in Versuch 1. Die Massen der Gewichte sind ebenfalls bekannt. Die Unsicherheiten der Waage und der Skala (Maßband) können ebenfalls übernommen werden, da es sich um die selben Geräte handelt. Da die Massen dieselben sind sind auch die Gewichtskräfte und deren Unsicherheiten dieselben.

Auswertung

Die Elongation muss erneut berechnet werden. Dafür wird die Anfangsausdehnung x_0 von den Ausdehnungen x_i abgezogen und in Meter umgerechnet werden.

Die Federkonstante wird gemäß Gleichung 1 berechnet. Ebenso deren Unsicherheiten für jeden einzelnen Wert gemäß Gleichung 2. Die Berechnung erfolgt mit Hilfe der Funktion “u_D_funktion”, welche in Versuch 1 definiert wurde.

```
# Entfernen von NA-Zeilen. Die Werte werden aus dem in Versuch 1 erstellten
# Dataframe kopiert
Messreihe2 <- Messreihe[complete.cases(Messreihe[,c(5,14,15)]),]

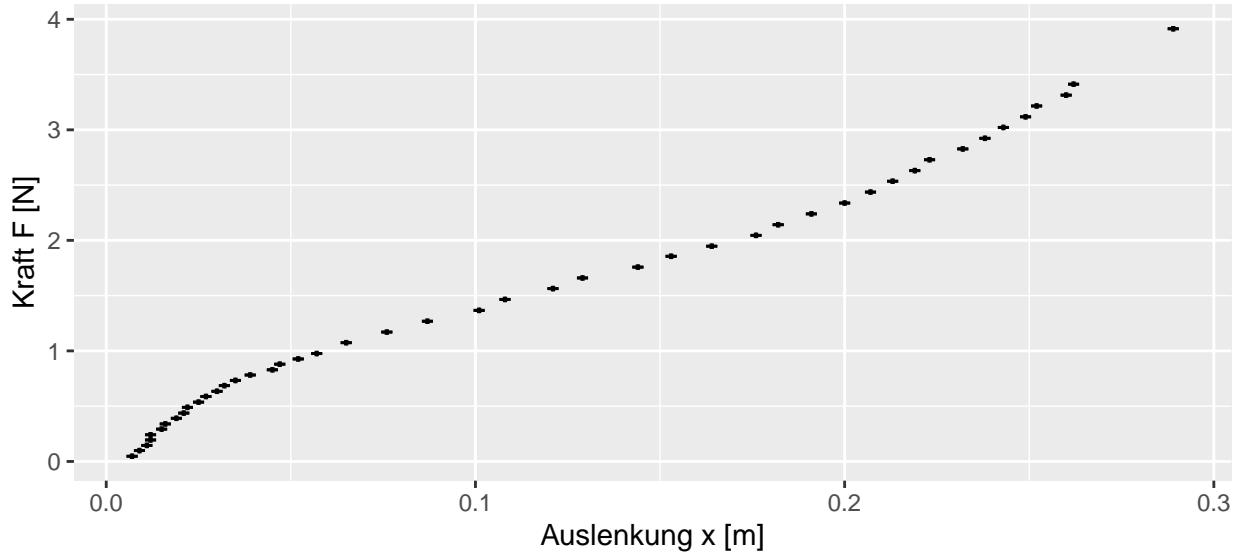
# Normierung der Auslenkung
Messreihe2$Auslenkung2_x0 <- Messreihe2$Auslenkung2-15.8

# Umrechnung in m
Messreihe2$Auslenkung2_x0_m <- Messreihe2$Auslenkung2_x0/100 #cm -> m
```

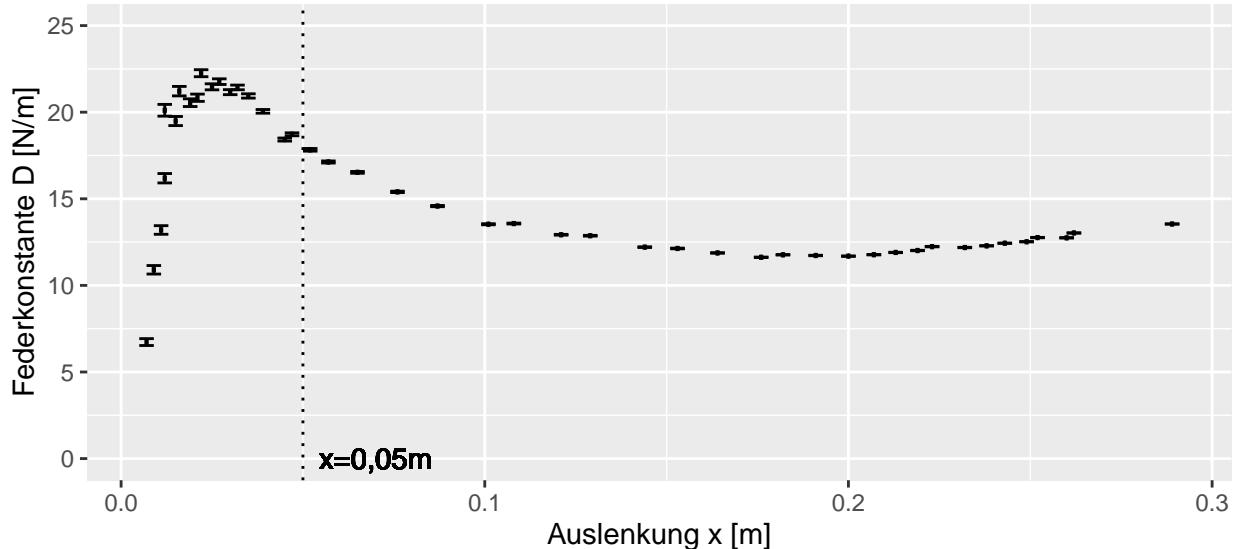
```
# Berechnung der Federkonstanten
Messreihe2$Federkonstante2 <- Messreihe2$Kraft/Messreihe2$Auslenkung2_x0_m

# Berechnung der Unsicherheit der Federkonstanten
Messreihe2$u_Federkonstante2 <- u_D_funktion(x=Messreihe2$Auslenkung2_x0_m,
                                              m=Messreihe2$Gewicht_kg,
                                              UM=Messreihe2$u_m)
```

Kraft-Auslenkung Diagramm:



Federkonstante-Auslenkung Diagramm:



Auch aus Gründen der Vergleichbarkeit werden bei der Berechnung eines Mittelwertes der Federkonstante in diesem Versuch die Werte für $x_i < 0.05\text{m}$ verworfen. Zudem wird in dem Federkonstante-Auslenkung Schaubild auch deutlich, dass für die Werte kleiner als ~5cm Auslenkung die Federkonstante ebenfalls keinen stabilen Wert annimmt, auch daher erscheint dieses Vorgehen sinnvoll. Berechnung des Mittelwertes, der Standardabweichung und der Standardabweichung des Mittelwertes gemäß der Formeln 3, 4, 5.

Tabelle 4: Statistische Größen zur zweiten bestimmten Federkonstante

	Werte
Mittelwert_MW	13.0996077
Standardabweichung_SD	1.6907616
SD_von_MW	0.3195239

Die in Versuch 2 bestimmte Federkonstante für eine Ausdehnung des Gummis über 5cm beträgt: $D_2 = (13,10 \pm 0,32) \frac{N}{m}$.

Interpretation

Damit ist die Federkonstante D_2 in etwa halb so groß wie D_1 . Für die gleiche Ausdehnung des Gummibandes aus Versuch 2 um eine Strecke x ist nur etwa die halbe Kraft vonnöten, wie sie für die gleiche Ausdehnung des ringförmigen Gummibandes aus Versuch 1 nötig wäre.

Aus diesem Grund nehmen wir die aufgestellte Hypothese erstmal an.

In einem weiteren Versuch würden wir testen, ob bei einer geeigneteren Befestigung des Gummibandes am Haken bzw. am Gewicht als durch die verwendeten Knoten, die bestimmte Gewichtskraft genauer der Hälfte der Federkonstante D_1 aus Versuch 1 entspricht. Denkbar wäre z.B. eine Befestigung mit Krokodilklemmen oder Ähnlichem.

Messwerte und errechnete Größen

Zusammenfassung der Werte aus Versuch 2, Spaltenbenennung analog zur Benennung in Versuch 1:

n_m[-]	m[kg]	u_m[kg]	L2[cm]	El2[m]	F[N]	u_F[N]	D2[N/m]	u_D2[N/m]	
2	1	0.0048	0.0000351	16.5	0.007	0.0471	0.00034	2.6160	0.1984
3	1	0.0100	0.0000351	16.7	0.009	0.0981	0.00034	4.6714	0.2452
4	2	0.0148	0.0000702	16.9	0.011	0.1452	0.00069	6.3125	0.2480
5	1	0.0198	0.0000351	17.0	0.012	0.1942	0.00034	8.0932	0.2713
6	2	0.0246	0.0000702	17.0	0.012	0.2413	0.00069	9.2818	0.3401
7	2	0.0298	0.0000702	17.3	0.015	0.2923	0.00069	11.2438	0.2639
8	3	0.0346	0.0001054	17.4	0.016	0.3394	0.00103	12.5713	0.2729
9	3	0.0398	0.0001054	17.7	0.019	0.3904	0.00103	13.9442	0.2230
10	4	0.0446	0.0001405	17.9	0.021	0.4375	0.00138	15.0871	0.2090
11	1	0.0499	0.0000351	18.0	0.022	0.4895	0.00034	17.4828	0.2029
12	2	0.0547	0.0000702	18.3	0.025	0.5366	0.00069	18.5037	0.1739
13	2	0.0599	0.0000702	18.5	0.027	0.5876	0.00069	19.5873	0.1632
14	3	0.0647	0.0001054	18.8	0.030	0.6347	0.00103	20.4744	0.1452
15	2	0.0699	0.0000702	19.0	0.032	0.6857	0.00069	21.4287	0.1356
16	3	0.0747	0.0001054	19.3	0.035	0.7328	0.00103	22.2063	0.1232
17	3	0.0797	0.0001054	19.7	0.039	0.7819	0.00103	23.6926	0.1062
18	4	0.0845	0.0001405	20.3	0.045	0.8289	0.00138	24.3807	0.0874
19	4	0.0897	0.0001405	20.5	0.047	0.8800	0.00138	25.8811	0.0849
20	5	0.0945	0.0001756	21.0	0.052	0.9270	0.00172	26.4870	0.0762
21	1	0.0995	0.0000351	21.5	0.057	0.9761	0.00034	27.1137	0.0604
22	2	0.1095	0.0000702	22.3	0.065	1.0742	0.00069	27.5435	0.0519
23	2	0.1193	0.0000702	23.4	0.076	1.1703	0.00069	28.5447	0.0415
24	3	0.1293	0.0001054	24.5	0.087	1.2684	0.00103	30.2008	0.0356
25	4	0.1393	0.0001405	25.9	0.101	1.3665	0.00138	31.0576	0.0301

n_m[-]	m[kg]	u_m[kg]	L2[cm]	El2[m]	F[N]	u_F[N]	D2[N/m]	u_D2[N/m]	
26	2	0.1494	0.0000702	26.6	0.108	1.4656	0.00069	31.8612	0.0259
27	3	0.1594	0.0001054	27.9	0.121	1.5637	0.00103	32.5774	0.0230
28	3	0.1692	0.0001054	28.7	0.129	1.6599	0.00103	31.9202	0.0215
29	4	0.1792	0.0001405	30.2	0.144	1.7580	0.00138	32.5547	0.0195
30	5	0.1892	0.0001756	31.1	0.153	1.8561	0.00172	32.5623	0.0194
31	1	0.1985	0.0000351	32.2	0.164	1.9473	0.00034	31.9227	0.0146
32	2	0.2085	0.0000702	33.4	0.176	2.0454	0.00069	32.4664	0.0138
33	2	0.2183	0.0000702	34.0	0.182	2.1415	0.00069	32.4473	0.0135
34	3	0.2283	0.0001054	34.9	0.191	2.2396	0.00103	31.9946	0.0134
35	4	0.2383	0.0001405	35.8	0.200	2.3377	0.00138	32.0236	0.0136
36	2	0.2484	0.0000702	36.5	0.207	2.4368	0.00069	31.6468	0.0119
37	3	0.2584	0.0001054	37.1	0.213	2.5349	0.00103	31.2951	0.0122
38	3	0.2682	0.0001054	37.7	0.219	2.6310	0.00103	30.5935	0.0119
39	4	0.2782	0.0001405	38.1	0.223	2.7291	0.00138	31.0130	0.0126
40	5	0.2882	0.0001756	39.0	0.232	2.8272	0.00172	31.0686	0.0129
41	2	0.2980	0.0000702	39.6	0.238	2.9234	0.00069	30.1379	0.0107
42	3	0.3080	0.0001054	40.1	0.243	3.0215	0.00103	30.2148	0.0111
43	3	0.3178	0.0001054	40.7	0.249	3.1176	0.00103	30.2681	0.0109
44	4	0.3278	0.0001405	41.0	0.252	3.2157	0.00138	29.7752	0.0115
45	5	0.3378	0.0001756	41.8	0.260	3.3138	0.00172	29.8542	0.0118
46	3	0.3479	0.0001054	42.0	0.262	3.4129	0.00103	29.6774	0.0107
51	4	0.3990	0.0001405	44.7	0.289	3.9142	0.00138	29.4300	0.0105

Pendel

Versuch 1

Ziel

Bestimmung der Erdbeschleunigung g . Dafür soll ein Pendel verwendet werden. Es wird der Zusammenhang der Schwingungsdauer (Periodendauer) T mit der Pendellänge L und der Erdbeschleunigung g verwendet. Es gilt:

$$T(L, g) = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g}}$$

In diesem Versuch soll L bekannt sein und g untersucht werden.

Der genannte Zusammenhang ergibt sich aus der Eigenschaft eines Fadenpendels nach einer kleinen Auslenkung x harmonisch zu schwingen. Die der Auslenkung entgegenwirkende Kraft, die Rückstellkraft $F_{Rück}$, ist proportional und entgegengesetzt zu x . Sie ist die resultierende Kraft aus der Gewichtskraft des Massenstücks am Pendel (der Faden wird als masselos angenommen) und der Zentripetalkraft (Zugkraft, durch den Faden in Richtung des Rotations-/Befestigungspunktes). Mit einer Kleinwinkelannäherung gilt für $F_{Rück}$ folgender Zusammenhang:

$$F_{Rück} = m * \ddot{x} = -\frac{g}{l} * m * x \quad (6)$$

Werden neben der Luftreibung auch andere, dem System "Fadenpendel" Energie entnehmende Effekte vernachlässigt, handelt es sich bei dem Pendel und der nun periodisch stattfindenden Umwandlung von potentieller Energie, am Punkte der Maximalauslenkung, in kinetische Energie, am Punkt der maximalen Geschwindigkeit, um einen harmonischen Oszillator. Die Auslenkung x aus Formel 1 ist dabei zeitabhängig und kann wie alle harmonischen Schwingungen durch Amplitude \hat{x} und Winkelgeschwindigkeit ω beschrieben

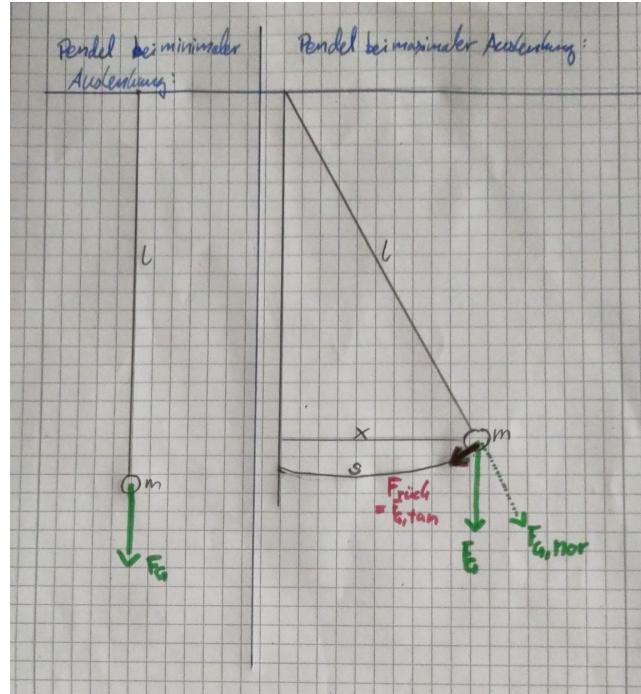


Abbildung 5: Wirkende Kräfte

werden:

$$x(t, \omega) = \hat{x} \cdot \cos(\omega \cdot t) \quad (7)$$

Die Winkelgeschwindigkeit ist dabei abhängig von Erdbeschleunigung und Pendellänge, vergleiche Formel 6, sie beträgt $\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}$. Über diese Winkelgeschwindigkeit kann mit dem Zusammenhang $T = 2\pi\omega$ die Periodendauer für einen Pendelschlag bestimmt werden als:

$$T(L) = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g}} \quad (8)$$

Materialien

- Stativ
- Pendel aus Angelschnur und Metallzylinder
- Maßband
- Messschieber
- Klebeband
- Stoppuhr
- Berechnungen finden in Excel und R statt

Versuchsaufbau

- Aufstellung des Stativs, Befestigung oberhalb des Tisches
- Befestigung des Maßbandes am Stativ mit Hilfe von Klebeband

Durchführung

Nach dem Versuchsaufbau wird mit der Versuchsdurchführung begonnen. Dazu wird die Pendellänge vermessen, indem am Maßband die Position des Drehpunktes (L1) und die Position der Oberkante des Zylindergewichtes abgelesen werden (L2). Die Höhe des Zylindergewichtes wird mit einem Messschieber vermessen (L3).

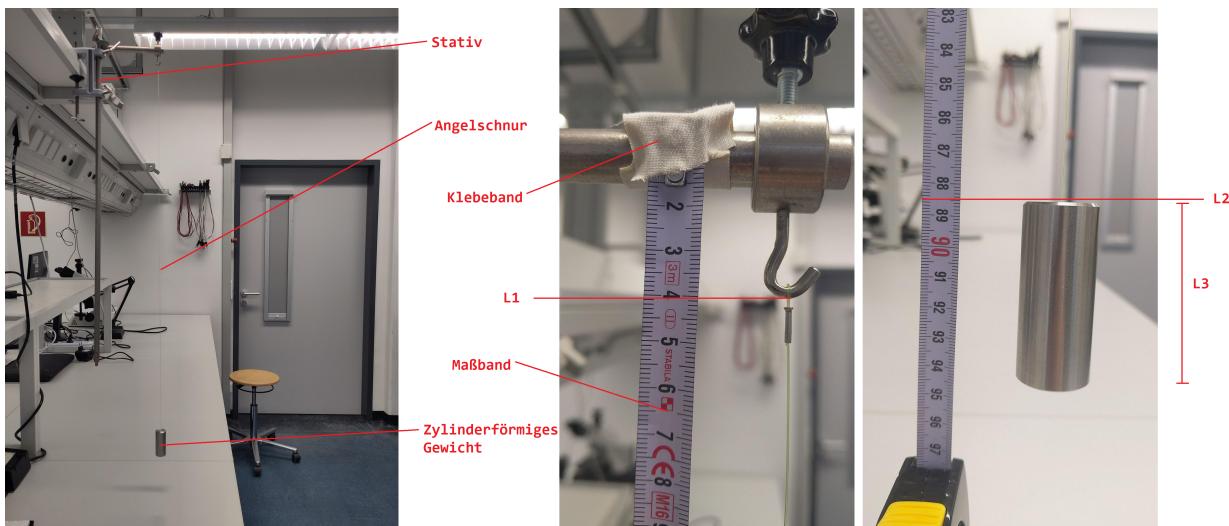


Abbildung 6: Versuchsaufbau

Im Anschluss wird die Periodendauer für diese Pendellänge bestimmt. Dazu wird das Pendel aus der Ruheposition ausgelenkt und nach ein paar Pendelschlägen mit der Zeitmessung begonnen. Die Zeit wird beim Durchgang durch den Ort der maximalen Geschwindigkeit sowohl gestartet als auch gestoppt, um die Reaktionszeit möglichst kurz zu halten. Es werden insgesamt 5 Messungen durchgeführt um einen Mittelwert bilden zu können.

Fehlerquellen

Beim Auslenken des Pendels gibt es **unregelmäßige Bewegungen (Wackeln)**, die entgegen der Pendelbahn laufen.

Beim Abmessen der Pendellänge ist der **personenbezogene Ablesefehler** zu erwähnen. Diesen versuchten wir weitestgehend zu eliminieren, indem nur eine Person eine vollständige Datenreihe aufnahm.

Außerdem verlängert die **Reaktionszeit** sowohl bei Start als auch bei Stopp der Messung tendenziell die gemessene Periodendauer. Um diesen Fehler möglichst gering zu halten, wurden zehn Periodendurchläufe gemessen und die Periodendauer danach gemittelt. Auch hier nahm nur eine Person die Datenreihe auf, um die Reaktionszeit ähnlich zu halten.

Folgende Annahmen mussten darüber hinaus getroffen werden:

- Bewegung des Pendelkörpers und des Fadens verläuft reibungsfrei
- Masse des Fadens wird vernachlässigt
- Der Pendelkörper wird nur um eine kleine Strecke ausgelenkt
- Die Angelschnur ist inelastisch

Messungen

Im Laufe von Versuch 1 wurden folgende Messwerte aufgenommen, auf die sich in der folgenden Auswertung bezogen wird:

Tabelle 6: Messwerte aus Versuch 1

Messgröße	Wert
L1: Position Drehpunkt [cm]	4.00
L2: Position Fadenende [cm]	88.50

Messgröße	Wert
L3: Höhe Zylinder [cm]	5.87
10-Periodendauer [s]	18.75
10-Periodendauer [s]	18.72
10-Periodendauer [s]	18.85
10-Periodendauer [s]	18.85
10-Periodendauer [s]	18.72

Die fünf Punkte “10-Periodendauer [s]” sind die fünfmal durchgeführten Messungen, aus denen der Mittelwert berechnet werden soll.

Auswertung

Pendellänge L und Unsicherheit u_L

Die Pendellänge L wird bestimmt, indem die Differenz von L_1 und L_2 berechnet wird, siehe Tabelle im Abschnitt *Messungen*. Es wird auch darauf geachtet, die Distanz von der Pendeloberkante bis zum Massenschwerpunkt des Pendels dazuzurechnen. Dafür wird die Massenverteilung in dem Metallzylinder-Gewicht als homogen angenommen. Die zu der Fadenlänge zu addierende Länge entspricht dann der halben Zylinderhöhe L_3 . Der Bestwert der errechneten Pendellänge L beträgt dann:

$$\begin{aligned} L &= L_2 - L_1 + \frac{L_3}{2} \\ &= 0,885m - 0,04m + \frac{0,0587}{2}m \\ &= 0,87435m. \end{aligned}$$

```
# Bestwert Pendellänge in Metern
0.885-0.04+0.0587/2
```

```
## [1] 0.87435
```

Die Unsicherheit der Pendellänge setzt sich aus den zu L_1 , L_2 und L_3 gehörigen Messunsicherheiten zusammen:

$$\begin{aligned} u_L &= \sqrt{\left(\frac{\partial L}{\partial L_2} \cdot u_{Massband}\right)^2 + \left(\frac{\partial L}{\partial L_1} \cdot u_{Massband}\right)^2 + \left(\frac{\partial L}{\partial L_3} \cdot u_{Messschieber}\right)^2} \\ &= \sqrt{u_{Massband}^2 * \left(\frac{\partial L}{\partial L_2}^2 + \frac{\partial L}{\partial L_1}^2\right) + \left(\frac{\partial L}{\partial L_3} \cdot u_{Messschieber}\right)^2} \\ &= \sqrt{\left(\frac{10^{-3}m}{2\sqrt{6}}\right)^2 * (1^2 + (-1)^2) + (0,5 * \frac{10^{-4}m}{2\sqrt{6}})^2} \\ &\approx 0,29 \cdot 10^{-4}m \end{aligned} \tag{9}$$

Mit:

- Messunsicherheit des Maßbandes: $u_{Massband} = \frac{10^{-3}m}{2\sqrt{6}}$
- Messunsicherheit des Messschiebers: $u_{Messschieber} = \frac{10^{-4}m}{2\sqrt{6}}$

```
# Berechnung von u_L in R
sqrt(2*((((10**-3)/(2*sqrt(6)))**2)+((10**-4)/(2*sqrt(6))))**2)
```

```
## [1] 0.0002893959
```

Damit beträgt die Pendellänge für Versuch 1 $L = (0,87435 \pm 0.00029)m$.

Periodendauer T und Unsicherheit u_T

Als Zeit für zehn Perioden T_{10T} in Sekunden wird der Mittelwert der fünf Messungen aus der Tabelle im Abschnitt *Messungen* berechnet.

```
T_10T <- mean(Werte[4:8])
T_10T
```

```
## [1] 18.778
```

Die mittlere Periodendauer T in Sekunden wird bestimmt, indem T_{10T} durch die Anzahl von Perioden $n = 10$ geteilt wird.

$$T_{10T} = n * T \Leftrightarrow T = \frac{18,778s}{10} = 1.8778s$$

Die Messunsicherheit der digitalen Stoppuhr $u_{Stoppuhr}$ ist die Unsicherheit für T_{10T} . Deren kleinste ablesbare Größenordnung sind Millisekunden. Damit folgt für u_{10T} : $u_{10T} = \frac{a}{2\sqrt{3}} = \frac{0,01s}{2\sqrt{3}} \approx 0,0029s$.

Die Unsicherheit der Periodendauer u_T ist für zehn Perioden dann ein Zehntel der Messunsicherheit für zehn Perioden, also $u_T = 0.00029s$.

Damit ergibt sich die Periodendauer als: $T = (1.87780 \pm 0.00029)s$.

Berechnung der Erdbeschleunigung g und der Unsicherheit u_g

Mit den Bestwerten für die Pendellänge L und die Periodendauer T kann der Bestwert der Erdbeschleunigung g berechnet werden. In Formel 8 eingesetzt ergibt sich mit $L = 0,8744m$ und $T = 1,878s$:

$$\begin{aligned} g &= \frac{4 * \pi^2 * l}{T^2} \\ &\Rightarrow = \frac{4 * \pi^2 * 0,87435m}{(1,8778s)^2} \\ &= 9,789182 \frac{m}{s^2} \end{aligned}$$

```
(4*pi**2*0.87435)/(1.8778**2)
```

```
## [1] 9.789182
```

Messunsicherheit u_g der Erdbeschleunigung g :

$$\begin{aligned} u_g &= \sqrt{\left(\frac{\partial g}{\partial T} * u_T\right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial l} * u_l\right)^2} \\ &= \sqrt{\left(\frac{-8 * \pi^2 * l}{T^3} * u_T\right)^2 + \left(\frac{4 * \pi^2}{T^2} * u_l\right)^2} \\ &\Rightarrow = \sqrt{\left(\frac{-8\pi^2 * (0,87435m)}{(1,8778s)^3} * (0,00029s)\right)^2 + \left(\frac{4\pi^2}{(1,8778s)^2} * (0,00029m)\right)^2} \\ u_g &\approx \pm 0,0044 \frac{m}{s^2} \end{aligned}$$

```
# Berechnung von u_g in R
sqrt((-8*pi**2*0.87435)/(1.8778)**3 *0.00029)**2+( (4*pi**2)/(1.8778)**2 *0.00029 )**2)
## [1] 0.004436673
```

Damit haben wir in Versuch 1 eine Erdbeschleunigung von $g = (9,7891 \pm 0,0044) \frac{m}{s^2}$ gemessen.

Interpretation

Der Literaturwert von $g = 9,81 \frac{m}{s^2}$ liegt damit nicht im Fehlerintervall. Eventuell kann in einem Versuch, bei dem die Pendellänge variiert wird ein besseres Ergebnis erzielt werden.

Versuch 2

Der zweite Versuch läuft analog zum ersten Versuch. Allerdings werden statt nur einer Messreihe 5 verschiedene - jeweils mit einer anderen Fadenlänge - Messreihen aufgenommen. Um die Pendellängen zu variieren wurde der Faden für kürzere Fadenlängen mit Klebeband am Zylinder stückchenweise festgeklebt. Für längere Pendellängen wurden weitere Stücke Angelschnur an das Pendel geknotet.

Fehlerquellen

Die Fehlerquellen sind dieselben wie beim ersten Versuch. Allerdings ist hierbei zu bemerken, dass die Reaktionszeit bei kürzeren Fadenlängen und daraus resultierenden kürzeren Periodendauern verhältnismäßig zunimmt. Auch von der Bahn abweichende Bewegungen nehmen bei kürzeren Pendellängen zu. Zudem ist nicht untersucht, wie sich Klebeband bzw. Knoten im Faden auf das Pendelverhalten auswirken.

Messungen

In die zu diesem Versuch gehörigen Werte wurden auch die Messwerte aus Versuch 1 integriert. Es wurde wieder so verfahren, dass pro Pendellänge fünf Messungen der Zeit für 10 Perioden gemessen und der Mittelwert berechnet wurde.

Die Messwerte sind die folgenden:

	Versuch 1	Versuch 2	Versuch 3	Versuch 4	Versuch 5	Versuch 6	Versuch 7
L1:Oberes_Ende_in_cm	4.0000	4.0000	4.0000	4.0000	4.0000	4.0000	4.0000
L2:UnteresEnde_in_cm	88.5000	74.3000	58.6000	46.0000	30.3000	114.9000	148.6000
L3:Zylinderhoehe_in_cm	5.8700	5.8700	5.8700	5.8700	5.8700	5.8700	5.8700
Pendellaenge_L	87.4435	73.2435	57.5435	44.9435	29.2435	113.8435	147.5435
Zeit_fuer_10-Perioden_1	18.7500	17.2200	15.4700	13.4400	10.8500	21.5000	24.3700
Zeit_fuer_10-Perioden_2	18.7200	17.2800	15.4400	13.5000	10.9700	21.4400	24.4400
Zeit_fuer_10-Perioden_3	18.8500	17.1800	15.5000	13.5000	10.9400	21.4400	24.4400
Zeit_fuer_10-Perioden_4	18.8500	17.2800	15.5600	13.5300	11.0300	21.5000	24.4700
Zeit_fuer_10-Perioden_5	18.7200	17.2500	15.4400	13.5300	10.9100	21.4700	24.7300
10-Perioden_Mittelwert	18.7800	17.2400	15.4800	13.5000	10.9400	21.4700	24.4900

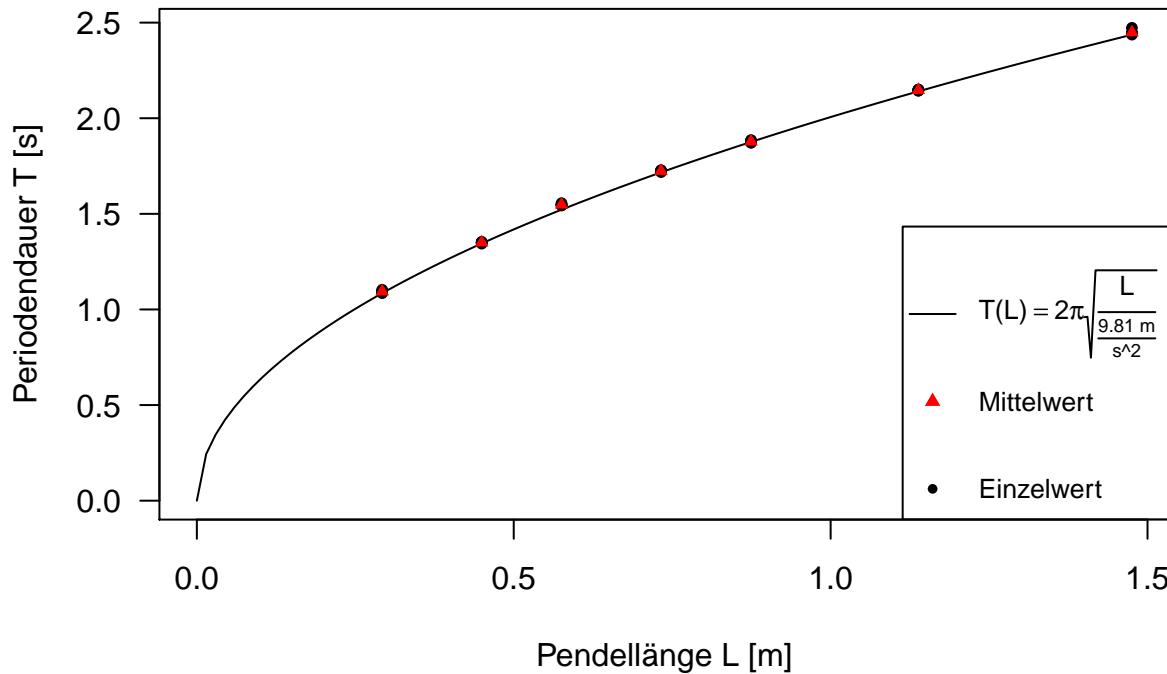
Auswertung

Bereits aus Versuch 1 bekannte Größen

Damit sind die Werte für die Pendellänge sowie deren konstante Unsicherheit $u_L = 0,00029m$, siehe Formel 9, bekannt. Ebenso sind die Werte für die Periodendauer T bekannt, diese entsprechen einem Zehntel der Zeit für die gemessenen zehn Perioden. Die Unsicherheit für T ist auch aus Versuch 1 übernehmbar, diese beträgt $u_T = 0,00029s$.

Graphische Darstellung der Messwerte

Zur Veranschaulichung der Messwerte wird die Periodendauer T gegen die Pendellänge aufgetragen:



In diesem Diagramm sind die Fehlerbalken nicht sichtbar, was an den kleinen Fehlern liegt. Als Ersatz wurde zur Validierung der Messwerte die Funktion $T(L) = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$ mit dem Literaturwert der Erdbeschleunigung für Berlin von $g \approx 9,81 \frac{m}{s^2}$ eingezeichnet. Daran wird ersichtlich, dass die Messwerte alles in allem ganz gut sind.

Linearisierung

Mittels einer Linearisierung erfolgt die Berechnung von g für diesen Versuch. Quadrierung von Formel 8 ergibt:

$$T^2 = 4\pi^2 \frac{L}{g}$$

Daraus folgt eine Geradengleichung der Form $T^2(L) = k(L) = a * L + y$ mit der Steigung $a = \frac{4\pi^2}{g}$ und dem y-Achsenabschnitt y . Nach der Quadrierung der Messwerte für T kann eine lineare Regression durchgeführt werden. Eine Prüfung der Korrelation liefert einen Korrelationskoeffizienten von 0,9998.

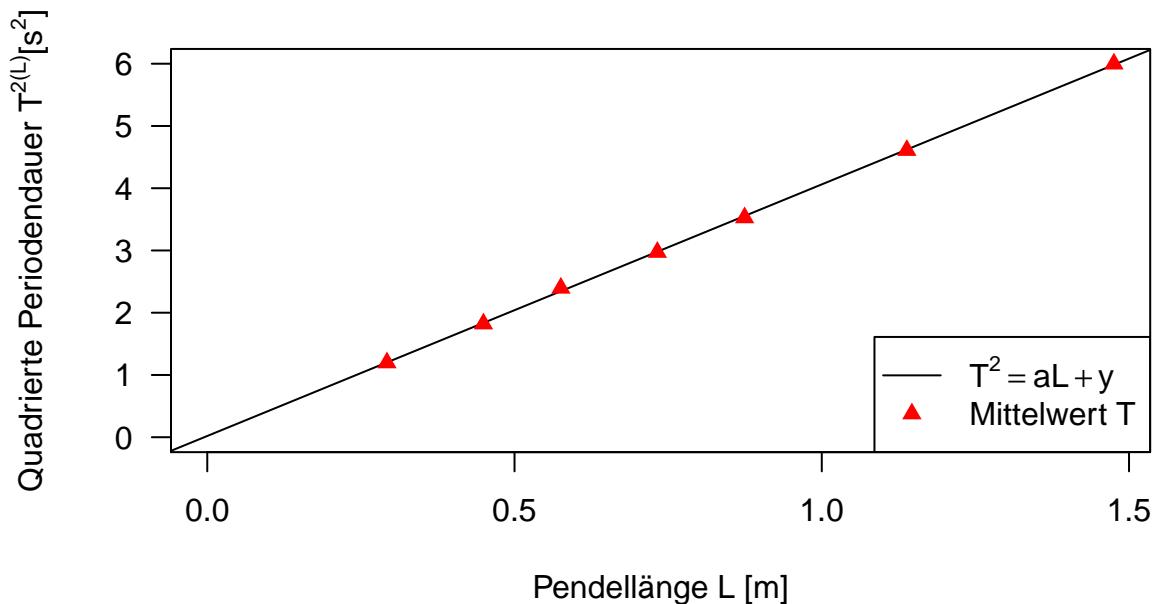
```
# Berechnung der linearisierten Funktionswerte
xlin=WerteT$Pendellaenge_L/100 # in m
ylin=(WerteT$`10-Perioden_Mittelwert`/10)**2 # in s
# Korellationskoeffizient
cor(x=xlin, y=ylin, method='pearson')

## [1] 0.9998811
```

Die lineare Regression erfolgt in R mittels QR-Faktorisierung in der lm()-Funktion.

```
lm <- lm(ylin~xlin);lm
##
## Call:
## lm(formula = ylin ~ xlin)
##
## Coefficients:
## (Intercept)      xlin
##          0.01952     4.04209
```

Im folgenden Schaubild ist die Funktionsgerade der linearen Regression zusehen. Dabei ist die Steigung $a = \frac{4\pi^2}{g} = 4,04209$ und der y-Achsenabschnitt $y = 0,01952$. Ebenfalls eingezeichnet sind die quadrierten Mittelwerte der Messwerte für die Periodendauer T bei den untersuchten Pendellängen.



Berechnung der Erdbeschleunigung

Aus der Steigung a kann die Erdbeschleunigung g bestimmt werden:

$$\begin{aligned} a &= \frac{4\pi^2}{g} \\ \Rightarrow g &= \frac{4\pi^2}{4,04209} \\ &= 9,766832901879 \left[\frac{m}{s^2} \right] \end{aligned}$$

Berechnung von u_g

Bei der Berechnung der Linearen Regression gibt die R funktion lm() folgenden output:

```
summary(lm)
```

```

## 
## Call:
## lm(formula = ylin ~ xlin)
## 
## Residuals:
##       1        2        3        4        5        6        7 
## -0.027180 -0.007911  0.050824 -0.013677 -0.004733 -0.011566  0.014242 
## 
## Coefficients:
##             Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)    
## (Intercept) 0.01952   0.02447   0.798   0.461    
## xlin         4.04209   0.02788 144.976 2.96e-10 *** 
## --- 
## Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1 
## 
## Residual standard error: 0.02804 on 5 degrees of freedom 
## Multiple R-squared:  0.9998, Adjusted R-squared:  0.9997 
## F-statistic: 2.102e+04 on 1 and 5 DF,  p-value: 2.962e-10

```

Mangels besseren Wissens nehmen wir den Standardfehler der Steigung a , wegen $g = 4\pi^2/a$, als Unsicherheit für g . Damit haben wir mit dem zweiten Versuchsansatz eine Erdbechleunigung von $g = (9,767 \pm 0,028)\frac{m}{s^2}$.

Interpretation

Auch dieser Wert ist niedriger als der Literaturwert der Erdbeschleunigung für Deutschland mit $g \approx 9,81\frac{m}{s^2}$. Trotz des im Vergleich zum ersten Versuchsansatzes größeren Fehlers, liegt der Literaturwert auch nicht im Fehlerintervall der bestimmten Erdbeschleunigung.

Vergleich der Versuche

- Versuch: $g = (9,7891 \pm 0,0044)\frac{m}{s^2}$
- Versuch: $g = (9,767 \pm 0,024)\frac{m}{s^2}$

In Versuch 1 ist sowohl das präzisere, als auch das akkurate Ergebnis erzielt worden, als in Versuch 2.

Kalorimeter

Versuch 1

Thema

Bestimmung der Wärmekapazität eines Kaloriometers. Dieses soll in Versuch 2 dafür verwendet werden, die spezifische Wärmekapazität zweier Metalle zu bestimmen.

Versuchsaufbau und Durchführung

Zu Beginn des eigentlichen Versuches wird die Raumtemperatur gemessen, für später auftretende Fragestellungen.

Das Kalorimeter wird leer gewogen. Im Messzylinder werden ca. 170ml destilliertes Wasser abgemessen und anschließend in das Kalorimeter gefüllt. In diesem Zustand wird noch einmal die Masse des nun vollen Kaloriometers gemessen, um die Wassermasse bestimmen zu können.

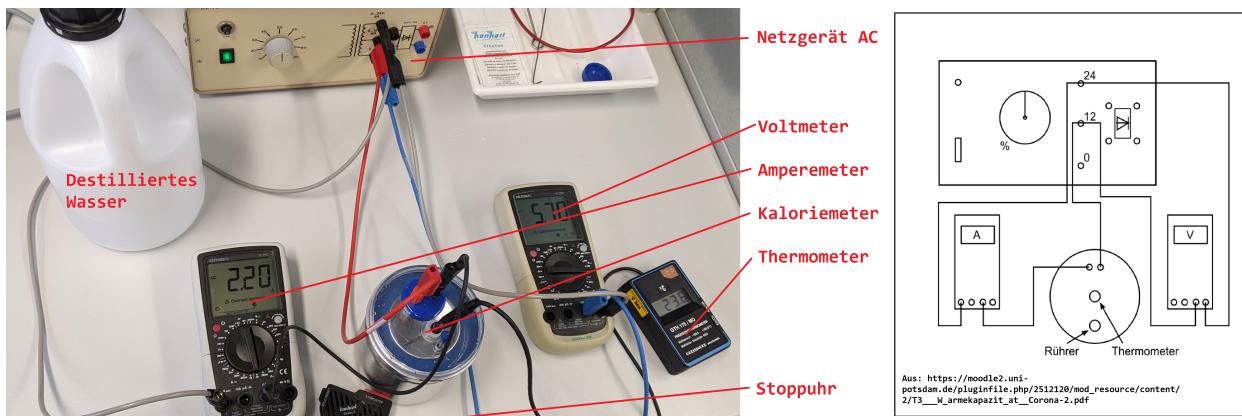


Abbildung 7: Versuchsaufbau und Skizze des Schaltplans

Der Deckel des Kaloriemeters mit Heizspirale, Thermometer und Rührstab wird verschlossen. Die Heizspirale wird über Bananenstecker mit dem AC Netzgerät verbunden. Ein Amperemeter wird in Reihe und ein Voltmeter parallel geschaltet.

Am Netzgerät wird eine mittlere Leistung eingestellt (50%) und über den Zeitraum von sieben Minuten eine Temperatur-Zeit Messreihe aufgenommen. Während der Erhitzung werden die Stromspannung und die Stromstärke abgelesen. Diese Schwanken zwar leicht in der Zeit, jedoch immer um einen festen Wert, welcher notiert wird.

Die steigende Innentemperatur im Kaloriemeter wird alle dreißig Sekunden am Thermometer abgelesen und ebenfalls notiert. Mit Hilfe der Rührvorrichtung am Kaloriemeter wird sichergestellt, dass sich das Wasser so gleichmäßig wie möglich erwärmt.

Fehlerbetrachtung

Neben den Messunsicherheiten bei der Benutzung von Messbechern, Multimetern und Waagen ist vor allem die Tatsache aufzuführen, dass das Kaloriemeter **kein perfekt geschlossenes System** ist. Es ist zwar doppelwandig und luftisoliert, jedoch wirken die äußeren Temperaturgegebenheiten auf die Innentemperatur des Kaloriemeters und verfälschen den Erwärmungsprozess.

Die zu erstellende Temperatur-Zeitreihe unterliegt sowohl **Unsicherheiten beim Abnehmen der Temperatur zum richtigen Zeitpunkt** als auch der **Skalenunsicherheit** des digitalen Thermometers selbst. In beiden Fällen stellen sich die Beträge der Unsicherheiten aber als vergleichsweise klein heraus.

Beobachtungen

Die Wassermasse, welche sich als Differenz aus Leer- und Vollgewicht des Kaloriemeters berechnet, beträgt $(328,8 - 165,1)g = 163,7g$. Die Messunsicherheit ist die doppelte Skalenunsicherheit der verwendeten digitalen Waage, also $u_m = 2 \cdot \frac{0,1g}{2\sqrt{3}} = \pm 0,029g$.

Die Spannung liegt bei $5,70V$, die Messunsicherheit liegt bei $u_U = \frac{0,01V}{2\sqrt{3}} = \pm 0,0029V$. Die Stromstärke liegt bei $2,20A$, die Messunsicherheit $u_A = \frac{0,01A}{2\sqrt{3}} = \pm 0,0029A$.

Die Erhitzung im Kaloriemeter zeigt folgenden Temperaturverlauf:

Die Messunsicherheiten sind aufgrund ihrer Größe nicht sichtbar. Diese betragen für die Zeit $u_t = \frac{0,1s}{2\sqrt{3}} = \pm 0,029s$ bzw. $u_T = \frac{0,1 ^\circ C}{2\sqrt{3}} = \pm 0,029 ^\circ C$ für die Messunsicherheit der Temperatur.

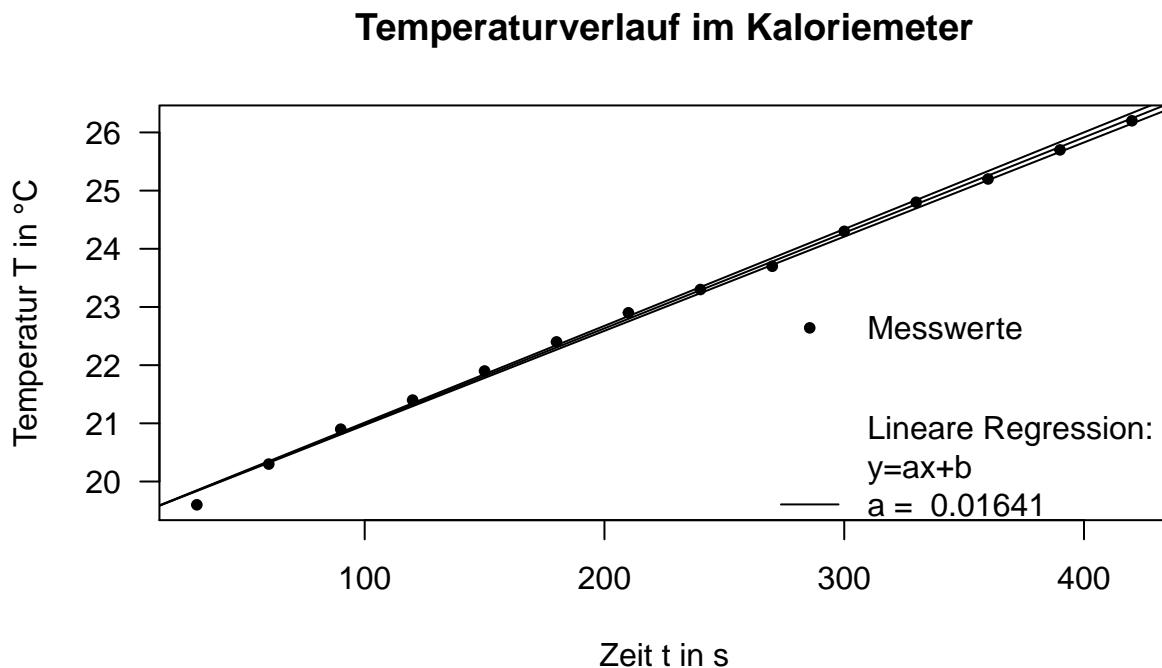


Abbildung 8: Für sieben Minuten wurde der Temperaturverlauf der Erhitzung des Wassers im Kalorimeter gemessen

Auswertung

Der Temperaturverlauf in Abbildung 1 macht im betrachteten Zeitraum einen linearen Eindruck. Eine mittels der `lm()`-Funktion in R berechnete Regressionsgerade der Form $T(t) = A \cdot t + B$ hat die Steigung $a = (1641 \pm 22) \cdot 10^{-5} \text{ K s}^{-1}$:

```
# Lineare Regression
lm <- lm(zeitreiheErhitzung$Temperatur ~ zeitreiheErhitzung$Zeit_s)
summary(lm)
```

```
##
## Call:
## lm(formula = zeitreiheErhitzung$Temperatur ~ zeitreiheErhitzung$Zeit_s)
##
## Residuals:
##      Min       1Q   Median       3Q      Max
## -0.24286 -0.04863  0.01868  0.07830  0.10330
##
## Coefficients:
##                               Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
## (Intercept)             1.935e+01  5.546e-02 348.90  <2e-16 ***
## zeitreiheErhitzung$Zeit_s 1.641e-02  2.171e-04   75.58  <2e-16 ***
## ---
## Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
##
## Residual standard error: 0.09824 on 12 degrees of freedom
```

```
## Multiple R-squared:  0.9979, Adjusted R-squared:  0.9977
## F-statistic:  5713 on 1 and 12 DF,  p-value: < 2.2e-16
```

Für den Temperaturverlauf ist folgender Zusammenhang bekannt [@Skript.Kaloriemeter]:

$$T(t) = \frac{U \cdot I}{C_K + C_W} \cdot t + T_A$$

Mit: C_K : Wärmekapazität Kaloriemeter ohne Wasser; C_W : Wärmekapazität des Wassers; U : Angelegte Spannung; I : Stromstärke; t : Zeit; $T(t)$: Temperatur zum Zeitpunkt t ; T_A : Anfangstemperatur

Wird diese Gleichung nach der Wärmekapazität des Kaloriometers C_K umgestellt erhält man mit der Steigung der Regressionsgeraden A für C_K :

$$C_K = \frac{U * I}{A} - c_W * m_W$$

Nun kann die Berechnung der Wärmekapazität des Kaloriometers vorgenommen werden. Dazu wird noch die spezifische Wärmekapazität von Wasser benötigt. Diese wird im Tippler in Tabelle 15.1 auf Seite 569 mit $4,18 \frac{kJ}{kg \cdot K}$ angegeben [@Tipler.2015].

$$\begin{aligned} C_K &= \frac{U * I}{A} - c_W * m_W \\ &\Rightarrow = \frac{5,70V * 2,20A}{0,01641 \frac{K}{s}} - 4180 \frac{J}{kg \cdot K} * 0,1637kg \\ &\Leftrightarrow \text{mit VAs=J} = 79,90219 \frac{J}{K} \end{aligned}$$

```
# Berechnung der Wärmekapazität des Kaloriometers in R
(5.7*2.2)/(0.01641)-4180*0.1637
```

```
## [1] 79.90219
```

Die Messunsicherheit von C_K kann auf folgende Weise berechnet werden:

$$\begin{aligned} u_{C_K} &= \sqrt{\left(\frac{\partial C_K}{\partial U} * u_U\right)^2 + \left(\frac{\partial C_K}{\partial I} * u_I\right)^2 + \left(\frac{\partial C_K}{\partial A} * u_A\right)^2 + \left(\frac{\partial C_K}{\partial m_w} * u_{m_w}\right)^2} \\ &= \sqrt{\left(\frac{I}{A} * u_U\right)^2 + \left(\frac{U}{A} * u_I\right)^2 + \left(\frac{U * I}{A^2} * u_A\right)^2 + (c_w * u_{m_w})^2} \\ &= \sqrt{\left(\frac{2,20A}{0,01641 \frac{K}{s}} * 0,0029V\right)^2 + \left(\frac{5,70V}{0,01641 \frac{K}{s}} * 0,0029A\right)^2 + \left(\frac{5,70V * 2,20A}{(0,01641 \frac{K}{s})^2} * 0,00022 \frac{K}{s}\right)^2} \\ &\quad + \left(4180 \frac{J}{kg \cdot K} * 29 \cdot 10^{-6} kg\right)^2}^{\frac{1}{2}} \\ &= 10.30224 \frac{J}{K} \end{aligned}$$

```
# Berechnung in R
sqrt((2.20/0.01641*0.0029)**2+(5.70/0.01641*0.0029)**2+
      (5.70*2.20/0.01641**2*0.00022)**2+(4180*29*10**(-6))**2)
```

```
## [1] 10.30224
```

Damit wurde eine Wärmekapazität des Kaloriometers von $C_K = (80 \pm 10) \frac{J}{K}$ festgestellt. Das Ergebnis ist mit einer vergleichsweise hohen Unsicherheit behaftet.

Versuch 2

Thema

Dieser Versuch baut auf dem vorherigen Versuch 1 auf. Es soll die spezifische Wärmekapazität zweier Metalle bestimmt werden, wofür die in Versuch 1 ermittelte Wärmekapazität des Kaloriometers C_K benötigt wird. Diese wurde als $C_K = (80 \pm 10) \frac{J}{K}$ bestimmt. Im Kaloriometer soll durch die Herstellung einer Mischtemperatur T_M zwischen, auf eine Anfangstemperatur T_A , erwärmtem Wasser und einem Metall auf Raumtemperatur T_B die materialspezifische Wärmekapazität bestimmt und so auf die Metallart geschlossen werden.

Versuchsaufbau

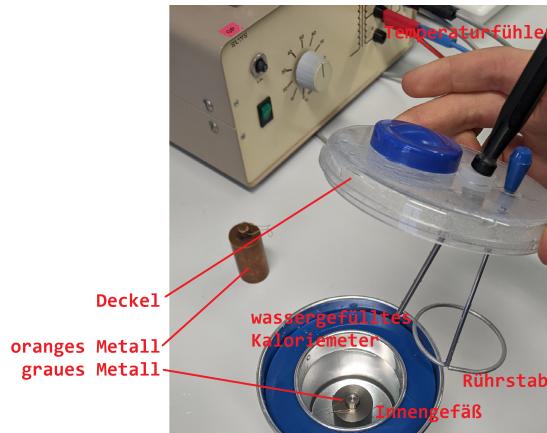


Abbildung 9: Das mit Wasser und einem Metallzyylinder gefüllte Kaloriometer

Wasser wird auf einer Heizplatte auf ca. 50°C erwärmt. Dann wird das Thermometer in den Deckel des Kaloriometers gesteckt, das Wasser eingefüllt, der Deckel geschlossen und T_A am Thermometer abgelesen.

Fehlerbetrachtung

Viel mehr noch, als in Versuch 1, ist der **Wärmeverlust** während des Versuches eine Fehlerquelle. Dies ist bedingt durch den starken Temperaturgradienten von ca. 30K zwischen der Innentemperatur des Kaloriometers und der Raumtemperatur, welche bei ca. 20°C lag. Der darum hohe Wärmeabfluss aus dem Kaloriometer ist besonders am Deckel bemerkbar, welcher sich während des Versuches spürbar erwärmt.

Unter anderem dieser Effekt führte dazu, dass es keinen eindeutig bestimmmbaren Wert für die Mischtemperatur im Kaloriometer gab. Stattdessen fiel der Temperaturwert stetig. Es wurde dann ein Wert notiert, der, um den steigenden Einfluss des Wärmeverlustes klein zu halten, zu einem Zeitpunkt abgelesen wurde, als sich die Temperaturabnahme im Kaloriometer deutlich verlangsamt.

Eventuell wäre eine Erwärmung des Wassers auf z.B. 30°C für den Versuch ausreichend gewesen und hätte bessere Ergebnisse geliefert, aufgrund der dann geringeren Wärmeabgabe des Kaloriometers.

Weitere Fehlerquellen sind Messunsicherheiten, welche im Gegensatz zum Wärmeverlust aber in den folgenden Fehlerrechnungen berücksichtigt werden.

Durchführung

Die zwei Metalle werden nacheinander untersucht. Zuerst ein kupferfarbenes, im Vergleich schwereres Metall, als zweites ein aluminiumgraues, leichteres Metall.

Die Volumenbestimmung der Metallzyliner erfolgte über die Bestimmung der Wasserverdrängung in einem Standzyliner.

Da die Metallzyliner gut 20ml Volumen einnahmen, wurden im Becherglas wurden für jeden Versuch ca. 150ml Wasser abgemessen, um das Kalorimeter mit ca. 170ml ausreichend zu füllen. Die Bestimmung der verwendeten Wassermasse erfolgte dann durch Abwiegen des vollen und des leeren Becherglases und durch anschließendes Subtrahieren der beiden Werte. Die Messunsicherheit der Wassermasse beträgt zweimal die Skalenunsicherheit der verwendeten digitalen Waage, also $u_{m_w} = 2 * \frac{0.1g}{2\sqrt{3}} = \pm 0.058g$.

Nach der Bestimmung des Metallvolumens und der Masse des Wassers wurde dieses im Becherglas auf etwa 50°C erwärmt. Die genaue Anfangstemperatur wurde anschließend im Kalorimeter gemessen. Die Skalenunsicherheit des digitalen Thermometers lag bei $u_T = \frac{0.1^\circ C}{2\sqrt{3}} = \pm 0.029^\circ C$. Die gemessene Anfangstemperatur im Kalorimeter betrug $T_A = (50,000 \pm 0,029)^\circ C$.

Der erste Metallzyliner wurde dann in das Kalorimeter gestellt und die Temperaturabnahme auf dem Thermometer verfolgt.

Für das zweite Metall wurde im Anschluss auf gleiche Weise verfahren.

Beobachtungen

Zur Berechnung der Unsicherheiten wurden die Skalenungenaugkeiten mit folgenden Formeln bestimmt:

- Digitale Anzeigen: $\frac{a}{2\sqrt{3}}$
- Analoge Anzeigen: $\frac{a}{2\sqrt{6}}$

Folgendes wurde für die zwei Metalle bestimmt:

Tabelle 8: Aufgenommene Messwerte samt Unsicherheiten für das untersuchte orangene Metall

	Messwert	Formelzeichen	Geräteart	Skaleneinheit	Unsicherheit
C Kalorimeter [J/K]	80.00	C_K	-	-	10.000
Becherglas mit Wasser [g]	235.50	-	digital	0.1	0.029
Masse Becherglas [g]	97.40	-	digital	0.1	0.029
Wassermasse [g]	138.10	m_w	-	-	0.058
Metallmasse [g]	198.00	m_F	digital	0.1	0.029
Metallvolumen [ml]	23.00	V_F	analog	1	0.200
Anfangstemperatur [K]	323.15	T_A	digital	0.1	0.029
Mischtemperatur [K]	317.35	T_M	digital	0.1	0.029
Raumtemperatur [K]	293.15	T_B	digital	0.1	0.029

Tabelle 9: Aufgenommene Messwerte samt Unsicherheiten für das untersuchte graue Metall

	Messwert	Formelzeichen	Geräteart	Skaleneinheit	Unsicherheit
C Kalorimeter [J/K]	80.00	C_K	-	-	10.000
Becherglas mit Wasser [g]	241.30	-	digital	0.1	0.029
Masse Becherglas [g]	97.40	-	digital	0.1	0.029
Wassermasse [g]	143.90	m_w	-	-	0.058
Metallmasse [g]	176.12	m_F	digital	0.1	0.029
Metallvolumen [ml]	22.00	V_F	analog	1	0.200
Anfangstemperatur []	322.25	T_A	digital	0.1	0.029
Mischtemperatur [K]	315.95	T_M	digital	0.1	0.029
Raumtemperatur [K]	293.15	T_B	digital	0.1	0.029

Auswertung

Bestimmung der Dichte der zwei Metalle

Um eine grobe Annäherung an die Charakter der Metalle vorzunehmen, wird im folgenden die Dichte mit der Formel $\rho = \frac{m}{V}$ bestimmt.

$$\text{Metall}_1 : \rho = \frac{198,00g}{23cm^3} = 8,608696 \frac{g}{cm^3}$$

$$\text{Metall}_2 : \rho = \frac{176,12g}{22cm^3} = 8,005455 \frac{g}{cm^3}$$

198/23

```
## [1] 8.608696
```

176.12/22

```
## [1] 8.005455
```

Bestimmung der Unsicherheiten für die Dichte

Die Unsicherheit der Dichte wird mit Hilfe der Gaußschen Fehlerfortpflanzung bestimmt:

$$u_\rho = \sqrt{\left(\frac{\partial \rho}{\partial m} * u_m\right)^2 + \left(\frac{\partial \rho}{\partial V} * u_V\right)^2}$$

$$u_\rho = \sqrt{\left(\frac{1}{V} * u_m\right)^2 + \left(\frac{-m}{V^2} * u_V\right)^2}$$

$$\text{Metall}_1 : u_\rho = \sqrt{\left(\frac{1}{23cm^3} * 0,029g\right)^2 + \left(\frac{198g}{(23cm^3)^2} * 0,200cm^3\right)^2} \approx 0,075 \frac{g}{cm^3}$$

$$\text{Metall}_2 : u_\rho = \sqrt{\left(\frac{1}{22cm^3} * 0,029g\right)^2 + \left(\frac{176,12g}{(22cm^3)^2} * 0,200cm^3\right)^2} \approx 0,072 \frac{g}{cm^3}$$

```
#Metall 1
sqrt(((1/23)*0.029)^2+((198/23^2)*0.2)^2)
```

```
## [1] 0.07486884
```

```
#Metall
sqrt(((1/22)*0.029)^2+((176.12/22^2)*0.2)^2)
```

```
## [1] 0.0727888
```

Die Dichte kann zusammenfassend also folgendermaßen angegeben werden:

$$\text{Metall}_1 : \rho = (8,609 \pm 0,075) \frac{g}{cm^3}$$

$$\text{Metall}_2 : \rho = (8,005 \pm 0,072) \frac{g}{cm^3}$$

Die Dichten liegen sehr nah beieinander, auch wenn sich beide Intervalle nicht überlappen, da die Unsicherheiten sehr klein sind. Der Dichtewert von Metall 1 befindet sich zwischen Eisen ($7,8 \frac{g}{cm^3}$) und Messing ($8,3 \frac{g}{cm^3}$). Der Dichtewert von Metall 2 ist etwas größer und befindet sich zwischen Messing ($8,3 \frac{g}{cm^3}$) und Kupfer ($8,9 \frac{g}{cm^3}$).

Bestimmung der spezifischen Wärmekapazität für die zwei Metalle

Mittels der Formel zur Berechnung der spezifischen Wärmekapazität c_F in einem Kalorimeter, siehe [@Skript.Kalorimeter], kann nun eben diese für beide Metalle berechnet werden.

$$c_F = \frac{(C_K + m_W \cdot c_W) \cdot (TM - TB)}{m_F \cdot (TA - TM)} \quad (10)$$

Da wir entgegen der Anleitung des Versuches nicht den Metallkörper sondern das Wasser erhitzten, ändert sich unsere Berechnungsformel dementsprechend auf:

$$c_F = \frac{(C_K + m_W \cdot c_W) \cdot (TA - TM)}{m_F \cdot (TM - TB)} \quad (11)$$

Mit den den obigen Tabellen 1 und 2 aufgeführten Werten folgt damit für die bestimmten Bestwerte der beiden Metalle:

$$c_F(\text{Metall 1}) = \frac{(80 \frac{J}{K} + 0,1381 \text{kg} \cdot 4180 \frac{J}{\text{kg} \cdot K}) \cdot (323,15 - 317,35)K}{0,1980 \text{kg} \cdot (317,35 - 293,15)K} = 795,579 \frac{J}{\text{kg} \cdot K}$$

```
# Berechnung in R
((80+0.1381*4180)*(323.15-317.35))/(0.1980*(317.35-293.15))
```

```
## [1] 795.579
```

$$c_F(\text{Metall 2}) = \frac{(80 \frac{J}{K} + 0,1439 \text{kg} \cdot 4180 \frac{J}{\text{kg} \cdot K}) \cdot (322,25 - 315,95)K}{0,17612 \text{kg} \cdot (315,95 - 293,15)K} = 1069,213 \frac{J}{\text{kg} \cdot K}$$

```
# Berechnung in R
((80+0.1439*4180)*(322.25-315.95))/(0.17612*(315.95-293.15))
```

```
## [1] 1069.213
```

Unsicherheit der spezifische Wärmekapazität der Feststoffe

Disclaimer: Die folgende Fehlerrechnung ist falsch. Zumindest liegen unsere berechneten Unsicherheiten leider in einer völlig falschen Größenordnung

Aus Formel 11 kann über die Gaußsche Fehlerfortpflanzung die zugehörige Messunsicherheit u_{c_F} berechnet werden.

$$\begin{aligned} u_{c_F} &= \sqrt{\left(\frac{\partial c_F}{\partial C_K} * u_{C_K}\right)^2 + \left(\frac{\partial c_F}{\partial m_w} * u_{m_w}\right)^2 + \left(\frac{\partial c_F}{\partial T_M} * u_{T_M}\right)^2 + \left(\frac{\partial c_F}{\partial T_B} * u_{T_B}\right)^2 + \left(\frac{\partial c_F}{\partial m_F} * u_{m_F}\right)^2 + \left(\frac{\partial c_F}{\partial T_A} * u_{T_A}\right)^2} \\ &= \left[\left(\frac{(1+m_w*c_w)*(T_A-T_M)}{m_F*(T_M-T_B)} * u_{C_K} \right)^2 + \left(\frac{(C_K+c_w)*(T_A-T_M)}{m_F*(T_M-T_B)} * u_{m_w} \right)^2 + \left(\frac{(C_K+m_w*c_w)*(T_A-1)}{m_F*(1-T_B)} * u_{T_M} \right)^2 + \left(\frac{(C_K+m_w*c_w)*(T_A-T_M)}{m_F*(T_M-1)} * u_{T_B} \right)^2 + \left(\frac{(C_K+m_w*c_w)*(T_A-T_M)}{T_M-T_B} * u_{m_F} \right)^2 + \left(\frac{(C_K+m_w*c_w)*(1-T_M)}{m_F*(T_M-T_B)} * u_{T_A} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

Nun können die Werte, die für die zwei Metalle ermittelt wurden, eingesetzt werden:

Unsicherheit spezifische Wärmekapazität oranges Metall

Einsetzen in die obige Formel ergibt:

$$\begin{aligned} u_{c_F}(\text{Metall 1}) &= \left[\left(\frac{(1+0,13810 \text{kg} \cdot 4180 \frac{J}{\text{kg} \cdot K}) \cdot (323,15K - 293,150K)}{0,19800 \text{kg} \cdot (317,35K - 293,150K)} \cdot 10 \frac{J}{K} \right)^2 + \left(\frac{(80 \frac{J}{K} + 4180 \frac{J}{\text{kg} \cdot K}) \cdot (323,15K - 317,35K)}{0,19800 \text{kg} \cdot (317,35K - 293,150K)} \cdot 0,000058 \text{kg} \right)^2 + \left(\frac{(80 \frac{J}{K} + 0,13810 \text{kg} \cdot 4180 \frac{J}{\text{kg} \cdot K}) \cdot (323,15K - 1)}{0,19800 \text{kg} \cdot (1-293,150K)} \cdot 0,029K \right)^2 + \left(\frac{(80 \frac{J}{K} + 0,13810 \text{kg} \cdot 4180 \frac{J}{\text{kg} \cdot K}) \cdot (323,15K - 317,35K)}{0,19800 \text{kg} \cdot (317,35K - 1)} \cdot 0,029K \right)^2 + \left(\frac{(80 \frac{J}{K} + 0,13810 \text{kg} \cdot 4180 \frac{J}{\text{kg} \cdot K}) \cdot (323,15K - 317,35K)}{317,35K - 293,150K} \cdot 0,000029 \text{kg} \right)^2 + \left(\frac{(80 \frac{J}{K} + 0,13810 \text{kg} \cdot 4180 \frac{J}{\text{kg} \cdot K}) \cdot (1-317,35K)}{0,19800 \text{kg} \cdot (317,35K - 293,150K)} \cdot 0,029K \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \approx 7100 \frac{J}{\text{kg} \cdot K} \end{aligned}$$

```

# Konstanten
C_K = 80 #J/kg
u_CK = 10 #J/kg
u_mw = 0.000058 #kg
u_mF = 0.000029 #kg
u_TA = 0.029 #K
u_TB = 0.029 #K
u_TM = 0.029 #K
c_w = 4180 #J

# Variablen
m_w = 0.13810 #kg
m_F = 0.19800 #kg
T_A = 323.15 #K
T_B = 293.15 #K
T_M = 317.35 #K

# Berechnung in R
sqrt( ((1+m_w*c_w)*(T_A-T_M)/(m_F*(T_M-T_B)))*u_CK)**2
+( ((C_K+c_w)*(T_A-T_M)/(m_F*(T_M-T_B)))*u_mw)**2
+( ((C_K+m_w*c_w)*(T_A-1))/(m_F*(1-T_B))*u_TM)**2
+( ((C_K+m_w*c_w)*(T_A-T_M))/(m_F*(T_M-1))*u_TB)**2
+( ((C_K+m_w*c_w)*(T_A-T_M))/(T_M-T_B)*u_mF)**2
+( ((C_K+m_w*c_w)*(1-T_M))/(m_F*(T_M-T_B))*u_TA)**2)

## [1] 7112.547

```

Unsicherheit spezifische Wärmekapazität graues Metall

$$u_{c_F}(\text{Metall 2}) = \left[\left(\frac{(1+0,1439kg \cdot 4180 \frac{J}{kg \cdot K}) \cdot (322,25K - 293,150K)}{0,17612kg \cdot (315,95K - 293,150K)} \cdot 10 \frac{J}{K} \right)^2 + \left(\frac{(80 \frac{J}{K} + 4180 \frac{J}{kg \cdot K}) \cdot (322,25K - 315,95K)}{0,17612kg \cdot (315,95K - 293,150K)} \cdot 0,000058kg \right)^2 + \left(\frac{(80 \frac{J}{K} + 0,1439kg \cdot 4180 \frac{J}{kg \cdot K}) \cdot (322,25K - 1)}{0,17612kg \cdot (1-293,150K)} \cdot 0,029K \right)^2 + \left(\frac{(80 \frac{J}{K} + 0,1439kg \cdot 4180 \frac{J}{kg \cdot K}) \cdot (322,25K - 315,95K)}{0,17612kg \cdot (315,95K - 1)} \cdot 0,029K \right)^2 + \left(\frac{(80 \frac{J}{K} + 0,1439kg \cdot 4180 \frac{J}{kg \cdot K}) \cdot (322,25K - 315,95K)}{315,95K - 293,150K} \cdot 0,000029kg \right)^2 + \left(\frac{(80 \frac{J}{K} + 0,1439kg \cdot 4180 \frac{J}{kg \cdot K}) \cdot (1-315,95K)}{0,17612kg \cdot (315,95K - 293,150K)} \cdot 0,029K \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \approx 9600 \frac{J}{kg \cdot K}$$

```

# Neudefinition Variablen
m_w = 0.14390 #kg
m_F = 0.17612 #kg
T_A = 322.25 #K
T_B = 293.15 #K
T_M = 315.95 #K

```

```

# Berechnung in R
sqrt( ((1+m_w*c_w)*(T_A-T_M)/(m_F*(T_M-T_B)))*u_CK)**2
+( ((C_K+c_w)*(T_A-T_M)/(m_F*(T_M-T_B)))*u_mw)**2
+( ((C_K+m_w*c_w)*(T_A-1))/(m_F*(1-T_B))*u_TM)**2
+( ((C_K+m_w*c_w)*(T_A-T_M))/(m_F*(T_M-1))*u_TB)**2
+( ((C_K+m_w*c_w)*(T_A-T_M))/(T_M-T_B)*u_mF)**2
+( ((C_K+m_w*c_w)*(1-T_M))/(m_F*(T_M-T_B))*u_TA)**2)

```

```
## [1] 9579.743
```

Interpretation

Es wurde Folgendes bestimmt:

- Metall 1: $c_F = 795 \frac{J}{kg \cdot K} \pm 7,1 \frac{kJ}{kg \cdot K}$
- Metall 2: $c_F = 1069 \frac{J}{kg \cdot K} \pm 9,6 \frac{kJ}{kg \cdot K}$

Die Bestwerte sind in der richtigen Größenordnung. Die Unsicherheiten sind falsch berechnet.

Eine schnelle Recherche im Internet liefert für die meisten Reinmetalle spezifische Wärmekapazitäten von einigen hundert Joule pro $kg \cdot K$. Eine Aussage über die Metallart auf Basis der Messwerte ist nicht sinnvoll. Zudem widersprechen sich Angaben zu Dichte und Wärmekapazität. Anhand der Wärmekapazität können wir nicht bestätigen, dass die Metallzyylinder tatsächlich aus Kupfer oder Eisen bestanden. Der Versuch müsste wiederholt werden.

Quellen

Brownsche Molekuelbewegung

Simulation

Mittels einer Simulation soll versucht werden, die durch die Diffusion bedingte Bewegung von Polystyrolpartikeln unter verschiedenen Bedingungen nachzustellen. In der Simulation lassen sich die Anzahl von Stößen und die Partikelanzahl einstellen. Auch die Simulationsdauer kann verändert werden, diese haben wir aber konstant bei einer Länge von fünf Sekunden belassen. Für die drei eingestellten Kombinationen ergaben sich folgende Histogramme für die Schrittweite eines "Random-walks":

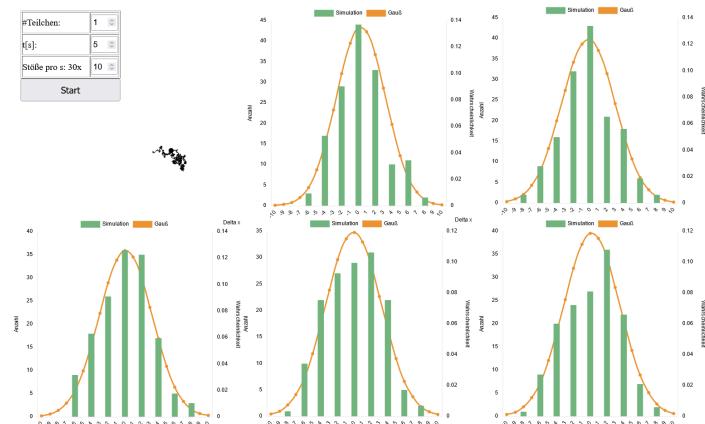


Abbildung 10: Simulation 1. 1 Teilchen, 5 Sekunden, 300 Stöße pro s

Für die Auswertung der Simulationsergebnisse werden verallgemeinernd und vereinfachend die optischen Gesamteindrücke der Histogramme verglichen. Wird das gemacht, fällt auf, dass die Histogramme für die Versuche b) und c) am meisten normalverteilt aussehen. Die Verteilungen entsprechen im Allgemeinen ganz gut den eingezeichneten Normalverteilungen (in Orange) für den ermittelten Mittelwert und die Standardabweichung der Daten. Der Mittelwert und die Standardabweichung wurden in der Simulation nicht ausgegeben, aber es ist erkennbar, dass der Mittelwert bei allen Histogrammen bei Null liegt und die Standardabweichung ein gutes Maß angenommen hat.

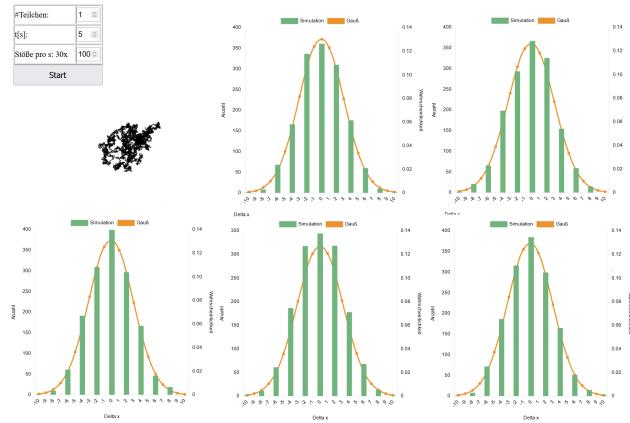


Abbildung 11: Simulation 2. 1 Teilchen, 5 Sekunden, 3000 Stöße pro s

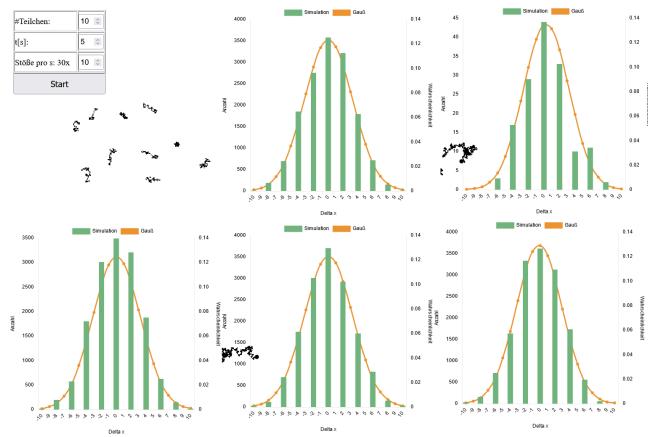


Abbildung 12: Simulation 3. 10 Teilchen, 5 Sekunden, 300 Stöße pro s

Die Ergebnisse von Versuch a) fallen gegenüber den Ergebnissen aus b) und c) in puncto Normalverteiltheit etwas ab. Grund für dieses etwas schlechter ausfallende Ergebniss in a) ist vermutlich, dass hier mit den jeweiligen Minimalwerten der Versuchsreihe (1 Teilchen bei nur 10x30 Stößen pro Sekunde) gerechnet wurde. In b) und c) fällt immer jeweils einer dieser beiden Werte wesentlich höher aus (jeweils um einen Faktor 10).

Dass zwischen b) und c) kaum Unterschiede im Ergebnis, dafür aber in den Simulationsparametern bestehen, könnte durch das Ergodentheorem erklärbar sein, wonach es für das Ergebnis einer Random-walk-Betrachtung auf dasselbe hinausläuft, ob eine große Anzahl von Teilchen mit wenigen Stößen pro Sekunde, oder eine kleine Menge von Teilchen mit vielen Stößen pro Sekunde beobachtet wird.

Experiment

Thema

Bestimmung der Diffusionskonstanten eines Polystyrolpartikels, sowie die Berechnung der Boltzmann- und Avogadrokonstanten.

Material

- Mikropartikel (Polystyrol) Suspension in Wasser
- Lichtmikroskop mit Objektträger
- Deckplättchen
- Thermometer
- Zur Messung und Auswertung wurden folgende Computerprogramme benutzt: ThorCam, Tracker, SciDAVis, Python, R.

Versuchsaufbau und Durchführung

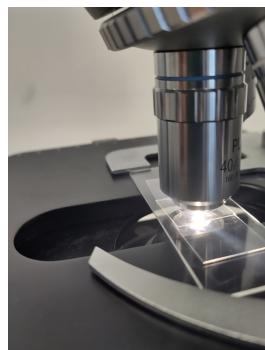


Abbildung 13: Mikroskop mit Probe

Auf einen Objektträger wurde ein Tropfen einer Mikropartikel (Polystyrol) Suspension in Wasser gegeben. Zwei Deckplättchen wurden neben den Tropfen, und eines mittig auf die anderen beiden positioniert und unter das Mikroskop gelegt. Die Polystyrolpartikel (PSP) wurden scharf gestellt. Als Vergrößerung wurde 40/0.65 gewählt.

Durchführung

Mit Hilfe einer Mikroskopkamera und des Programms "ThorCam" wird die Projektion auf dem Bildschirm sichtbar. Eine Zeitreihe über den Zeitraum von hundert Sekunden und im Umfang von 100 Bildern wurde von den PSP automatisch, mittels "ThorCam", erstellt. Über die Messunsicherheit der Länge der Zeitintervalle ist nichts bekannt.

Nach Aufnehmen der Messreihe wurde die Temperatur im Lichtgang des Mikroskopes für ca. 20 Sekunden gemessen. Diese betrug ca. $21,7^{\circ}\text{C}$. Die Messunsicherheit liegt bei $u_{\text{Temp}} = \frac{0,1^{\circ}\text{C}}{2\sqrt{6}} = 0,020^{\circ}\text{C}$. Danach wurde mit Hilfe des Programms "Tracker" die Position des Teilchens ausgewertet. Dafür wird in einem Datensatz von 100 Bildern das "Teilchen of interest" mit dem Cursor markiert.

Neben dieser Methode wurde eine zweite Auswertung des Bildmaterials vorgenommen. Diese bestand darin, mittels eines Pythonscripts die Mittelpunkte aller 17 PSP in allen 100 Einzelbildern zu bestimmen. Das Ergebnis dieses Verfahrens war eine große Datei mit den Koordinaten aller 17 PSP-Mittelpunkte in allen 100 Bildern. Es wurde darauf verzichtet, diese hier abzudrucken, stattdessen werden die Ergebnisse in Abbildung 5 grafisch dargestellt. Mit diesen Daten wird weitergearbeitet.

Fehlerbetrachtung

Eine Unsicherheit der Methodik besteht in der Umrechnung der Bildpunkte in Meter. Eine zweite Unsicherheit besteht in der Auflösung des Bildes. Durch die verwendete Methode konnte eine manuelle Verfolgung der PSP umgangen werden. Diese computervisuelle Methodik sollte zu kleineren Fehlern führen.

Beobachtungen

Zu Beginn werden die zurückgelegten Wege aller PSP im Bildausschnitt geplottet. Ein einzelner, ausgewählter Partikel (NR. 2) wird exemplarisch genauer dargestellt, indem dessen Bewegungspfad einzeln in einem höheren Maßstab geplottet wird.

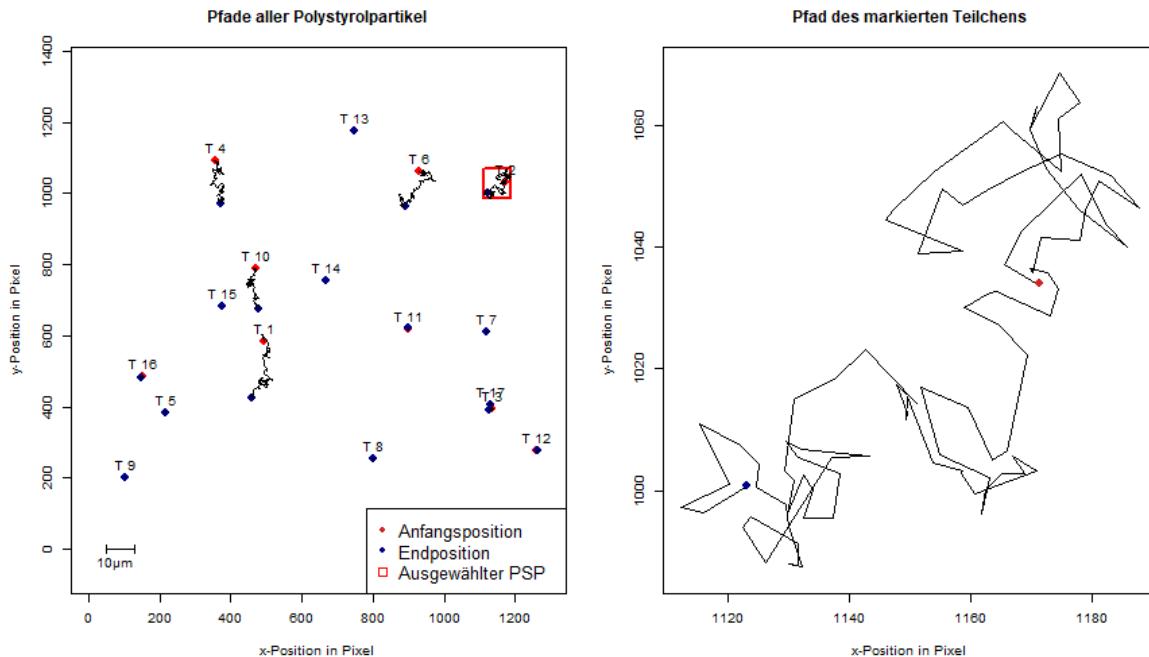


Abbildung 14: Auf diesen zwei Plots sind die Positionen aller bzw. eines markierten PSP im zeitlichen Verlauf zu sehen. Die Aufnahmedauer betrug 100 s mit 1 fps. Die PSP wurden zudem nummeriert.

Auf Abbildung 5 ist erkennbar, dass die 17 beobachteten PSP sich in ihren zurückgelegten Wegen deutlich unterscheiden. Während 12 PSP sich praktisch nicht von ihrer Ausgangsposition bewegt haben, ist bei sechs Teilchen eine deutliche Abweichung zwischen Anfangs- und Endposition auszumachen. Es ist nicht verwunderlich, dass viele Partikel keinen räumlichen Versatz aufweisen. Netto sollte die Bewegung aller Randomwalks zusammengenommen zu einem Verharren jedes Teilchens an seinem Ursprung führen, Abweichungen durch die Standardabweichungen sind möglich. Es ist aber auch möglich, dass diese Teilchen

an den Glaspättchen kleben. Zwar sind auch für die scheinbar unbewegten Teilchen Bewegungen bestimmt worden, diese sind aber mikroskopisch kaum nachweisbar und könnten ein Resultat der Unsicherheit beim verwendeten computervisuellen Auswertungsverfahren sein.

Interpretationsspielraum geben die zurückgelegten Pfade der fünf anderen Teilchen (T 1, 2, 4, 6, 10, siehe Abbildung 5). Jene „viel bewegten Teilchen“ weisen trotz aller Zufälligkeit der einzelnen Random-walks eine gewisse Tendenz zu einer Bewegung entgegen der y-Achse auf. Hier stellt sich die Frage, ob neben der diffusiven Bewegungskomponente auch eine advektive Transportkomponente einen Einfluss auf die Teilchenbewegung hatte. Dies wäre eine weitere mögliche Fehlerquelle.

Umrechnung der Messwerte in Meter

Im nächsten Schritt können die ermittelten Werte für die Diffusionspfade von Pixel in Meter umgerechnet werden. Hierbei ist der Maßstab der aufgenommenen Bilder vonnöten. Dafür werden die PSP selbst verwendet, von denen bekannt ist, dass deren Durchmesser $2\mu m$ beträgt. Beim Zählen der Bildpixel ist darauf geachtet worden, die Originalauflösung zu verwenden, in der auch die Berechnung der Schrittweiten berechnet wurde.

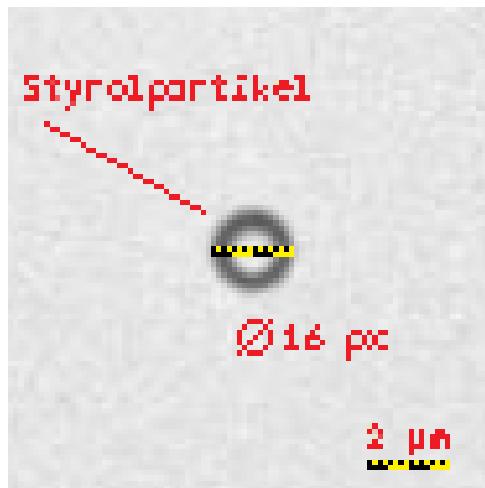


Abbildung 15: Polystyrolpartikel mit dem Durchmesser $2\mu m$. Der Durchmesser ist in Pixel abgemessen und beträgt 16 Pixel.

Aus dem Zusammenhang, dass sechzehn Bildpixel zwei Mikrometern entsprechen, folgt für die Kantenlänge eines Pixels eine Länge von $0,125\mu m$. Die kleinste ablesbare Skala in dem Bild ist der Durchmesser von $2\mu m$ des PSP. Für die Unsicherheit der Kantenlänge eines Pixels folgt so $u_{Pixel\text{länge}} = \frac{1}{16} \cdot \frac{2\mu m}{2\sqrt{6}} = 0,026\mu m$.

```
# Berechnung der Kantenlänge eines Pixels
```

```
2*10**(-6)/16
```

```
## [1] 1.25e-07
```

```
# Berechnung Unsicherheit der Kantenlänge:
```

```
2*10**(-6)/(16*2*sqrt(6))
```

```
## [1] 2.551552e-08
```

Statistische Untersuchung

Nach dieser Umrechnung kann mit statistischen Mitteln versucht werden, weitere Aussagen über das Diffusionsverhalten der PSP zu treffen. Im weiteren Verlauf sollen dann die Diffusionskonstante, die Boltzmannkonstante und die Avogadrokonstante anhand eines ausgewählten Teilchens berechnet werden.

Zunächst wird also die Random-walk-Schrittweite (RWS) des ausgesuchten Teilchens 2 berechnet. Die Berechnung findet nur in einer räumlichen Dimension, der x-Dimension, statt. Die RWS wird berechnet,

indem die x-Position des Bildes i von der x-Position des Bildes $i + 1$ abgezogen wird. Die Berechnung findet in R statt:

```
# Einlesen der x-Positionen aller Teilchen aus dem erhobenen Datensatz
x_meter <- read.csv('code/Tabellen/x_meter.csv')

### Funktion zur Berechnung der RWS
calculateDistance1D = function(vector){
  shift_vector = c(0, vector[1:(length(vector)-1)])
  dist = vector - shift_vector
  dist[1] = 0
  return(dist)
}

# Berechnung der RWS von Teilchen 2
RWS <- calculateDistance1D(x_meter$X.2)
```

Die RWS in x-Richtung von Teilchen 2 kann grafisch veranschaulicht werden. Dies erfolgt mittels eines Histogramms, in dem die Häufigkeiten bestimmter RWS aufgetragen ist.

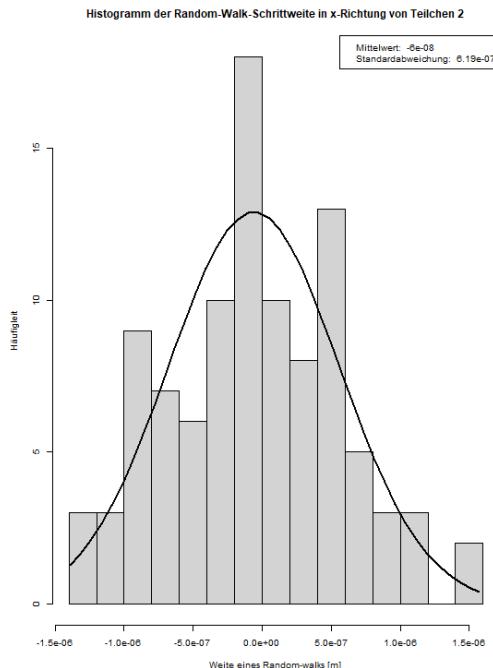


Abbildung 16: Das Histogramm zeigt die Häufigkeit der Schrittweiten pro Random-walk für Teilchen 2

Das Histogramme sieht normalverteilt aus.

```
shapiro.test(RWS)
```

```
##
## Shapiro-Wilk normality test
##
## data: RWS
## W = 0.99134, p-value = 0.7713
```

Ein Shapiro-Wilk Test unter der Nullhypothese der Normalverteiltheit liefert einen p-Wert von $p = 0,7713$. Die Mittelwerte der Bewegung beträgt $-6 \cdot 10^{-8} m$. Dass dieser von Null abweicht, liegt entweder daran,

dass das Teilchen nicht über einen genügend langen Zeitraum beobachtet wurde, oder aber auch daran, dass neben der Diffusion auch andere Bewegungskomponenten (Advektion) auf den PSP wirkte. In Abbildung 4 ist ebenfalls ersichtlich, das Teilchen 2 insgesamt eine leichte Tendenz zu Bewegungen entgegen der x-Achse hatte.

Auswertung

Berechnung der Diffusionskonstante

Mittels der folgender Formel kann für Teilchen 2 die Diffusionskonstante D berechnet werden:

$$D = \frac{\sigma^2}{2t}$$

Mit:

- σ : Standardabweichung der Schrittweite eines Random-walks für ein PSP
- t : Zeitintervall zwischen zwei Bildaufnahmen ($t = 1\text{s} = \text{const.}$).

Nun kann die Standardabweichung aus den Werten der RWS-Serie berechnet werden.

```
# Standardabweichung x-Verschiebung von Teilchen 2
sigma = sd(RWS) #m
sigma
```

```
## [1] 6.18505e-07
```

Der Fehler der Standardabweichung berechnet sich als Quotient aus Standardabweichung und der Anzahl von Messwerten ($n = 100$).

```
# Fehler der Standardabweichung
u_sigma = sd(RWS)/100 #m
u_sigma
```

```
## [1] 6.18505e-09
```

Unter der Annahme, dass die Bewegung hinreichend lange beobachtet wurde beträgt die mittlere Verschiebung σ , bzw. Schrittweite δ bzw. Standardabweichung der Verschiebung Δx : $\sigma = (6.185 \pm 0.062) \cdot 10^{-7}\text{m} = (0.6185 \pm 0.0062)\mu\text{m}$.

Nun kann die Diffusionskonstante berechnet werden (in $\frac{\text{m}^2}{\text{s}}$):

```
# Berechnung der Diffusionskonstanten für Teilchen 2
D = sd(RWS)^2/(2*1) #m^2/s
D
```

```
## [1] 1.912742e-13
```

Auch die Unsicherheit der Diffusionskonstante kann berechnet werden. Da über die Unsicherheit der vom Computer bestimmten Zeitintervalle nichts weiter bekannt ist wird u_t als null angenommen.

$$u_D = \sqrt{\left(\frac{\partial D}{\partial \sigma} \cdot u_\sigma\right)^2 + \left(\frac{\partial D}{\partial t} \cdot u_t\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{2\sigma}{2t} \cdot u_\sigma\right)^2 + \left(\frac{\sigma^2}{2t^2} \cdot u_t\right)^2}$$

```
# Berechnung der Unsicherheit der Diffusionskonstanten für Teilchen 2
u_D = sqrt( (2*sigma/2*u_sigma)**2 + (sigma**2/2*1**2*0)**2 ) #m^2/s
u_D
```

```
## [1] 3.825484e-15
```

Damit wurde für Partikel 2 eine Diffusionskonstante von $D = (191.2 \pm 3.8) \cdot 10^{-15} \frac{\text{m}^2}{\text{s}}$ bestimmt.

Berechnung der Boltzmannkonstante

Die Boltzmannkonstante soll über die Einstein-Smoluchowski-Gleichung berechnet werden:

$$DC = k_B \cdot T \Leftrightarrow k_B = \frac{DC}{T} \Leftrightarrow k_B = \frac{D \cdot 6\pi\eta r}{T}$$

Mit:

- k_B : Boltzmannkonstante
- D : Diffusionskonstante $(0.6185 \pm 0.0062) \frac{\mu m^2}{s}$
- C : Stokessche Reibungskonstante ($C = 6\pi\eta r$)
- T : Temperatur $(21,700 \pm 0,020)^\circ C$
- η : dynamische Viskosität von Wasser bei $20^\circ C$: $1002 \cdot 10^{-6} \frac{kg}{ms}$
- r : Radius des PSP $2\mu m$

Die Berechnung der ermittelten Boltzmannkonstante ergibt, mit der Einheitenbetrachtung $[\frac{\frac{m^2}{s} * \frac{kg}{ms} * m}{K} = \frac{kg \cdot m^2}{K \cdot s^2} = \frac{J}{K}]$:

```
eta = 1002e-6 # m^2/s
r = 1e-6 # m
Temp = 21.7 + 273.15
kB = (D*6*pi*eta*r)/(Temp) #kg*m^2/(s^2*K)
kB
```

```
## [1] 1.225248e-23
```

Die Unsicherheit der ermittelten Boltzmannkonstante u_{kB} errechnet sich als:

$$u_{kB} = \sqrt{(\frac{\partial k_B}{\partial D} \cdot u_D)^2 + (\frac{\partial k_B}{\partial T} \cdot u_T)^2}$$

$$\sqrt{(\frac{6\pi\eta r}{T} \cdot u_D)^2 + (\frac{D \cdot 6\pi\eta r}{T^2} \cdot u_T)^2}$$

```
u_T = 0.020 # K
sqrt(((6*pi*eta*r)/(Temp)*u_D)**2+((D*6*pi*eta*r)/(Temp**2)*u_T)^2)
```

```
## [1] 2.450511e-25
```

In diesem Versuch wurde also eine Boltzmannkonstante von $k_B = (1,225 \pm 0,025) \cdot 10^{-23} \frac{J}{K}$ bestimmt.

Berechnung der Avogadrokonstante

Es gilt das allgemeine Gesetz:

$$R = N_A * k_B \Leftrightarrow N_A = \frac{R}{k_B}$$

R = universelle Gaskonstante = $8,314 \frac{J}{mol \cdot K}$

N_A = Avogadrokonstante

k_B = Boltzmannkonstante

Damit ergibt sich mit der zuvor ermittelten Boltzmannkonstante von $k_B = (1,225 \pm 0,025) \cdot 10^{-23} \frac{J}{K}$ ein Bestwert von:

$$N_A = \frac{R}{k_B} = \frac{8,314 \frac{J}{mol \cdot K}}{1,225 \cdot 10^{-23} \frac{J}{K}} \approx 6.786939 \cdot 10^{23} \frac{1}{mol}$$

Die Unsicherheit ergibt sich mit:

$$u_{NA} = \frac{\partial N_A}{\partial k_B} \cdot u_{kB} = \left| -\frac{R}{k_B^2} \cdot u_{kB} \right| = \frac{8,314 \frac{J}{mol \cdot K}}{(1,225 \cdot 10^{-23} \frac{J}{K})^2} \cdot 0,025 \cdot 10^{-23} \frac{J}{K} \approx 0,14 \cdot 10^{23} \frac{1}{mol}$$

```
8.314/(1.225*10**-23) #Bestwert Avogadrokonstante
```

```
## [1] 6.786939e+23
```

```
8.314/((1.225*10**-23)**2)*0.025*10**-23 #Unsicherheit
```

```
## [1] 1.38509e+22
```

Die Avogadrokonstante ergibt sich folglich mit $N_A = (6.79 \pm 0.14) \cdot 10^{23} \frac{1}{mol}$.

Interpretation

Obwohl sowohl der Literaturwert für die Boltzmannkonstante ($k_B = 1,380 \cdot 10^{-23} \frac{J}{K}$), als auch der Literaturwert der Avogadrokonstante ($N_A = 6,022 \cdot 10^{23} \frac{1}{mol}$) nicht in die von uns bestimmten Intervalle fallen, liegen beide ermittelten Werte in der richtigen Größenordnung und nahe am Literaturwert. Sie können daher als ganz gute Näherungen betrachtet werden.

Widerstandsmessungen

Experiment

Thema

Bestimmung von Widerständen auf direkte und indirekte Weise. Dazu werden die Beträge der zwei zu untersuchenden Widerstände durch Ablesen der Farbcodes, durch Widerstandsmessungen mit einem Multimeter und auf indirekte Weise in einem Schaltkreis ermittelt.

Material

- Zwei Multimeter
- Breadboard
- Jumperwire, Bananenstecker und Krokodilklemmen
- Netzgerät
- Zwei Widerstände unbekannter Größe

Auslesen der Widerstandsfarbcodes

Als erste Methode zur Bestimmung des Widerstandes werden die Bauteilspezifikationen auf dem Widerstand selbst abgelesen. Im folgenden wird von "Widerstand 1" und "Widerstand 2" gesprochen.

Die Farbreihenfolge auf dem Widerstand ist *Braun, Schwarz, Schwarz, Gelb, Braun*. Dementsprechend kodiert der, im Folgenden als R_1 bezeichnete, Widerstand für $R_1 = (100 \cdot 10^4 \pm 1\%) \Omega \Leftrightarrow R_1 = (1,00 \pm 0,01) M\Omega$.



Abbildung 17: Foto von Widerstand 1

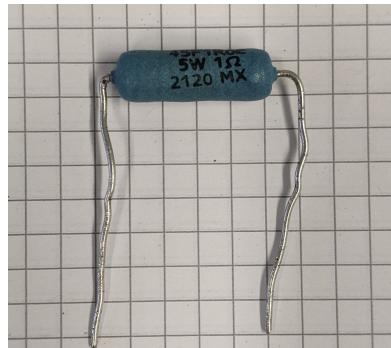


Abbildung 18: Foto von Widerstand 2

Widerstand 2 ist als Widerstand von 1Ω gekennzeichnet. Aus Datenblättern im Internet geht hervor, dass auch dieser eine Toleranz von $\pm 1\%$ aufweist (<https://de.rs-online.com/web/p/durchsteckwiderstände/1249328>). Dies bedeutet einen Widerstand von $R_2 = (1,00 \pm 0,01)\Omega$ für dieses Bauteil.

Direkte Messung

Messungen der Widerstände mit dem Multimeter liefert Werte von:

- $R_1 = 1,005 M\Omega$
- $R_2 = 1,0\Omega$

Messunsicherheiten der direkten Messung

Die Messunsicherheit der direkten Messung ergibt sich aus der Messunsicherheit der digitalen Skala:

$$u_{Skala} = \frac{a}{2\sqrt{3}}$$

$$1. Widerstand : u_1 = \frac{0,001 M\Omega}{2\sqrt{3}} \approx \pm 0,00029 M\Omega$$

$$2. Widerstand : u_2 = \frac{0,1\Omega}{2\sqrt{3}} \approx \pm 0,029\Omega$$

```

0.001/(2*sqrt(3)) #Unsicherheit 1

## [1] 0.0002886751

0.1/(2*sqrt(3)) #Unsicherheit 2

## [1] 0.02886751

```

Indirekte Widerstandsmessung

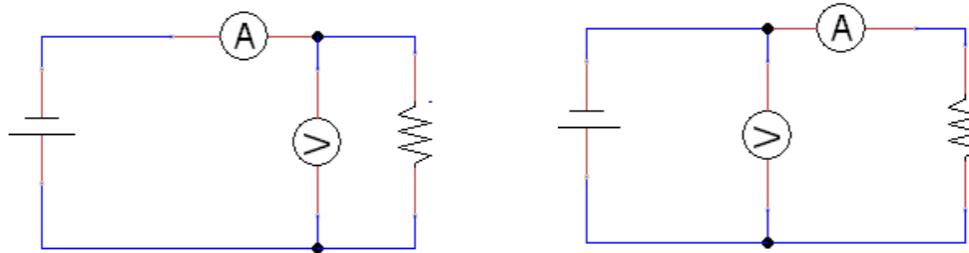


Abbildung 19: Schaltkreise zur indirekten Widerstandsmessung. Links: Variante a). Rechts: Variante b). Quelle: Universität Potsdam, Institut für Physik und Astronomie, Grundpraktikum, Skript zum Versuch E1.

Die indirekte Bestimmung der Widerstände in einem Stromkreis erfolgt in zwei Varianten. Diese Unterscheiden sich in der Art des Schaltungsaufbaus. In Abbildung 3 ist der Unterschied zwischen den Varianten a) und b) erkennbar. In Variante a) wird das Voltmeter parallel zum Widerstand geschaltet, in Variante b) parallel zur Spannungsquelle.

Bei der Berechnung der Widerstände aus den gemessenen Werten werden zwei Annahmen/Vereinfachungen getroffen:

- Durch das Voltmeter findet Stromfluss statt. Der tatsächliche Innenwiderstand beträgt ca. $10M\Omega$, wie Datenblättern des Messgerätes aus dem Internet entnommen und auch experimentell überprüft wurde.
- Das Ampermeter hat keinen Innenwiderstand. In den Datenblättern gab es keine Angaben zum Innenwiderstand des Ampermeters und auch experimentell konnte kein Widerstand bestimmt werden.

Verwendetes Datenblatt: <https://asset.conrad.com/media10/add/160267/c1/-/en/000124501DS01/datasheet-124501-volcraft-vc250-handheld-multimeter-digital-cat-iii-600-v-display-counts-2000.pdf>.

Aufbau (a)

Mithilfe der Kabel und des Breadboards wurde der Skizze a) entsprechende Stromkreis aufgebaut:

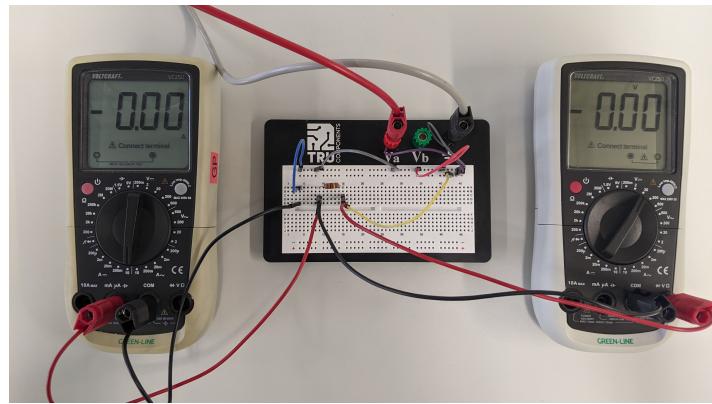


Abbildung 20: Aufbau auf Breadboard für Variante a) der indirekten Widerstandsmessung. Im Bild ist zudem bereits der Widerstand 1 eingebaut.

Folgende Werte wurden gemessen:

- Widerstand 1 (Messung bei 5,0V)
 - Spannung: 5,04V
 - $5,4 \mu\text{A}$
- Widerstand 2 (Messung bei 0,6V)
 - Spannung: 0,15 V
 - 150,3 mA

Gerätespezifische Messunsicherheiten

Die Messunsicherheit von Spannung und Strom ergeben sich aus der Messunsicherheit der digitalen Skala.

$$u_{Skala} = \frac{a}{2\sqrt{3}}$$

1.Widerstand :

$$\text{Spannung : } u_{U1a} = \frac{0,01V}{2\sqrt{3}} \approx 0,0029V$$

$$\text{Strom : } u_{I1a} = \frac{0,1\mu\text{A}}{2\sqrt{3}} \approx 0,029\mu\text{A}$$

2.Widerstand :

$$\text{Spannung : } u_{U2a} = \frac{0,01V}{2\sqrt{3}} \approx 0,0029V$$

$$\text{Strom : } u_{I2a} = \frac{0,1mA}{2\sqrt{3}} \approx 0,029mA$$

```
0.01/(2*sqrt(3)) #Unsicherheit Spannung 1,2
```

```
## [1] 0.002886751
```

```
0.1/(2*sqrt(3)) #Unsicherheit Strom 1,2
```

```
## [1] 0.02886751
```

Folglich liegen die gemessenen Größen bei:

Widerstand 1:

- $U_{1a} = (5,0400 \pm 0,0029)V$
- $I_{1a} = (5,400 \pm 0,029)\mu A$

Widerstand 2:

- $U_{2a} = (0,1500 \pm 0,0029)V$
- $I_{2a} = (150,300 \pm 0,029)mA$

Berechnung der Widerstände

Es gilt das Ohmsche Gesetz:

$$U = I \cdot R \Leftrightarrow R = \frac{U}{I}$$

R = Widerstand

U = Spannung

I = Strom

Für die Widerstände ergeben sich somit für Aufbau (a) Bestwerte von:

$$\begin{aligned} 1. \text{Widerstand} : R &= \frac{U}{I} = \frac{5,0400V}{5,4\mu A} \approx 933333,3\Omega \\ 2. \text{Widerstand} : R &= \frac{U}{I} = \frac{0,1500V}{150,3mA} \approx 0,998004\Omega \end{aligned}$$

```
#Widerstand 1
(5.04/(5.4*10**-6))
```

```
## [1] 933333.3
```

```
#Widerstand 2
(0.15/(150.3*10**-3))
```

```
## [1] 0.998004
```

Messunsicherheiten

Die Messunsicherheit für die indirekt bestimmten Widerstände ergibt sich mit folgender Formel:

$$\begin{aligned} u_R &= \sqrt{\left(\frac{\partial R}{\partial U} \cdot u_U\right)^2 + \left(\frac{\partial R}{\partial I} \cdot u_I\right)^2} \\ &= \sqrt{\left(\frac{1}{I} \cdot u_U\right)^2 + \left(\frac{-U}{I^2} \cdot u_I\right)^2} \\ 1. \text{Widerstand} : u_{R1a} &= \sqrt{\left(\frac{1}{5,4\mu A} \cdot 0,0029V\right)^2 + \left(\frac{-5,04V}{5,4\mu A^2} \cdot 0,029\mu A\right)^2} \approx \pm 5000\Omega \\ 2. \text{Widerstand} : u_{R2a} &= \sqrt{\left(\frac{1}{150,300mA} \cdot 0,0029V\right)^2 + \left(\frac{0,1500V}{150,300mA^2} \cdot 0,029mA\right)^2} \approx \pm 0,019\Omega \end{aligned}$$

```
# Unsicherheit Widerstand 1
sqrt(((1/(5.4*10**-6))*0.0029)**2+(5.04/((5.4*10**-6)**2)*0.029*10**-6)**2)
```

```
## [1] 5041.033
# Unsicherheit Widerstand 2
sqrt(((1/(150.3*10**-3))*0.0029)**2+(0.15/((150.3*10**-3)**2)*0.029*10**-3)**2)

## [1] 0.0192957
```

Die Widerstände für den Aufbau (a) ergeben sich somit insgesamt zu:

- $R1a = (933300 \pm 5000)\Omega = (0,9333 \pm 0,0050)M\Omega$
- $R2a = (0,998 \pm 0,019)\Omega$

Die Widerstände liegen in den richtigen Größenordnungen. Die bestimmten Widerstände lassen sich im Rahmen ihrer Unsicherheiten nicht mit den Sollwerten von $10M\Omega$ und 1Ω , wie sie im Vorfeld bestimmt wurden, vereinbaren. Grund für die falschen Messergebnisse können z.B. die zum Voltmeter und dem Ampermeter getroffenen Annahmen sein.

Aufbau (b)

Anschließend wurde der Schaltkreis, Versuchsvariante b) entsprechend, umgebaut:

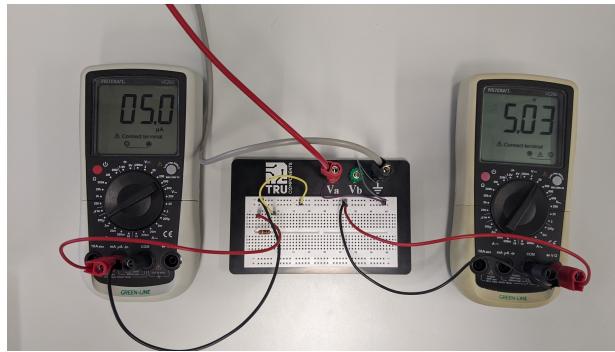


Abbildung 21: Aufbau auf Breadboard für Variante b) der indirekten Widerstandsmessung.

Folgende Werte wurden gemessen:

- Widerstand 1 (Messung bei 5,0V)
 - Spannung: 5,03V
 - Strom: $5,0 \mu\text{A}$
- Widerstand 2 (Messung bei 0,8V)
 - Spannung: 0,4 V
 - Strom: 101,8 mA

Gerätespezifische Messunsicherheiten

Die Messunsicherheiten von Spannung und Strom sind identisch zu denen im Aufbau (a). Folglich liegen die gemessenen Größen bei:

- $U1b = (5,0300 \pm 0,0029)V$
- $I1b = (5,000 \pm 0,029)\mu\text{A}$
- $U2b = (0,4000 \pm 0,0029)V$
- $I2b = (101,800 \pm 0,029)m\text{A}$

Berechnung der Widerstände

Es gilt das Ohmsche Gesetz:

$$U = I \cdot R \Leftrightarrow R = \frac{U}{I}$$

R = Widerstand

U = Spannung

I = Strom

Für die Widerstände ergeben sich somit für Aufbau (b) Bestwerte von:

$$\begin{aligned} 1. \text{Widerstand} : R &= \frac{U}{I} = \frac{5,0300V}{5,000\mu A} \approx 1006000\Omega \\ 2. \text{Widerstand} : R &= \frac{U}{I} = \frac{0,4000V}{101,800mA} \approx 3,929273\Omega \end{aligned}$$

```
(5.03/(5*10**-6)) #Widerstand 1
```

```
## [1] 1006000
```

```
(0.4/(101.8*10**-3)) #Widerstand 2
```

```
## [1] 3.929273
```

Messunsicherheiten

Die Messunsicherheit für die indirekt bestimmten Widerstände ergibt sich mit folgender Formel:

$$\begin{aligned} u_R &= \sqrt{\left(\frac{\partial R}{\partial U} \cdot u_U\right)^2 + \left(\frac{\partial R}{\partial I} \cdot u_I\right)^2} \\ u_R &= \sqrt{\left(\frac{1}{I} \cdot u_U\right)^2 + \left(\frac{-U}{I^2} \cdot u_I\right)^2} \\ 1. \text{Widerstand} : u_{R1b} &= \sqrt{\left(\frac{1}{5,000\mu A} \cdot 0,0029V\right)^2 + \left(\frac{-5,0300V}{5,000\mu A^2} \cdot 0,029\mu A\right)^2} \approx \pm 5900\Omega \\ 2. \text{Widerstand} : u_{R2b} &= \sqrt{\left(\frac{1}{101,800mA} \cdot 0,0029V\right)^2 + \left(\frac{0,4000V}{101,800mA^2} \cdot 0,029mA\right)^2} \approx \pm 0,029\Omega \end{aligned}$$

```
# Unsicherheit Widerstand 1
```

```
sqrt(((1/(5*10**-6))*0.0029)**2+(5.03/((5*10**-6)**2)*0.029*10**-6)**2)
```

```
## [1] 5863.556
```

```
# Unsicherheit Widerstand 2
```

```
sqrt(((1/(101.8*10**-3))*0.0029)**2+(0.4/((101.8*10**-3)**2)*0.029*10**-3)**2)
```

```
## [1] 0.02850921
```

Die Widerstände für den Aufbau (b) ergeben sich somit insgesamt zu:

- $R1b = (1006000 \pm 5900)\Omega$

- $R2b = (3,929 \pm 0,029)\Omega$

Die Widerstände liegen in den richtigen Größenordnungen. Die bestimmten Widerstände lassen sich im Rahmen ihrer Unsicherheiten nicht mit den Sollwerten von $10M\Omega$ und 1Ω , wie sie im Vorfeld bestimmt

wurden, vereinbaren. Besonders für Widerstand 2 ist im Experiment ein etwa vier mal höherer Wert bestimmt worden. Grund für die falschen Messergebnisse können z.B. die zum Voltmeter und dem Amperemeter getroffenen Annahmen sein.

Modellbildungsprozess

Bei unserem Versuch handelt es sich um ein Testexperiment, bei dem wir auf der Grundlage des Ohmschen Gesetzes Widerstände indirekt messen. Es sollen nun zwei Modelle erstellt werden, anhand derer die Widerstände der verwendeten elektrischen Widerstandsbauteile in den jeweiligen Schaltungen vorhergesagt werden können. Die Modelle sollen den Schaltungen nachempfundene Widerstandsschaltungen sein, in denen Amperemeter und Voltmeter durch Widerstände ersetzt werden. Das bedeutet allerdings auch, dass unser Messsystem und das physikalisch System nicht voneinander zu trennen sind.

Annahmen

Sowohl für Schaltung a), als auch für Schaltung b) wird grundsätzlich (vereinfachend) angenommen, dass das Voltmeter dabei einen Widerstand von $10M\Omega$ und das Amperemeter einen Innenwiderstand von 0Ω hat (vergleiche Ausführungen dazu bei der indirekten Widerstandsmessung). Eine weitere Annahme ist, dass der Schaltungsdräht keinen Widerstand hat.

Modell für Schaltung a)

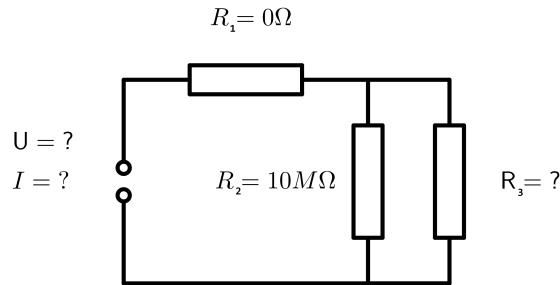


Abbildung 22: Modell zur Schaltung a)

Input:

Systemparameter:

- Spannung U an der Spannungsquelle
- Stromstärke I im gesamten Stromkreis

Randbedingungen:

- Widerstand Amperemeter $R_1: 0\Omega$
- Widerstand Voltmeter $R_2: 10M\Omega$

Output:

- Widerstand des unbekannten Widerstandes R_3

Modelldomäne Innerhalb des Modells wird der Widerstand R_{ges} mittels folgender Formel berechnet:

$$\left(\frac{1}{(R_{\text{ges}} - R_1)} - \frac{1}{R_2} \right) \ast \ast - 1$$

Diese röhrt von den bekannten Gesetzen zu dem Widerstand in Reihen- und Parallelschaltung, sowie dem Ohmschen Gesetz her.

Implementierung als R-Funktion mit zwei Argumenten:

```
# ---- Schaltung a)
# INPUT: Spannung, Stromstärke
# OUTPUT: Benötigter Widerstand
schaltungA <- function(U0, I0){
  # Randbedingungen
  R1 = 0 # Widerstand Amperemeter
  R2 = 10e6 # Widerstand Voltmeter
  # Berechnung des Gesamtwiderstandes
  Rges = U0/I0
  # Berechnung des benötigten R
  R3 = (1/(Rges-R1)-1/R2)**-1
  print("Widerstände in Schaltung a) in Ohm:")
  print(paste("R1: ", R1))
  print(paste("R2: ", R2))
  print(paste("R3: ", R3))
  print(paste("R_ges: ", Rges))
}
```

Wird das Modell mit den gemessenen Werten ausgeführt (das gemessene U und I entsprechen bei Schaltung a) den Einstellungen an der Spannungsquelle), erhält man mit diesem Modell folgenden Output:

```
# Testen mit gemessenen Werten für Widerstand 1
schaltungA(U0=5, I0=5.4e-06)
```

```
## [1] "Widerstände in Schaltung a) in Ohm:"
## [1] "R1: 0"
## [1] "R2: 1e+07"
## [1] "R3: 1020408.16326531"
## [1] "R_ges: 925925.925925926"
```

Der auf diese Weise ermittelte Wert für Widerstand 1 ($R_3 \approx 1020000\Omega$) ist etwas besser, als der Wert aus dem Experiment ($R_{1a} \equiv R_3 = (933300 \pm 5000)\Omega$), bei dessen Bestimmung die Wirkung von Voltmeter und Amperemeter vernachlässigt wurde.

Für Widerstand 2 sieht das etwas anders aus:

```
# Testen mit gemessenen Werten für Widerstand 2
schaltungA(U0=0.15, I0=0.1503)
```

```
## [1] "Widerstände in Schaltung a) in Ohm:"
## [1] "R1: 0"
## [1] "R2: 1e+07"
## [1] "R3: 0.998004091617175"
## [1] "R_ges: 0.998003992015968"
```

Widerstand 2 wird hier, wie in der indirekten Messung als $R_{1b} \equiv R_3 \approx 0,9980\Omega$ ermittelt. Dass es hierbei eine größere Übereinstimmung gegeben hat, als für Widerstand 1 lässt sich so erklären, dass das parallel geschaltete Voltmeter neben dem $10M\Omega$ -Widerstand für einen zum Widerstand parallel verlaufenden Stromfluss eine vergleichsweise größere Rolle gespielt hat, als neben dem 1Ω -Widerstand. Der Fehler ist entsprechend im letzteren Fall kleiner.

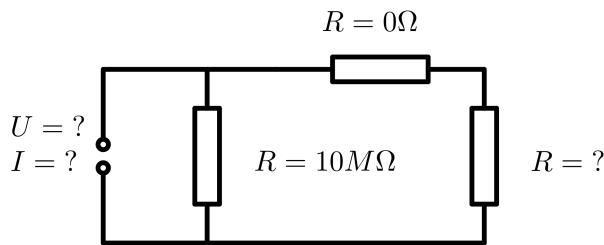


Abbildung 23: Modell zur Schaltung b)

Modell für Schaltung b)

Die Modellparameter, Rahmenbedingungen, Grenzen, Annahmen, Vereinfachungen, Inputs und Outputs sind die gleichen wie in für Schaltung a).

Der Unterschied zu dem Modell für Schaltung a) besteht in einer anderen Formel zur Berechnung des Widerstandes R_3:

$$R_3 = \left(\frac{1}{R_{ges}} - \frac{1}{R_2} \right)^{-1}$$

Implementierung als R-Funktion:

```
# ---- Schaltung b)
# INPUT: Spannung, Stromstärke
# OUTPUT: Benötigter Widerstand
schaltungB <- function(U0, I13){
  # Randbedingungen
  R1 = 0 # Widerstand Ampermeter
  R2 = 10e6 # Widerstand Voltmeter
  # Berechnung des Gesamtwiderstandes
  IO = I13 + U0/R2
  Rges = U0/IO
  # Berechnung des benötigten R
  R3 = (1/Rges-1/R2)**-1
  print("Widerstände in Schaltung b) in Ohm:")
  print(paste("R1: ", R1))
  print(paste("R2: ", R2))
  print(paste("R3: ", R3))
  print(paste("R_ges: ", Rges))
}
```

Ein Problem stellt aber dar, dass beim Durchführen des Experiments vergessen worden ist, die Stromstärke an der Spannungsquelle abzulesen. Es werden stattdessen für diese Modelltest die mit den Multimetern bestimmten Werte eingesetzt. Dabei geht allerdings der Stom, der durch das Voltmeter geflossen ist in der Berechnung unter. Das Modell wird also falsch benutzt.

Die Ergebnisse der folgenden Modelltests sind also nur im Kontext mit dieser Problematik genießbar

Für Widerstand 1 gibt das Modell folgenden (falschen) Output:

```
# Testen mit gemessenen Werten
schaltungB(U0=5.03, I13=5e-06)
```

```
## [1] "Widerstände in Schaltung b) in Ohm:"  
## [1] "R1: 0"  
## [1] "R2: 1e+07"  
## [1] "R3: 1006000"  
## [1] "R_ges: 914046.883518081"
```

Dieser Wert entspricht dann exakt dem indirekt bestimmten Widerstandswert. Auch für Widerstand 2 gibt das Modell (falscherweise) den Messwert aus:

```
schaltungB(U0=0.4, I13=0.1018)
```

```
## [1] "Widerstände in Schaltung b) in Ohm:"  
## [1] "R1: 0"  
## [1] "R2: 1e+07"  
## [1] "R3: 3.92927308447937"  
## [1] "R_ges: 3.92927154056128"
```

Fazit

Zusammenfassend lässt sich also sagen, dass mit den verwendeten Modellen für die Schaltungen a) und b) gute Werte für den zu untersuchenden Widerstand R_3 vorhergesagt werden können. Für Schaltung a) konnten mit dem entsprechenden Modell sogar ein genauerer Wert vorhergesagt werden, als dies bei der indirekten Widerstandsmessung möglich war.

Abbildungsverzeichnis

1	Versuchsaufbau 1	4
2	Versuchsaufbau 1, Nahansicht	4
3	Versuchsaufbau 2	12
4	Versuchsaufbau 2, Nahansicht	13
5	Wirkende Kräfte	17
6	Versuchsaufbau	18
7	Versuchsaufbau und Skizze des Schaltplans	26
8	Für sieben Minuten wurde der Temperaturverlauf der Erhitzung des Wassers im Kalorimeter gemessen	27
9	Das mit Wasser und einem Metallzylinder gefüllte Kalorimeter	29
10	Simulation 1. 1 Teilchen, 5 Sekunden, 300 Stöße pro s	34
11	Simulation 2. 1 Teilchen, 5 Sekunden, 3000 Stöße pro s	35
12	Simulation 3. 10 Teilchen, 5 Sekunden, 300 Stöße pro s	35
13	Mikroskop mit Probe	36
14	Auf diesen zwei Plots sind die Positionen aller bzw. eines markierten PSP im zeitlichen Verlauf zu sehen. Die Aufnahmedauer betrug 100 s mit 1 fps. Die PSP wurden zudem nummeriert.	37
15	Polystyrolpartikel mit dem Durchmesser 2 μ m. Der Durchmesser ist in Pixel abgemessen und beträgt 16 Pixel.	38
16	Das Histogramm zeigt die Häufigkeit der Schrittweiten pro Random-walk für Teilchen 2	39
17	Foto von Widerstand 1	43
18	Foto von Widerstand 2	43
19	Schaltkreise zur indirekten Widerstandsmessung. Links: Variante a). Rechts: Variante b). Quelle: Universität Potsdam, Institut für Physik und Astronomie, Grundpraktikum, Skript zum Versuch E1.	44
20	Aufbau auf Breadboard für Variante a) der indirekten Widerstandsmessung. Im Bild ist zudem bereits der Widerstand 1 eingebaut.	45
21	Aufbau auf Breadboard für Variante b) der indirekten Widerstandsmessung.	47
22	Modell zur Schaltung a)	49
23	Modell zur Schaltung b)	51

Tabellenverzeichnis

1	Verwendete Gewichte	5
2	Statistische Größen zur bestimmten Federkonstante	9
3	Messwerte	11
4	Statistische Größen zur zweiten bestimmten Federkonstante	15
6	Messwerte aus Versuch 1	18
8	Aufgenommene Messwerte samt Unsicherheiten für das untersuchte orangene Metall	30
9	Aufgenommene Messwerte samt Unsicherheiten für das untersuchte graue Metall	30