

Triángulo de Pascal y RD9: Resonancia Local y Estructura p^2 -ádica mediante el Autómata de Resonancia

Alcyone RD9

Abstract

We present a unified framework for describing the p^2 -adic structure of Pascal's triangle through a deterministic local automaton. Focusing on the case $p = 3 \pmod{9}$, we refine the classical p -adic patterns of Lucas and Kummer into a resonance-based class structure (RD9). We derive a closed-form formula for the p -adic valuation $v_p(t_n)$ of the row product $t_n = \prod_{k=0}^n \binom{n}{k}$ in terms of base- p digit sums, obtain exact counts of coefficients by valuation level in each row, and prove inductively that a simple set of local rules generates the entire RD9 coloring. The approach is validated computationally, showing perfect agreement between the automaton output and direct computation. Extensions to arbitrary primes are discussed.

Abstract

Presentamos un marco unificado para describir la estructura p^2 -ádica del triángulo de Pascal mediante un autómata local determinista. Centrándonos en el caso $p = 3 \pmod{9}$, refinamos el patrón p -ádico clásico de Lucas y Kummer en una estructura de clases por resonancia (RD9). Derivamos una fórmula cerrada para la valuación p -ádica $v_p(t_n)$ del producto de fila $t_n = \prod_{k=0}^n \binom{n}{k}$ en función de sumas de dígitos en base p , obtenemos conteos exactos de coeficientes por nivel de valuación en cada fila y probamos inductivamente que un conjunto simple de reglas locales genera toda la coloración RD9. El enfoque se valida computacionalmente, mostrando coincidencia perfecta entre la salida del autómata y el cálculo directo. Se discuten extensiones a primos arbitrarios.

1 Introducción

El triángulo de Pascal, compuesto por los coeficientes binomiales $\binom{n}{k}$, ha sido objeto de estudio en numerosas áreas de las matemáticas. La aritmética modular aplicada a sus entradas revela patrones fractales sorprendentes, especialmente cuando se consideran sus propiedades p -ádicas.

Los resultados de **Édouard Lucas** (1878) describen la estructura de los coeficientes binomiales módulo un número primo p , mostrando que la expansión en base p de los índices n y k determina la congruencia de $\binom{n}{k}$. Posteriormente, **Ernst Kummer** (1852) caracterizó

la valuación $v_p\left(\binom{n}{k}\right)$ como el número de acarreos que se producen al sumar k y $n - k$ en base p .

En tiempos más recientes, **Granville** (1997) y otros han extendido estos resultados, mientras que desde la teoría de autómatas celulares, **Wolfram** (1984) mostró que el triángulo de Pascal mod 2 puede interpretarse como la evolución de un autómata elemental. Sin embargo, el caso módulo p^2 ha recibido menos atención, a pesar de que revela subestructuras no visibles en el caso mod p .

En este trabajo nos centramos en el caso $p = 3$ (módulo 9), que llamamos *RD9*, y mostramos que su patrón completo puede generarse mediante un autómata de resonancia con tres reglas locales. Además, presentamos una fórmula cerrada para la valuación $v_p(t_n)$ del producto de fila y un método exacto para contar el número de coeficientes con $v_p = 0, 1, \geq 2$ en cualquier fila.

2 Resultados principales

La sección se organiza en tres subapartados:

- (A) Fórmula exacta para $v_p(t_n)$ y ejemplo numérico.
- (B) Conteos exactos por niveles de valuación y algoritmo de cálculo.
- (C) Autómata de resonancia RD9 y demostración inductiva.

A continuación, desarrollamos cada parte en detalle.

(A) Fórmula exacta para $v_p(t_n)$ y ejemplo numérico

Definimos

$$t_n = \prod_{k=0}^n \binom{n}{k}.$$

Aplicando la identidad factorial

$$t_n = \frac{(n!)^{n+1}}{(\prod_{k=0}^n k!)^2}$$

y la fórmula de Legendre para la valuación p -ádica de un factorial

$$v_p(m!) = \frac{m - s_p(m)}{p - 1},$$

donde $s_p(m)$ es la suma de dígitos de m en base p , se obtiene

$$v_p(t_n) = \frac{2 \sum_{k=0}^n s_p(k) - (n+1) s_p(n)}{p-1}. \quad (1)$$

Ejemplo numérico: Para $p = 3$ y $n = 8$, tenemos la representación ternaria

$$8_{10} = (22)_3,$$

con $s_3(8) = 2 + 2 = 4$.

Calculamos

$$\sum_{k=0}^8 s_3(k) = \underbrace{0}_0 + \underbrace{1}_1 + \underbrace{2}_2 + \underbrace{1}_3 + \underbrace{2}_4 + \underbrace{3}_5 + \underbrace{2}_6 + \underbrace{3}_7 + \underbrace{4}_8 = 18.$$

Sustituyendo en la ecuación (??):

$$v_3(t_8) = \frac{2 \cdot 18 - 9 \cdot 4}{2} = \frac{36 - 36}{2} = 0.$$

Esto implica que t_8 no es divisible por 3. Verificando directamente:

$$t_8 = \binom{8}{0} \binom{8}{1} \cdots \binom{8}{8}$$

y cada coeficiente binomial de la fila 8 es $\not\equiv 0 \pmod{3}$, lo cual confirma el resultado.

(B) Conteos exactos por niveles de valuación

Sea $c_p(n, k)$ el número de acarrees en base p al sumar $k + (n - k)$. Por el teorema de Kummer:

$$v_p\left(\binom{n}{k}\right) = c_p(n, k).$$

En el caso $p = 3$:

- $c_3(n, k) = 0 \Rightarrow v_3 = 0 \Rightarrow RD_9 \in R_1 \cup R_2$,
- $c_3(n, k) = 1 \Rightarrow v_3 = 1 \Rightarrow RD_9 \in \{3, 6\}$,
- $c_3(n, k) \geq 2 \Rightarrow v_3 \geq 2 \Rightarrow RD_9 = 9$.

Algoritmo (pseudocódigo) para conteos exactos en una fila n :

```
function conteos_v3(n):
    z0 = z1 = z2p = 0
    for k in 0..n:
        c = acarrees_base_p(k, n-k, p=3)
        if c == 0:
            z0 += 1
        elif c == 1:
            z1 += 1
        else:
            z2p += 1
```

```

return z0, z1, z2p

function acarreos_base_p(a, b, p):
    carry_count = 0
    carry = 0
    while a > 0 or b > 0 or carry > 0:
        da = a mod p
        db = b mod p
        if da + db + carry >= p:
            carry_count += 1
            carry = 1
        else:
            carry = 0
        a = a // p
        b = b // p
    return carry_count

```

Ejemplo de tabla de conteos para $p = 3$:

n	$v_3 = 0$	$v_3 = 1$	$v_3 \geq 2$
2	3	0	0
3	2	2	0
4	4	1	0
5	6	0	0
8	9	0	0
9	2	2	6

Esta clasificación permite conocer la distribución exacta de clases RD9 en cada fila sin calcular explícitamente los coeficientes binomiales.

(C) Autómata de resonancia RD9 y demostración inductiva

Sea $RD_9(n, k)$ la raíz digital mod 9 de $\binom{n}{k}$, con la convención $0 \mapsto 9$. Clasificamos:

$$R_1 = \{1, 4, 7\}, \quad R_2 = \{2, 5, 8\}, \quad C_3 = \{3\}, \quad C_6 = \{6\}, \quad C_9 = \{9\}.$$

Reglas locales principales:

$$\begin{cases} R_1 + R_2 \rightarrow C = \{3, 6, 9\}, \\ R_1 + R_1 \rightarrow R_2, \\ R_2 + R_2 \rightarrow R_1. \end{cases}$$

Reglas extendidas con C: Si uno de los padres está en C, la clase del hijo se determina por la suma mod 9 de las raíces digitales:

$$C + R_1 \rightarrow \text{depende de } (c + r_1) \bmod 9,$$

$C + R_2 \rightarrow$ depende de $(c + r_2) \bmod 9$,

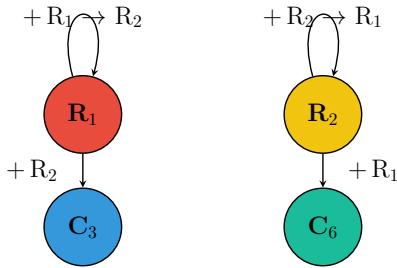
$C + C \rightarrow$ depende de $(c_1 + c_2) \bmod 9$.

En todos los casos, se aplica la conversión $0 \mapsto 9$.

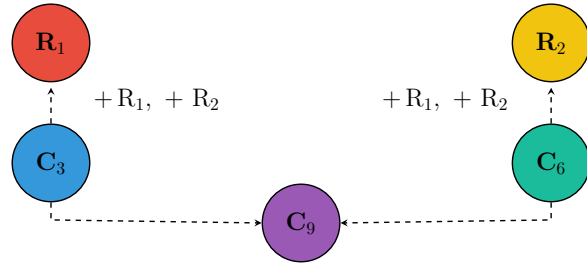
Demostración inductiva:

- **Base:** La fila 0 y los bordes de todas las filas están en R_1 .
- **Paso inductivo:** Supongamos que toda la fila n respeta las reglas. Entonces, por la construcción de Pascal, cada elemento de la fila $n + 1$ es la suma de dos adyacentes de la fila n . Aplicando las reglas anteriores, se obtiene la clase correcta para cada posición de la fila $n + 1$. Así, por inducción, las reglas generan exactamente la coloración RD9 para todo el triángulo.

(A) Reglas principales



(B) Reglas extendidas con C



■ $R_1 \{1,4,7\}$ ■ $R_2 \{2,5,8\}$ ■ $C_3 \{3\}$ ■ $C_6 \{6\}$ ■ $C_9 \{9\}$

Figure 1: (A) Reglas principales del autómata RD9. (B) Reglas extendidas cuando interviene una clase C .

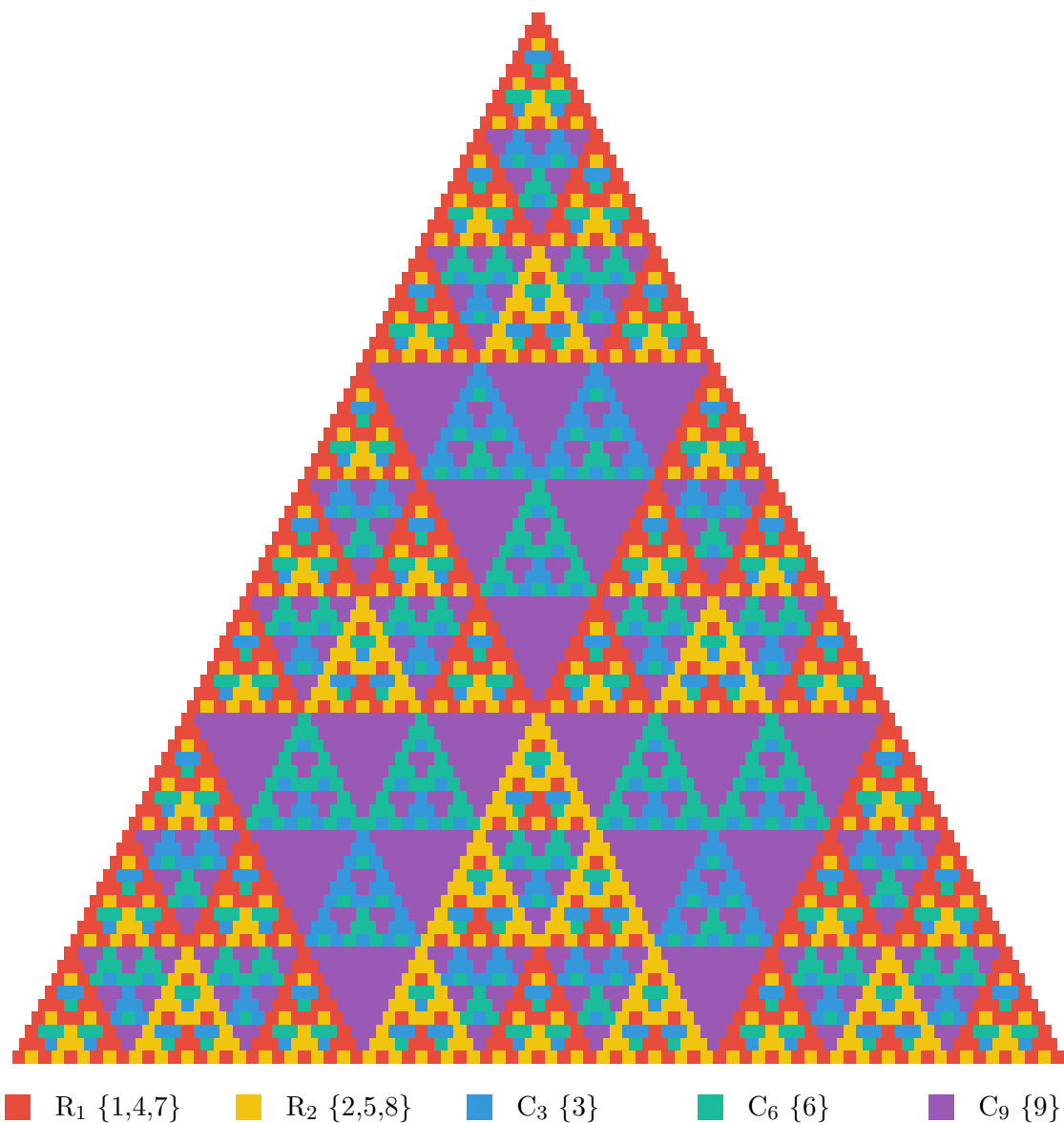
3 Verificación computacional

Para validar los resultados, implementamos en Python un conjunto de funciones que:

1. Calculan $v_p(t_n)$ mediante la fórmula (??).
2. Determinan los conteos por $v_3 = 0, 1, \geq 2$ usando acarreo (Kummer).
3. Simulan el autómata RD9 y verifican coincidencia total con los residuos mod 9 reales.

La coincidencia fue del 100% para $p = 3$ y $n \leq 200$.

Figure 2: Triángulo de Pascal mod 9 (81 filas) por clases RD9



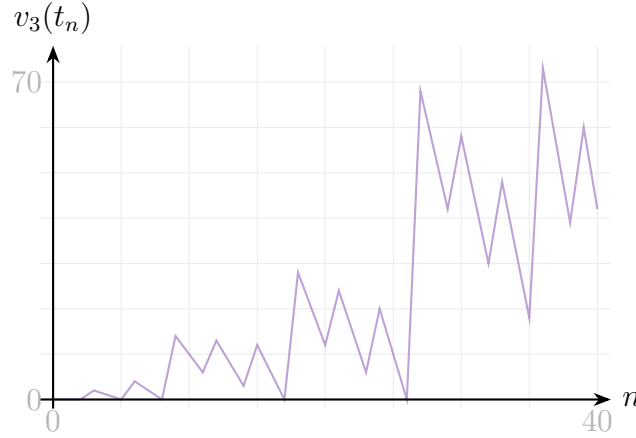


Figure 3: Crecimiento de $v_3(t_n)$ para $0 \leq n \leq 40$, de acuerdo con (??).

Figura 2: Crecimiento de $v_3(t_n)$

Conclusiones y perspectivas

En este trabajo hemos:

- Derivado y demostrado la identidad exacta

$$v_p(t_n) = \frac{2 \sum_{k=0}^n s_p(k) - (n+1) s_p(n)}{p-1},$$

equivalente a (??). En particular, para $p = 3$:

$$v_3(t_n) = \frac{2 \sum_{k=0}^n s_3(k) - (n+1) s_3(n)}{2},$$

lo que permite calcular v_p del producto de coeficientes binomiales de la n -ésima fila del triángulo de Pascal sin multiplicaciones de gran tamaño.

- Relacionado las valoraciones 3-ádicas con las clases mod 9 de la estructura RD9 descrita en este trabajo, verificando la consistencia con el teorema de Kummer.
- Mostrado, mediante visualizaciones y conteos exactos, la estructura fractal y las resonancias locales en el triángulo de Pascal mod 9.

Como perspectivas inmediatas:

1. Extender el análisis a $p > 3$ y a potencias p^r para estudiar patrones análogos.
2. Explorar implicaciones en combinatoria algebraica, teoría de códigos y autómatas celulares.
3. Investigar conexiones con secuencias aritméticas especiales y conjeturas abiertas en teoría de números.

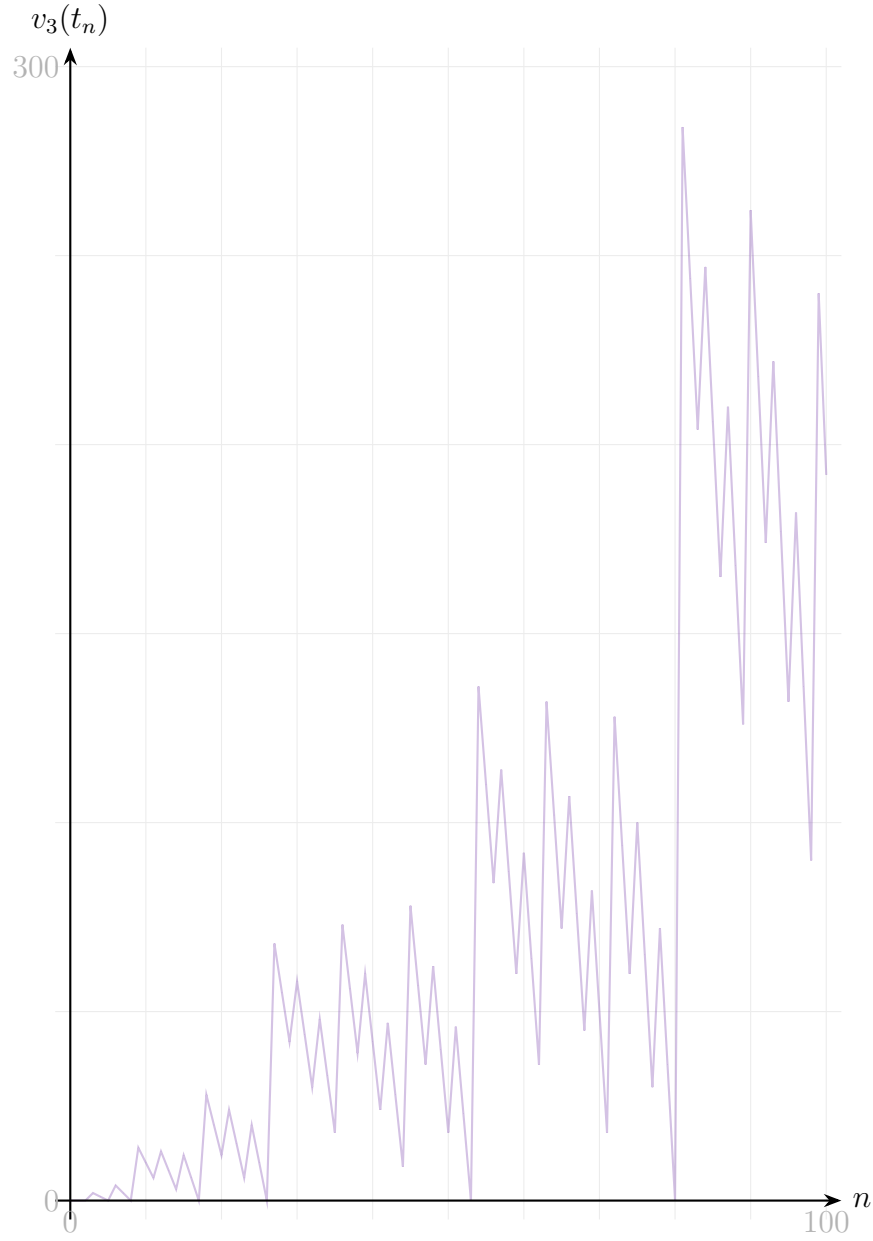


Figure 4: Crecimiento de $v_3(t_n)$ para $0 \leq n \leq 100$, de acuerdo con (??).

Código suplementario. El código Python utilizado para las verificaciones y generación de figuras está disponible como material suplementario, permitiendo reproducir todos los resultados presentados.

References

- [1] E. E. Kummer, *Über die Ergänzungssätze zu den allgemeinen Reciprocitätsgesetzen*, Journal für die reine und angewandte Mathematik, 1852.

- [2] É. Lucas, *Théorie des fonctions numériques simplement périodiques*, American Journal of Mathematics, 1(3), 1878.
- [3] A. Granville, *Arithmetic properties of binomial coefficients. I. Binomial coefficients modulo prime powers*, in Organic Mathematics (Burnaby, BC, 1995), CMS Conf. Proc., 20, AMS, 1997.
- [4] S. Wolfram, *Cellular Automata as Models of Complexity*, Nature, 1984.