

**Opgave 1**

Gegeven zijn de verzameling  $S$  van AI-studenten en  $L$  van laptops. Tussen deze verzamelingen gelden de relaties  $B \subseteq S \times L$  (bezitten) en  $G \subseteq S \times L$  (gebruiken). Formaliseer onderstaande frases in de taal van de verzamelingenleer. (Tip: je mag domein en bereik (range) gebruiken.)

- a Iedere AI-student gebruikt de laptops die hij of zij bezit.
- b Iedere AI-student bezit een laptop.
- c Er zijn AI-studenten die laptops gebruiken die van niemand zijn.

**Opgave 2**

Gegeven zijn de volgende verzamelingen:

$$A = \{a, \emptyset\} \quad B = \{b, \{a, \emptyset\}\} \quad C = \{a, b\}$$

- a Welke van de volgende uitspraken zijn waar en welke niet?

$$a \in A, \quad a \in B, \quad A \in B, \quad A \subseteq B$$

- b Geef de volgende verzamelingen door hun elementen op te sommen.

$$B \cap C, \quad A \times C, \quad C - B, \quad \mathcal{P}(A)$$

**Opgave 3**

Beschouw de volgende relatie  $R$  over de verzameling  $A = \{0, 1, 2, 3\}$ .

$$R = \{\langle 0, 3 \rangle, \langle 1, 0 \rangle, \langle 3, 2 \rangle\}$$

- a Ga na of de relatie  $R$  reflexief, irreflexief, symmetrisch, asymmetrisch en/of antisymmetrisch is. Beargumenteer je antwoord!
- b De relatie  $R$  is niet transitief. Welke paren moeten we voegen aan  $R$  om een transitieve relatie te krijgen? (Noem alleen paren die absoluut noodzakelijk zijn om van  $R$  een transitieve relatie te maken.)

**Opgave 4**

Zij  $\{0, 1\}^*$  de verzameling van eindige rijtjes bestaande uit de symbolen 0 en 1. (Typische elementen zijn dus 011000, 100010 en 1010100.) We definiëren inductief een verzameling  $A \subseteq \{0, 1\}^*$ , als volgt:

- $011 \in A$ .
- Als  $\sigma \in A$ , dan ook  $\sigma\sigma \in A$  en  $11\sigma0 \in A$ . (Dat wil zeggen, als  $\sigma$  in  $A$  zit, dan zit het rijtje dat je krijgt door twee keer  $\sigma$  achter elkaar op te schrijven ook in  $A$ ; en als  $\sigma$  in  $A$  zit, zit het rijtje dat je krijgt door er 11 voor te zetten en er een 0 achter te zetten ook in  $A$ .)
- Niets anders zit in  $A$ .

- a Definieer met recursie functies  $t_0 : A \rightarrow N$  en  $t_1 : A \rightarrow N$  waarbij  $t_i(\sigma)$  het aantal keer is dat  $i \in \{0, 1\}$  voorkomt in  $\sigma \in A$ .
- b Bewijs met inductie dat  $t_1(\sigma) = 2 \cdot t_0(\sigma)$  voor alle  $\sigma \in A$ .

### Opgave 5

Vertaal de volgende zinnen in de taal van de propositielogica. Geef zoveel mogelijk de logische structuur weer en vermeld de vertaalsleutel.

- a Als het alarm afgaat, dan is er echt brand of er is weer een oefening.
- b Hoewel het team sterker is dan vorig jaar, zal het toch ook dit jaar geen kampioen worden.
- c Baat het niet dan schaadt het niet.

### Opgave 6

Onderzoek in een waarheidstafel de volgende redeneerschema's op hun geldigheid. In geval van ongeldigheid wijs een specifieke interpretatie aan die laat zien dat het schema niet geldig is.

- a  $(p \wedge \neg q) \rightarrow r \models (\neg r) \rightarrow (p \vee q)$
- b  $p \rightarrow (q \vee r), (\neg q) \leftrightarrow r \models \neg p$

### Opgave 7

Bewijs met behulp van natuurlijke deductie dat de volgende redeneringen geldig zijn.

- a  $(p \vee q) \rightarrow r \vdash (p \rightarrow r) \wedge (q \rightarrow r)$
- b  $r \rightarrow \neg(p \vee q), (\neg p) \rightarrow q \vdash \neg r$

### Opgave 8

- a Bewijs
- b Laat met behulp van Beth tableaux zien dat de formule

$$\neg(p \wedge \neg q) \rightarrow (p \rightarrow q)$$

een tautologie is.