Opgave 1

Gegeven zijn de verzameling S van AI-studenten en L van laptops. Tussen deze verzamelingen gelden de relaties $B \subseteq S \times L$ (bezitten) en $G \subseteq S \times L$ (gebruiken). Formaliseer onderstaande frases in de taal van de verzamelingenleer. (Tip: je mag domein en bereik (range) gebruiken.)

a Iedere AI-student gebruikt de laptops die hij of zij bezit.

b Iedere AI-student bezit een laptop.

c Er zijn AI-studenten die laptops gebruiken die van niemand zijn.

Opgave 2

Gegeven zijn de volgende verzamelingen:

$$A = \{a, \emptyset\} \quad B = \{b, \{a, \emptyset\}\} \quad C = \{a, b\}$$

a Welke van de volgende uitspraken zijn waar en welke niet?

$$a \in A, \quad a \in B, \quad A \in B, \quad A \subseteq B$$

b Geef de volgende verzamelingen door hun elementen op te sommen.

$$B \cap C, \quad A \times C, \quad C - B, \quad \mathcal{P}(A)$$

Opgave 3

Beschouw de volgende relatie R over de verzameling $A = \{0, 1, 2, 3\}$.

$$R = \{\langle 0, 3\rangle, \langle 1, 0\rangle, \langle 3, 2\rangle\}$$

a Ga na of de relatie R reflexief, irreflexief, symmetrisch, asymmetrisch en/of antisymmetrisch is. Beargumenteer je antwoord!

b De relatie R is niet transitief. Welke paren moeten we voegen aan R om een transitieve relatie te krijgen? (Noem alleen paren die absoluut noodzakelijk zijn om van R een transitieve relatie te maken.)

Opgave 4

Zij $\{0, 1\}*$ de verzameling van eindige rijtjes bestaande uit de symbolen 0 en 1. (Typische elementen zijn dus 011000, 100010 en 1010100.) We definieren inductief een verzameling $A \subseteq \{0, 1\}*$, als volgt:

- $011 \in A$.
- Als $\sigma \in A$, dan ook $\sigma\sigma \in A$ en $11\sigma 0 \in A$. (Dat wil zeggen, als σ in A zit, dan zit het rijtje dat je krijgt door twee keer σ achter elkaar op te schrijven ook in A; en als σ in A zit, zit het rijtje dat je krijgt door er 11 voor te zetten en er een 0 achter te zetten ook in A.)
- Niets anders zit in A.

a Definieer met recursie functies $t_0 : A \to N$ en $t_1 : A \to N$ waarbij $t_i(\sigma)$ het aantal keer is dat $i \in \{0, 1\}$ voorkomt in $\sigma \in A$.

b Bewijs met inductie dat $t_1(\sigma) = 2 \cdot t_0(\sigma)$ voor alle $\sigma \in A$.

Opgave 5

Vertaal de volgende zinnen in de taal van de propositielogica. Geef zoveel mogelijk de logische structuur wee en vermeld de vertaalsleutel.

a Als het alarm afgaat, dan is er echt brand of er is weer een oefening.

b Hoewel het team sterker is dan vorig jaar, zal het toch ook dit jaar geen kampioen worden.

c Baat het niet dan schaadt het niet.

Opgave 6

Onderzoek in een waarheidstafel de volgende redeneerschema's op hun geldigheid. In geval van ongeldigheid wijs een specifieke interpretatie aan die laat zien dat het schema niet geldig is.

a $(p \wedge \neg q) \to r \models (\neg r) \to (p \vee q)$

b $p \to (q \vee r), (\neg q) \leftrightarrow r \models \neg p$

Opgave 7

Bewijs met behulp van natuurlijke deductie dat de volgende redeneringen geldig zijn.

a $(p \vee q) \to r \vdash (p \to r) \wedge (p \to r)$

b $r \to \neg(p \vee q), (\neg p) \to q \vdash \neg r$

Opgave 8

a Bewijs

b Laat met behulp van Beth tableaus zien dat de formule

$$\neg(p \wedge \neg q) \to (p \to q)$$

een tautologie is.