Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ»
Институт интеллектуальных кибернетических систем
Кафедра «Кибернетика» (№ 22)

«Дискретная математика (математическая логика)»
Дополнительные задачи: множества

Задание 1: Представить на кругах Эйлера соотношения между множествами, заданные утверждениями:

1) У всех насекомых шесть ног (A – множество всех насекомых, B – множество всех, имеющих 6 ног)
2) У некоторых насекомых есть крылья (B – множество насекомых, C – множество всех, имеющих крылья).

Задание 2: Изобразить графически отношения между множествами: $A \subseteq B$; $A \subseteq (B \cap C)$; $A = (B \cap C)$; $(B \cap C) \subseteq A$; $A \subseteq (B \cup C)$; $(B \cup C) \subseteq A$; $A = B \setminus C$;

Задание 3: Решить задачу. На некоторой планете X были установлены соотношения:

1. Все трёхглазые животные меняют свой цвет.
2. Только излучающие волны страха опасны для человека.
3. Ни одно из цветопеременных животных не имеет рукокрыльев.
4. Все обитатели большого каньона имеют три глаза.
5. Все излучающие волны страха – рукокрылые.

Опасны ли для человека обитатели большого каньона?

Задание 4: Доказать связь операций с отношением включения:
$(A \subseteq B) \Leftrightarrow (A \cup B = B) \Leftrightarrow (A \cap B = A) \Leftrightarrow (A \cap \overline{B} = \varnothing) \Leftrightarrow (\overline{A} \cup B = U) \Leftrightarrow (\overline{B} \subseteq \overline{A})$

Задание 5: Проверить правильность следствий. В случае, если следование не выполняется, привести соответствующие примеры:

1) Из $A \cap B \subseteq C$ следует $B \subseteq C$
2) Из $A \cup B \subseteq C$ следует $B \subseteq C$
3) Из $A \cup B \subseteq D$ и $D \cup G \subseteq C$ следует $A \subseteq C$
4) Из $A \subseteq B$ следует $A \cup C \subseteq B \cap C$
5) Из $A \subseteq B$ следует $A \cap C \subseteq B \cup C$

Задание 6: Пусть известно, что $A \cap B \subseteq \overline{C}$, $A \cup C \subseteq B$. Следует ли из этого, что $A \cap C = \varnothing$? Проверить соотношение с помощью диаграмм и эквивалентных преобразований.

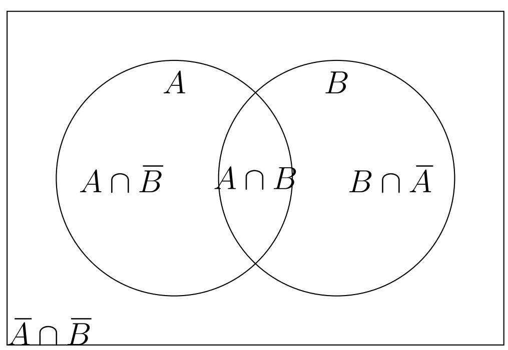
Задание 7: Проверить, существуют ли множества A,B,C такие, что выполняются соотношения: $A \cap B = \varnothing$, $A \cap C = \varnothing$, $(A \cup B) \setminus C = \varnothing$.

Задание 8: Доказать с помощью эквивалентных преобразований свойства разности:

1) $(A \cup B) \setminus C = (A \setminus C) \cup (B \setminus C)$
2) $(A \cap B) \setminus C = (A \setminus C) \cap (B \setminus C)$
3) $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C) = A \setminus (B \setminus C)$
4) $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$

Задание 9: Показать, что разность не ассоциативна, т.е. $(A \setminus B) \setminus C \neq A \setminus (B \setminus C)$

Задание 10: Пусть заданы пересекающиеся множества A и B. Тогда 4 части плоскости будут соответствовать элементарным пересечениям $A \cap B$, $A \cap \overline{B}$, $\overline{A} \cap \overline{B}$, $B \cap \overline{A}$ следующим образом:



Построить изображение трёх пересекающихся множеств и расписать получившиеся части плоскости.

Задание 11: Проверить правильность соотношений:

1) $(A \cup C) \setminus (A \cap C) = A \cap \overline{C} \cup \overline{A} \cap C$
2) $(A \cup B) \setminus C = A \cup (B \setminus C)$
3) $(A \cup B) \setminus C = A \cap (B \setminus C)$
4) $A \cap B \cap C = A \cap B \cap (B \cup C)$
5) $A \cup B = (A \setminus (A \cap B)) \cup B$
6) $A \cap B \cup A \cap C \cup B \cap C \subseteq A \cup B \cup C$
7) $(A \cup B) \setminus B = A$

8) $A \cap \overline{B} \cap C \subseteq A \cup B$

9) $\overline{A \cup B} \cap C = C \cap \overline{A} \cup C \cap \overline{B}$

10) $\overline{A \cup B} \cap C = C \setminus (C \cap (A \cup B))$

11) $A \cap B \cup \overline{B} \cap C \cup A \cap C = A \cap B \cup \overline{B} \cap C$

12) $A \cup B = (A \Delta B) \cup (B \Delta A)$

13) $A \Delta (A \Delta B) = A$

14) $A \setminus B = A \Delta (A \cap B)$

15) $A \Delta \varnothing = A$

Задание 12: Решить уравнения с множествами (определить наиболее точным образом множество X и указать, при каком соотношении параметров $A, B, C \dots$ такое решение существует).

1)
$$\begin{cases} A \cup X = B \\ A \cap X = B \end{cases}$$

2)
$$\begin{cases} A \cup X = B \\ A \cap X = C \end{cases}$$

3)
$$\begin{cases} A \cup X = B \\ A \setminus X = B \end{cases}$$

4)
$$\begin{cases} A \cup X = B \cap X \\ A \cap X = C \cup A \end{cases}$$

5)
$$\begin{cases} A \setminus X = C \\ C \setminus X = A \end{cases}$$

6)
$$\begin{cases} A \setminus X = B \\ X \setminus A = C \end{cases}$$

7)

$$\begin{cases} A \setminus X = B \\ X \setminus B = C \end{cases}$$

8)

$$\begin{cases} A \setminus X = X \setminus B \\ X \setminus A = C \setminus X \end{cases}$$

9)

$$\begin{cases} A \cup X = D \cap X \\ A \cap X = C \end{cases}$$

10)

$$\begin{cases} A \cap X = B \setminus X \\ C \cup X = X \setminus A \end{cases}$$

11)

$$\begin{cases} A \cup X = B \setminus X \\ C \cup X = X \setminus A \end{cases}$$

Задание 13: Пусть $A = \{a, b, c\}$, $B = \{a, c\}$, $C = \{c, d\}$. Построить $A \times B$, $B \times C$, $A \times B \times C$.

Задание 14: Показать с использованием диаграмм, что для любых множеств A, B, C, D выполняется соотношение

$$(A \times B) \cap (C \times D) = (A \times D) \cap (C \times B)$$

Задание 15: Какое отношение выполняется между объединением произведений $(A \times B) \cup (C \times D)$ и произведением объединений $(A \cup C) \times (B \cup D)$? В каких случаях выполняется равенство?

Задание 16: Пусть $A \neq \varnothing$, $B \neq \varnothing$, $(A \times B) \cup (B \times A) = C \times D$. Доказать, что $A = B = C = D$.

Задание 17: Найти δ_R, ρ_R , R^{-1} , $R \circ R$, $R \circ R^{-1}$, $R^{-1} \circ R$ для отношений:

1) $R = \{\langle x, y\rangle \mid x, y \in \mathbb{N}_0, x = 3y\}$

2) $R = \{\langle x, y\rangle \mid x, y \in \mathbb{Z}, x + y = 17\}$

3) $R = \{\langle x, y\rangle \mid x, y \in \mathbb{N}_0, x$ делит y нацело$\}$

4) $R = \{\langle x, y\rangle \mid x, y \in \mathbb{R}, x + y \le 0\}$

5) $R = \{\langle x, y\rangle \mid x, y \in \mathbb{R}, 2x \ge 3y\}$

6) $R = \{\langle x, y\rangle \mid x, y \in \mathbb{N}_0, x + y = 0(\mathrm{mod}2)\}$. Здесь и далее mod относится к равенству, т.е, в данном случае, остаток от деления на 2 левой части равенства равен остатку от деления на 2 правой части равенства

7) $R = \{\langle x, y\rangle \mid x, y \in \mathbb{N}_0, x + y = 1(\mathrm{mod}2)\}$

8) $R = \{\langle x, y\rangle \mid x, y \in \mathbb{N}_0, x = y + 3(\mathrm{mod}4)\}$

9) $R = \{\langle x, y\rangle \mid x, y \in \mathbb{N}_0, x = y + 2(\mathrm{mod}4)\}$

10) $R = \{\langle x, y\rangle \mid x, y \in \mathbb{N}_0, x = 2y(\mathrm{mod}4)\}$

Задание 18: Пусть R рефлексивно, $R(x, y)\&R(z, y) \Rightarrow R(x, z)$. Доказать, что R – эквивалентность.

Задание 19: Пусть R_1, R_2 – эквивалентности на A. Доказать, что $R_1 \cup R_2$ – эквивалентность тогда и только тогда, когда $R_1 \circ R_2 = R_2 \circ R_1$.

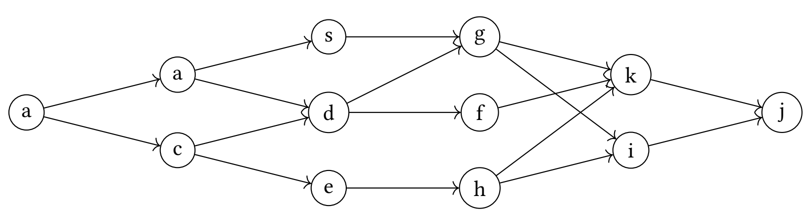
Задание 20: Пусть $\le$ и $<$ определены на $\mathbb{N}_0$ обычным образом. Доказать, что $< \circ < \ne <$, $\le \circ < = <$, $\le \circ \ge = \mathbb{N}^2$

Задание 21: Пусть R – частичный порядок на A. Доказать, что R^{-1} также является частичным порядком на A.

Задание 22: Пусть R_1 – предпорядок на A. Определим $\langle a, b\rangle \in R_2 \Leftrightarrow \langle a, b\rangle \in R_1 \& \langle b, a\rangle \in R_1$. Доказать, что R_2 – эквивалентность на A.

Задание 23: Пусть R – частичный порядок на A, $B \subseteq A$. Доказать, $R \cap B_2$ – частичный порядок

Задание 24: Пусть частичный порядок на множества $A = \{a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, k, s\}$ задан диаграммой Хассе.



Найти для B ($B \subseteq A$) нижнюю грань, точную нижнюю грань, верхнюю грань, точную верхнюю грань, минимальный, максимальный, наибольший, наименьший элементы.

1) $B = \{a, s, d\}$;

2) $B = \{c, s, d\}$;

3) $B = \{b, s, d, h\}$;

4) $B = \{b, c, g, h\}$;

5) $B = \{b, c, g, f\}$;

6) $B = \{c, f, g\}$.

Задание 25: Определить свойства отношений, заданных на множестве $A = \{a, b, c\}$.

$$R_1 = \begin{Bmatrix} a & b \\ a & c \\ b & c \\ a & a \\ b & b \end{Bmatrix} \qquad R_2 = \begin{Bmatrix} a & b \\ a & a \\ b & a \\ c & b \\ b & b \end{Bmatrix}$$

Задание 26: Для каждого из отношений задачи 17 построить рефлексивное замыкание, транзитивное замыкание, симметричное замыкание.

Задание 27: Построить транзитивное замыкание для следующего отношения:

$$R = \begin{Bmatrix} a & b \\ b & c \\ c & a \end{Bmatrix}$$

Задание 28: Построить отношения, обладающие следующими свойствами:

1) рефлексивное, симметричное, нетранзитивное;

2) рефлексивное, антисимметричное, нетранзитивное;

3) рефлексивное, не симметричное, транзитивное;

4) антисимметричное, транзитивное, нерефлексивное;

5) симметричное, транзитивное, нерефлексивное.

Задание 29: Для каких отношений R выполняется соотношение $R^{-1} = \overline{R}$?

Задание 30: Пусть конечное множество A содержит n элементов. Сколько на этом множестве существует различных отношений? Отношений, обладающих следующими свойствами:

1) рефлексивных;
2) иррефлексивных;
3) симметричных и рефлексивных;
4) антисимметричных?

Задание 31: Определить свойства отношений, заданных в задаче 17.

Задание 32: Пусть A и B – конечные множества, содержащие m и n элементов соответственно.

1) Сколько существует бинарных отношений на $A \times B$
2) Сколько существует функций из A в B?
3) Сколько существует функций из A на B?
4) Сколько существует 1-1 функций из A в B?

Задание 33: Пусть $A = \{a, b, c, d\}$, $B = \{c, d, f, e\}$, $C = \{a, c, d, e, f\}$. Построить:

1) функцию из A в A;
2) функцию из A в C;
3) функцию из A на B;
4) 1-1 функцию из A в C;
5) взаимнооднозначное отображение для тех множеств, для которых возможно такое построение.