Análisis Numérico

Laboratorio 1: Estimación del error para series de Maclaurin.

Integrantes:

Santiago Villabona Aponte – 000467411

Universidad Pontificia Bolivariana Seccional Bucaramanga

Facultad de ingeniería de sistemas e informática

Docente: Cesar Augusto Luna Cáceres

22 de julio de 2025

Resumen

En este trabajo se analiza la aproximación de funciones matemáticas mediante la serie de Maclaurin, evaluando el error numérico en cada caso. Se comparan sus valores reales con los obtenidos mediante la expansión en serie. Se calcula el error fraccional y el error relativo porcentual para cada aproximación. Los resultados muestran que el número de términos utilizados influye directamente en la precisión de la serie, disminuyendo el error a medida que se agregan más términos. El objetivo principal fue determinar cómo el número de términos en la serie afecta la precisión y la rapidez con la que la serie se acerca al valor real. Para ello, se utilizó como función ejemplo la función exponencial e^x, con valores de x entre 0 y 50, y se aproximó con series de Maclaurin de 1 a 6 términos. Los valores obtenidos se compararon con el valor real calculado en Excel, y se calcularon los errores. Permite comprender cómo las series de Maclaurin pueden ser una herramienta efectiva para aproximar funciones en un intervalo cercano al punto de expansión.

1. Palabras clave:

- Serie de Maclaurin
- Métodos numéricos
- Error fraccional
- Error relativo
- Aproximación matemática
- Convergencia de series

2. Introducción

Los errores numéricos surgen debido al uso de aproximaciones para representar operaciones matemáticas. La serie de Maclaurin permite expresar funciones en términos de potencias de x, lo que facilita su cálculo numérico.

Se analizarán dos tipos de error:

- **Error fraccional,** que mide la diferencia entre el valor real y el aproximado.
- **Error relativo (%EaE_aEa)**, que mide la diferencia entre términos consecutivos de la serie.

3. Marco teórico:

La fórmula de la serie de Maclaurin:

Series de Maclaurin: La serie de Maclaurin es una **herramienta esencial en el análisis numérico** para aproximar funciones mediante una **suma infinita de términos polinómicos**. Esta serie se deriva de la serie de Taylor, pero se centra en un punto específico, generalmente $x = 0$. La fórmula general de la serie de Maclaurin es:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$$

La serie de Maclaurin permite expresar una función como una suma de términos que involucran las derivadas de la función en un punto, lo que facilita su aproximación.

Aproximación de Funciones: En muchas aplicaciones prácticas, el cálculo exacto de ciertas funciones es difícil o imposible. Las series de Maclaurin ofrecen una forma de aproximar estas funciones usando una cantidad finita de términos. Sin embargo, es crucial entender que estas aproximaciones introducen errores, y el objetivo de este laboratorio es precisamente cuantificar y analizar esos errores.

Error Numérico: Los errores numéricos son inevitables al usar aproximaciones para representar operaciones y cantidades matemáticas. Estos errores se deben a la naturaleza finita de los cálculos en computadoras y a la truncación de series infinitas. En este contexto, se analizarán dos tipos de errores:

Porcentaje de Error Fraccional: Este error mide la diferencia entre el valor real (analítico) y el valor numérico aproximado. Se calcula como:

Donde *v_real* es el valor analítico de la función y *v_numérico* es el valor obtenido con la serie de Maclaurin. Este error indica qué tan lejos está la aproximación del valor real.

Porcentaje de Error Relativo: Este error se utiliza cuando no se conoce el valor real, por lo que se calcula comparando la aproximación actual con la anterior. Se define como:

Donde *v_actual* es el valor obtenido en la iteración actual y *v_anterior* es el valor obtenido en la iteración anterior. Este error ayuda a evaluar cómo mejora la aproximación al agregar más términos a la serie.

Función Exponencial y su Serie de Maclaurin: La función exponencial $e^x *$ es un ejemplo clásico que se puede aproximar con la serie de Maclaurin. La serie de Maclaurin para $e^x *$ es:

Esta serie es el caso específico que se analiza en el laboratorio. Al truncar esta serie a un número finito de términos, se obtiene una aproximación de $e^x *$, la cual mejora a medida que se añaden más términos.

Propagación de Errores: Es fundamental considerar que los errores en los cálculos se pueden propagar al combinar aritméticamente cantidades medidas. El análisis de cómo estos errores se propagan es esencial para comprender la precisión de los resultados finales. Si bien no es el enfoque principal de este laboratorio, es un concepto relevante en el contexto del análisis numérico.

4. Metodología

- Se calcularon los valores exactos de las funciones en el intervalo x ∈ [0,50] con incrementos de 1 (para ln(1+x), se usó x∈[0,1] con incrementos de 0.02).
- Se aproximaron las funciones usando la serie de Maclaurin con hasta 6 términos.
- Se calcularon los errores fraccional y relativo para cada caso.
- Se analizaron los resultados y se elaboraron gráficos para visualizar la precisión de cada aproximación.

5. Parte experimental

- Se estableció un rango de valores para la variable *x* que va desde 0 hasta 50, con incrementos de 1 unidad. Esto significa que se analizaron 51 valores diferentes de x.

- Para cada valor de *x*, se calculó el valor real de la función e^x utilizando el software Microsoft Excel. Este valor real sirvió como punto de referencia para comparar con los valores obtenidos mediante la serie de Maclaurin y calcular los errores.

- Aproximación con la Serie de Maclaurin: Se implementó la serie de Maclaurin para e^x, en Python, calculando aproximaciones de 1 a 6 términos.

- **Cálculo de Errores:** Porcentaje de Error Fraccional (%Ef): Para cada valor de *x* y cada aproximación (de 1 a 6 términos). Porcentaje de Error Relativo (%Ea): Para cada valor de *x*, y cada aproximación (de 2 a 6 términos) se calculó el error relativo porcentual usando la siguiente fórmula

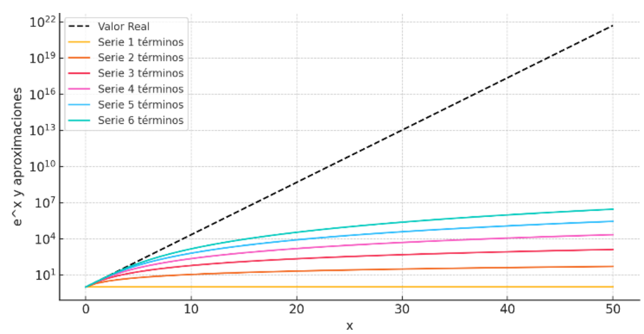
- Registro de Datos:

Los valores calculados, tanto las aproximaciones de la serie como los errores, se registraron en tablas comparativas.

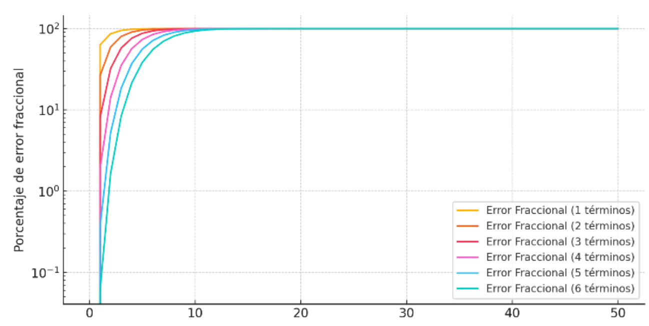
Estas tablas facilitaron la organización y el análisis de los resultados.

6. Resultados y discusión:

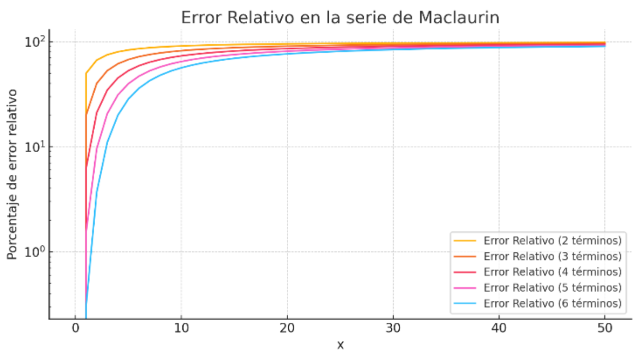
Gráfica 1: Comparación de la serie de Maclaurin con el valor real de e^x



Gráfica 2: Error fraccional en la serie de Maclaurin



Gráfica 3: Error relativo en la serie de Maclaurin



- **Gráfica de valores reales y aproximados:** Se observa cómo la serie de Maclaurin se acerca al valor real de e^x a medida que se agregan más términos.
- **Gráfica del error fraccional:** El error disminuye con más términos, pero crece para valores grandes de x, debido a la falta de términos suficientes.
- **Gráfica del error relativo:** Muestra cómo cada término adicional mejora la aproximación respecto al anterior, con mayor impacto en valores pequeños de x.

Interpretación de los Resultados:

- **Comparación de valores reales y aproximados**

  La Figura 1 muestra la comparación entre el valor real de e^x y sus aproximaciones con diferentes términos de la serie. Se observa que, a mayor número de términos, la aproximación mejora significativamente para valores pequeños de x, pero se vuelve inexacta para valores grandes debido a la falta de términos suficientes.

- **Análisis del error fraccional**

  La Figura 2 muestra el error fraccional en función de x. Se observa que:

  Para valores pequeños de x, la serie de Maclaurin converge rápidamente.

  Para valores grandes de x, el error aumenta drásticamente si se usan pocos términos.

- **Análisis del error relativo**

  La Figura 3 presenta el error relativo entre términos consecutivos. Se nota que:

  Agregar términos reduce significativamente el error.

  La mejora es notable entre 1 y 3 términos, pero a partir de 5 términos el beneficio adicional es menor.

7. Conclusiones:

- La serie de Maclaurin es efectiva para aproximar e^x cuando x es pequeño.
- A medida que se agregan términos, la precisión mejora, pero hay un punto de rendimiento decreciente.
- Para valores grandes de x, se necesitan más términos para obtener una aproximación precisa.
- Los errores fraccional y relativo muestran que la convergencia de la serie depende del número de términos usados.

8. **Referencias bibliográficas:**

[1]. Chapra, S. C., & Canale, R. P. (2015). Métodos Numéricos para Ingenieros. McGraw-Hill.

[2]. Burden, R. L., & Faires, J. D. (2011). Análisis numérico. Cengage Learning.

[3]. *Stewart, J. (2012). Cálculo: conceptos y contextos (4ta ed.). Cengage Learning.*

[5]. Chapra, S. C., & Canale, R. P. (2015). *Métodos numéricos para ingenieros* (7ma ed.). McGraw-Hill.