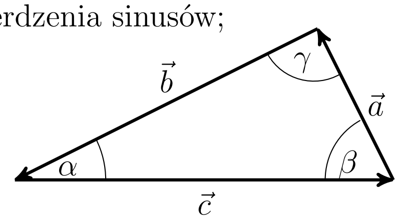
Egzamin z Algebry Liniowej

Do egzaminu przystępują studenci, którzy mają zaliczone zajęcia audytoryjne.

Egzamin odbędzie się kursie Algebra Liniowa na platformie uczelnianej Moodle (https://e-edukacja.zut.edu.pl/). Egzamin będzie składał się z około 20 zadań.

Zagadnienia na egzamin. Wiedza. Liczba zadań: 5 lub 6

1. Postać algebraiczna, tygonometryczna i biegunowa liczb zespolonych Własności sprzężenia i modułu liczb zespolonych, wzóry Eulera i de Moivre'a ;
2. Twierdzenie Bézouta;
3. Zasadnicze twierdzenie algebry;
4. Dowód twierdzenia: Niech $W(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_0$ będzie wielomianem o współczynnikach rzeczywistych. Jeżeli liczba z_0 jest pierwiastkiem tego wielomianu, to $\overline{z_0}$ jest również pierwiastkiem tego wielomianu;
5. Dowód faktu: $(x^2+x+1)\Big|\Big((x+1)^{2n+1} + x^{n+2}\Big)$;
6. Własności działań na macierzach;
7. Dowód faktu: $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$;
8. Własności wyznaczników;
9. Własności transpozycji macierzy:
   - $(A+B)^T = A^T + B^T$;
   - $\det A = \det A^T$;
   - $(AB)^T = B^T A^T$;
   - $\left(A^T\right)^n = (A^n)^T$;
10. Dowód twierdzenia: Jeżeli macierz A ma macierz odwrotną, to $\det A \neq 0$;
11. Własności macierzy odwrotnej:
    - $(A^{-1})^T = \left(A^T\right)^{-1}$;
    - $(\alpha A)^{-1} = \frac{1}{\alpha}(A)^{-1}$;
    - $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$;
    - $(A^{-1})^n = (A^n)^{-1}$;
12. Własności rzędu macierzy;
13. Twierdzeniem Kroneckera-Capellego;
14. Fakt: $\left\| \dfrac{\boldsymbol{u}}{\|\boldsymbol{u}\|} \right\| = 1$;
15. Fakt: Równanie sfery o środku w punkcie $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ i promieniu r ma postać: $(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2 = r^2$;
16. Własności iloczynu skalarnego i wektorowego;
17. Dowód twierdzenia sinusów;



$$\frac{|\vec{a}|}{\sin\alpha} = \frac{|\vec{b}|}{\sin\beta} = \frac{|\vec{c}|}{\sin\gamma}.$$

18. Dowód faktu: Odległość punktu $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ od płaszczyzny $\pi: \ Ax+By+Cz+D = 0$ jest dana wzorem $d = \dfrac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$;
19. Dowód faktu: W grupie istnieje dokładnie jeden element neutralny;
20. Dowód faktu: W grupie G dla każego $a \in G$ istnieje dokładnie jeden element odwrotny;
21. Dowód faktu: W przestrzeni liniowej V zachodzi: $\bigwedge\limits_{\mathbf{x} \in V} 0 \cdot \mathbf{x} = \mathbf{0}$;
22. Fakt: Jeżeli U jest podprzestrzenią V, to $\mathbf{0} \in U \subset V$.
23. Fakt: Niech $f : V \to W$ będzie przekształceniem liniowym. Wtedy $f(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$.
24. Twierdzenie: Niech $f : V \to W$ będzie przekształceniem liniowym. Wtedy zbiór $\ker f$ jest podprzestrzenią przestrzeni V;
25. Twierdzenie: Niech $f : V \to W$ będzie przekształceniem liniowym. Wtedy zbiór $\operatorname{im} f$ jest podprzestrzenią przestrzeni W;
26. Twierdzenie: Niech $f : V \to W$ będzie przekształceniem liniowym. Wymiar jądra i obrazu odwzorowania f spełniają warunek
$$\dim \ker f + \dim \operatorname{im} f = \dim V;$$
27. Dowód twierdzenie: Wielomian charakterystyczny nie zależy od wyboru bazy;
28. Twierdzenie: Wektory własne odpowiadące różnym wartościom własnym przekształcenia są liniowo niezależne;
29. Twierdzenie: Wektory ortogonalne, z których ani jeden nie jest równy zero, są liniowo niezależne;
30. Twierdzenie: Każda skończenie wymiarowa przestrzeń euklidesowa ma bazę ortonormalną;
31. Własności macierzy przekształceń płaszczyzny;
32. Kryterium Sylvestera;

Przykładowe zadania

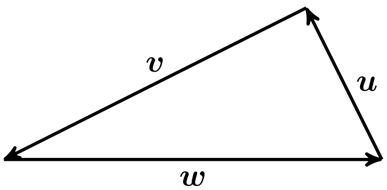
1. Zaznaczyć wszystkie poprawne
   - ☐ $|z_1 - z_2| = |z_1| - |z_2|$;
   - ■ $\overline{z_1 - z_2} = \overline{z_1} - \overline{z_2}$;
   - ■ $\overline{\cos\varphi + i\sin\varphi} = \overline{\cos\varphi} + \overline{i\ \sin\varphi}$;
   - ☐ $\overline{iz} = i\,\overline{z}$;

2. Niech $W(x) = (x+1)^{2n+1} + x^{n+2}$. Zaznaczyć wszystkie poprawne.
   - ■ $W\left(\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}\right) = 0$;
   - ■ $\left(x + \frac{1+i\sqrt{3}}{2}\right) \Big| W(x)$;
   - ■ $\left(x + \frac{1-i\sqrt{3}}{2}\right)\left(x + \frac{+1+i\sqrt{3}}{2}\right) \Big| W(x)$;
   - ☐ $W(0) = 0$;

3. Niech A będzie macierzą kwadratową stopnia $n \geqslant 2$. Zaznaczyć wszystkie poprawne.

■ $\det(\alpha A) = \alpha^n \det A$;
■ $\det A^2 = (\det A)^2$;
□ $\det \alpha A = \alpha \det A$;
■ $\det A = \det(BAB^{-1})$;

4. Niech $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{w}$ będą wektorami przedstawionymi na rysunku. Zaznaczyć wszystkie poprawne



■ $\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} = -\boldsymbol{w}$;
■ $||\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}|| = ||\boldsymbol{w}||$;
□ $||\boldsymbol{u}|| + ||\boldsymbol{v}|| = ||\boldsymbol{w}||$;
□ $\frac{\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}}{||\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}||} = \frac{\boldsymbol{w}}{||\boldsymbol{w}||}$;

5. Niech $f : V \to W$ będzie przekształceniem liniowym oraz $\dim V = m$, $\dim W = n$. Zaznaczyć wszystkie poprawne

□ $A \in M_{m\times n}$, gdzie $A-$ macierz przekształcenia f;
□ $\dim \ker f = \dim \operatorname{im} f$;
□ $\dim \ker f + \dim \operatorname{im} f = \dim W$;
■ $\ker f$ **jest podprzestrzenią przestrzeni** V;