第四章：区间估计

苏勤亮

中山大学计算机学院

超算中心503M

suqliang@mail.sysu.edu.cn

主要内容

- 置信区间
- 正态总体参数的置信区间
- 大样本置信区间

- 区间估计

假设$(X_1,\cdots,X_n)$是总体X的一个样本，区间估计是给出两个统计量$\underline{\theta}=\underline{\theta}(X_1,\cdots,X_n), \bar{\theta}=\bar{\theta}(X_1,\cdots,X_n)$，使区间$(\underline{\theta},\bar{\theta})$以一定的概率覆盖真实的参数值$\theta$

- 区间估计与点估计的区别
  - 点估计是根据观察到的样本给出未知参数θ的一个估计值$\hat{\theta}$，但点估计并不能提供任何关于估计值$\hat{\theta}$ 可靠性的信息
  - 区间估计则要由样本给出参数θ的一个估计范围，并指出该区间包含θ可能性的大小

置信度、置信系数

定义：设总体$X_1, X_2, \cdots, X_n$是取自总体$F_\theta(x)$的一个样本，假如$\hat{\theta}_L(\boldsymbol{X})$与$\hat{\theta}_U(\boldsymbol{X})$是在参数空间$\Theta$上取值的两个统计量，且$\hat{\theta}_L(\boldsymbol{X}) < \hat{\theta}_U(\boldsymbol{X})$，则称随机区间$[\hat{\theta}_L, \hat{\theta}_U]$为参数$\theta$的一个区间估计。该区间覆盖参数$\theta$的概率$P_\theta\left(\hat{\theta}_L \le \theta \le \hat{\theta}_U\right)$称为置信度。该置信度在参数空间$\Theta$上的下确界$\inf\limits_{\theta \in \Theta} P_\theta\left(\hat{\theta}_L \le \theta \le \hat{\theta}_U\right)$称为该区间估计的置信系数

1) $[\hat{\theta}_L, \hat{\theta}_U]$为参数$\theta$的一个区间估计

2) $P_\theta\left(\hat{\theta}_L \le \theta \le \hat{\theta}_U\right)$称为该区间估计的置信度

3) $\inf\limits_{\theta \in \Theta} P_\theta\left(\hat{\theta}_L \le \theta \le \hat{\theta}_U\right)$称为该区间估计的置信系数

- 显然，区间估计的评价准则
  - 置信度（置信系数）越大越好
  - 区间估计$[\hat{\theta}_L, \hat{\theta}_U]$的平均长度越短越好

例：设$x_1, x_2, \cdots, x_n$是来自正态总体$N(\mu, \sigma^2)$的一个样本。用样本均值$\bar{x}$和样本方差s^2可以给出正态均值μ的区间估计

$$\left[\bar{x} - \frac{ks}{\sqrt{n}}, \bar{x} + \frac{ks}{\sqrt{n}}\right]$$

可计算出概率

$$P\left(\bar{x} - \frac{ks}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \bar{x} + \frac{ks}{\sqrt{n}}\right) = P\left(\left|\frac{\sqrt{n}(\bar{x} - \mu)}{s}\right| \leq k\right)$$

$$=?$$

随机变量$\frac{\sqrt{n}(\bar{x}-\mu)}{s}$服从什么分布？

由前面章节t分布的知识可知，

$$\frac{\sqrt{n}(\bar{x}-\mu)}{s} \sim t_{n-1}(z)$$

由于分布 $t_{n-1}(z)$不依赖于未知参数μ和σ，所以可以用t分布来计算置信度

$$P\left(\left|\frac{\sqrt{n}(\bar{x}-\mu)}{s}\right| \le k\right) = P(|t| \le k)$$

其中$t \sim t_{n-1}(z)$. 因此，

$$P\left(\bar{x}-\frac{s}{\sqrt{n}} \le \mu \le \bar{x}+\frac{s}{\sqrt{n}}\right) = P(|t| \le 1) = 0.654$$

$$P\left(\bar{x}-\frac{2s}{\sqrt{n}} \le \mu \le \bar{x}+\frac{2s}{\sqrt{n}}\right) = P(|t| \le 2) = 0.933$$

$$P\left(\bar{x}-\frac{3s}{\sqrt{n}} \le \mu \le \bar{x}+\frac{3s}{\sqrt{n}}\right) = P(|t| \le 3) = 0.990$$

容易看出，在样本数n固定的情况下，置信系数与估计区间的长度成正比

- 区间增长，置信系数会增大，但由于区间太长，估计的精度下降

- 区间缩短，估计精度增加，但置信系数会减小

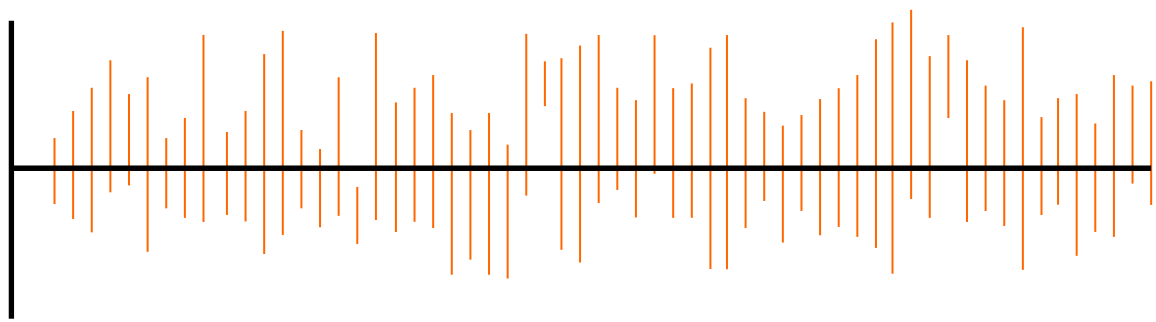
置信区间

定义：设θ是总体的一个参数，其参数空间为Θ，设$x_1, x_2, \cdots, x_n$是来自该总体的一个样本，对给定$\alpha\ (0 < \alpha < 1)$，确定两个统计量$\hat{\theta}_L = \hat{\theta}_L(x_1, x_2, \cdots, x_n)$与$\hat{\theta}_U = \hat{\theta}_U(x_1, x_2, \cdots, x_n)$，若有

$$P\left(\hat{\theta}_L \le \theta \le \hat{\theta}_U\right) \ge 1 - \alpha, \qquad \forall\, \theta \in \Theta$$

则称随机区间$[\hat{\theta}_L, \hat{\theta}_U]$是$\theta$的置信水平为$1 - \alpha$的置信区间，或简称$[\hat{\theta}_L, \hat{\theta}_U]$是$\theta$的$1 - \alpha$置信区间，$\hat{\theta}_L$与$\hat{\theta}_U$分别称为$1 - \alpha$置信区间的置信下限与置信上限

- 置信水平与置信区间的含义：设法构造一个随机区间$[\hat{\theta}_L, \hat{\theta}_U]$，它能覆盖未知参数$\theta$的概率至少为$1-\alpha$
  - 区间是一个随机变量，会随着观察值的变化而改变
  - 若反复抽样多次, 每次的抽样值都会导致一个区间$(\hat{\theta}_L, \hat{\theta}_U)$



  - 这样的区间或者包含θ的真值, 或者不包含θ的真值

    当$\alpha = 0.01$，即置信水平为99%时, 它表示100个计算得到的区间$(\underline{\theta}, \bar{\theta})$中，约有99个包含真实的$\theta$值

定义：如果对于给定的α $(0 < \alpha < 1)$恒有

$$P\left(\hat{\theta}_L \le \theta \le \hat{\theta}_U\right) = 1 - \alpha, \qquad \forall\, \theta \in \Theta$$

则称随机区间$\left[\hat{\theta}_L, \hat{\theta}_U\right]$是$\theta$的$1-\alpha$的同等置信区间

- 在一些问题中，我们可能只关心某未知参数的下限或上限
  - 例如，对于某种合金钢的强度来讲，人们总是希望其强度越大越好，这时强度的下限是一个很重要的指标
  - 对某些药物的毒性来讲，人们总希望其毒性越小越好，这时毒性的上限便成了一个重要的指标

定义：设θ是总体的某个未知参数，对给定的$\alpha\ (0 < \alpha < 1)$，由来自该总体的样本$x_1, x_2, \cdots x_n$确定的统计量$\hat{\theta}_L = \hat{\theta}_L(x_1, x_2, \cdots, x_n)$满足

$$P\left(\theta \geq \hat{\theta}_L\right) \geq 1 - \alpha, \qquad \forall\, \theta \in \Theta$$

则称$\hat{\theta}_L$为θ的置信水平是$1-\alpha$的单侧置信下限，简称$1-\alpha$单侧置信下限。若等号对一切$\theta \in \Theta$成立，则称$\hat{\theta}_L$为θ的$1-\alpha$单侧同等置信下限

类似的，可以定义单侧置信上限、单侧同等置信上限

枢轴量法

- 构造未知参数θ的置信区间的一种常用方法是枢轴量法

1) 从θ的一个点估计$\hat{\theta}$出发，构造$\hat{\theta}$与θ的一个函数$G(\hat{\theta},\theta)$，使得G的分布已知且与θ无关

2) 选取两个适当的常数c与d，使得

$$P\left(c \le G(\hat{\theta},\theta) \le d\right) \ge 1-\alpha$$

3) 利用不等式运算，将$c \le G(\hat{\theta},\theta) \le d$进行等价变形，得到形如$\hat{\theta}_L \le \theta \le \hat{\theta}_U$的不等式，那么这时

$$P\left(\hat{\theta}_L \le \theta \le \hat{\theta}_U\right) = P\left(c \le G(\hat{\theta},\theta) \le d\right) \ge 1-\alpha$$

这时，可以说$[\hat{\theta}_L,\hat{\theta}_U]$是$\theta$的$1-\alpha$置信区间

- 枢轴量法的难点在于如何构造一个函数（统计量）$G(\hat{\theta},\theta)$，使其与参数θ无关
- 构造好枢轴量$G(\hat{\theta},\theta)$后，接下来需要确定常数c和d的值
  - 当枢轴量G的分布对称时（如标准正态分布），可取d，使得

$$P(-d \le G \le d) = P(|G| \le d) = 1-\alpha$$

  - 当枢轴量G的分布非对称时（如χ^2分布），可这样取c和d，使得

$$P(G \le c) = \alpha/2 \qquad P(G \ge d) = \alpha/2$$

这样获得的置信区间称为等尾置信区间

例：设$x_1, x_2, \cdots, x_n$是从指数分布$\exp(1/\theta)$中抽取的一个样本，其密度函数为

$$p_\theta(x) = \frac{1}{\theta} e^{-\frac{x}{\theta}}, \qquad x \geq 0$$

其中，$\theta > 0$为总体均值，即：$E[x] = \theta$，现要求θ的$1-\alpha$置信区间$(0 < \alpha < 1)$

解：$T_n = x_1 + x_2 + \cdots + x_n$是$\theta$的充分统计量。由于指数分布是伽玛分布的特例，即：$x_i \sim Ga\left(1, \frac{1}{\theta}\right)$. 利用伽玛分布的性质可知

$$T_n \sim Ga(n, 1/\theta)$$

$$\frac{2T_n}{\theta} \sim Ga\left(n, \frac{1}{2}\right) = \chi^2(2n)$$

可见，$2T_n/\theta$的分布不依赖于θ，可取其为枢轴量

对给定的置信水平$1-\alpha$，利用χ^2分布的$\frac{\alpha}{2}$和$1-\frac{\alpha}{2}$分位数可得

$$P\left(\chi^2_{\alpha/2}(2n) \le \frac{2T_n}{\theta} \le \chi^2_{1-\alpha/2}(2n)\right) = 1-\alpha$$

再利用不等式等价变形可得

$$P\left(2T_n/\chi^2_{1-\alpha/2}(2n) \le \theta \le 2T_n/\chi^2_{\alpha/2}(2n)\right) = 1-\alpha$$

这样就获得θ的$1-\alpha$同等置信区间

$$\left[2T_n/\chi^2_{1-\alpha/2}(2n), 2T_n/\chi^2_{\alpha/2}(2n)\right]$$

补充：Gamma分布性质

如果$X \sim \Gamma(a_1, b)$，$Y \sim \Gamma(a_2, b)$，那么当X和Y相互独立时，$X + Y \sim \Gamma(a_1 + a_2, b)$

证：令$Z = X + Y$，那么由$f(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x) f_Y(z - x) dx$可知

$$
\begin{aligned}
f(z) &= \int_0^z \frac{x^{a_1-1} e^{-x}}{\Gamma(a_1)} \frac{(z-x)^{a_2-1} e^{-(z-x)}}{\Gamma(a_2)} \mathrm{d}x \\
&= e^{-z} \int_0^z \frac{x^{a_1-1}(z-x)^{a_2-1}}{\Gamma(a_1)\Gamma(a_2)} \mathrm{d}x \\
&= e^{-z} z^{a_1+a_2-1} \int_0^1 \frac{t^{a_1-1}(1-t)^{a_2-1}}{\Gamma(a_1)\Gamma(a_2)} \mathrm{d}t \qquad \text{Beta分布} \\
&= \frac{e^{-z} z^{a_1+a_2-1}}{\Gamma(a_1 + a_2)}
\end{aligned}
$$

例如，某产品的寿命服从指数分布$\exp\left(\frac{1}{\theta}\right)$，如今从中随机抽取9个样品进行寿命试验，获得如下9个寿命数据（单位：小时）：152，457，505，531，607，645，707，822，903。可计算得到

$$T_n = 5329$$

若取$\alpha = 0.1$，可从χ^2分布α分位数查表得

$$\chi^2_{0.05}(18) = 9.39 \qquad \chi^2_{0.95}(18) = 28.87$$

于是带入 $\left[2T_n/\chi^2_{1-\alpha/2}(2n), 2T_n/\chi^2_{\alpha/2}(2n)\right]$可得平均寿命$\theta$的0.9同等置信区间为$[369.17, 1135.04]$

主要内容

- 置信区间
- 正态总体参数的置信区间
- 大样本置信区间

（一）单个正态总体$N(\mu, \sigma^2)$的情形

均值μ的置信区间——σ^2已知

问题：设$X_1, X_2, \cdots, X_n$来自$N(\mu, \sigma^2)$，$\bar{X}$为样本均值，试确定μ可能取值范围（假设σ^2已知）

- 由给定条件可知，$\bar{X}$服从分布

$$\bar{X} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right) \qquad \Rightarrow \qquad \frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$$

因此，可以得到如下不等式

$$P\left\{\left|\frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\right| < z_{\alpha/2}\right\} = 1-\alpha$$

即：$$P\left\{\bar{X} - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{\alpha/2} < \mu < \bar{X} + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{\alpha/2}\right\} = 1-\alpha$$

因此，μ的置信水平为$1-\alpha$的置信区间为$\left(\bar{X} - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{\alpha/2}, \bar{X} + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{\alpha/2}\right)$，简写为$\left(\bar{X} \pm \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{\alpha/2}\right)$

- 从以上分析过程，我们归纳出计算置信区间的一般步骤如下

1) 寻找参数θ的一个良好的点估计$T(X_1, X_2, \ldots, X_n)$

2) 寻找一个参数θ和估计量T的函数$G(T, \theta)$, 使其分布完全已知且不包含任何未知参数

3) 对于给定的置信水平$1-\alpha$，根据G(T, θ)的分布，确定常数c, d，使得

$$P(c < G(T, \theta) < d) = 1 - \alpha$$

4) 对$c < G(T, \theta) < d$做等价变形, 得到如下形式

$$\underline{\theta} < \theta < \overline{\theta}$$

$(\underline{\theta},\ \overline{\theta})$就是$\theta$的置信水平为$1-\alpha$的置信区间

均值μ的置信区间——σ^2未知

- 由于σ^2未知，不能基于概率分布$\frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$来推导置信区间
- 由第二章可知，当σ^2用样本方差$S = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2$代替时，有

$$\frac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}} \sim t(n-1)$$

- 由该分布可以知道如下不等式成立

$$P\left\{-t_{\alpha/2}(n-1) < \frac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}} < t_{\alpha/2}(n-1)\right\} = 1-\alpha$$

$$\Rightarrow P\left\{\bar{X} - \frac{S}{\sqrt{n}}t_{\alpha/2}(n-1) < \mu < \bar{X} + \frac{S}{\sqrt{n}}t_{\alpha/2}(n-1)\right\} = 1-\alpha$$

- 因此， μ在σ^2未知情况下, 置信水平为$1-\alpha$的置信区间为

$$\left(\bar{X} - \frac{S}{\sqrt{n}}t_{\alpha/2}(n-1), \bar{X} + \frac{S}{\sqrt{n}}t_{\alpha/2}(n-1)\right)$$

例：设某种植物的高度X(cm)服从正态分布$N(\mu,\sigma^2)$, 随机选取36棵, 其平均高度为15cm. 就以下两种情形求μ的95%双侧置信区间

1） $\sigma^2=16$;　　　2） σ^2未知，$S^2=16$

解：　1) 由题目信息可知

$$n=36, \bar{X}=15, \sigma=4,\ \ z_{\alpha/2}=z_{0.025}=1.96$$

在σ^2已知的条件下，　$1-\alpha$置信区间为

$$\left(\bar{X}-\frac{\sigma}{\sqrt{n}}z_{\alpha/2},\ \bar{X}+\frac{\sigma}{\sqrt{n}}z_{\alpha/2}\right)$$

将上述数值带入，可以得到μ的95%置信区间为

$$(13.693, 16.307)$$

2) 由题目信息可知

$$n = 36, \bar{X} = 15, S^2 = 16$$

在σ^2未知的条件下，$1-\alpha$置信区间为

$$\left(\bar{X} - \frac{S}{\sqrt{n}} t_{\alpha/2}(n-1), \bar{X} + \frac{S}{\sqrt{n}} t_{\alpha/2}(n-1)\right)$$

通过查表可知$t_{0.025}(35) = 2.0301$

将上述数值带入，可以得到μ的95%置信区间为

$$(13.647, 16.353)$$

- 比较1) 和2) 两种情形下μ的置信区间
  - σ^2已知的置信区间：(13.693,16.307)
  - σ^2未知的置信区间：(13.647,16.353)

第一种情形区间更短（精度更高），但第二种情形往往更实用，因为多数时候，σ^2是未知的

样本数量确定

- 一般而言，样本数量n越大，未知参数估计精度越高。但大样本的获得通常费用较高、时间较长，不容易实现

在满足一定的精度要求下，最少需要多少样本?

- 当标准差σ已知时，均值μ的$1-\alpha$置信区间为$\bar{x} \pm z_{\alpha/2}\sigma/\sqrt{n}$.

若 要该置信区间长度不超过$2d$，则有

$$2z_{\alpha/2}\sigma/\sqrt{n} \le 2d$$

可以得到

$$n \ge \left(\frac{z_{\alpha/2}\sigma}{d}\right)^2$$

例：设一个物体的重量 μ 未知，为估计其重量，可以用天平去称，假设称重服从正态分布。如果已知称量的误差的标准差为0.1克，为使 μ 的95%的置信区间的长度不超过0.2，那么至少应称多少次？

解：已知$\sigma = 0.1$，当要求置信区间的长度不超过0.2时，由公式

$n \geq \left(\frac{z_{\alpha/2}\sigma}{d}\right)^2$可直接得出

$$n \geq \left(1.96 \times \frac{0.01}{0.1}\right)^2 = 3.84$$

故，至少需要称$n = 4$次

当要求置信区间的长度不超过0.1时，可计算得到

$$n \geq \left(1.96 \times \frac{0.01}{0.05}\right)^2 = 15.37$$

故，至少需要称$n = 16$次

- 当标准差σ未知时，均值μ的$1-\alpha$置信区间为$\bar{x} \pm t_{\alpha/2}(n-1)s/\sqrt{n}$. 若要该置信区间长度不超过$2d$，则有

$$2t_{\alpha/2}(n-1)s/\sqrt{n} \le 2d$$

假设s有通过n_0个样本估计得到，记为s_0，那么用s_0代替s，可获得

$$n \ge \left(\frac{t_{\alpha/2}(n_0-1)s_0}{d}\right)^2$$

例：为了对垫圈总体的平均厚度做出估计，我们所取的风险是允许在100次估计中有5次误差超过0.02cm，近期从另一批产品中抽得一个容量为10的样本，得到标准差的估计为$s_0 = 0.0359$，问现在该取多少样品为宜？

解：这里的“风险”就是指样本均值落在置信区间外的概率α，如今$\alpha = 0.05$。“估计误差超过0.02”表明$d = 0.02$。用10个样本估计得到的样本标准差$s_0 = 0.0359$，$n_0 = 10$，因此$t_{\alpha/2}(9) = 2.262$. 将这些值

代入 $n \geq \left(\frac{t_{\alpha/2}(n_0-1)s_0}{d}\right)^2$可得

$$n \geq \left(\frac{0.0359 \times 2.262}{0.02}\right)^2 = 16.49$$

因此，至少需要取17个样品

方差σ^2的置信区间

- 由第二章学习可知，

$$\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$$

- 根据上述分布，如下不等式成立

$$P\left\{\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1) < \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} < \chi^2_{\alpha/2}(n-1)\right\} = 1-\alpha$$

即： $$P\left\{\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\alpha/2}(n-1)} < \sigma^2 < \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)}\right\} = 1-\alpha$$

- 因此，σ^2的$1-\alpha$置信区间为

$$\left(\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\alpha/2}(n-1)}, \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)}\right)$$

例：一个园艺科学家正在培养一个新品种的苹果，这种苹果除了口感好和颜色鲜艳以外，另一个重要特征是单个重量差异不大。为了评估新苹果，她随机挑选了25个测试重量(单位：克)，其样本方差为$S^2 = 4.25$. 试求σ^2的置信度为95％和的99％的置信区间（假设苹果重量服从正态分布）

解：置信度为95%时，查表可得

$$\chi^2_{0.975}(24) = 12.4, \qquad \chi^2_{0.025}(24) = 39.4$$

带入置信区间$\left(\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\alpha/2}(n-1)}, \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)}\right)$，计算得$\sigma^2$的95%置信区间为$(2.59, 8.23)$

置信度为99%时，$\chi^2_{0.995}(24) = 9.89$，$\chi^2_{0.005}(24) = 45.6$，可计算得到其置信区间为$(2.24,10.31)$

（二）两个正态总体$N(\mu_1, \sigma_1^2), N(\mu_2, \sigma_2^2)$的情形

第二章结论回顾

定理：设样本$(X_1,\cdots,X_{n_1})$和$(Y_1,\cdots,Y_{n_2})$分别来自总体$N(\mu_1,\sigma_1^2)$和$N(\mu_2,\sigma_2^2)$并且它们相互独立，其样本方差分别为S_1^2和S_2^2, 则：

1) $\dfrac{S_1^2/S_2^2}{\sigma_1^2/\sigma_2^2} \sim F(n_1-1,n_2-1)$

2) $\dfrac{(\bar{X}-\bar{Y})-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\sigma_1^2/n_1+\sigma_2^2/n_2}} \sim N(0,1)$

3) 当${\sigma_1}^2={\sigma_2}^2=\sigma^2$时，$\dfrac{(\bar{X}-\bar{Y})-(\mu_1-\mu_2)}{S_W\sqrt{1/n_1+1/n_2}} \sim t(n_1+n_2-2)$

其中$S_W=\sqrt{\dfrac{(n_1-1)S_1^2+(n_2-1)S_2^2}{n_1+n_2-2}}$

$\mu_1 - \mu_2$的置信区间

问题：$X_1,\cdots,X_{n_1}$来自$N(\mu_1,\sigma_1^2)$，$Y_1,\cdots,Y_{n_2}$来自$N(\mu_2,\sigma_2^2)$，$\bar{X}=\frac{1}{n_1}\sum_{i=1}^{n_1}X_i$，$\bar{Y}=\frac{1}{n_2}\sum_{j=1}^{n_2}Y_j$，$S_1^2$和$S_2^2$分别为第一、二个总体的样本方差，试确定$\mu_1-\mu_2$的置信区间

- σ_1^2，σ_2^2 已知的情况

由 $\bar{X}-\bar{Y}\sim N\left(\mu_1-\mu_2,\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}\right)$，有

$$\frac{(\bar{X}-\bar{Y})-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\sigma_1^2/n_1+\sigma_2^2/n_2}}\sim N(0,1)$$

可以求得$\mu_1-\mu_2$的置信区间为：

$$\left((\bar{X}-\bar{Y})\pm z_{\alpha/2}\sqrt{\sigma_1^2/n_1+\sigma_2^2/n_2}\right)$$

- $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma^2$, 但$\sigma^2$未知的情况

此时由第六章定理可知

$$\frac{(\bar{X}-\bar{Y})-(\mu_1-\mu_2)}{S_w\sqrt{1/n_1+1/n_2}} \sim t(n_1+n_2-2)$$

其中 $S_w^2 = \frac{(n_1-1)S_1^2+(n_2-1)S_2^2}{n_1+n_2-2}$

可计算得到置信区间为:

$$\left((\bar{X}-\bar{Y}) \pm t_{\alpha/2}(n_1+n_2-2)S_w\sqrt{1/n_1+1/n_2}\right)$$

$\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$的置信区间

- 由 $\frac{S_1^2/\sigma_1^2}{S_2^2/\sigma_2^2} \sim F(n_1-1, n_2-1)$可知

$$P\left\{F_{1-\alpha/2}(n_1-1, n_2-1) < \frac{S_1^2/\sigma_1^2}{S_2^2/\sigma_2^2} < F_{\alpha/2}(n_1-1, n_2-1)\right\} = 1-\alpha$$

即：$P\left\{\frac{S_1^2}{S_2^2}\frac{1}{F_{\alpha/2}(n_1-1,n_2-1)} < \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} < \frac{S_1^2}{S_2^2}\frac{1}{F_{1-\alpha/2}(n_1-1,n_2-1)}\right\} = 1-\alpha$

可以计算得到置信区间为：

$$\left(\frac{S_1^2}{S_2^2}\frac{1}{F_{\alpha/2}(n_1-1, n_2-1)}, \frac{S_1^2}{S_2^2}\frac{1}{F_{1-\alpha/2}(n_1-1, n_2-1)}\right)$$

例： 两台机床生产同一个型号的滚珠，从甲机床生产的滚珠中抽取8个，从乙机床生产的滚珠中抽取9个，测得这些滚珠的直径(毫米)如下：

甲机床 15.0 14.8 15.2 15.4 14.9 15.1 15.2 14.8

乙机床 15.2 15.0 14.8 15.1 14.6 14.8 15.1 14.5 15.0

设两机床生产的滚珠直径分别为X, Y, 且$X \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$， $Y \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$

1) $\sigma_1 = 0.18, \sigma_2 = 0.24$, 求$\mu_1 - \mu_2$的置信度为0.90的置信区间

2) 若$\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma$未知，求$\mu_1 - \mu_2$的置信度为0.90的置信区间

3) 若μ_1, μ_2未知，求$\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$的置信度为0.90的置信区间

解：$n_1 = 8, \bar{x} = 15.05$， $s_1^2 = 0.0457, n_2 = 9$， $\bar{y} = 14.9$， $s_2^2 = 0.0575$

1） 当$\sigma_1 = 0.18, \sigma_2 = 0.24$时, $\mu_1 - \mu_2$的置信度为0. 90的置信区间为

$$\left(\bar{X} - \bar{Y} \pm z_{\alpha/2}\sqrt{\sigma_1^2/n_1 + \sigma_2^2/n_2}\right)$$

查表得$z_{0.05} = 1.645$, 从而所求区间为$(-0.018, 0.318)$

2） 当$\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma$未知时，$\mu_1 - \mu_2$的置信度为0. 90的置信区间为

$$\left(\bar{X} - \bar{Y} \pm t_{\alpha/2}(n_1 + n_2 - 2)S_W\sqrt{1/n_1 + 1/n_2}\right)$$

代入$t_{0.05}(15) = 1.7531, S_W = 0.228, \sqrt{1/n_1 + 1/n_2} = 0.486$，可得置信区间为$(-0.044, 0.344)$

3) 当μ_1，μ_2未知时，$\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$的置信度为0.90的置信区间为

$$\left(\frac{S_1^2}{S_2^2}\frac{1}{F_{\alpha/2}(n_1-1,n_2-1)},\frac{S_1^2}{S_2^2}\frac{1}{F_{1-\alpha/2}(n_1-1,n_2-1)}\right)$$

将$F_{0.05}(7,8)=3.50, F_{0.95}(7,8)=\frac{1}{F_{0.05}(8,7)}=\frac{1}{3.73}=0.268$代入，计算得到置信度为0.9的置信区间为(0.227, 2.965)

主要内容

- 置信区间
- 正态总体参数的置信区间
- 大样本置信区间