Theme: 波動の数学的表現

波動の正確な理解には，数式による表現が必須です．少し複雑に見えるかもしれませんが，知識としては高校数学の三角関数の知識だけです．数式が込み入ることもありますが，定量的な議論ができるようになりましょう．

演習問題 1

$x=-a, a$ の位置に振動数 f の波源が置かれ，それぞれの波源での時刻 t における波動式が，共に，

$$y(t) = A\sin 2\pi ft,$$

であったとする．x 軸に垂直に y 軸を $x=0$ 設定する．

(1)　発生する波の波長が λ であるとき，波の速さ v と周期 T を求めよ．
(2)　$x=-a$，a の波源をそれぞれ $\mathrm{S_1}$，$\mathrm{S_2}$ とする．xy 平面上の任意の点 P までの波源からの距離を，$\overline{\mathrm{S_1P}}=r_1$，$\overline{\mathrm{S_2P}}=r_2$ とする．$\mathrm{S_1}$，$\mathrm{S_2}$ からの P における波動式をそれぞれ y_1，y_2 とするとき，y_1 と y_2 を r_1，r_2，t，f，λ を用いて表せ．
(3)　P における合成波の波動式を求め，合成波が強め合う条件と弱め合う条件を求めよ．

$\mathrm{S_1}$，$\mathrm{S_2}$ 間の距離が 2λ であったとする．
(4)　P が x 軸上の点で，$-a \leq x \leq a$ のとき，合成波の式を求め，どのような特徴の波なのか答えよ．
(5)　P が x 軸上の点で，$x > a$ のとき，合成波の式を求め，どのような特徴の波なのか答えよ．

詳解

(1)　周期と振動数の関係，波の基本式の利用です．

周期と振動数の関係より，

$$T = \underline{\underline{\frac{1}{f}}}. \tag{1.1}$$

波の基本式より，

$$\underline{\underline{v = f\lambda}}. \tag{1.2}$$

(2)　波動式は求めるものであり，そのためには求めたい点での波動式と，その『過去』を考えることが重要です．

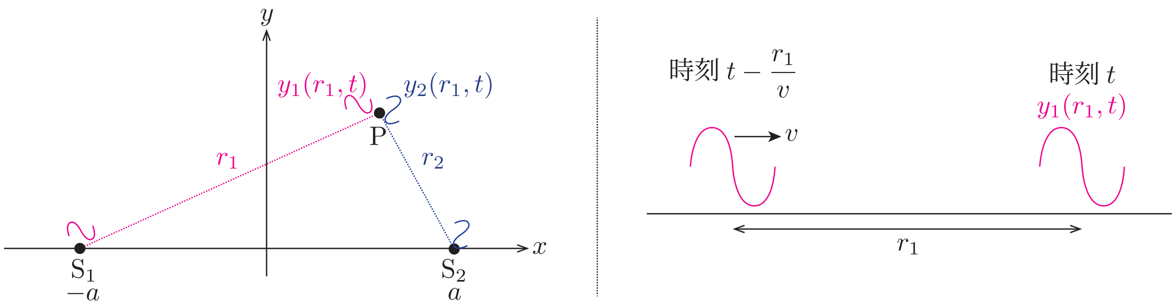

Fig.1　各波源からの波動と S_1 から P に到達した波動式 $y_1(r_1,t)$

求める波動式 $y_1(r_1,t)$ は，過去に S_1 を出発していて，その時の時刻が $t-\frac{r_1}{v}$．波形は等速運動で伝わるので，

$$y_1(r_1,t) = A\sin 2\pi f(t-\frac{r_1}{v}) = \underline{\underline{A\sin 2\pi f(t-\frac{r_1}{f\lambda})}}. \tag{1.3}$$

y_2 の方も同様に，

$$y_1(r_2,t) = A\sin 2\pi f(t-\frac{r_2}{v}) = \underline{\underline{A\sin 2\pi f(t-\frac{r_2}{f\lambda})}}. \tag{1.4}$$

進行波の特徴は，位置と時刻を表す変数が同じ位相の中にあることです．数学的な特徴を理解しましょう．

(3)　波形は重ね合わせることができるという特徴を有します．数学的には，正弦波の式の和をとることを意味します．**振幅が同じ波の和を考える時は，和積の式を用いて書き換えます．**[*1]和積の式は覚えるものではないため，導出から考えましょう．

任意の位相を α，β として，次の 2 つの sin 関数を考える．

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \sin\beta\cos\alpha, \tag{1.5}$$
$$\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos\beta - \sin\beta\cos\alpha. \tag{1.6}$$

[*1] 逆に，振幅が異なる場合の和は，三角関数の合成を用います．

y_1 と y_2 の和を考えたいので，(1.5) と (1.6) を足すと，

$$\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)=2\sin\alpha\cos\beta. \tag{1.7}$$

ここで，$\alpha+\beta:=C$，$\alpha-\beta:=D$ とすると，

$$\alpha=\frac{C+D}{2}, \tag{1.8}$$

$$\beta=\frac{C-D}{2}. \tag{1.9}$$

これを (1.7) に代入すると，

$$\sin C+\sin D=2\sin\frac{C+D}{2}\cos\frac{C-D}{2}. \tag{1.10}$$

この設問に (1.10) を用いると，$C=2\pi f\left(t-\dfrac{r_1}{f\lambda}\right)$，$D=2\pi f\left(t-\dfrac{r_2}{f\lambda}\right)$ として，代入すれば良いです．

(1.3)，(1.4) を (1.10) に用いると，

$$y_1+y_2=\underline{\underline{2A\sin\left(\frac{1}{2}2\pi f\left(2t-\frac{r_1+r_2}{f\lambda}\right)\right)\cos\left(\frac{1}{2}2\pi\left(\frac{r_2-r_1}{\lambda}\right)\right)}}. \tag{1.11}$$

(1.11) の sin の位相中には，時刻と位置がそれぞれ入り込んでいます．したがって，(1.11) は進行波の式です．2 つの重ね合わせられた波形は，時刻の経過と共に等速で進んでいきます．しかし，cos 関数の位相は**時刻によらず位置だけで値が変動することが分かります．**つまり，時刻を固定した時，P の場所に応じて波動の変位が大きいところと小さいところが現れることを意味します．この部分を含めて振幅と呼びましょう．振幅が最大値 $2A$ になるとき，2 つの波は強め合いを満たし，振幅がゼロになるときを弱めあいと呼びます．

波動の振幅 A' を，以下の式で定義する．

$$A':=2A\cos\left(\frac{1}{2}2\pi\left(\frac{r_2-r_1}{\lambda}\right)\right). \tag{1.12}$$

合成波の振幅が最大になる，つまり強め合うための条件は，m を整数として，

$$\frac{1}{2}2\pi\frac{r_2-r_1}{\lambda}=m\pi, \tag{1.13}$$

$$2\pi\frac{r_2-r_1}{\lambda}=2m\pi, \tag{1.14}$$

$$\underline{\underline{r_2-r_1=m\lambda}}. \tag{1.15}$$

合成波の振幅がゼロになる，つまり弱め合うための条件は，m を整数として，

$$\frac{1}{2}2\pi\frac{r_2-r_1}{\lambda}=\left(m+\frac{1}{2}\right)\pi, \tag{1.16}$$

$$2\pi\frac{r_2-r_1}{\lambda}=2\left(m+\frac{1}{2}\right)\pi, \tag{1.17}$$

$$\underline{\underline{r_2-r_1=\left(m+\frac{1}{2}\right)\lambda}}. \tag{1.18}$$

(1.15)，(1.18) は双曲線の定義そのものであることが分かるでしょうか．つまり，**2 つの波動が強め合う場所と弱め合う場所は xy 平面上で双曲線上に分布するということです．** また合成波の式 (1.11) は進行波であったため，時間経過と共に強めあう波と弱め合う波は，同一の双曲線上を等速で運動するということです．

強めあった波の進行波の波動式 Y_+ は，振幅が $2A$ であるため，

$$Y+ = 2A\sin\left(\frac{1}{2}2\pi f\left(2t - \frac{r_1+r_2}{f\lambda}\right)\right). \tag{1.19}$$

弱めあった波の進行波の波動式 Y_- は，振幅が 0 であるため，

$$Y_- = 0. \tag{1.20}$$

強め合いの合成波の xy 平面上での様子は以下の図になる．

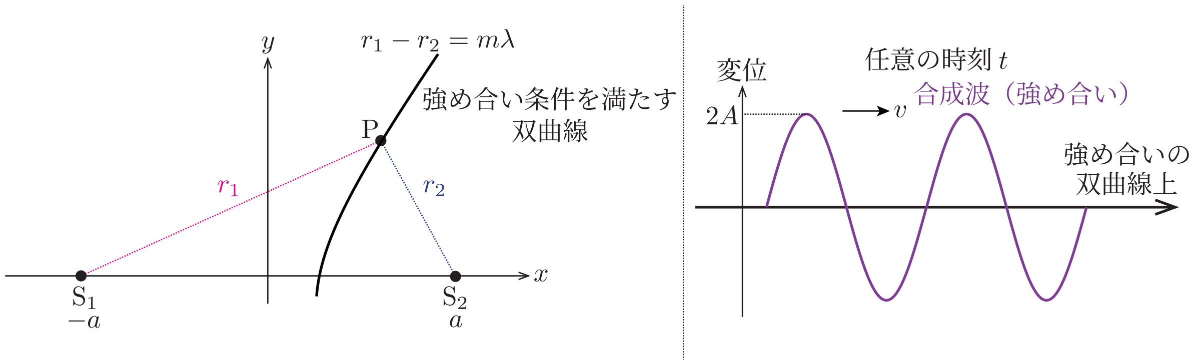

Fig.2　強め合いの双曲線上での合成波．振幅は $2A$．強め合いを満たす条件が双曲線なので，強め合いの合成波形は双曲線上を等速で進んでいく．

(4)　先ほど考えた任意の点 P が x 軸上で，かつ $-a \leq x \leq a$ を満たしています．r_1 と r_2 を x を用いて表現し，(1.11) に代入しましょう．また与えられた条件 $a-(-a) = 2a = \lambda$ を用いて，a を消去します．

題意を満たす x 軸上の点 P の波源からの距離 r_1，r_2 はそれぞれ，

$$r_1 = x - (-a) = x + a, \tag{1.21}$$
$$r_2 = a - x. \tag{1.22}$$

また問題文の条件より，

$$a = \lambda. \tag{1.23}$$

これらを (1.11) に代入すると，$\dfrac{1}{f} = T$ も用いると，

$$y_1 + y_2 = 2A\cos\left(\frac{1}{2}2\pi\frac{-2x}{\lambda}\right)\sin\left\{\frac{1}{2}2\pi f\left(2t - \frac{2a}{f\lambda}\right)\right\}, \tag{1.24}$$
$$= \underline{\underline{2A\cos\left(\frac{1}{2}2\pi\frac{2x}{\lambda}\right)\sin\{2\pi f(t-T)\}.}} \tag{1.25}$$

時刻 t と位置座標 x が三角関数の中の同一の位相に入り込んでいないため，この波は進行することがない定在波．

このように変数が分離された波動を定在波と呼びます．この波動は進行波と異なり，固定された位置で波形が大きく振動し，固定された位置では常に変位がゼロになる時間経過のアニメーションとなります．

(1.25) を眺めると，$t \geq T$ であることが分かります．これは，2 つの波が干渉するまでに，最低でも 1 周期分の時間 T が必要であることを意味しています．

(1.12) と同様に，波動が強め合う条件，つまり振幅が $2A$ になったり，弱め合う条件は時刻 t に依存せず位置座標 x だけで決まります．強め合う位置，弱め合う位置をそれぞれ求め，$-a \leq x \leq a$ の間における x 軸の定在波の様子を図示してみます．

強め合いの条件は,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} 2\pi \frac{2x}{\lambda} &= m\pi, && (1.26) \\ x &= \frac{1}{2} m\lambda. && (1.27) \end{aligned}$$

$-a \leq x \leq a$ に $x = \dfrac{1}{2} m\lambda$ 代入すると，$a = \lambda$ を用いて,

$$\begin{aligned} -a \leq &\frac{1}{2} ma \leq -a, \\ -2 \leq &\ \ m \ \ \leq 2. && (1.28) \end{aligned}$$

したがって条件を満たす m の値は,

$$m = \pm 2, \pm 1, 0. \tag{1.29}$$

(1.27) に代入すると,

$$x = 0, \pm \frac{1}{2} a, \pm a. \tag{1.30}$$

弱め合いの位置は,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} 2\pi \frac{2x}{\lambda} &= \left(m + \frac{1}{2} \right) \pi, && (1.31) \\ x &= \left(\frac{1}{2} m + \frac{1}{4} \right) \lambda. && (1.32) \end{aligned}$$

$-a \leq x \leq a$ に $x = \dfrac{1}{2} \left(\dfrac{1}{2} m + \dfrac{1}{4} \right) \lambda$ 代入すると，$a = \lambda$ を用いて,

$$\begin{aligned} -a \leq \left(\frac{1}{2} m + \frac{1}{4} \right) a &\leq a, && (1.33) \\ -\frac{3}{2} \leq m &\leq \frac{3}{2}. && (1.34) \end{aligned}$$

したがって条件を満たす m の値は,

$$m = -2, -1, 0, 1. \tag{1.35}$$

(1.32) に代入すると,

$$x = -\frac{3}{4} a, -\frac{1}{4} a, \frac{1}{4} a, \frac{3}{4} a. \tag{1.36}$$

強め合い，弱め合いの位置がそれぞれ分かりました．$t=T$ から $\dfrac{T}{4}$ ずつ時刻経過して，$t=T+T=2T$ になるまでの定在波のアニメーションを図示します．

$t=T$ から $t=2T$ までにおいて，$\dfrac{T}{4}$ 毎の sin 関数の値は，

$$\begin{aligned}
t=T &: \sin 2\pi f(T-T)=0,\\
t=T+\frac{T}{4}=\frac{5}{4}T &: \sin 2\pi f\left(T+\frac{T}{4}-T\right)=\sin 2\pi f\frac{T}{4}=1,\\
t=T+\frac{2T}{4}=\frac{3}{2}T &: \sin 2\pi f\left(T+\frac{2}{4}T-T\right)=\sin 2\pi f\frac{2}{4}T=0,\\
t=T+\frac{3T}{4}=\frac{7}{4}T &: \sin 2\pi f\left(T+\frac{3}{4}T-T\right)=\sin 2\pi f\frac{3}{4}T=-1,\\
t=T+T=2T &: \sin 2\pi f(T+T-T)=\sin 2\pi fT=0.
\end{aligned}$$

この値を踏まえ，各時刻における定在波の様子は，

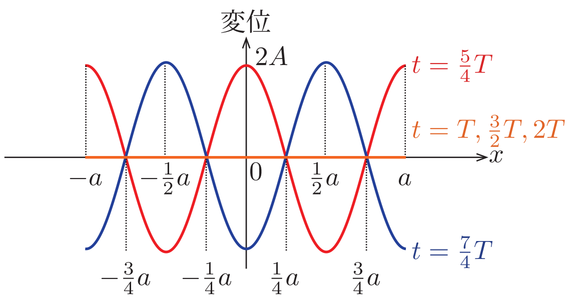

Fig.3　各時刻における定在波の様子

この様子からも，定在波は左右に進行することなく，その場で波形が大きく振動する様子が分かります．変位が反転する時間間隔，及び全ての波形の変位がゼロになる時間間隔は共に $\dfrac{1}{2}T$ です．

定在波で大きく振動する箇所は腹，変位が常にゼロである箇所は節と呼びます．定在波は元々 2 つの波が干渉した結果できる波なので，**定在波の腹は強め合いの条件を満たす箇所で，節は弱め合いの干渉条件を満たす箇所です．**

(4)　$x>a$ での波動式を考えてみましょう．(3) と同様に任意の点 P を x 軸上に設定します．

任意の点 P を x 軸上の $x>a$ に設定すると，それぞれの波源からの距離 r_1，r_2 は，

$$r_1=x-(-a)=x+a, \tag{1.37}$$

$$r_2=x-a. \tag{1.38}$$

(1.11) に代入すると，

$$y_1+y_2=2A\sin\left(\frac{1}{2}2\pi f\left(2t-\frac{2x}{f\lambda}\right)\right)\cos\left(\frac{1}{2}2\pi\left(\frac{-2a}{\lambda}\right)\right). \tag{1.39}$$

$\lambda = a$ を代入すると，$\cos \frac{1}{2} 2\pi \frac{-2a}{a} = 1$ より，

$$y_1 + y_2 = \underline{\underline{2A \sin \left(2\pi f \left(t - \frac{x}{f\lambda}\right)\right)}}. \tag{1.40}$$

sin の位相から，この波動式は正弦波で，x 軸正方向に進む．

振幅が 2 倍になっていることから，この波は強め合いの合成波になっているということを意味します．つまり，$x > a$，および $x < -a$ の領域は，**定在波ではなくて強め合いの進行波ができるということです．** 実際，(1.15) で求めた干渉条件を $x > a$ の x 軸上で立式してみると，

$$\mathrm{S_1P} - \mathrm{S_2P} = r_1 - r_2 = 2a = 2\lambda. \tag{1.41}$$

となり，強め合いの条件を満たしていることが分かります．この領域での強め合いは，同じ進行方向の 2 つの波が，ぴったり重なってできているということです．**同じ干渉条件を満たしていても，波同士の衝突の仕方で定在波にも，進行波にもなるということです．**

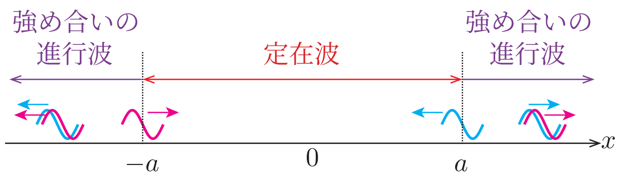

Fig.4　x 軸上の合成波の様子．$-a \leq x \leq a$ では定在波，$x > |a|$ では強め合いの進行波．