

19 歳の古典力学
Part2

野口 駿

2025

はじめに

ほんの少しだけ、背伸びをしてみましょう。できる範囲で十分です。膝を曲げて、大きく飛ぶ必要はありません。

生きていて大切にしなければならないことは、だいたい少しだけ高いところに隠れているものです。物事の本質、理、意義。19歳という特別な年齢は、その価値をそのまま受け入れることができる、最後の年齢だと、私は思っています。

物理学は、そんな皆さんに何を提示してくれるのでしょうか。何故、物理学を学ばなくてはならないのでしょうか。少しの背伸びをして見えたその先に、皆さん自身の答えがあるはずです。

『... そうすると、ある時、ある所で、君がある感動を受けたという、繰り返えすことのない、ただ一度の経験の中に、その時だけにとどまらない意味のあることがわかってくる。それが、本当の君の思想というものだ。』 — 「君たちはどう生きるか」、吉野源三郎 —

テキストの内容と表記上の注意

このテキストでは、受験における古典物理学の基礎の内容を、高校生が習う数学を用いて真正面から記述していきます。ベクトル表示は、 \vec{a} ではなく、 \boldsymbol{a} とボールドイタリック体で表記しています。

目次

Part2

運動各論

1 剛体の静力学

1.1 剛体の物理学

Part1 では、物体に働く力に注目して古典力学の議論を進めてきました。ここまでの学習で、力は運動を生み出す根源的なものであったと思います。しかし、現実的な目線に立つと、力には運動以外のことも引き起こすはずです。

例えば、コンクリートに大きな力を加えると、ヒビが入ったり、場合によっては粉砕することもあります。鉄に大きな力を加えれば、鉄は大きく変形するかもしれません。このように力には、物体の形状を変えるような作用もあるのです*1。

このセクションで注目する力の効果は、回転です。机の上に置かれた物体の端に力を加えると、物体は右回りか左回りに回転するはずです。この回転も、力のより生み出されるものの1つです。また、球体の運動を考えても、球体はどちらかの方向に回転しながら運動しているはずです。古典力学では、この回転のことを力のモーメント（Moment of force of torque）と呼びます。

この回転が起こるためには、物体に大きさがある必要があります。ここまでの古典力学の議論では、物体の大きさを考えない質点（Point mass）で運動を考えていましたが、このセクションでの物体は大きさがあるものを考えます。ただし、粉砕や変形といった効果は無視します。このように、力を加えても変形しない大きさのある理想的な物体を剛体（Rigid body）と呼びます。また、受験の範疇では剛体の静止のみについて議論します*2。

1.2 剛体の静止条件

ここからは、剛体がどのような条件を持つと静止するのかを議論します。

1.2.1 モーメントの定義

力のモーメントを以下の式で定義します。

*1 このような力の効果を勉強する学問体系は、材料力学（Strength Materials）で学ぶことができます。建築分野への応用や、素材・材料開発など、現代社会を支える物理学の基礎分野です。

*2 現実的な力学現象において、物体の回転を無視することはできません。剛体の動力学では、この回転も運動に影響を及ぼすものとして考えます。この剛体の回転運動を記述する方程式は、回転の運動方程式（Equation of rotational motion）です。一般に、剛体のダイナミクスの議論では、重心の運動方程式と回転の運動方程式から記述されます。受験物理の範疇では、剛体の静止、つまり回転の運動方程式が釣り合う場合のみを扱います。

— 力のモーメントの定義 —

剛体にかかる力を \mathbf{f} , 回転の中心から力の作用点までのベクトルを \mathbf{r} とする. このとき力のモーメント \mathbf{L} は, 以下の式で定義される.

$$\mathbf{L} := \mathbf{r} \times \mathbf{f}. \quad (1.1)$$

- ここでの掛け算はベクトルの外積であることに注意. モーメントは, 外積により決まるベクトル量である. モーメントのベクトルの向きは, \mathbf{r} から \mathbf{f} の方向に右手の指を回したときの親指の方向 (右手の法則).
- モーメントの大きさ $|\mathbf{L}|$ は, \mathbf{r} と \mathbf{f} で作られる平行四辺形の大きさに等しい. 一般に, モーメントの大きさに符号をつけて, 反時計回りを正, 時計回りを負とすることが多い. これらを踏まえて, より簡易なモーメントの定義は,

$$(\text{モーメント}) := \pm (\text{腕の長さ}) \times (\text{力の大きさ}). \quad (1.2)$$

ただし, (腕) と (力) は直角の関係でなければならない. 直角でなければどちらかを分解して直角の関係を作る.

- モーメントの単位は $\text{N} \cdot \text{m}$. これを J とは書かないので注意.

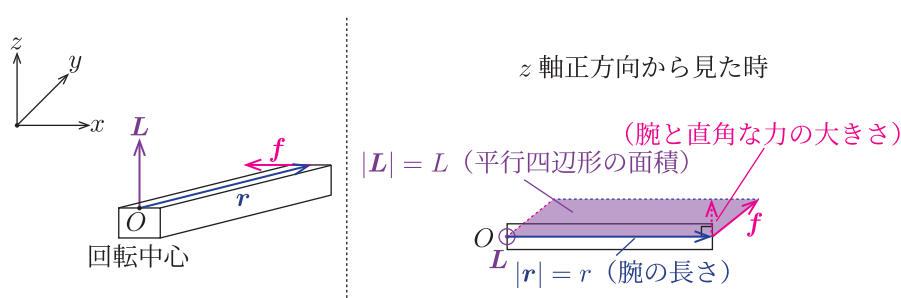


Fig.1 力のモーメントの向きと大きさ

力のモーメントの厳密な定義はベクトルの外積^{*3}で定義され, 結果もベクトルになることは重要ですが, 受験物理において使用する計算方法は (1.2) の方でしょう. 反時計回りを正の方向にとることが多いのは, 外積の右手の法則において, 指を回す方向が反時計回りになるからです. しかし, 問題によっては逆になることもありますし, そもそも受験では剛体の静止しか扱わないので, どちらを正の向きととっても問題がないことも多いです.

1.2.2 モーメントの釣り合い

剛体が回転していないことを, モーメントの釣り合いの状態 (Statics of moment) と呼びます. これは, 剛体の反時計回りのモーメントと時計回りのモーメントの和がゼロである状態を指します^{*4}.

^{*3} ベクトルの積の1つで, 内積と異なり結果がベクトルになる演算です. 受験数学において平面の法線ベクトルを計算する際に, 用いられるかもしれませんが, 受験物理においては, このモーメントだけでなく電磁気学のローレンツ力や, アンペール力でも外積は登場します.

^{*4} 正確には, モーメントベクトルの和がゼロであるということです.

モーメントの釣り合い

モーメントの釣り合いの状態とは、剛体の回転の総和がゼロのことを指す。式で示すと以下のようになる。

$$0 = +(\text{反時計回りのモーメント}) - (\text{時計回りのモーメント}). \quad (1.3)$$

剛体に回転がない場合、どこを回転の中心だと思っても回転の総和はゼロ。つまり、**回転中心の選び方は任意**。

以下に具体例を示します。

e.g. おもりが付いた軽い棒の釣り合い

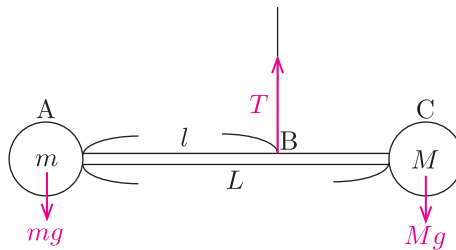


Fig.2 おもりが付いた軽い棒の釣り合い

上図において、それぞれ A, B, C を回転中心にとって、モーメントの釣り合いの式を立式してみます。

それぞれの点を回転中心にとった時のモーメントの釣り合いの式は、

$$A : 0 = +lT - Lmg, \quad (1.4)$$

$$B : 0 = +lmg - (L-l)Mg, \quad (1.5)$$

$$C : 0 = +Lmg - (L-l)T. \quad (1.6)$$

後にも述べますが、この3つの式は全て物理的に等価なものです。**回転がないということを中心をずらして計算しているだけなので、モーメントの釣り合いの式は1つで十分です。**

1.2.3 剛体の静止条件

剛体が静止する条件は、モーメントが釣り合うだけでは不十分です。剛体が静止するためには、Part1 で学んだ通り、力の釣り合いも必要です。

剛体の静止条件

剛体が静止するためには、以下の2つが条件になる。

1. 力の釣り合い.
2. モーメントの釣り合い.

この2つを合わせると、以下のようになる。

静止する剛体に働く力は作用点が1つに集まり、合力がゼロ。

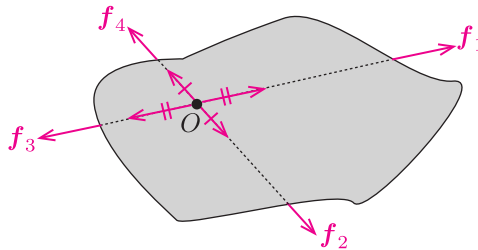


Fig.3 静止する剛体

力の釣り合いが成立していないと、剛体は加速度を持つことになってしまいます。剛体の釣り合いを議論する場合には、力の釣り合いとモーメントの釣り合いがそれぞれが必要です。

この条件をまとめると、作用点が1つに集まり合力がゼロになる、という条件を導くことができます。力はベクトルなので、作用線上なら動かしても問題がありません。剛体に働く力を全て作用線上で平行移動させると、回転していないのであればモーメントの総和がゼロ、つまり全ての力の腕の長さをゼロにできることを主張しています。そしてその力の総和がゼロなら力の釣り合いも成立していることになり、必ず剛体は静止することになります。

先ほどの例 (Fig.2) で、剛体の静止条件を立式してみましょう。

剛体の静止条件として、まずは力の釣り合いより、鉛直上向きを正として、

$$0 = T - mg - Mg. \quad (1.7)$$

モーメントの釣り合いより、A を回転中心として選ぶと、

$$0 = +lT - Lmg. \quad (1.8)$$

先述しましたが、モーメントの式は1つで十分です。モーメントの式の連立で問題を解くことがないようにしましょう。^{*5}

1.2.4 偶力

剛体の静止条件を逆に読むと、力が釣り合っている、力の作用点が一致しなければ剛体は回転し続けてしまい、静止することはありません、このような力を偶力 (Couple) と呼びます。具体例を以下に示します。

^{*5} 3次元の問題で、回転軸が複数ある場合は別です。

e.g. 軽い棒の両端に働く力

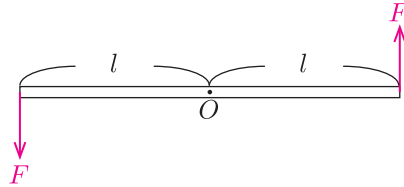


Fig.4 偶力が働く軽い棒

上図において、力の釣り合いは成立していますが、作用点は交わることはありません。回転中心を O にとると、左右の力はそれぞれ反時計回りの回転を生み出します。したがってこの軽い棒は、回転の総和がゼロになることはありません。

1.3 重心

Part1 では位置座標と物体の質量を用いて重心を定義しましたが、ここではモーメントの観点から重心を定義します。

重心

重心とは剛体における重力の作用点である。剛体が複数の質量を持つ剛体から構成される場合、**重心は複数の重力のモーメントが釣り合う点である。**

以下に具体例を示します。最初に例示した、おもりが付いた軽い棒の重心を求めてみましょう。

e.g. おもりが付いた軽い棒

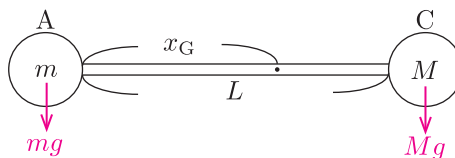


Fig.5 おもりが付いた軽い棒の重心

重力のモーメントが釣り合う点を計算します。

A から重心までの距離を x_G とする。重心まわりで重力のモーメントの釣り合いの式は、

$$0 = +x_G mg - (L - x_G) Mg, \quad (1.9)$$

$$x_G = \frac{ML}{m + M}. \quad (1.10)$$

剛体が複雑な形状をしているときは、剛体を切り分けて、複数物体にすることが重心を求める上でのコツです。

2 円運動

2.1 円運動における速度・加速度

物体の運動の軌跡が、円軌道となる運動を円運動（Circular motion）と呼びます。円運動は身近な運動の 1 つですが、円運動にしかない特徴があります。円運動における速度・加速度を定量的に求めることで、その特徴に迫りましょう。

2.1.1 速度

以下のように、ひもで一端を固定されて、円運動をしている物体を考えます。微小時間 Δt の経過を考えます。微小時間しか経過していないので、速さは v で変化していないと考えてよいです*⁶。円運動の速度は円の接線方向を向くため、円軌道の半径に対して直角になります。

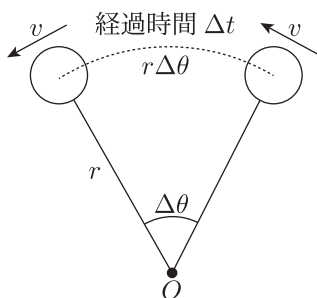


Fig.6 円運動する物体

Δt が小さければ、 $r\Delta\theta$ はほぼ直線であるとみなせます。経過時間が Δt なので、小球の速さ v は次の式で表現されます。

物体の速さ v は、

$$v = \frac{r\Delta\theta}{\Delta t}. \quad (2.1)$$

この $\frac{\Delta\theta}{\Delta t}$ を、角速度（Angular velocity）と呼び、 ω で表すことが多いです。単位時間あたりの角度変化を表すため、文字通り『角度の速度』を表現しています。

角速度 ω を、以下のように定義する*⁷。

$$\omega := \frac{\Delta\theta}{\Delta t}. \quad (2.2)$$

これを用いると、速さ v は、

$$v = r\omega. \quad (2.3)$$

*⁶ 微積分でも同様の考え方をします。

*⁷ 正確には $\Delta t \rightarrow 0$ の極限をとり、微分で表したものが角速度の厳密な定義です。つまり、 $\omega = \frac{d\theta}{dt}$ ，ということです。

(2.3) が、円運動の速度の式です。角速度が時間に依存しないとき、(2.3) から円運動の速さは一定値になります。この円運動を、等速円運動 (Uniform circular motion) と呼びます。角度が時間依存するとき、速さが一定ではなくなります。この円運動を非等速円運動 (Non-uniform circular motion) と呼びます。**円運動の種類は、角速度で決まるということです。**

また円運動 1 周にかかる時間を等速円運動に限り、角速度 ω を用いて表現できます。この 1 周にかかる時間を周期 (Period) と呼びます。

半径 r 、速さ v の等速円運動において、1 周にかかる時間 T は、

$$T = \frac{2\pi r}{v}. \quad (2.4)$$

$v = r\omega$ を用いると、(2.4) は、

$$T = \frac{2\pi}{\omega}. \quad (2.5)$$

この周期の表現は今後も非常によく登場します。

2.1.2 加速度

微小時間の中で速さは一定ですが、向きは変化していることが分かります。つまり、**微小時間で速度は変化しているため、円運動では物体に加速度が生じているということです。**これは、等速円運動でも非等速円運動でも共通な、円運動の重要な特徴です。この加速度を定量的に求めてみましょう。加速度の大きさ a は、速度の変化量の大きさ Δv を用いて、 $a = \frac{\Delta v}{\Delta t}$ であることを利用します。

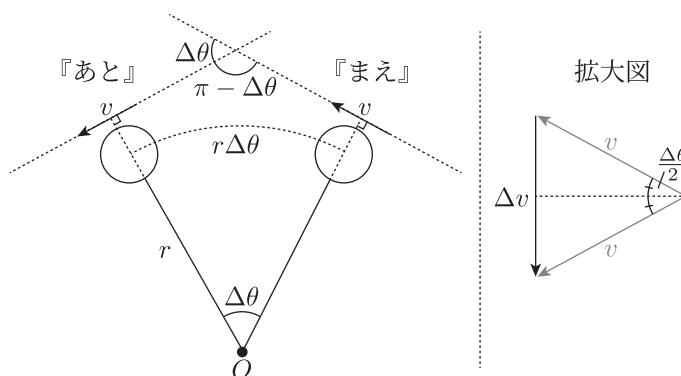


Fig.7 微小時間 Δt における速度変化

上図より、速度変化の大きさ Δv は、

$$\Delta v = 2v \sin \frac{\Delta\theta}{2}. \quad (2.6)$$

ここで、 $\Delta\theta \sim 0$ のとき、 $\sin \frac{\Delta\theta}{2} \sim \frac{\Delta\theta}{2}$ *8. これを用いると、

$$\Delta v = v\Delta\theta. \quad (2.7)$$

*8 三角関数の近似式は物理でよく登場します。 $\Delta\theta \sim 0$ のとき、 $\cos \Delta\theta \sim 1$ 、 $\tan \Delta\theta \sim \Delta\theta$ 、です。

加速度の大きさ a は,

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v \Delta \theta}{\Delta t}. \quad (2.8)$$

(2.2), (2.3) を用いると,

$$a = v\omega = \frac{v^2}{r} = r\omega^2. \quad (2.9)$$

加速度の向きは, $\Delta t \rightarrow 0$ とすると, $\Delta \theta \rightarrow 0$ より, 円の中心方向を向く.

最後の極限の議論から, 円運動する物体は瞬間瞬間で加速度をもっており, それが常に円の中心方向を向き, その瞬間の速さと円軌道の半径だけで決まるということです. 速さが一定であれば常に同じ加速度の値ですが, 非等速の場合にはその瞬間の速さで加速度の値は決まります. 古典力学では, 円の中心方向を向心方向と呼ぶことが多く, この向心方向の加速度を向心加速度 (Centripetal acceleration) と呼びます. また向心方向に加速度をもつことから, 円運動する物体には向心方向になにかしらの力が働かなければなりません. ここまでの議論を以下にまとめます.

円運動の速さ・加速度の大きさ

半径 r の円軌道上を運動する物体の速さ v は, 円運動の角速度 ω を用いて, 以下の式で表される.

$$v = r\omega. \quad (2.10)$$

また円運動では, かならず向心方向に加速度をもつ. その大きさを a とすると, 以下の式で表される.

$$a = \frac{v^2}{r} = r\omega^2 = v\omega. \quad (2.11)$$

向心加速度を持つということは, 円運動する物体には, 必ずなにかしら向心方向に力がはたらいていることになる. この向心方向の力を向心力 (Centripetal force) と呼ぶ.

加速度や力が登場してくると, やはり運動方程式が浮かぶかもしれません. 以下の節では, 円運動の記述について議論していきます.

2.2 円運動の記述

ここまでの議論から, 円運動でも運動方程式が立式できることが分かります. 加速度が向心方向であることから, 運動方程式を立式する方向は向心方向です^{*9}. もう 1 軸は向心方向と垂直な方向で運動方程式を立てますが, 等速か非等速で立式する方向が変わります.

^{*9} 向心方向に運動方程式を立式するということは, 座標として極座標を設定している (ただし動径方向は原点 O を正の向き) ということです. 前節で議論した向心方向の加速度は, 極座標表示における加速度の表記と同じです. 極座標における運動の表示は, 大学初年級の古典力学で必ず学びます.

円運動の記述

円運動の運動方程式は、等速、非等速に限らず、

向心方向の運動方程式（必須）.

もう 1 つの関係式は、

- 向心方向と垂直な釣り合いの式.（等速円運動の場合）
- 接線方向の運動方程式.（非等速円運動）

ただし、接線方向の運動方程式は、積分を施してエネルギーの関係式になる．したがって、非等速円運動は、エネルギーの関係式を最初から立式すればよい．

等速、非等速でそれぞれ具体例を示します．

e.g.1 お椀の中で等速円運動する物体

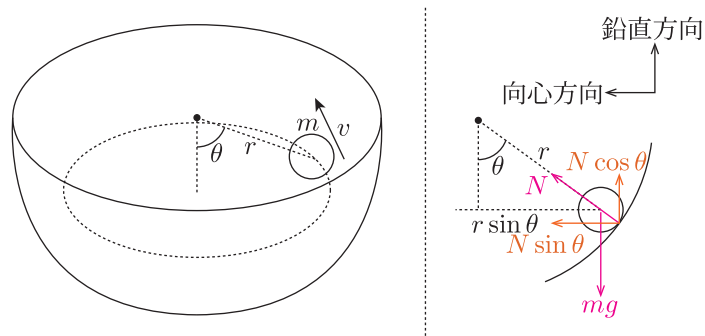


Fig.8 お椀の中で等速円運動する小球

円運動は中心を探すことが重要です．どの方向から見れば中心が見えるかを考えて、力の図を書きましょう．

物体は半径 $r \sin \theta$ の等速円運動、鉛直方向は座標が変化しないので、力の釣り合いの状態．それぞれの方向の運動方程式は、垂直抗力の大きさを N とすると、

$$\text{向心方向} : m \frac{v^2}{r \sin \theta} = N \sin \theta, \quad (2.12)$$

$$\text{鉛直方向} : 0 = N \cos \theta - mg. \quad (2.13)$$

これらの式を連立すれば、垂直抗力の大きさ N 、物体の速さ v を求めることができます．

e.g.2 半円筒上を運動する物体

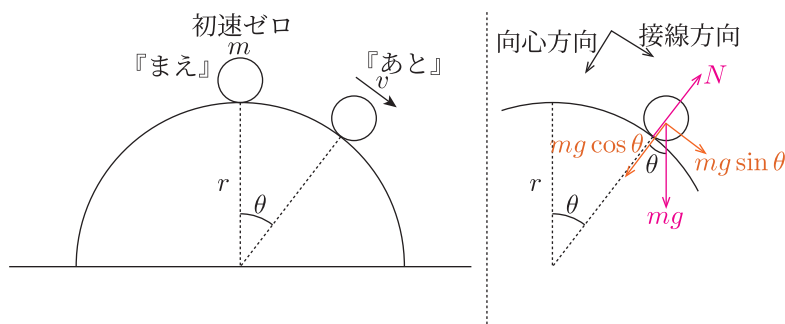


Fig.9 半円筒上を運動する物体

この円運動は非等速です。ただし、向心加速度はその瞬間の速さの値を利用すれば求まるため、向心方向の運動方程式が立式できます。同じように接線方向の運動方程式も立式できますが、これは積分してエネルギーの関係式にすることで、問題を解くことができます。エネルギーの式は運動の前後に注目すれば、簡単に立式できるはずです。

向心方向の運動方程式は、垂直抗力の大きさを N とすると、

$$m \frac{v^2}{r} = mg \cos \theta - N. \quad (2.14)$$

物体に働く力は垂直抗力と重力。垂直抗力は仕事をしないので、力学的エネルギーは保存する。重力の位置エネルギーの基準を『まえ』でとると、

$$0 = \frac{1}{2}mv^2 - mgr(1 - \cos \theta). \quad (2.15)$$

これらの式の連立で、問題にアプローチできます。

以下では発展内容ですが、接線方向の運動方程式からエネルギーの関係式を導いてみます。受験の範囲外なので、できなくてもよいですが、定量的な計算でエネルギーの関係式が導けることは意識しておきましょう。

接線方向の加速度は、 $\frac{dv}{dt}$ 。接線方向の運動方程式は、

$$m \frac{dv}{dt} = mg \sin \theta. \quad (2.16)$$

(2.16) の両辺に v をかけて、円運動の速さの式、 $v = r\omega = r \frac{d\theta}{dt}$ を右辺に用いると、

$$mv \frac{dv}{dt} = mg \sin \theta \cdot r \frac{d\theta}{dt}, \quad (2.17)$$

$$mv dv = mgr \sin \theta d\theta. \quad (2.18)$$

運動の前後で積分をとると,

$$\int_0^v mv dv = \int_0^\theta mgr \sin \theta d\theta, \quad (2.19)$$

$$\left[\frac{1}{2}mv^2 \right]_0^v = [-mgr \cos \theta]_0^\theta,$$

$$\frac{1}{2}mv^2 - 0 = -mgr(\cos \theta - 1),$$

$$0 = \frac{1}{2}mv^2 - mgr(1 - \cos \theta). \quad (2.20)$$

同じ結果になることが確かめられます。ただこのような操作をしなくても運動の『見た目』にさえ注目すれば、問題なく立式できるのがエネルギーの式の強みです。

2.3 角運動量保存則

物体に働く力が、物体と中心からの距離のみに依存し、方向が原点から飛び出す方向、もしくは原点に向かう力の総称を中心力 (Central force) と呼びます^{*10}。ここまで扱ってきた向心力は、中心力の一部です。物体が中心力のみをうけるとき、角運動量 (Angular momentum)^{*11} という物理量が保存します。

角運動量保存則

角運動量の大きさ l を、以下の式で定義する。

$$l := mrv. \quad (2.21)$$

ただし、 v は半径と直角する速度成分。物体に働く力が中心力であるとき、角運動量が運動中で常に保存する。等速円運動では、速さ v は常に半径と直角の関係で速さも一定、つまり角運動量が保存する最も簡単な例である。逆を言えば、円運動で角運動量が保存する場合、必ず等速円運動になる。

中心力のみが働く円運動であれば、角運動量保存則から速さが一定であることを見つけることができます。円運動の判定に、この知識は使えるということです。

角運動量保存則を用いた具体例を 1 つ紹介します。

e.g. ひもでつながれた円運動

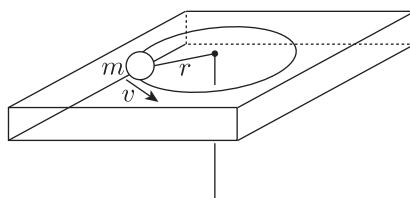


Fig.10 ひもでつながれた円運動

^{*10} 中心力の具体例は、万有引力、クーロン力です。

^{*11} 角運動量という物理量は、大学受験の範疇外ですが、物理学全体を通して極めて重要な物理量の 1 つです。以降の議論では、細かい詳細は省いて、受験において有用な角運動量の知識を紹介します。

上図の円運動は、張力が中心力となるため、角運動量保存則が成立します。つまり、上の状態からひもを下向きに引っ張り、半径の長さを r' と変化させても、角運動量は一定値を保つのです。この時の円運動の速さ v' を求めてみましょう。

角運動量保存則より、半径 r' の時の速さ v' は、

$$mrv = mr'v', \quad (2.22)$$

$$v' = v \frac{r}{r'}. \quad (2.23)$$

この結果から、角運動量保存則が成立する系では、半径が小さくなると速さがより大きくなることが分かります。

2.3.1 各運動量保存則の証明

このセクションは発展内容なので、飛ばして構いません。前節で述べた角運動量保存則が、いかにして成立するかを示します。

角運動量の厳密な定義は、物体の位置ベクトル \mathbf{r} と運動量ベクトルの \mathbf{p} の外積で、ベクトル量です。

角運動量の定義

角運動量ベクトル \mathbf{l} を、以下の式で定義する。

$$\mathbf{l} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}. \quad (2.24)$$

外積なので、 \mathbf{l} の方向は \mathbf{r} から \mathbf{p} の方向に右手の指を回したときの親指の方向。角運動量大きさは、 \mathbf{r} と \mathbf{p} が作る平行四辺形の面積。

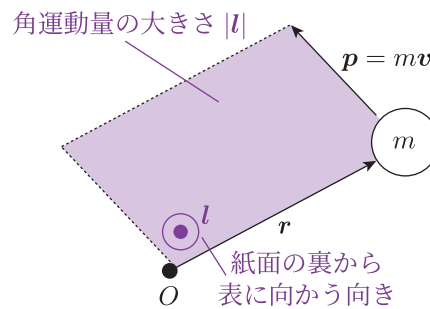


Fig.11 角運動量ベクトル

角運動量保存則を定量的に示します。質量 m の物体に、力 \mathbf{f} がかかっているとしましょう。運動方程式の両辺に、位置ベクトル \mathbf{r} をかけていきます。

物体の運動方程式は、

$$m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{f}. \quad (2.25)$$

$\mathbf{p} = m\mathbf{v}$ より、(2.25) は、

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \mathbf{f}. \quad (2.26)$$

両辺に \mathbf{r} の外積をとることで,

$$\mathbf{r} \times \frac{d\mathbf{p}}{dt} = \mathbf{r} \times \mathbf{f}. \quad (2.27)$$

ここで, 角運動量 \mathbf{l} の時間微分は*12,

$$\frac{d\mathbf{l}}{dt} = \frac{d}{dt}(\mathbf{r} \times \mathbf{p}) = \frac{d\mathbf{r}}{dt} \times \mathbf{p} + \mathbf{r} \times \frac{d\mathbf{p}}{dt}. \quad (2.28)$$

$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{v}$, $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$ より, \mathbf{v} と \mathbf{p} は平行なベクトルだから, $\frac{d\mathbf{r}}{dt} \times \mathbf{p} = \mathbf{0}$ *13. 従って (2.26) は,

$$\frac{d\mathbf{l}}{dt} = \mathbf{r} \times \frac{d\mathbf{p}}{dt}. \quad (2.29)$$

つまり (2.27) は,

$$\frac{d\mathbf{l}}{dt} = \mathbf{r} \times \mathbf{f}. \quad (2.30)$$

(2.30) の右辺 $\mathbf{r} \times \mathbf{f}$ は, 力のモーメントである. $\mathbf{r} \times \mathbf{f} = \mathbf{0}$ となる時, $\mathbf{r} // \mathbf{f}$ でなければならない. 力が位置ベクトルと平行であるとき, この力は中心力である. このとき (2.30) は,

$$\frac{d\mathbf{l}}{dt} = 0, \quad (2.31)$$

$$\mathbf{l} = \text{Const.} \quad (2.32)$$

つまり, 物体に働く力が中心力であるとき, 角運動量 \mathbf{l} は保存する.

当然今は理解できるようになる必要はありませんが, 大学初年級では必須の内容になるでしょう. 後の面積速度保存則を示す際にも, この議論の流れが重要になります.

*12 ベクトルの時間微分は初めて見るかもしれませんが, ただの合成関数の微分です.

*13 外積は 2 つのベクトルが平行である時, 値が $\mathbf{0}$ (ゼロベクトル) になります. 内積は 2 つのベクトルが直交する場合に値がゼロになりますから, そこが 2 つの演算の違いです.

3 非慣性系の力学

古典物理学において、観測者は加速度を持たないことが前提で、これを慣性系と呼ぶのでした。古典物理学は、慣性系の中で組み立てられる理論体系なのです。しかし、複雑な系の考察では、加速度を有する観測者が系の運動を記述する方が、簡潔になる場合があります。この節では、非慣性系における古典力学の記述について議論しましょう。

3.1 加速度を有する観測者

まず観測者が加速度を持たないことがなぜ古典物理の前提になるのかを考えます。これはつまり、加速度を持つ観測者（非慣性系）では、物理の理論がおかしくなってしまうということを意味するのです。以下の例で考えてみましょう。

e.g. x 軸上の加速度運動

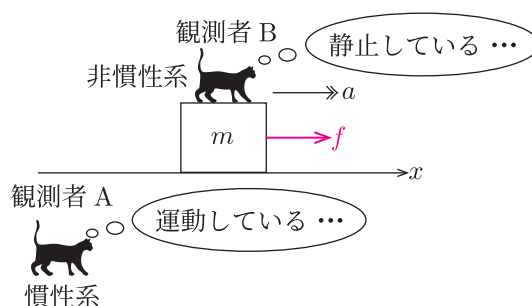


Fig.12 慣性系と非慣性系

2人の観測者 A, B はそれぞれ慣性系と非慣性系です。B は物体の上に乗っていることから、B 自体が意識しているかどうかは分かりませんが、物体と同じ加速度を持っています。

まずは今まで通り、A の立場で運動方程式を立式してみましょう。A から見たら、物体は運動しているように見えます。

A から見た物体の運動方程式は、

$$ma = f. \quad (3.1)$$

なんの変哲もない、ただの運動方程式です。では B が物体を見たらどう思うでしょうか。これは静止しているように見えるはずですが^{*14}。静止ということは、加速度がゼロなので、物体は釣り合いの式であるということです。

^{*14} みなさんも車に乗っていて、車の床を見たら静止しているように見えるはずですが。物理学は、どの観測者から見たらどのように見えるかという、観測者の『気持ち』を考えることが重要です。みなさん自体の主観ではないのです。モノの『気持ち』、観測者の『気持ち』、物理は案外、相手のことを思う学問体系なのかもしれません。

B からみた力の釣り合いの式は、

$$0 = f. \quad (3.2)$$

それぞれ異なる結果になってしまいました。古典力学では、どちらを正しい式として認めているかといえ、運動の 3 法則の 1 つである『慣性系の存在の主張』から、(3.1) の慣性系から見た式です。加速度を有する観測者が普通に物理の式を立てると、このようにおかしなことがおきてしまうのです。

3.1.1 慣性力の導入

しかしながら先述の例において、非慣性系である観測者 B から物体の動きを見ると、物体を静止したものとして扱えるのは大変に便利です。この利便性を活用するために、非慣性系である B でも、数学的に等価な物理の式を立式できるように、辻褄を合わせてみましょう。このときに導入されるのが、慣性力 (Inertial force) です。

先述の例で考えてみます。(3.1) と (3.2) を見比べると、足りないのは ma の項だけです。つまり、(3.2) に ma の項を取り入れられたら良いわけです。しかし、そのまま (3.2) の左辺に ma を足してしまうと、最初から慣性系で物理をやればよかっただけになってしまうので、工夫します。B から見るメリットは、静止した釣り合いになることでした。したがって、右辺の力の項に $-ma$ として導入してみましょう。これは、Fig.12 の例において、観測者の加速度の方向とは逆向きに大きさ ma の項が働いていることになります。これが、慣性力の導入です。

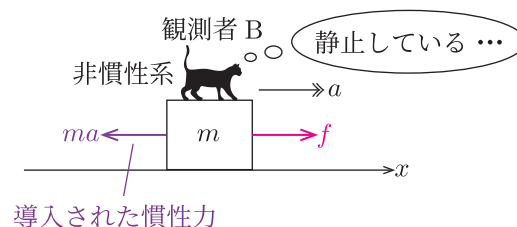


Fig.13 慣性力の導入

非慣性系である B の立場において、慣性力 ma を B の加速度の方向と逆向きに作用するものとして、導入する。このとき B が立式する力の釣り合いの式は、

$$0 = f - ma. \quad (3.3)$$

(3.1) と整合性が取れました。このように、慣性力とは、非慣性系においても正しい値になるように、慣性系でみた結果から意図的に導入されるものであり、実在する力ではないということです^{*15}。ここまでの議論をまとめます。

^{*15} 慣性力が実在する力でない証拠の 1 つが、作用・反作用をあげられないことです。運動の 3 法則では、全ての力には作用・反作用があるとされています。これは、注目物体を取り替えて考えることで、皆さんも実際に確認してきたでしょう。しかしこの慣性力は、どのように注目物体を取り替えても反作用を見つけないことができません。慣性力とは、慣性系ありきの導入された意図的な力なのです。

慣性力の導入

観測者が加速度 a を有する非慣性系であるとする。この観測者が運動方程式を立式する際には、注目する物体に対して、観測者の加速度とは逆向きの慣性力 ma を導入しないと、慣性系で見る式と整合性が取れなくなる。

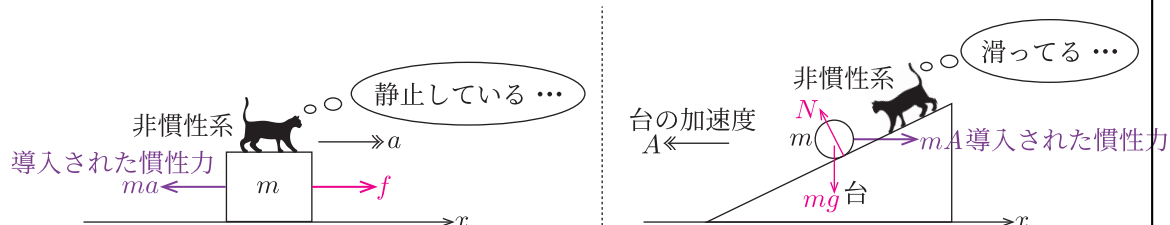


Fig.14 慣性力の導入

先述の例では、非慣性系から見ると物体は静止でしたが、Fig.14 の例でも示されているように、非慣性系から見ても観測する物体が運動している場合もあります。物体が運動しているか否かに関わらず、観測者に加速度がある場合には慣性力を導入する必要があります。

なぜわざわざ非慣性系でも物理ができるように慣性力を導入するのでしょうか。それはひとえに、非慣性系からの運動の記述は、運動をととても簡潔にすることがあるからです。Fig.14 の右の例を、慣性系と非慣性系の立場でそれぞれ議論してみましょう。

e.g.1 固定されていない三角台の上を滑る小球—慣性系からの記述

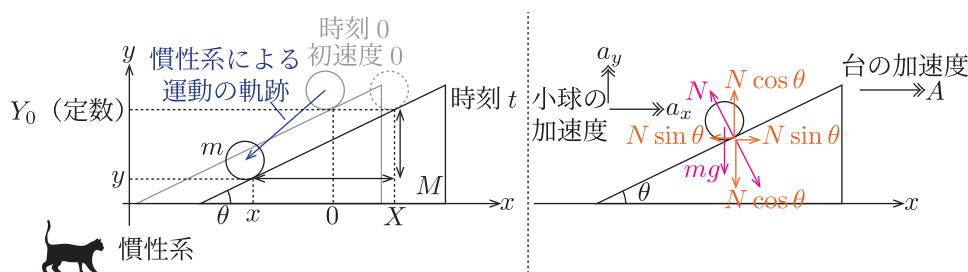


Fig.15 慣性系による小球と台の運動

小球が受ける力は重力と垂直抗力だけで、台は小球から垂直抗力の反作用を受けます。台と小球の初速度はゼロですから、台は水平右向きにしか動きません。この様子を慣性系で眺めると、台が運動するために小球は角度 θ の斜面上を運動しているようには見えません。したがって、水平・鉛直に座標軸を設定するしかありません。小球と台の運動を記述するには、この座標軸で運動方程式を立式する以外にないのです。

上図において、小球と台の運動方程式は、 x , y 方向において、

$$\text{小球, } x : ma_x = -N \sin \theta, \quad (3.4)$$

$$y : ma_y = N \cos \theta - mg, \quad (3.5)$$

$$\text{台, } x : MA = N \sin \theta. \quad (3.6)$$

未知数が a_x , a_y , A , N の 4 つで、式が 3 つなので式が足りません。この場合には、拘束条件を考えます。この問題における拘束条件は、『角度 θ が一定』*16、です。これを設定した文字を用いて、立式してみましょう。

『斜面の角度が θ で一定』の拘束条件を立式すると、

$$\tan \theta = \frac{Y_0 - y}{X - x}, \quad (3.7)$$

$$\tan \theta (X - x) = Y_0 - y. \quad (3.8)$$

時刻 t で 2 階微分することにより、

$$\tan \theta (A - a_x) = -a_y. \quad (3.9)$$

(3.4) から (3.6), (3.8) を連立すれば小球と台の運動は記述できますが、面倒です（ただ重要なので是非手を動かして、それぞれの加速度と垂直抗力を求めてください）。

この状況を、台の上に乗った観測者、つまり台と同じ加速度 A を有する非慣性系の観測者の立場で考えます。台の上の観測者から見たら、小球は台上を滑るように見えるだけです。ただし、観測者自体が加速度をもっているため、小球が台上を滑る加速度は相対加速度であることに注意しましょう。もちろん、この観測者から見れば、台は静止しているように見えます。それぞれの立場で運動方程式を立式しましょう。

e.g.2 固定されていない三角台の上を滑る小球—非慣性系からの記述

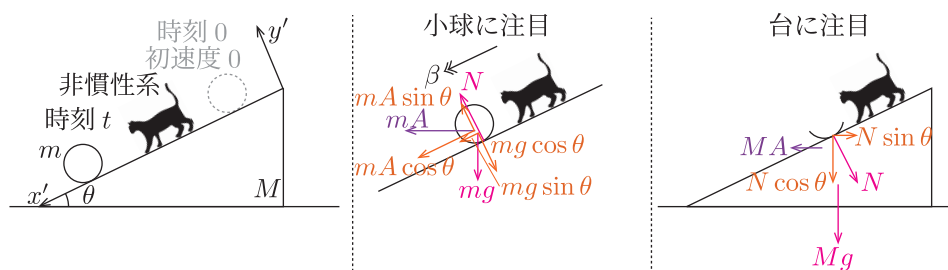


Fig.16 非慣性系による小球と台の運動

台の上の観測者が観測する、台に対する相対加速度を β とする。小球と台の運動方程式は、上図のように x' , y' 方向に座標軸を設定すると、

$$\text{小球, } x' : m\beta = mA \cos \theta + mg \sin \theta, \quad (3.10)$$

$$y' : 0 = N + mA \sin \theta - mg \cos \theta. \quad (3.11)$$

台は静止しているので、水平方向の運動方程式は、水平右向きを正として、

$$\text{台, } 0 = N \sin \theta - MA. \quad (3.12)$$

(3.10) から (3.12) を解けば、 N , A , β が分かります。小球の運動は、台の上から見ればただ斜面上を滑っているだけなので、慣性系で見るよりもずっと素直です。計算して求めてみましょう。

*16 Part1 で学んだ拘束条件です。この斜面の角度に対する拘束条件は、大変有名なので理解して使えるようになります。座標設定が鍵となります。

(3.12) より,

$$N = \frac{MA}{\sin \theta}. \quad (3.13)$$

(3.11) に代入すると,

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{MA}{\sin \theta} + mA \sin \theta - mg \cos \theta, \\ A &= \frac{mg \sin \theta \cos \theta}{M + m \sin^2 \theta}. \end{aligned} \quad (3.14)$$

(3.13) に代入すると,

$$N = \frac{Mmg \cos \theta}{M + m \sin^2 \theta}. \quad (3.15)$$

(3.10) より,

$$\begin{aligned} \beta &= A \cos \theta + g \sin \theta, \\ &= \frac{g \sin \theta (m \cos^2 \theta + M + m \sin^2 \theta)}{M + m \sin^2 \theta}, \end{aligned} \quad (3.16)$$

$$= \frac{g \sin \theta (m + M)}{M + m \sin^2 \theta}. \quad (3.17)$$

小球は台上を加速度 β で等加速度運動する.

ここから小球の運動を記述するのは簡単です. どうしても慣性系から見た結果が欲しいのであれば, この非慣性系による結果から, 相対加速度の関係式を用いれば, 慣性系から見た結果を得ることができます.

3.1.2 遠心力

円運動の際にも, 慣性力を考えることができます. つまり, **円運動する物体の上に立った観測者の立場で考えるということです**. このとき, この観測者は円運動をするため, 向心方向に加速度を有する非慣性系です. 前セクションで議論したお椀の中での等速円運動を, 物体の上に観測者を置いて議論してみましょう. **物体の上の観測者から見ると, 物体は静止して見えるはず**です.

e.g. お椀の中で等速円運動する物体 (再掲)

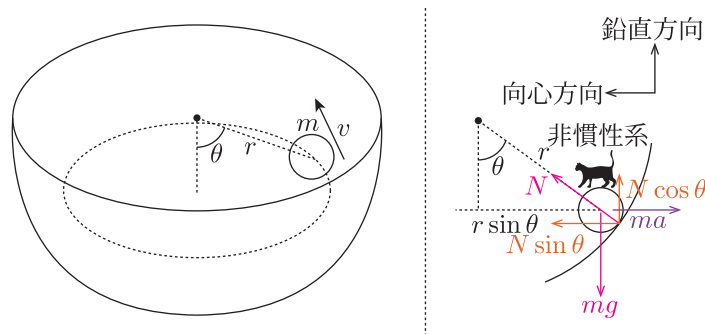


Fig.17 非慣性系で観測する等速円運動

小球の上の観測者は向心加速度 $a = \frac{v^2}{r \sin \theta}$ を有する非慣性系である。この観測者から見ると、小球は静止して見える。運動方程式（力の釣り合いの式）は、

$$\text{向心方向} : 0 = N \sin \theta - ma = N \sin \theta - m \frac{v^2}{r \sin \theta}, \quad (3.18)$$

$$\text{鉛直方向} : 0 = N \cos \theta - mg. \quad (3.19)$$

この方程式の結果は、慣性系で議論した結果（2.2 節）の結果と等しい。

この円運動における慣性力を、遠心力（Centrifugal force）と呼びます^{*17}。遠心力は身近な単語ですが、これも実在する力ではないことに注意しておきましょう。

3.2 非慣性におけるエネルギーの変化

ここまで議論した慣性力の導入により、加速度を有する非慣性系でも力学現象を記述することができるようになりました。これは、ここまで議論した運動方程式以外にも、エネルギーによる議論も非慣性系でできるようになったということを意味しています。

3.2.1 見かけの重力

慣性力を導入しなければならない非慣性系では、重力と慣性力を合わせることで、みかけの重力（Apparent gravity）を考えることがしばしばあります。以下の例で考えてみましょう。

e.g. 一定の加速度を有する電車と車内の振り子

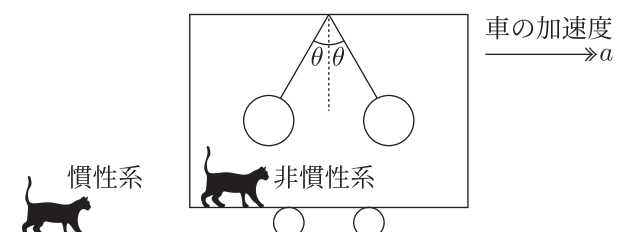


Fig.18 車内に取り付けられた振り子

車の初速度がない場合、この振り子は左右どちらかに角度 θ 傾いて静止します。どちらに静止するのでしょうか？まずは慣性系で議論してみましょう。

^{*17} 正確には、回転する観測者の立場では、コリオリ力（Coriolis force）という慣性力も考える必要があります。地球上での普通の力学実験では、ほとんど無視されるものですが、スケールの大きな話（例えば地球上での雲の運動など）では、コリオリ力を考慮した上で議論しなければならないこともあります。受験の範囲外ではありますが、コリオリ力が背景のテーマとなるような問題は、出題例があります。

e.g. 一定の加速度を有する電車と車内の振り子—慣性系での議論

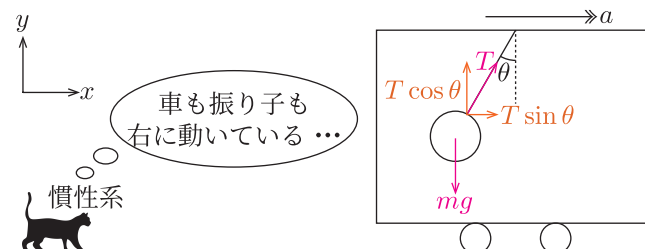


Fig.19 慣性系での議論

慣性系の観測者から見ると、車も振り子も右方向に加速度 a を持って運動しているように見えます。従って、運動方程式から水平右向きの力を受けていないといけません。従って、水平右向きの力を受ける方向に傾かなければならないので、振り子は右に傾きます。これは、静止摩擦力で加速度運動する時の議論と同じです。

慣性系での運動方程式は、

$$x : ma = T \sin \theta, \quad (3.20)$$

$$y : 0 = T \cos \theta - mg. \quad (3.21)$$

(3.20), (3.21) より、

$$T = \frac{mg}{\cos \theta}, \quad (3.22)$$

$$a = g \tan \theta. \quad (3.23)$$

同じことを、車内いる観測者である、非慣性系で考えてみましょう。車と同じ右向き a の加速度を有する観測者なので、振り子には、左向きの慣性力 ma を加えなくてはなりません。

非慣性系において、振り子は静止しているため、運動方程式は力の釣り合いの式になる。

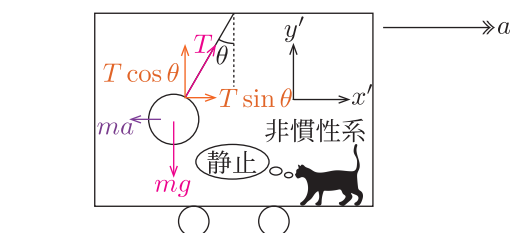


Fig.20 非慣性系での議論

力の釣り合いの式より、

$$0 = T \sin \theta - ma, \quad (3.24)$$

$$0 = T \cos \theta - mg. \quad (3.25)$$

(3.24), (3.25) より,

$$T = \frac{mg}{\cos \theta}, \quad (3.26)$$

$$a = g \tan \theta. \quad (3.27)$$

当然ですが, 両方の立場で同じ結果になっています. どちらの観測者でも, 議論ができるようにしておきましょう.

ここまでは前節の議論と同じですが, 以下では非慣性系の立場で更に議論を進めます.

慣性力と重力を合成してみます. そうすると, 張力と逆向きの合力が働いていて, 静止している, つまり釣り合いの状態と考えることができます.

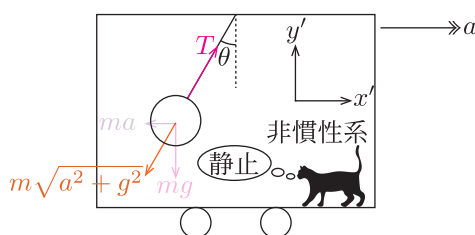


Fig.21 非慣性系における重力と慣性力の合成

この合成した力を, 見かけの重力 (Apparent gravity) と呼びます. 非慣性系が観測する重力は, この例でも分かるように, 斜め方向を向いているとみなしてもよいだろう, という解釈です. この見かけの重力の重力加速度 g' は, 上図より以下ようになります.

見かけの重力加速度 g' は, 上図より,

$$m\sqrt{a^2 + g^2} := mg', \quad (3.28)$$

$$g' = \sqrt{a^2 + g^2}. \quad (3.29)$$

見かけの重力も, 実際に存在するものではありません. 慣性力を導入したときに, あくまで非慣性系において, そのような解釈ができるということです.

3.2.2 見かけの重力加速度によるエネルギーの議論

前節で定義した, 見かけの重力加速度を用いるメリットは, 非慣性系の観測者でもエネルギーの議論ができることにあります. 上述した車内の振り子を, 車内で上の方まで上げて初速度ゼロで落とすことを考えましょう.

e.g. 車内での振り子運動—非慣性系での議論

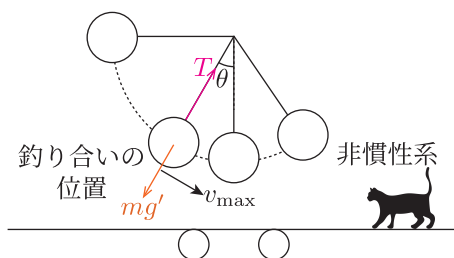


Fig.22 車内での振り子運動

この振り子運動は、非慣性系からみてどの位置で一番最速になるでしょうか。後の単振動や単振り子の節で述べますが、振動の中心で振り子運動は最速になります。従って、今回の非慣性系における単振り子も、釣り合いの位置で最速になります。つまり、角度 θ だけ左に傾いたところが最速です。

この非慣性系から見た速さ v_{\max} を求めてみましょう。普通の単振り子で速さを求めるのであれば、力学的エネルギーの保存を用います。張力が仕事をしないためです。この非慣性系でも同様にエネルギーの議論で求めることができれば良さそうですが、普通には立式ができません。ただ、慣性力を導入して数学上慣性系と同等な運動方程式を立式できているのであれば、見かけの重力加速度 g' を用いてエネルギーの関係式を用いることができます。

注意点としては、見かけの重力の方向は傾いているため、見かけの重力の位置エネルギー $mg'h$ の基準位置は、傾いてしまうという点です。そこだけ注意を払って、エネルギー保存則を立式して v_{\max} を求めてみましょう。ひもの長さを l とします。

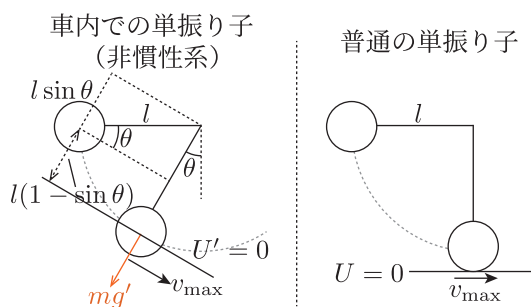


Fig.23 車内での振り子と普通の振り子の比較

非慣性系における力学的エネルギー保存則より、

$$mg'l(1 - \sin \theta) = \frac{1}{2}mv_{\max}^2, \quad (3.30)$$

$$v_{\max} = \sqrt{2g'l(1 - \sin \theta)}. \quad (3.31)$$

$g' = \sqrt{a^2 + g^2}$ より、

$$v_{\max} = \sqrt{2\sqrt{a^2 + g^2}l(1 - \sin \theta)}. \quad (3.32)$$

この答えを、慣性系である外にいる観測者から計算するのは、かなり難しいでしょう。非慣性系でも無理矢理に力学を成立させるのは、このように運動している中で別の運動をするような系について、運動をより簡潔に記述できるからです。

今回は非慣性系におけるエネルギー保存をテーマに議論しましたが、非慣性系の観測者からみて慣性力の仕事を考えることもあります。慣性力の導入で、これまで議論が難しかった系についても、これまでと同じように計算することができます。

4 単振動

入試最頻出分野である単振動 (Simple harmonic motion)^{*18} の理解は、多くの物理現象の入り口となります。その正確な理解を目指しましょう。

4.1 単振動の定義

Part1 でも議論したように、運動は運動方程式による加速度の関数形と、運動の初期条件だけで一意に決定されます。単振動と呼ばれる運動は、以下の運動方程式を満たす運動を指します。

単振動の定義

運動の任意の時刻 t において、物体の位置座標が $x(t)$ であるとする。このとき、物体が単振動している時、運動方程式は、以下の形を満たす。

$$ma(t) = m \frac{d^2 x}{dt^2} = -K(x(t) - x_0). \quad (4.1)$$

ここで K は定数、 x_0 は振動の中心座標を表す。この振動中心座標は力の釣り合いの位置である。(4.1) より、

$$a(t) = \frac{d^2 x}{dt^2} = -\frac{K}{m}(x(t) - x_0). \quad (4.2)$$

このとき、単振動の角速度 ω を、以下の式で定義する。

$$\omega := \sqrt{\frac{K}{m}}. \quad (4.3)$$

(4.2), (4.3) を用いると、単振動における加速度の表式は、以下の式で表される。

$$a(t) = -\omega^2(x(t) - x_0). \quad (4.4)$$

とても天下りの的かもしれませんが、どんな運動であれ、いつも通りに任意の運動途中で運動方程式を立式したとき、(4.1) の形を満たすものは全て単振動という運動に分類されるということです。この式を何故単振動の定義としているかは、後ほど説明します。

簡単な例で単振動の定義を満たすものを確認してみましょう。Part1 でも出てきた水平バネの運動です。

^{*18} 入試物理の範囲では単振動と呼ばれることも多いですが、一般には調和振動と呼ばれることが多いです。

e.g. 水平バネの単振動（再掲）

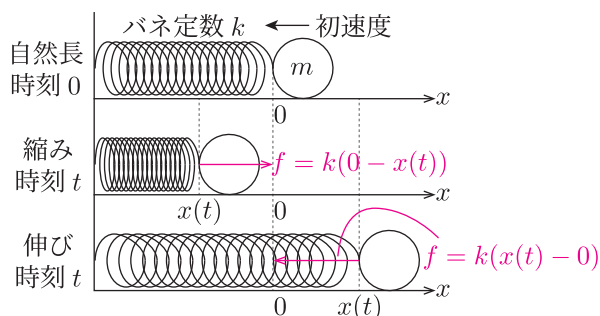


Fig.24 水平バネの単振動

任意の時刻 t における運動方程式は，自然長から縮んでいる時と伸びている時があります．それぞれの状態で運動方程式を立式してみましょう．

任意の時刻 t における物体の位置座標を $x(t)$ とする．バネが自然長が縮んでいる時の運動方程式は，

$$ma(t) = +k(0 - x(t)) = -k(x(t) - 0). \quad (4.5)$$

バネが伸びている時の運動方程式は，

$$ma(t) = -k(x(t) - 0). \quad (4.6)$$

バネが縮んでいても伸びていても，運動方程式の形は同じで，それぞれ単振動の定義を満たしていることが分かる．単振動の振動中心は， $x = 0$ であることも分かる．

伸縮のとき，両方で同じ式になります．これは伸び縮みも含めて『単振動』という運動途中であることを示しています．また，任意の位置座標 $x(t)$ はその文字自体が変数なので，勝手に符号を付けてはいけません．たとえ物体が負の位置であったとしても，負符号をつけてはいけません．

この単振動の運動方程式で極めて重要になるのが，フックの法則の使い方です．極めて重要なので，改めて再掲します．

フックの法則（Remind）

物体がバネから受ける弾性力の大きさ f は，バネ定数を k として，

$$f = k(\text{バネの自然長からの伸縮の長さ}). \quad (4.7)$$

弾性力の向きは，自然長に向かう方向（変位の向きとは逆）．

フックの法則を正しく使えば，単振動の運動方程式の負符号は必ず付いてきます．どんな状況でも間違えることなく運動方程式を立式できるようになりましょう．

ここまではただ定義を述べてきただけですが，単振動とは一体どのような運動なのでしょう．この例でも，また『単振動』というその名前から『振動運動』の1つで，物体は往復運動することが分かるでしょう．次の節で，この往復運動が，数学的にどのように記述されるのかを議論します．

4.2 単振動の時間追跡

4.2.1 単振動の記述

単振動の運動方程式を満たす運動がどのようなものなのかを、以下に示します。運動の様子とは、物体の位置座標 $x(t)$, $v(t)$ が時刻 t においてどのような関数になるかです。

単振動の運動

物体の運動方程式が、(4.1) を満たす場合、物体の運動である $x(t)$, $v(t)$ は正弦波 (sin 関数, cos 関数) を用いて記述される。ただし、どのような正弦波になるかは、運動の初期条件で決まるため、その条件に応じて自分で関数形を決定しなくてはならない。

運動が正弦波になる理由は後述します。とりあえずはこの事実を基にして、次の節で簡単な単振動の、 $x(t)$, $v(t)$ を決定してみましょう。

4.2.2 簡単な単振動—初期条件が1つの場合

単振動を決定する正弦波は、運動の初期条件で決まります。

単振動の運動の決定—運動の初期条件が1つの場合

初期条件が1つの簡単な単振動は、運動の初期条件から正弦波のグラフを書くことで、 $x(t)$ が決定される。 $v(t)$ は、 $x(t)$ の時間微分で求める。

『運動の初期条件が1つ』という言葉がありますが、これは初期条件として、初期位置か初速度のどちらかが与えられているということです。簡単な単振動はこれで運動が決定されます。運動方程式が単振動の定義を満たしているならば、位置座標 $x(t)$ は正弦波の振る舞いになることは確定しているので、グラフを書けばどのような単振動なのかを決定することができます。先ほど述べた水平バネの単振動で考えてみます。

e.g.1 水平バネの単振動—初速度のみが初期条件の時

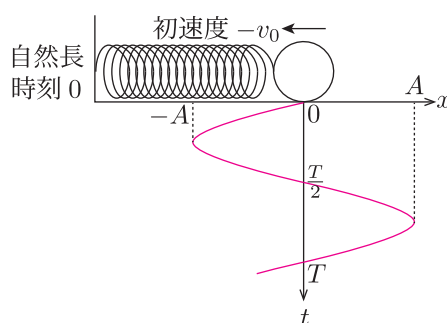


Fig.25 水平バネの単振動—初速度のみの初期条件

初期条件として x 軸負の向きの初速度なので、小球は左に運動する以外ありません。この状況をグラフで正弦波のように書くと、上図のようになるはずです。このグラフから、 $x(t)$ の関数形を求めます。

上図より $x(t)$ の関数形は,

$$x(t) = -A \sin \omega t. \quad (4.8)$$

(4.8) を時刻 t で微分することで,

$$v(t) = -A\omega \cos \omega t. \quad (4.9)$$

ただし (4.5) の運動方程式より, 単振動の角速度 ω は,

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}. \quad (4.10)$$

(4.5) の運動方程式より, 単振動の振動中心座標 x_0 は,

$$x_0 = 0. \quad (4.11)$$

振動中心座標から, 物体の最大(最小)到達座標までの距離を振幅 (Amplitude) と呼びます. 上図だと, 振幅は A です. また単振動は正弦波で記述されるため, 運動に周期性があります. 上図で, 位置座標が初期位置の $x = 0$ に到達するときの時刻 T を計算で求めてみます.

時刻 T で, 物体の位置座標はゼロに戻ってくるため,

$$x(T) = -A \sin \omega T = 0, \quad (4.12)$$

$$\omega T = 2\pi (\because T \neq 0),$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}. \quad (4.13)$$

物体が初期位置まで戻ってくるまでの時間を周期 (Period) と呼びます. 単振動の周期は, 必ず $T = \frac{2\pi}{\omega}$ となります^{*19}.

また, $v(t)$ を時間微分すると加速度 $a(t)$ が求まります.

(4.9) の $v(t)$ の関数を時間微分すると,

$$a(t) = A\omega^2 \sin \omega t. \quad (4.14)$$

(4.8) を用いると,

$$a(t) = -\omega^2 x(t). \quad (4.15)$$

(4.15) は記憶にある式ではないでしょうか. これはまさしく, **単振動の運動方程式から導かれる加速度の表式 (4.4) です**. つまり, 運動が正弦波になることを仮定すると, 必ず $x(t)$ と $a(t)$ は $-\omega^2$ を比例定数にする線形な関係が生じるということです. **逆を言えば, 運動方程式からこの関数関係が導かれるのであれば, 必ず運動は正弦波で表される形になるということが分かります**. 運動方程式 (4.1) が, 単振動の定義となる理由です.

以下では初速度 v_0 と A , ω の関係を議論しましょう. この水平バネの単振動の, $x-t$ グラフと $v-t$ グラフを並べて書いてみます.

^{*19} 等速円運動の周期と同じです.

$x(t)$ と $v(t)$ の関数は (4.8), (4.9) であるため, これをグラフにすると以下のようになる.

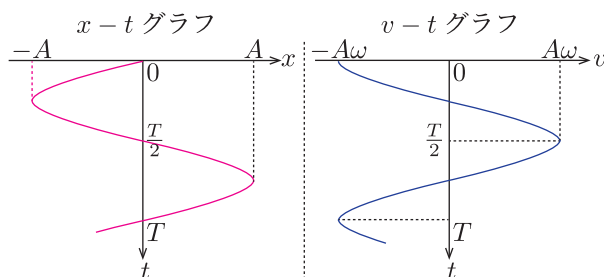


Fig.26 $x-t$ グラフと $v-t$ グラフ

$x(t)$ と $v(t)$ は微分の関係でした. $v(t) = \frac{dx}{dt}$ より, $v(t) = 0$ となる点で, $x(t)$ は最大・最小となるということです. これは運動の様子を想像すると, 直感的だと思います.

また初速度が $-v_0$ でしたから, $v-t$ グラフ ($v(t)$ の式) から, 以下の関係が分かります.

初速度が $-v_0$ であったため, 振幅 A と ω の関係は,

$$-v_0 = -A\omega, \quad (4.16)$$

$$v_0 = A\omega = A\sqrt{\frac{m}{k}}. \quad (4.17)$$

この単振動の速さの最大値は, $v_0 = A\omega$ であることが分かります. グラフから, 単振動において速さが最大になる位置は振動中心座標の位置, つまり釣り合いの位置であることが分かります.

単振動の速度の変化

単振動の速さ v_{\max} は, 角速度 ω , 振幅 A とすると,

$$v_{\max} = A\omega. \quad (4.18)$$

速さが最大になる位置は, 釣り合いの位置となる振動中心座標の位置.

もう1つ，具体例で議論します．

e.g.2 鉛直バネの単振動—初期位置のみが初期条件の時

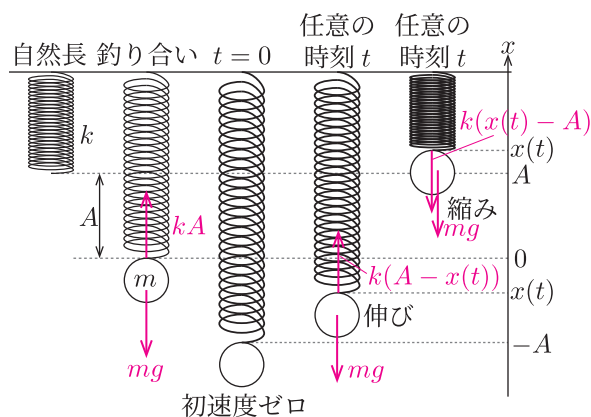


Fig.27 鉛直バネの単振動

まずは任意の時刻 t において，運動方程式の立式です．自然長から伸びているとき，縮んでいるときでそれぞれ立式してみましょう．

釣り合いの位置にいるとき，運動方程式は，

$$0 = mg - kA, \quad (4.19)$$

$$k = \frac{mg}{A}. \quad (4.20)$$

自然長から伸びているとき，任意の時刻 t における運動方程式は，

$$ma = +k(A - x(t)) - mg. \quad (4.21)$$

(4.20) より，バネ定数 k を (4.21) に代入すると，

$$ma = -kx(t) = -\frac{mg}{A}x(t), \quad (4.22)$$

$$a = -\frac{g}{A}(x(t) - 0). \quad (4.23)$$

縮んでいる時の任意の時刻 t における運動方程式は，

$$ma = -k(x(t) - A) - mg, \quad (4.24)$$

$$a = -\frac{g}{A}(x(t) - 0). \quad (\because k = \frac{mg}{A}) \quad (4.25)$$

(4.23), (4.25) より，この運動は単振動で，角速度 $\omega = \sqrt{\frac{g}{A}}$ ，振動中心座標 $x_0 = 0$ であることが分かります．単振動の周期は， $T = 2\pi\sqrt{\frac{A}{g}}$ となります．釣り合いの位置が $x = 0$ ですから，振動中心座標が釣り合いの位置であることが改めて確認できます．運動方程式から，単振動の重要な物理量が分かるのです．何度でも繰り返しますが，単振動では伸びでも縮みでも必ず同じ式になり，どんな座標軸の設定の仕方をしていても必ず定数と負符号が登場します．単振動において運動方程式を間違えることは許されません．

運動が単振動であることが分かったので、 $x(t)$ 、 $v(t)$ の正弦波を求めましょう。初期条件は、 $t = 0$ で $x(0) = -A$ です。振動中心座標が $x = 0$ で初速度がゼロですから、単振動の振幅は A です。それらを踏まえてグラフを書いてみましょう。

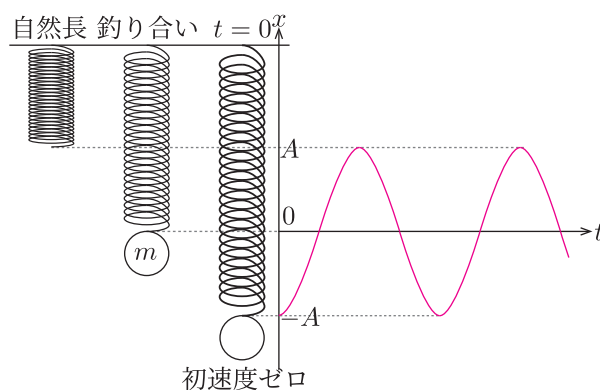


Fig.28 初期条件による $x(t)$

グラフから $x(t)$ 、 $v(t)$ を決定しましょう。

グラフより、

$$x(t) = -A \cos \omega t. \quad (4.26)$$

$x(t)$ を時間微分することで、

$$v(t) = A\omega \sin \omega t. \quad (4.27)$$

先ほどの水平バネと異なる関数形になりました。このように、初期条件が異なると正弦波の形は変化します。今回は振幅が A だったので、物体が自然長よりも縮むことはありません。ただ、任意の運動途中で縮みを考えることは何も悪いことではありません。今回の初期条件でたまたま縮みまで振幅が到達しなかっただけなのです^{*20}。

運動を表す関数 $x(t)$ 、 $v(t)$ が決定されれば、運動の全てを求めたも同然です。等加速度の3つの式を用いて時刻を計算したことと同様、求めた $x(t)$ 、 $v(t)$ を用いれば時刻を計算でき、物体の位置座標や速度を計算できます。今まで運動の時間追跡をするのに利用していた関数が、ただ正弦波に置き換わっただけです^{*21}。

4.3 単振動の一般解

Part1 でも議論した通り、運動方程式である微分方程式を解くことができれば、どんな運動をするのかが分かります。以下に、単振動の微分方程式を解いた結果を示します。

^{*20} どんな運動をしているか知りたいから立式している、計算している、という感覚を忘れないでください。『イメージがないと立式できない』というのは、自然科学に対する根本の頭の使い方が誤っています。イメージを作るために立式しているのです。

^{*21} 受験数学であれば三角関数を学ぶ意義の1つが、当たり前ですが自然科学で使うからです。数学は自然を記述する上で、これ以上の道具であり、言語であるのです。数学自体が興味深く深い学問体系であると同様、私たちの身の回りでは私たちが知らないだけで多くの物事に数学は使われています。物理学は、数学を使って記述される体系のうちの、ほんの一部です。

— 単振動の一般解 —

(4.1) の微分方程式を解いた結果は、以下の結果になる。

$$x(t) = C \cos \sqrt{\frac{K}{m}}t + D \sin \sqrt{\frac{K}{m}}t + x_0. \quad (4.28)$$

物体の速度 $v(t)$ は、(4.28) を微分することにより、

$$v(t) = -C\sqrt{\frac{K}{m}} \sin \sqrt{\frac{K}{m}}t + D\sqrt{\frac{K}{m}} \cos \sqrt{\frac{K}{m}}t. \quad (4.29)$$

ここで C , D は積分定数で、運動の初期条件で決まる定数である。(4.8), (4.9) の三角関数の位相の中の $\sqrt{\frac{K}{m}}$ は正弦波の振動の角速度 ω であるため、

$$x(t) = C \cos \omega t + D \sin \omega t + x_0. \quad (4.30)$$

$$v(t) = -C\omega \sin \omega t + D\omega \cos \omega t. \quad (4.31)$$

この (4.30), (4.31) を単振動の一般解 (General solution of simple harmonic motion) と呼ぶ。単振動における $x(t)$, $v(t)$ を求めることは、積分定数 C , D を求めることと等価である。この定数は、

1. 初期条件からグラフを書いて $x(t)$ を決定 (初期条件が 1 つの場合に有効)。
2. 初期条件を (4.30), (4.31) に代入して C , D を決定 (初期条件が 2 つの場合に有効)。

このどちらかの方法を用いて決定する。

『単振動という運動が正弦波で表される』という天下りの導入は、微分方程式を解いた結果であったということです*22。(4.28) の微分方程式の解き方は大学で学ぶことになりましたが、大学数学における定理を 2 つ使うだけで解くことができます。

4.3.1 一般解の決定—初期条件 1 つの場合

これまで 1 つの初期条件における単振動の $x(t)$, $v(t)$ はグラフを書いて求めていましたが、数学的には一般解の定数 C , D を初期条件から求めることと等価です。先ほどの 2 つの例で求めた $x(t)$, $v(t)$ を一般解から求めてみましょう。

*22 高校物理で単振動を学ぶ時は、等速円運動の射影であるという導入から単振動の議論が始まるかもしれませんが。今回は 1 番物理に忠実な、微分方程式を解いた結果であることを前提にした議論を行なっています。

e.g.1 水平バネの単振動—初速度のみが初期条件の時（再々掲）

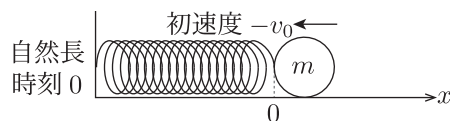


Fig.29 水平バネの単振動

初期条件は $t = 0$ で $x(0) = 0$, $v(0) = -v_0$ です．これを一般解に代入しましょう．

運動方程式 (4.5) より，角速度 $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$ ，振動中心座標 $x_0 = 0$ ．単振動の一般解は， C , D を定数として，

$$x(t) = C \cos \omega t + D \sin \omega t + 0, \quad (4.32)$$

$$v(t) = -C\omega \sin \omega t + D\omega \cos \omega t. \quad (4.33)$$

初期条件である $t = 0$ で $x(0) = 0$, $v(0) = -v_0$ を (4.32), (4.33) に代入すると，

$$x(0) = C + 0 + 0 = 0, \quad (4.34)$$

$$v(0) = 0 + D\omega = -v_0. \quad (4.35)$$

(4.34), (4.35) より，

$$C = 0, \quad (4.36)$$

$$D = -\frac{v_0}{\omega}. \quad (4.37)$$

(4.17) より，

$$D = -A. \quad (4.38)$$

従って $x(t)$, $v(t)$ は，

$$x(t) = -A \sin \omega t, \quad (4.39)$$

$$v(t) = -A\omega \sin \omega t. \quad (4.40)$$

グラフを書いて決定した (4.8), (4.9) と同じ結果になりました．続いて鉛直バネの単振動でも計算してみましょう．

e.g.2 鉛直バネの単振動—初期位置のみが初期条件の時（再掲）

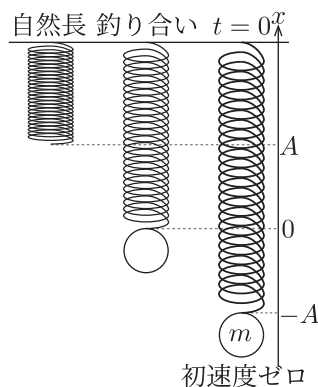


Fig.30 鉛直バネの単振動

初期条件は $t = 0$ で $x(0) = -A$, $v(0) = 0$ です.

運動方程式 (4.23) より, 角速度 $\omega = \sqrt{\frac{g}{A}}$, 振動中心座標 $x_0 = 0$. 単振動の一般解は, C, D を定数として,

$$x(t) = C \cos \omega t + D \sin \omega t + 0, \quad (4.41)$$

$$v(t) = -C\omega \sin \omega t + D\omega \cos \omega t. \quad (4.42)$$

初期条件である $t = 0$ で $x(0) = -A$, $v(0) = 0$ を (4.41), (4.42) に代入すると,

$$x(0) = C + 0 + 0 = -A, \quad (4.43)$$

$$v(0) = 0 + D\omega = 0. \quad (4.44)$$

(4.43), (4.44) より,

$$C = -A, \quad (4.45)$$

$$D = 0 \quad (4.46)$$

従って $x(t), v(t)$ は,

$$x(t) = -A \cos \omega t, \quad (4.47)$$

$$v(t) = A\omega \sin \omega t. \quad (4.48)$$

こちらも, グラフを書いて決定した (4.26), (4.27) と同じ結果になりました. もちろん数学的に厳密なのでこの方法でも良いですが, グラフを書いて $x(t), v(t)$ を求めるほうが簡潔だと思います. 初期条件が1つしかないときは, グラフによる処理で何も問題ありません.

4.3.2 一般解の決定—初期条件が2つある時

単振動の一般解が有用であるときは, 初期条件が2つある場合です. つまり, $t = 0$ で初期位置と初速度がある場合です. この場合, グラフを書こうとしても振幅がどこまで動くか分からないため, グラフから $x(t)$

を決定することが難しいです。こういった時には、一般解を用いて $x(t)$, $v(t)$ を決定する必要があります。鉛直バネの単振動で、初期条件を2つ課してみましょう。

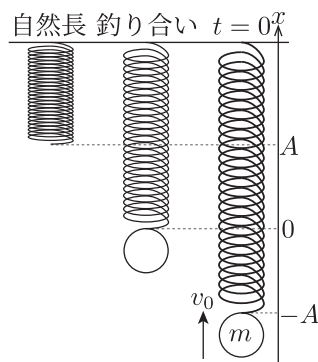


Fig.31 初期位置と初速度, 2つの初期条件の鉛直バネの単振動

同様に一般解と初期条件を用いて運動を決定します。

$t = 0$ における初期条件は, $x(0) = -A$, $v(0) = v_0$. この初期条件を単振動の一般解に代入すると,

$$x(0) = C + 0 + 0 = -A, \quad (4.49)$$

$$v(0) = 0 + D\omega = v_0. \quad (4.50)$$

(4.49), (4.50) より,

$$C = -A, \quad (4.51)$$

$$D = \frac{v_0}{\omega}. \quad (4.52)$$

従って, $x(t)$, $v(t)$ は,

$$x(t) = -A \cos \omega t + \frac{v_0}{\omega} \sin \omega t, \quad (4.53)$$

$$v(t) = A\omega \sin \omega t + v_0 \cos \omega t. \quad (4.54)$$

このように, 初期条件が2つあると $x(t)$, $v(t)$ は \sin 関数と \cos 関数の重ね合わせになります。関数形としては複雑です。

このように, 運動を決定することはできましたが, あまりありがたい形ではないと思います。この関数形だと, これらの式を用いてある運動状況の時刻を決定することはほとんどできないからです。

ですが, (4.53) と (4.54) は極めて重要な情報を提示します。三角関数は合成できたことを思い出しましょう。そうすると, この2つの式は以下のように書き換えることができます。

(4.53), (4.54) に対して三角関数の合成を施すと,

$$x(t) = \sqrt{A^2 + \left(\frac{v_0}{\omega}\right)^2} \sin(\omega t + \theta). \quad (4.55)$$

$$v(t) = \sqrt{(A\omega)^2 + v_0^2} \sin(\omega t + \phi). \quad (4.56)$$

ただし、位相 θ, ϕ は以下の式を満たす*23.

$$\tan \theta = -\frac{A\omega}{v_0}, \tan \phi = \frac{v_0}{A\omega}. \quad (4.57)$$

式はスッキリしましたが、 θ, ϕ がついたため、やはり (4.55) や (4.56) を使って時間追跡することは難しいと思います*24. しかし、それぞれの式の係数は極めて重要です. **(4.55) の係数は単振動の振幅を表しています、(4.56) の係数は単振動の速さの最大値を表しています.** ここでは鉛直バネの単振動を考えていたため、 ω を代入して具体的な値を求めてみましょう.

(4.25) より、 $\omega = \sqrt{\frac{g}{A}}$. 単振動の振幅を A' 、速さの最大値を V' とすると、(4.55), (4.56) より、

$$A' = \sqrt{A^2 + \left(\frac{v_0}{\omega}\right)^2} = \sqrt{A^2 + \frac{v_0^2 A}{g}}. \quad (4.58)$$

$$V' = \sqrt{gA + v_0^2}. \quad (4.59)$$

初速度が与えられたため、振幅は A よりも大きくなるのが想像できるはずで、それに伴って速さの最大値も大きくなることは想像がつくと思います. この振幅や速さの最大値は、運動の初期条件から決まってしまうのです*25. この結果は極めて有用で、**振幅や速さの最大値は、運動の初期条件だけで決まってしまうのです.** この初期条件が 2 つある場合の単振動では、振幅や速さの最大値が問題を解く鍵となります.

4.4 単振動のエネルギー変化

単振動の運動を考える時、正弦波だけではなくエネルギーを用いた議論も有効です. Part1 で議論したように、運動の前後のエネルギーに注目し、非保存力の仕事の有無を考えてエネルギーの変化を記述すれば、求めたい物理量にアプローチできるでしょう. この節では、単振動という運動において使える、特別なエネルギーの扱い方を議論します.

4.4.1 単振動エネルギー保存則

具体例として、ここまで扱ってきた鉛直バネを用いましょう. $x = -A$ で初速度ゼロで離された物体の、釣り合いの位置における速さ v_{\max} を、エネルギーの関係式で計算してみたいと思います.

*23 ここで出てくる位相は、三角関数の合成による議論から、 \sin の係数が分母になります. 数学の教科書などを参照してください.

*24 この位相は、物体の初期条件を含むもので、この式を一般解と呼ぶこともあります.

*25 初期条件が変わっても、運動方程式が変化することはありません.

e.g. 鉛直バネの単振動（再々掲）

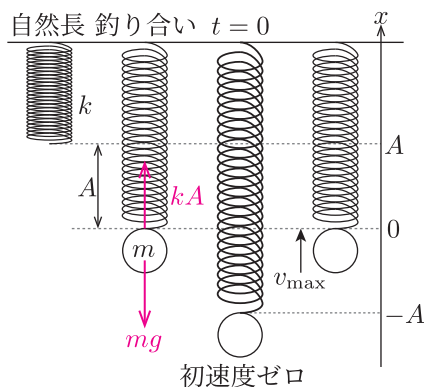


Fig.32 鉛直バネの単振動

この系では、非保存力が働かないので力学的エネルギーは保存します。Part1 で学んだように、運動の前後のエネルギーに注目して、計算してみましょう。働く力は重力と弾性力なので、考えるエネルギーは重力の位置エネルギーと弾性エネルギー、そして運動エネルギーです。弾性エネルギーは自然長からの伸縮で考えることに注意しましょう。

重力の位置エネルギーの基準を、 $x = 0$ とする。力学的エネルギー保存則より、

$$-mgA + \frac{1}{2}k(2A)^2 = \frac{1}{2}mv_{\max}^2 + \frac{1}{2}kA^2, \quad (4.60)$$

$$\frac{1}{2}mv_{\max}^2 = -mgA + \frac{1}{2}k3A^2. \quad (4.61)$$

力の釣り合いから、 $k = \frac{mg}{A}$ より、(4.61) は、

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}mv_{\max}^2 &= \frac{1}{2}mgA, \\ v_{\max} &= \sqrt{gA}. \end{aligned} \quad (4.62)$$

当然ですが、この結果は (4.48) で求めた $v(t)$ の最大値と等しいです。

(4.48) より、

$$v(t) = A\omega \sin \omega t.$$

運動方程式 (4.25) から $\omega = \sqrt{\frac{g}{A}}$ であるので、

$$v(t) = \sqrt{gA} \sin \omega t. \quad (4.63)$$

振動中心で速さが最大になるため、そのときの速さ v_{\max} は、

$$v_{\max} = \sqrt{gA}. \quad (4.64)$$

これまで通り、エネルギーの式が立式できることが確認でき、その結果が運動を表す正弦波と一致することが分かりました。

力学的エネルギー保存則である (4.60) は、もう少し簡便に立式できます。それが単振動のエネルギー保存則 (Conservation of mechanics energy of simple harmonic motion) です。先にその方法を述べてしまうと、**バネの伸縮を釣り合いの位置から考えることで、重力の位置エネルギーを無視できるという立式方法**です。今回は釣り合いの位置が $x = 0$ なので、ここからのバネの伸縮を考えることになります。 $t = 0$ のときのバネの伸びは A 、釣り合いの位置のときはバネの伸縮はゼロであるとみなします。

単振動のエネルギー保存則より、

$$\frac{1}{2}kA^2 = \frac{1}{2}mv_{\max}^2, \quad (4.65)$$

$$v_{\max} = \sqrt{gA}. \quad (4.66)$$

(4.63) と (4.60) を見比べると、単振動のエネルギー保存則はかなり簡潔な式になっていることが分かります。これがこの単振動のエネルギー保存則を用いるメリットです。

4.4.2 単振動のエネルギー保存則の証明

何故釣り合いの位置からバネの伸縮を考えるだけで、重力の位置エネルギーを無視して力学的エネルギー保存則を立式できるのでしょうか。これは、運動方程式にヒントがあります。改めて鉛直バネの単振動における、任意の位置座標における運動方程式を見てみましょう。

任意の位置座標 $x(t)$ における運動方程式は、ばねが自然長から伸びている時、(4.21) を再掲すると、

$$ma = +k(A - x(t)) - mg. \quad (4.67)$$

力の釣り合いの式から、 $kA = mg$ より、

$$ma = -k(x - 0). \quad (4.68)$$

(4.68) を見ると、釣り合いの式から重力の影響が運動方程式から消えていることが分かります。**釣り合いの位置からの変位を考えると、弾性力以外の力の影響が消えるということです。**(4.68) の両辺に速度 v をかけて積分する、エネルギー化の手続を行うと、(4.65) を導くことができます。

(4.68) の加速度 a を、 $a = \frac{dv}{dt}$ と書き換えて、速度 $v = \frac{dx}{dt}$ を両辺にかけると、

$$mv \frac{dv}{dt} = -kx \frac{dx}{dt}, \quad (4.69)$$

$$\int_0^{v_{\max}} mv dv = \int_{-A}^0 -kx dx \quad (4.70)$$

$$\frac{1}{2}mv_{\max}^2 = \frac{1}{2}kA^2. \quad (4.71)$$

(4.65) を導けました。より一般には、以下のような議論になります。

単振動の運動方程式が、一般に以下の式であるとする。

$$ma = -k(x(t) - x_0). \quad (4.72)$$

ここで k はバネ定数, x_0 は振動中心座標 (釣り合いの位置) である. このとき, $x(t) - x_0 = X$ と変数変換すると, 運動方程式は,

$$ma = -kX. \quad (4.73)$$

これは, 釣り合いの位置からの変位を考えることで, 弾性力以外の力を式の中に取り込めることを意味しています. このままエネルギー化の積分をとると, 釣り合いの位置から弾性力の位置エネルギーを考える, 力学的エネルギー保存則を立式できます.

改めてまとめておきましょう.

単振動のエネルギー保存則

単振動において, 釣り合いの位置からの変位で弾性力のエネルギーを考えると, 物体のエネルギーは弾性力以外の力の仕事や, 重力の位置エネルギーを考えることなく, 力学的エネルギー保存則を立式することができる.

この手法の強みは, 上述したように非保存力の仕事も取り込めてしまう点にあります. 以下の具体例を考えてみましょう.

e.g. 粗いベルトコンベア上での単振動

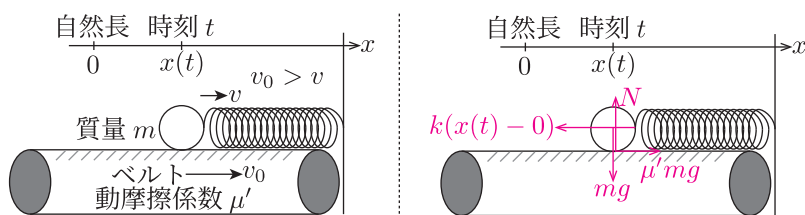


Fig.33 粗いベルトコンベア上での単振動

粗い面上に対する物体の相対速度は, $v - v_0 < 0$ より, 物体は x 軸負方向に運動しているように見える. 従って, 動摩擦力 $\mu'mg$ は x 軸正方向に作用. バネは自然長より縮んでいることに注意すると, 運動方程式は,

$$ma = -k(x(t) - 0) + \mu'mg, \quad (4.74)$$

$$= -k\left(x(t) - \frac{\mu'mg}{k}\right). \quad (4.75)$$

(4.75) より, 振動中心座標 x_0 は, $x_0 = \frac{\mu'mg}{k}$. この位置が釣り合いの位置. $x(t) - \frac{\mu'mg}{k} := X$ と新しく変数変換すると,

$$ma = -kX. \quad (4.76)$$

(4.76) より, 弾性力を釣り合いの位置から考えると, 動摩擦力の仕事を無視できる.

この設定も, もちろん普通に力学的エネルギーと動摩擦力の仕事を考えられてもよいですが, より簡潔なエネルギーの式で議論したいのであれば, 釣り合いの位置から弾性エネルギーを考えることで動摩擦力の仕事を無視できるということです. 計算量を大幅に減らせるため, 積極的に利用できるようになりましょう.

4.5 単振動の議論のまとめ

ここまで単振動の議論を進めてきましたが、質的・量的に重たい分野です*²⁶。それだけ入試でも問われやすいということです。ここまで議論してきたことを、改めてまとめておきます。

単振動の議論

1. まずは任意の位置座標 $x(t)$ において運動方程式の立式。単振動の定義を満たすか確認。角速度 ω 、振動中心座標（釣り合いの位置） x_0 が求まる。伸びでも縮みでも、必ず負符号が現れる運動方程式になる。
2. $x(t)$, $v(t)$ の決定
 - 初期条件が 1 つ → 初期条件に合わせて $x-t$ グラフを書き、 $x(t)$ の決定。 $v(t)$ は微分で求まる。
 - 初期条件が 2 つ → 単振動の一般解に初期条件を代入し、定数 C , D の決定。振幅、速さの最大値を求める。
3. 運動の前後に注目して、エネルギーの変化を議論。
 - 今まで通り、力学的エネルギーと非保存力の仕事に注目。
 - 弾性力のエネルギーを釣り合いの位置から考えて、力学的エネルギー保存で議論。釣り合いの位置から弾性力のエネルギーを考えることで、他のエネルギーや非保存力の仕事を考えなくてよくなる。

問題を解く上では、 $x(t)$, $v(t)$ を求めて時間追跡すること、そしてエネルギーにより議論することの両方が大切です。その上で、運動方程式の立式間違えには最新の注意を払いましょう。みなさんは微分方程式を解くことをしませんが、運動方程式が単振動の定義を満たさないで単振動の議論をするのは、物理学として致命的な誤りと言えるでしょう。これまでの力学の集大成であるため、少しずつでいいので理解を深めていきましょう。

*²⁶ 自然現象のモデルとして、今回学んだ単振動は数多く用いられます。例えば、物質をミクロに見つめると原子同士が並んでいるわけですが、この原子の微小な振動を、原子同士がバネで繋がれていると考えて議論します。また、場の理論の入り口となる、生成消滅演算子による議論も、量子力学における調和振動子系の、ブラケット表示による議論です。『バネは舐めてはいけない』、私が尊敬する物理学者、学習院大学の田崎晴明先生の言葉です。

5 万有引力による運動

1687 年、アイザック・ニュートンの著書『自然哲学の諸原理（プリンピキア）』の中で、万有引力の法則（The law of universal gravitation）が提唱されます。この法則に基づき、太陽系の惑星は太陽を焦点として公転運動をしていることを、ニュートン自体が計算で導いたのです。この節では、万有引力による運動がどのように記述されるのかを議論していきます。万有引力の法則とは、質量をもつ物体同士が、互いに引き合うことを定量的に示した法則です。

5.1 万有引力

5.1.1 万有引力の法則

万有引力の法則

- 距離 r だけ離れた質量 m と M の 2 物体間には、互いに引き合う引力が作用する。その力の大きさ f は、以下の式で表される。

$$f = \frac{GMm}{r^2}. \quad (5.1)$$

ここで、 G は万有引力定数である。

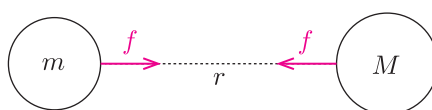


Fig.34 万有引力の法則

- 万有引力は保存力であるため、位置エネルギーが定義される。

$G \sim 6.67 \times 10^{-10} \text{m}^3 \text{kg}^{-1} \text{s}^{-2}$ であるため、机の上の物体同士の万有引力は極めて微弱です。日常で唯一私たちが実感する万有引力は、地球からの重力です。古典力学の議論で何気なく導入された重力の正体は、地球と物体との間の万有引力だったのです。重力加速度 g の値を導いてみましょう。地球の質量を M 、半径を R とします。

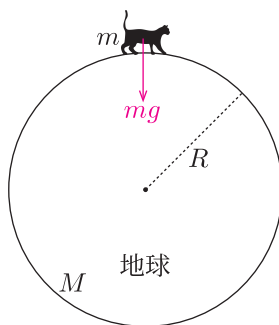


Fig.35 地球から受ける重力

重力の正体が地球との万有引力であったため、

$$mg = \frac{GmM}{R^2}, \quad (5.2)$$

$$g = \frac{GM}{R^2}. \quad (5.3)$$

(5.3) に、地球の半径 $R \sim 6.371 \times 10^6 \text{ m}$ 、地球の質量 $M \sim 5.972 \times 10^{24} \text{ kg}$ 、万有引力定数 $G \sim 6.67 \times 10^{-11} \text{ m}^3\text{kg}^{-1}\text{s}^{-2}$ を代入すると、重力加速度 $g \sim 9.8 \text{ m/s}^2$ が計算されます*27。

この万有引力の最大の特徴は、保存力であるということです。なぜ保存力であるかを示すことは、現状できませんが*28、次節で万有引力による位置エネルギーを、Part1 で議論した位置エネルギーの定義に基づいて求めてみます。

5.1.2 万有引力の位置エネルギー

万有引力が保存力であるという重要な性質を用いると、位置エネルギーを定義できます。万有引力を受ける物体が、 x 軸上で基準位置 $x = r_0$ にいて、 $x = r$ まで外力でゆっくり運ぶ、つまり万有引力と外力を釣り合わせながら運ぶときに、その外力がする仕事が位置エネルギーでした。仕事が経路に依存しないことを上手に利用するわけです。

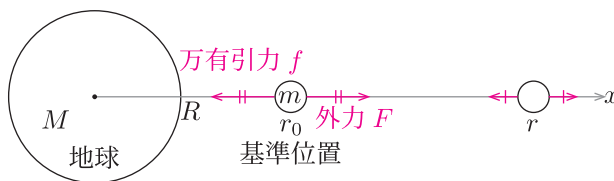


Fig.36 外力で運ばれる物体

しかし、単純に (力) \times (距離) で答えはできません。万有引力が距離に応じて値が変化するためです。このように変動する力の場合には、微小区間での仕事を求めて、最後に総和を取ります。微小区間であれば、力の値は一定とみなしてもよいからです。

*27 この議論は地球の自転を無視しています。正確な議論では、地球上の観測者から重力加速度を求めようとすると、非慣性系ですから地球の自転運動による遠心力の影響を加味する必要があります。

*28 ベクトル場における回転 (Rotation) がゼロ、つまり $\text{rot} \frac{GmM}{r^3} \mathbf{r} = 0$ 、が示されると保存力であることが示せます。

物体を微小距離 dx だけ動かしたときの、外力がした微小な仕事を dW とする。外力は万有引力と釣り合っているため、外力の大きさ F は $F = \frac{GMm}{x^2}$ 。

$$dW = +Fdx, \quad (5.4)$$

$$= +\frac{GMm}{x^2}dx. \quad (5.5)$$

積分範囲は $r_0 \leq x \leq r$ より、

$$W = \int_{r_0}^r \frac{GMm}{x^2} dx, \quad (5.6)$$

$$= \left[-\frac{GMm}{x} \right]_{r_0}^r,$$

$$W = GMm \left(\frac{1}{r_0} - \frac{1}{r} \right). \quad (5.7)$$

(5.7) が、この系における位置エネルギーである。これを $U(r)$ とすると、

$$U(r) := W = GMm \left(\frac{1}{r_0} - \frac{1}{r} \right). \quad (5.8)$$

外力ではなく、保存力による定義でも同じです。保存力がする仕事に負符号をつけるのでした。手を動かしてみてください。

(5.8) をみると、基準位置 r_0 によって値が変化します。もちろんこれでもいいのですが、統一した基準があればより分かりやすいはず。Fig.36 を見ると、基準位置を $x = 0$ にするのが分かりやすいですが、 $r_0 = 0$ を (5.8) に代入すると、位置エネルギーが無限大に発散してしまいます。これでは扱いづらいです。

これらを踏まえると $r_0 \rightarrow \infty$ にすると、 $\frac{1}{r_0} \rightarrow 0$ となるので、(5.8) が簡潔になります。

$r_0 \rightarrow \infty$ とすると、(5.8) は、

$$U(r) = -\frac{GMm}{r}. \quad (5.9)$$

簡潔な位置エネルギーの式となりました。このように、万有引力の問題では、位置エネルギーの基準を無限遠方にすることが多くなります。

万有引力の位置エネルギー

質量 M の地球の中心から距離 r はなれた点にある質量 m の物体が有する万有引力の位置エネルギー $U(r)$ は、

$$U(r) = -\frac{GMm}{r}. \quad (5.10)$$

ただし、位置エネルギーの基準を無限遠方にする。

5.1.3 重力の位置エネルギーと万有引力の位置エネルギーの等価性

質量 m の物体が、地表から h だけ高い所にあるとき、その物体が有する重力の位置エネルギーはこれまで学んだ通り mgh です。この位置エネルギーの値と万有引力の位置エネルギーは等価なのでしょう。両者の値を比較してみましょう。比較にあたって、両方の位置エネルギーの基準を揃える必要があります。

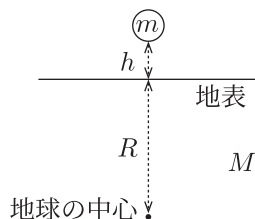


Fig.37 地表面より高いところにある物体

重力 mg による位置エネルギー U_{mg} は、地表を基準にすると、

$$U_{mg} = mgh. \quad (5.11)$$

一方、地球との万有引力による位置エネルギー U は、同様に地表を基準 ($r = R$) にすると、(5.8) より、

$$U = GMm \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R+h} \right), \quad (5.12)$$

$$= GMm \left\{ \frac{1}{R} - \frac{1}{R(1 + \frac{h}{R})} \right\},$$

$$= GMm \left\{ \frac{1}{R} - \frac{1}{R} \left(1 + \frac{h}{R} \right)^{-1} \right\}. \quad (5.13)$$

地球の半径 R と地表からの高さ h は、 $R \gg h$ となるため、 Δ を微少量としたときに成立する近似式、 $(1 + \Delta)^\alpha \sim 1 + \alpha\Delta$ を (5.13) に適用すると*29、

$$U \sim GMm \left\{ \frac{1}{R} - \frac{1}{R} \left(1 - \frac{h}{R} \right) \right\} = \frac{GMmh}{R^2}. \quad (5.14)$$

ここで、(5.3) ($GM = gR^2$) を (5.14) に利用すると、

$$U = mgh = U_{mg}. \quad (5.15)$$

議論の途中で近似を用いたので、重力 mg による位置エネルギーは、地球の半径の大きさに比べて十分に小さな地表からの高さに限り、万有引力の位置エネルギーと等価であるということが分かります。具体的には、 $R \gg h$ においては位置エネルギーの式 mgh は正しいということです。実際のところ、**地表面付近での力学を考える場合は mgh を用いてもよいですが、天体や衛星の運動といったスケールの大きな問題では、万有引力の位置エネルギーを用いる必要があるということです。**

5.1.4 第1宇宙速度

地球の周りを回る人工衛星は、地球から万有引力を受けています。この万有引力が向心力となり、人工衛星は地球上空を円運動します。万有引力は中心力なので角運動量が保存し、円運動は等速です。

特に、地表ギリギリを等速円運動する場合を考えましょう。地表ギリギリというのは、地球の半径 R で人工衛星が等速円運動すると考えてよいでしょう。このときの人工衛星の速さ V_1 を、第1宇宙速度 (First cosmic velocity) と呼びます。人工衛星の質量を m として、これを計算で求めてみましょう。

*29 物理学で頻繁に登場する近似式で、正確にはテイラー展開 (Taylor expansion) と呼びます。無理関数や三角関数といった特殊な関数を、多項式に近似する方法です。

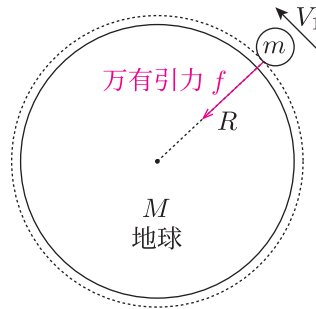


Fig.38 第1宇宙速度で等速円運動する人工衛星

人工衛星の運動方程式は,

$$m \frac{V_1^2}{R} = f = \frac{GMm}{R^2}, \quad (5.16)$$

$$V_1 = \sqrt{\frac{GM}{R}}. \quad (5.17)$$

5.1.5 第2宇宙速度

地球からロケットを打ち上げ、ロケットが地球の万有引力を振り切り、無限遠方まで到達するための最小の速さを第2宇宙速度 (Second cosmic velocity) と呼びます. 空気抵抗は無視して考えるため、ロケットに働く力は地球からの万有引力のみであるとします. ロケットの質量を m として、この第2宇宙速度を計算で求めてみましょう*30. 無限遠方に到達したということは、無限遠方で何かしらの速さがあるということです. 初速 V で地球から打ち上げ、無限遠方で速さ V_∞ を有するとしましょう. 万有引力のみを受けるため、力学的エネルギーは保存します.

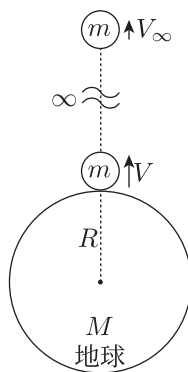


Fig.39 地球から打ち上げるロケット

*30 第2宇宙速度は地球の万有引力を振り払うために必要な初速ですが、太陽系から脱出するために必要な初速を第3宇宙速度 (Third cosmic velocity) と呼びます.

万有引力の位置エネルギーの基準を無限遠方にする．運動の前後における力学的エネルギー保存則は，

$$\frac{1}{2}mV^2 - \frac{GMm}{R} = \frac{1}{2}mV_\infty^2 + 0. \quad (5.18)$$

運動エネルギーは必ず正の値になるため，

$$\frac{1}{2}mV_\infty^2 = \frac{1}{2}mV^2 - \frac{GMm}{R} \geq 0, \quad (5.19)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}mV^2 &\geq \frac{GMm}{R}, \\ V &\geq \sqrt{\frac{2GM}{R}}. \end{aligned} \quad (5.20)$$

無限遠方に到達する最小の速さが第 2 宇宙速度 V_2 なので，

$$V_2 = \sqrt{\frac{2GM}{R}}. \quad (5.21)$$

5.2 ケプラーの 3 法則

1609 年と 1619 年，ヨハネス・ケプラー（Johannes Kepler）は，太陽系の惑星の運動についての研究結果をケプラーの 3 法則としてまとめました．これは，膨大な火星の観測データを集めて考察することで主張された経験則でした．従って，理論的な説明や導出はされないままでした．しかし，ニュートンが 1687 年の『自然哲学の数学的諸原理』の中で，ケプラーの 3 法則をニュートンが主張した運動の 3 法則と万有引力を用いて初めて説明しました^{*31}．この節では，ケプラーの 3 法則を紹介し，第 2，第 3 法則についてはこれまで議論した古典力学の手法を用いて導出します．

5.2.1 ケプラーの第 1 法則

ケプラー火星の膨大な観測データから，太陽系の惑星の軌道を突き止めました．

ケプラーの第 1 法則

太陽系の惑星は，太陽を焦点として楕円軌道を描く．

数学的な証明は，大学初年級の力学で学ぶと思います（受験数学の知識でも説明できますが，数学的に込み入ります）．この第 1 法則はさらに拡張され，**中心力のみを受ける物体は，その軌道が 2 次曲線になり，離心率に応じてどんな曲線になるかが決まる**，というものになりました．2 次曲線とは，円，楕円，放物線，双曲線のいずれかで，全て円錐の断面図で表現される陰関数です^{*32}．ニュートンは，自身の提唱した古典力学の理論で，これを導いたのです．

^{*31} ニュートンが『自然哲学の数学的諸原理』を発表した時，ケプラーはもう亡くなっていました．

^{*32} 離心率 e の値で陰関数の種類は決まります． $e < 1$ は楕円， $e = 0$ は円， $e = 1$ は放物線， $e > 1$ は双曲線，となります．

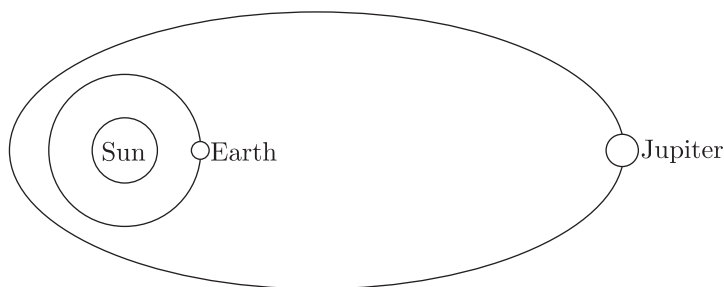


Fig.40 地球と木星の軌道. 地球は太陽系ではほぼ円軌道となる. 太陽は全ての惑星の軌道の焦点.

5.2.2 ケプラーの第2法則

万有引力は中心力なので、公転運動をする太陽系の惑星は、どの運動途中であっても角運動量が保存します. これを書き換えたのが、面積速度保存則 (Conservation of areal velocity) です.

ケプラーの第2法則

楕円運動をする惑星が、焦点と惑星を結んだ線分の長さ r と、速さ v の速度で形作られる三角形の面積 S の大きさは、同じ楕円軌道上では一定値をとる. このことを面積速度保存則と呼ぶ.

$$S := \frac{1}{2} |\mathbf{r} \times \mathbf{v}| = \text{Const.} \quad (5.22)$$

(5.22) の $\mathbf{r} \times \mathbf{v}$ は外積である.

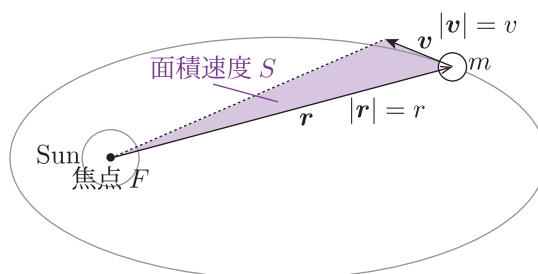


Fig.41 楕円軌道上の面積速度

面積速度とは、惑星が単位時間に掃く面積のことを指します. またその名前は、定義から分かる通り、(長さ) × (速さ) なので、単位として m^2/s を持つことに由来します. 単位時間あたりの面積、ということです. 面積速度保存則の証明は、角運動量保存則を用います.

中心力である万有引力のみが惑星に働くため、角運動量が保存する. 角運動量の大きさ l は、

$$l = |\mathbf{r} \times m\mathbf{v}| = m|\mathbf{r} \times \mathbf{v}|, \quad (5.23)$$

$$|\mathbf{r} \times \mathbf{v}| = \frac{l}{m} = \text{Const.} \quad (5.24)$$

(5.22) より, 面積速度は,

$$S = \frac{1}{2} |\mathbf{r} \times \mathbf{v}| = \frac{l}{2m} = \text{Const.} \quad (5.25)$$

角運動量が保存する限り, S は保存する.

つまり, 面積速度保存則と角運動量保存則は同値な物理法則です. 惑星の運動を計算する際に, どちらを用いても構わないということです.

特に, 焦点から一番遠い点を遠日点, 近い点を近日点と呼び, このときの速さの関係を, 面積速度保存則から求めることができます. 遠日点での速さを V , 近日点の速さを v としましょう. 楕円の焦点から, 遠日点までの距離を r_+ , 近日点までの距離を r_- とします.

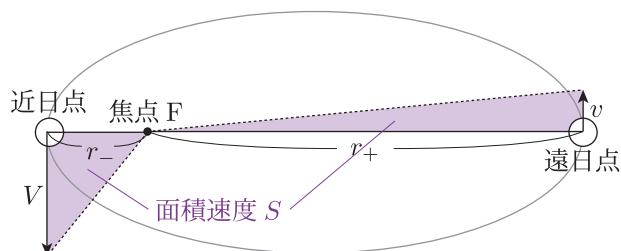


Fig.42 遠日点と近日点での速さ

近日点と遠日点で面積速度保存則より,

$$\frac{1}{2} r_- V = \frac{1}{2} r_+ v, \quad (5.26)$$

$$V = \frac{r_+}{r_-} v. \quad (5.27)$$

面積速度保存則より, 焦点からの距離が一番近い近日点で惑星の速さは最大になるということです. ケプラーは, こうした事実を観測データから読み取っており, ケプラーの第2法則の主張へ繋がっていったと言われています.

5.2.3 ケプラーの第3法則

太陽系を公転運動する惑星の, 周期と楕円軌道の長軸の間に数学的な関係があることを主張するのが, ケプラーの第3法則です.

ケプラーの第3法則

太陽系の惑星の, 公転周期を T , 楕円軌道の長軸を a とする. これらの間には以下に示す関係が成立する.

$$T^2 = k a^3. \quad (k: \text{比例定数}) \quad (5.28)$$

この比例定数 k は, 太陽系の惑星なら全て同じ値をとる.

まずはこの法則を, 地球で確認してみましょう.

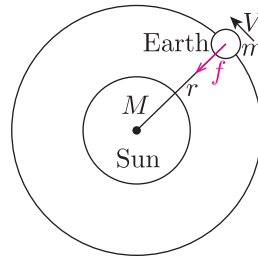


Fig.43 太陽の周りを等速円運動する地球

円運動の運動方程式より,

$$m \frac{V^2}{r} = \frac{GMm}{r^2}, \quad (5.29)$$

$$V = \sqrt{\frac{GM}{r}}. \quad (5.30)$$

公転周期 T は,

$$T = \frac{2\pi r}{V} = 2\pi \sqrt{\frac{r^3}{GM}}, \quad (5.31)$$

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{GM} r^3. \quad (5.32)$$

比例定数 k は,

$$k = \frac{4\pi^2}{GM}. \quad (5.33)$$

周期の自乗と半径の3乗に比例関係があることが確認できました。では、楕円軌道上を運動する惑星について、このケプラーの3法則が成立するかを議論します^{*33}。楕円軌道を、以下の図のように設定します。F, F' は楕円の焦点です。

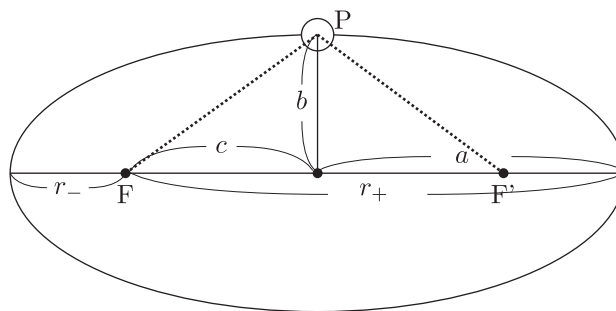


Fig.44 楕円軌道で運動する惑星

楕円とは、**焦点からの距離の和が常に一定となる軌跡**でした。以下では、ケプラーの第3法則を示すために、楕円の長軸 a と短軸 b 、焦点距離 c を近日点、遠日点距離 r_- 、 r_+ で表します。

^{*33} 以下の議論では、数学的に多少込み入りますが、高校数学の範囲で理解できることです。興味のある人は手を動かしてみましょう。

楕円の定義より、楕円軌道上では焦点からの距離の和がどこでも一定となるため、

$$FP + F'P = r_- + r_+ = 2a. \quad (5.34)$$

P は楕円の単軸上の点であることから、 $FP = F'P$ より、

$$FP = F'P = a. \quad (5.35)$$

三平方の定理から、楕円の短軸 b は、

$$b = \sqrt{a^2 - c^2}. \quad (5.36)$$

また、楕円の長軸 a は、

$$\begin{aligned} 2a &= r_+ + r_-, \\ a &= \frac{r_+ + r_-}{2}. \end{aligned} \quad (5.37)$$

また焦点距離 c は、

$$c = a - r_- = \frac{r_+ - r_-}{2}. \quad (5.38)$$

(5.37), (5.38) を (5.36) に代入すると、

$$\begin{aligned} b &= \sqrt{\left(\frac{r_+ + r_-}{2}\right)^2 - \left(\frac{r_+ - r_-}{2}\right)^2}, \\ &= \sqrt{r_+ r_-}. \end{aligned} \quad (5.39)$$

これらの情報を用いて、楕円軌道の周期 T を計算してみます。議論のスタートは、近日点と遠日点でのエネルギー保存則と面積速度保存則です。

楕円軌道上を運動する惑星のエネルギーを E 、遠日点での速さを V 、近日点での速さを v とする。近日点と遠日点でのエネルギー保存則より、

$$E = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{GMm}{r_-} = \frac{1}{2}mV^2 - \frac{GMm}{r_+}. \quad (5.40)$$

面積速度を h とする。面積速度保存則から、

$$S = \frac{1}{2}r_-v = \frac{1}{2}r_+V. \quad (5.41)$$

v , V を h を用いて消去すると、

$$v = \frac{2}{r_-}S, \quad V = \frac{2}{r_+}S. \quad (5.42)$$

(5.42) を (5.40) に代入すると、

$$E = \frac{2mS^2}{r_-^2} - \frac{GMm}{r_-} = \frac{2mS^2}{r_+^2} - \frac{GMm}{r_+}. \quad (5.43)$$

2 次方程式を 2 つ作ると、

$$Er_-^2 - r_-GMm - 2mS^2 = 0, \quad (5.44)$$

$$Er_+^2 - r_+GMm - 2mS^2 = 0. \quad (5.45)$$

(5.44), (5.45) の 2 次方程式の解が r_- , r_+ であるということから, 解と係数の関係より,

$$r_- + r_+ = -\frac{GMm}{E}, \quad (5.46)$$

$$r_- r_+ = -\frac{2mS^2}{E}. \quad (5.47)$$

(5.37) を (5.46) に, (5.39) を (5.47) に用いると,

$$a = -\frac{GMm}{2E}, \quad (5.48)$$

$$b = \sqrt{-\frac{2m}{E}} S. \quad (5.49)$$

(5.48), (5.49) より E を消去すると,

$$b = 2S\sqrt{\frac{a}{GM}}. \quad (5.50)$$

また, 面積速度 S は単位時間で惑星が掃く面積であることから, 楕円の面積 πab であることより,

$$S = \frac{\pi ab}{T}. \quad (5.51)$$

(5.50) を (5.51) に代入すると,

$$\begin{aligned} T &= \frac{\pi a}{S} 2S\sqrt{\frac{a}{GM}}, \\ T^2 &= \frac{4\pi^2}{GM} a^3. \end{aligned} \quad (5.52)$$

円軌道の場合の比例定数 k と同じになることが分かりました. (5.49) で根号中に負符号があるのが気持ち悪いかもしれませんが, E は負の値なので問題ないのです. 惑星のもつエネルギーが負であることが, 実は惑星が楕円軌道になることの鍵となるのですが, ここでは立ち入らないことにします.

ケプラーが実験事実から提唱した法則を, ニュートンが数学を用いて厳密に示した太陽系の惑星の運動は, 自然科学の大きなブレイクスルーでした. 今からおよそ 300 年以上前の物語です. 人間が行った営みの 1 つを, 私たちは追体験しているに過ぎないのです. ここから古典力学は, その数学的な背景を深く調べられ, 1700 年代後期には解析力学へと繋がり, 現代物理学の根幹である量子力学, 場の理論へと繋がっていきます.