基礎力養成トレーニング集—熱力学

野口　駿

2025

テキストの内容と表記上の注意

このテキストは，受験における古典物理学の基礎力を養成する立式トレーニング集です．物理法則を正しく使えるようになることを目的に編成しています．ベクトル表示は，$\vec{a}$ ではなく，$\boldsymbol{a}$ とボールドイタリック体で表記しています．

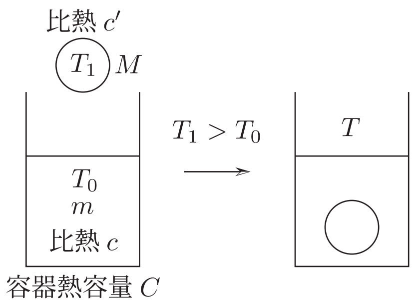
目次

1　熱量保存則

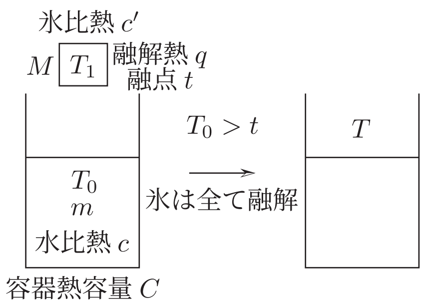
1.1　熱量保存則の立式

Ex. 以下の図において，熱量保存則を立式せよ．

(1)



(2)



1.1 の解答

(1)　熱量保存則より，

$\underline{\underline{0 = C(T - T_0) + cm(T - T_0) + c'M(T - T_1)}}$.

(2)　熱量保存則より，

$\underline{\underline{0 = C(T - T_0) + cm(T - T_0) + c'M(t - T_1)}}$

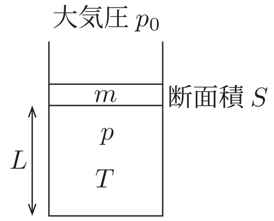
$\underline{\underline{+qM + cM(T - t)}}$.

2 理想気体の記述

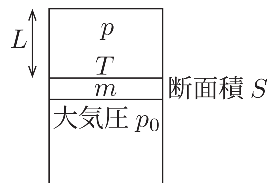
2.1 気体の状態

Ex. 以下の図において，力の釣り合いの式と気体の状態方程式を立式せよ．気体は理想気体であるとする．気体の物質量は全て n で，気体定数は R，重力加速度の大きさを g とする．

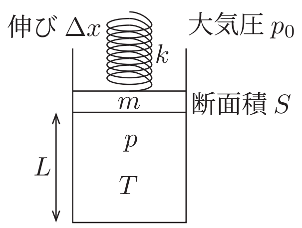
(1)



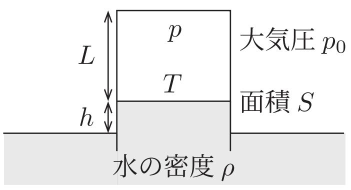
(2)



(3)



(4)



2.1 の解答

以下鉛直上向を正とする.
(1)　ピストンの力の釣り合いの式より,
$\underline{\underline{0 = pS - mg - p_0 S}}.$
状態方程式より,
$\underline{\underline{pSL = nRT.}}$

(2)　ピストンの力の釣り合いの式より,
$\underline{\underline{0 = p_0 S - mg - pS}}.$
状態方程式より,
$\underline{\underline{pSL = nRT}}.$

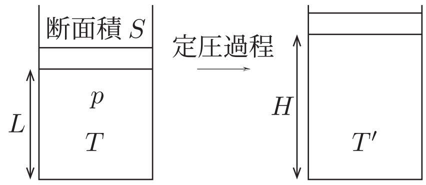
(3)　ピストンの力の釣り合いの式より,
$\underline{\underline{0 = pS + k\Delta x - mg - p_0 S}}.$
状態方程式より,
$\underline{\underline{pSL = nRT}}.$

(4)　容器の水面の力の釣り合いの式より,
$\underline{\underline{0 = (p_0 + \rho gh)S - pS}}.$
状態方程式より,
$\underline{\underline{pSL = nRT}}.$

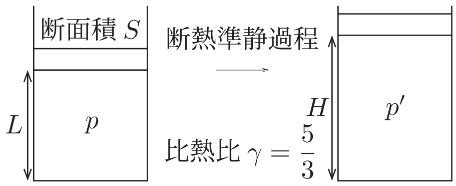
2.2　理想気体の変化

Ex. 以下の図において，気体の変化に関する方程式を立式せよ．気体は理想気体であるとする．

(1)

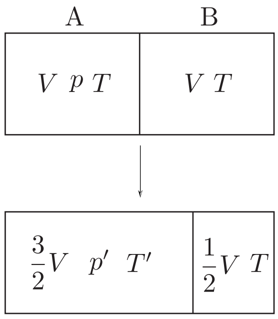


(2)



(3)　A と B のそれぞれの気体について立式せよ．その結果から p' と T' を p と T を用いて表せ．

なめらかに動くピストン



2.2 の解答

(1)　ボイル・シャルルの法則より，
$\dfrac{pSL}{T} = \dfrac{pSH}{T'}$.

(2)　ポアソンの法則より，
$p(SL)^{\frac{5}{3}} = p'(SH)^{\frac{5}{3}}$.

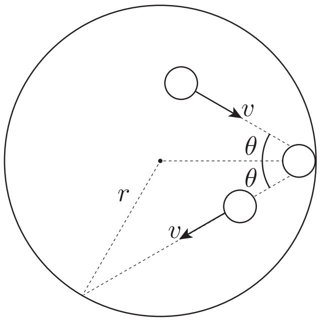
(3)　A について，ボイル・シャルルの法則より，
$\dfrac{pV}{T} = \dfrac{3p'V}{2T'}$.
B について，ボイル・シャルルの法則より，
$\dfrac{pV}{T} = \dfrac{p'V}{2T}$.
以上の結果から，$\underline{\underline{p' = 2p}}$，$\underline{\underline{T' = 3T}}$.

3　気体分子運動論

3.1　気体分子のミクロな運動

Ex. 以下の問いに答えよ．ただし，気体分子の質量は m で，単原子分子理想気体であるとする．気体定数を R，アボガドロ定数を N_{A}，容器内の温度を T とする．気体分子と容器の衝突は全て弾性衝突であるとせよ．

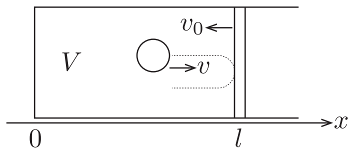
(1)　(a) から (g) に適する数式を入れよ．



気体分子 1 つが，半径 r の球形容器に角度 θ で衝突したとき，1 回の衝突で容器が受ける力積の大きさは (a)．時間 Δt で気体分子が球形容器に衝突する回数は (b)．したがって，時間 Δt の間で，1 つの気体分子から球形容器が受けた力の平均値は (c)．

気体分子の総数を N として，分子の速さの 2 乗平均を $\overline{v^2}$ とする．これらの結果から気体分子の圧力は (d)．理想気体の状態方程式は (e)．この結果から，総分子数 N の気体分子が有する平均運動エネルギーは (f)．気体分子の物質量 n は (g) なので，これを (f) に代入すると，(h) が得られる．これを理想気体の内部エネルギーと呼ぶ．

(2)　(a) から (g) に適する数式を入れよ．



気体分子が x 方向に速さ v で運動しているとする．ピストンを x 負方向に速さ v_0 の一定の速度で動かした時，ピストンと衝突したあとの気体分子 1 つの x 方向の速度は (a) となる．v_0 は v に比べて十分小さいとして，v_0^2 の項を無視すると，x 方向の速さの 2 乗は 1 回の衝突で (b) だけ増加する．

ピストンの移動距離を Δl とする．Δl は l に比べて十分小さいため，気体分子がピストンと衝突するために必要な移動距離は $2l$ と考えて良く，v_0 は v に比べて十分小さいため，気体分子の速さは衝突による変化を考えなくても良いとする．ピストンが Δl 移動する間にこの分子がピストンと衝突する回数は，近似的に (c) である．この衝突回数によって気体分子の運動エネルギーの増加分は (d) である．

分子が得た (d) の運動エネルギーは，他の分子との衝突によりエネルギーを各軸方向の運動に受け渡すと考えられる．ここで，全分子に対して各軸方向の速さの 2 乗の平均を取り，それらの増加分を $\overline{\Delta v_x^2}$，$\overline{\Delta v_y^2}$，$\overline{\Delta v_z^2}$ とする．エネルギー等分配則より $\overline{\Delta v_x^2} = \overline{\Delta v_y^2} = \overline{\Delta v_z^2}$．したがって，各軸方向の運動エネルギーの増加量は (e) である．ボルツマン定数を k とすると，衝突前の気体分子の運動エネルギー $\dfrac{1}{2}m\overline{v^2}$ は，温度 T を用いると (f) であるため，上昇温度は (g) である．

3.1 の解答

(1)

(a)　右方向を正とする．気体分子が受ける力積を i とする．撃力作用線の方向において，気体分子の運動量と力積の関係より，
$mv\cos\theta + i = -mv\cos\theta$，より，$i = -2mv\cos\theta$.
容器が受ける力積 I は，作用・反作用の法則より，
$\underline{\underline{I = 2mv\cos\theta}}$.

(b)　次の衝突までに気体分子が移動する距離は，$2r\cos\theta$. Δt の間における衝突回数は，$\underline{\underline{\dfrac{v\Delta t}{2r\cos\theta}}}$.

(c)　容器が時間 Δt で受けた力積の総和は，
$2mv\cos\theta\cdot\dfrac{v\Delta t}{2r\cos\theta} = \dfrac{mv\Delta t}{r}$. 力の平均値は，時間 Δt で割ればいいので，$\underline{\underline{\dfrac{mv^2}{r}}}$.

(d)　N 個の気体分子が容器に及ぼす力の平均値は，
$\dfrac{Nm\overline{v^2}}{r}$. 内壁の面積は，$4\pi r^2$ より，圧力は，
$\dfrac{1}{4\pi r^2}\cdot\dfrac{Nm\overline{v^2}}{r} = \underline{\underline{\dfrac{Nm\overline{v^2}}{4\pi r^3}}}$.

(e)　体積が $\dfrac{4}{3}\pi r^3$ より，状態方程式は，
$\dfrac{Nm\overline{v^2}}{4\pi r^3}\cdot\dfrac{4}{3}\pi r^3 = \dfrac{N}{N_{\mathrm{A}}}RT$.

(f)　N 個の気体分子の平均運動エネルギーは，
$N\dfrac{1}{2}m\overline{v^2} = \underline{\underline{\dfrac{3}{2}\dfrac{N}{N_{\mathrm{A}}}RT}}$.

(g)　$n = \dfrac{N}{N_{\mathrm{A}}}$.

(h)　$N\dfrac{1}{2}m\overline{v^2} = \underline{\underline{\dfrac{3}{2}nRT}}$.

(2)

(a)　衝突後の速度を v_x とする．ピストンは常に一定速度で動いているため，衝突で運動量は保存しない．弾性衝突より，反発係数の式を立式すると，
$1 = -\dfrac{v_x - (-v_0)}{v - (-v_0)}$，$\underline{\underline{v_x = -v - 2v_0}}$.

(b)　増加速度を Δv とする．
$\Delta v^2 = v_x^2 = v^2 + 4vv_0 + 4v_0^2$,
$v_x^2 - v^2 = 4vv_0 + 4v_0^2 \sim \underline{\underline{4vv_0}}$.

(c)　Δl だけ動くのにかかる時間 をΔt とする．
$\Delta t = \dfrac{\Delta l}{v_0}$. 気体分子の移動距離は近似的に
$v\Delta t = \dfrac{v\Delta l}{v_0}$. 従って衝突回数は，$\dfrac{\frac{v\Delta l}{v_0}}{2l} = \underline{\underline{\dfrac{v_x\Delta l}{2lv_0}}}$.

(d)　Δt の間に増加した気体分子の運動エネルギーは，
$\dfrac{1}{2}m\Delta v^2 = \dfrac{1}{2}m\dfrac{v_x\Delta l}{2lv_0}4vv_0 = \underline{\underline{m\dfrac{\Delta l}{l}}}v^2$.

(e)　エネルギー等分配則より，
$\dfrac{1}{2}m\Delta v^2 = \dfrac{1}{2}m\overline{\Delta v_x^2} + \dfrac{1}{2}m\overline{\Delta v_y^2} + \dfrac{1}{2}m\overline{\Delta v_z^2}$.
x 軸方向の運動エネルギーに注目すると，
$\dfrac{1}{2}m\Delta v^2 = \dfrac{3}{2}m\overline{\Delta v_x^2}$,
$\dfrac{1}{2}m\overline{\Delta v_x^2} = \dfrac{1}{3}\dfrac{1}{2}m\Delta v^2 = \underline{\underline{m\dfrac{\Delta l}{3l}}}v^2$.

(f)　衝突前の気体分子の運動エネルギーと温度の関係は，
$\dfrac{1}{2}m\overline{v^2} = \underline{\underline{\dfrac{3}{2}kT}}$.

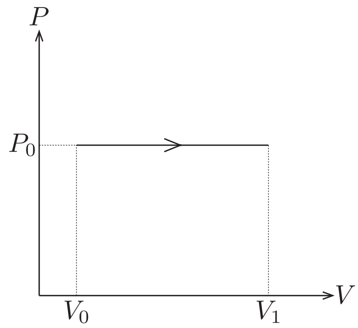
(g)　$\dfrac{1}{2}m\overline{\Delta v_x^2} = \dfrac{3}{2}k\Delta T$，より，
$\Delta T = \underline{\underline{\dfrac{2\Delta l}{3l}T}}$.

4　熱力学第 1 法則

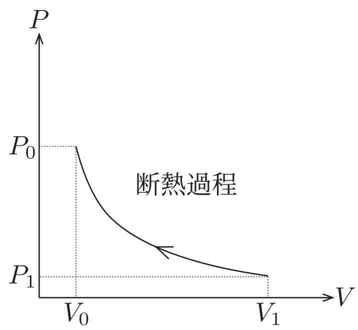
4.1　$P-V$ サイクル

Ex. 以下の $P-V$ サイクルの過程について，次の問いに答えよ．ただし，気体は単原子分子理想気体であるとする．気体定数を R とせよ．

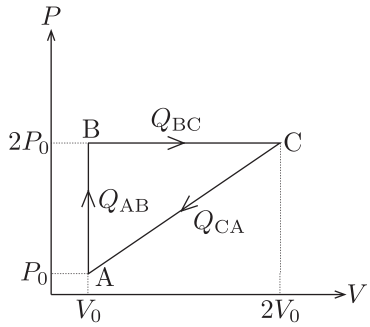
(1)　気体がする仕事 w，外部からされた仕事 W，内部エネルギー変化 ΔU，加えられた熱量 Q を求めよ．



(2)　気体がする仕事 w，外部からされた仕事 W，内部エネルギー変化 ΔU.



(3)　各過程で加えられた熱量 Q_{AB}，Q_{BC}，Q_{CD}. 熱効率 e.



4.1 の解答

以下封入された気体の物質量を n，気体定数を R とする．

(1)　気体がする仕事とは，ピストンが封入された気体の圧力で押されるときの仕事である．

$\underline{\underline{w = +P_0(V_1 - V_0)}}$.

外力がする仕事とは，ピストンが外部から押されるときの仕事である．

$W = -w$ より，$\underline{\underline{w = +P_0(V_1 - V_0)}}$.

温度変化を ΔT とすると，

$\Delta U = \dfrac{3}{2}nR\Delta T$.

定圧変化における状態方程式は，

$P_0(V_1 - V_0) = nR\Delta T$.

$\Delta U = \dfrac{3}{2}P_0(V_1 - V_0)$.

熱力学第 1 法則より，

$\Delta U = Q + W$,

$Q = \Delta U - W = \underline{\underline{\dfrac{5}{2}P_0(V_1 - V_0)}}$.

(2)　始状態と終状態の温度をそれぞれ T_1 と T_0 とすると，状態方程式より，

$P_1V_1 = nRT_1$,

$P_0V_0 = nRT_0$.

$\Delta U = \dfrac{3}{2}nT(T_0 - T_1) = \underline{\underline{\dfrac{3}{2}(P_0V_0 - P_1V_1)}}$.

断熱過程より，加えられた熱量はゼロ．熱力学第 1 法則より，

$\Delta U = W$，$W = \underline{\underline{\dfrac{3}{2}(P_0V_0 - P_1V_1)}}$.

$w = -W$ より，$w = \underline{\underline{-\dfrac{3}{2}(P_0V_0 - P_1V_1)}}$.

(3)　以下仕事は『外部からされる仕事』W で考える．A→B について，

$W_{\mathrm{AB}} = 0$，$\Delta U_{\mathrm{AB}} = \dfrac{3}{2}(2P_0 - P_0)V_0$.

熱力学第 1 法則より，

$\Delta U_{\mathrm{AB}} = W_{\mathrm{AB}} + Q_{\mathrm{AB}}$,

$Q_{\mathrm{AB}} = \Delta U_{\mathrm{AB}} = \underline{\underline{\dfrac{3}{2}P_0V_0}}$.

B→C について，

$W_{\mathrm{BC}} = -2P_0(2V_0 - V_0)$,

$\Delta U_{\mathrm{AB}} = \dfrac{3}{2}2P_0(2V_0 - V_0)$.

熱力学第 1 法則より，

$\Delta U_{\mathrm{BC}} = W_{\mathrm{BC}} + Q_{\mathrm{BC}}$,

$Q_{\mathrm{BC}} = \Delta U_{\mathrm{BC}} - W_{\mathrm{BC}} = \underline{\underline{5P_0V_0}}$.

C→A について，

仕事の大きさは $P - V$ グラフの面積なので，

$W_{\mathrm{BC}} = +\dfrac{1}{2}(P_0 + 2P_0)(2V_0 - V_0)$.

C，A の温度を T_{A}，T_{B} とする．それぞれの状態方程式は,

$2P_02V_0 = nRT_{\mathrm{C}}$,

$P_0V_0 = nRT_{\mathrm{A}}$.

$\Delta U_{\mathrm{AB}} = \dfrac{3}{2}nR(T_{\mathrm{A}} - T_{\mathrm{C}}) = \dfrac{3}{2}(P_0V_0 - 2P_02V_0)$.

熱力学第 1 法則より，

$\Delta U_{\mathrm{CA}} = W_{\mathrm{CA}} + Q_{\mathrm{CA}}$,

$Q_{\mathrm{CA}} = \Delta U_{\mathrm{CA}} - W_{\mathrm{CA}} = \underline{\underline{-6P_0V_0}}$.

放熱過程は C→A. 正味の仕事 w_n は,

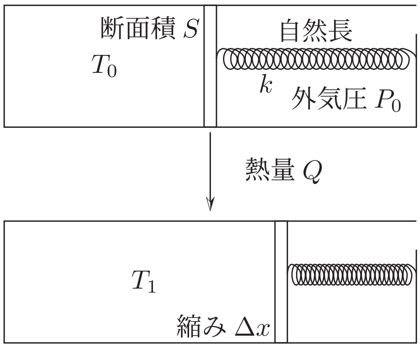
$w_n = 0 + 2P_0V_0 - \dfrac{3}{2}P_0V_0 = \dfrac{1}{2}P_0V_0$.

$e = \dfrac{w_n}{Q_{\mathrm{AB}} + Q_{\mathrm{BC}}} = \dfrac{\frac{1}{2}}{\frac{3}{2} + 5} = \underline{\underline{\dfrac{1}{13}}}$.

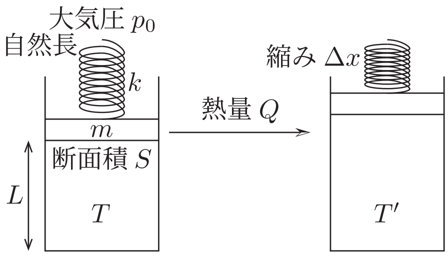
4.2　応用的な熱力学の系

Ex. 以下の図において，系全体のエネルギーのやりとりを立式せよ．封入された気体は理想気体とし，定積モル比熱を C_{V} とする．

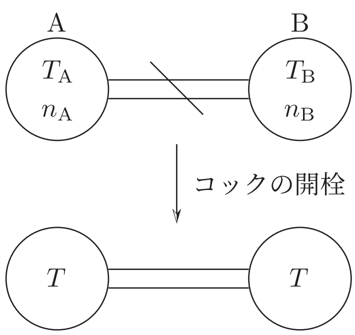
(1)　ピストンは滑らかであるとし，封入された気体の物質量を n とせよ．



(2)　ピストンは滑らかであるととする．重力加速度の大きさを g とする．



(3)　容器は全て断熱材でできているとする．



4.2 の解答

ピストンと気体の 2 体系で分けて考える．
(1)　中の気体の圧力がピストンにする仕事を w とする．ピストンと気体の，それぞれのエネルギーと仕事の関係は，
ピストン : $w - P_0 S\Delta x = \frac{1}{2}k\Delta x^2$,
気体 : $nC_\mathrm{V}T_0 - w + Q = nC_\mathrm{V}T_1$.
和を取ると，
$nC_\mathrm{V}T_0 + Q - P_0 S\Delta x = nC_\mathrm{V}T_1 + \frac{1}{2}k\Delta x^2$.

(2)　中の気体の圧力がピストンにする仕事を w とする．ピストンと気体の，それぞれのエネルギーと仕事の関係は，
ピストン :
$mgL + w - P_0 S\Delta x = \frac{1}{2}k\Delta x^2 + mg(\Delta x + L)$,
気体 : $nC_\mathrm{V}T - w + Q = nC_\mathrm{V}T'$.
和を取ると，
$nC_\mathrm{V}T + mgL + Q - P_0 S\Delta x$
$= nC_\mathrm{V}T' + \frac{1}{2}k\Delta x^2 + mg(L + \Delta x)$.

(3)　容器が断熱材なので，断熱過程．コックの開栓では仕事はない．A，B のそれぞれの熱力学第 1 法則は，
A : $n_\mathrm{A}C_\mathrm{V}T_\mathrm{A} = n_\mathrm{A}C_\mathrm{V}T$,
B : $n_\mathrm{B}C_\mathrm{V}T_\mathrm{B} = n_\mathrm{B}C_\mathrm{V}T$.
和を取ると，
$n_\mathrm{A}C_\mathrm{V}T_\mathrm{A} + n_\mathrm{B}C_\mathrm{V}T_\mathrm{B} = n_\mathrm{A}C_\mathrm{V}T + n_\mathrm{B}C_\mathrm{V}T$.