<u>Theme: 反射波と定在波</u>

進行波の数式表現ができるようになったら，同様の考えを用いて壁に当たって反射する反射波の波動式も導出できるようになります．そこから入射波と反射波の合成を行うことで，2 つの波の干渉を定量的に記述できるようになりましょう．

演習問題 2

ある媒質中を x 軸正の方向に速さ v で減衰することなく進行する連続波を考える．この波の振幅を A，周期を T とすると，x 軸上の原点 O での媒質の変位は時刻 t の関数として $y = A\sin\dfrac{2\pi}{T}t$ と表される．これを入射波として $x = L$ の位置で固定端反射させる．

(1)　入射波の振動数 f と波長 λ を v と T で表せ.

(2)　$x < L$ における入射波を，x，t の関数として v，T を用いて表せ.

(3)　$x < L$ における反射波を，x，t の関数として v，T を用いて表せ.

(4)　入射波と反射波の合成波を，x，t の関数として v，T を用いて表せ．また，この波の特徴と名称を答えよ.

(5)　$L = \dfrac{5}{4}\lambda$ のとき，(4) の関数の最大振幅のときの波形を $0 \leq x \leq L$ で図示せよ.

詳解

(1)　波の基本式の利用です．

波の周期は，波動式より T．振動数 f は，

$$f = \underline{\underline{\frac{1}{T}}}. \tag{2.1}$$

波の基本式より，

$$\underline{\underline{\lambda = vT}}. \tag{2.2}$$

(2)　波動式の導出は，求めたい波動式 $y(x,t)$ の『過去を考えること』がポイントでした．1 波長に注目して，波形の進行についての概念図を書きましょう．

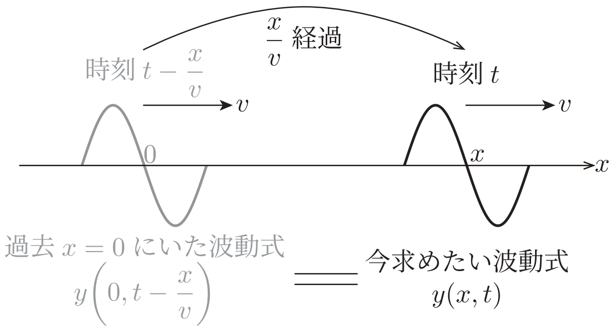

Fig.1　求めたい波動式 $y(x,t)$ と原点での波動式の関係

求めたい入射波の波動式を $y(x,t)$ とする．上図より，求めたい波動式は原点 $x=0$ を時刻 $t-\dfrac{x}{v}$ に通過する．従って，

$$y(x,t) = y\left(0, t-\frac{x}{v}\right), \tag{2.3}$$

$$= \underline{\underline{A\sin\frac{2\pi}{T}\left(t-\frac{x}{v}\right)}}. \tag{2.4}$$

(3)　『過去を考える』という方針は，反射波の波動式の導出でも同じです．$x=L$ の壁に当たって反射した波は，過去のいつの時刻，原点 $x=0$ を通過した入射波なのかを考えましょう．**反射が固定端反射なので，入射波と反射波の位相は π だけずれていることに注意しましょう．**

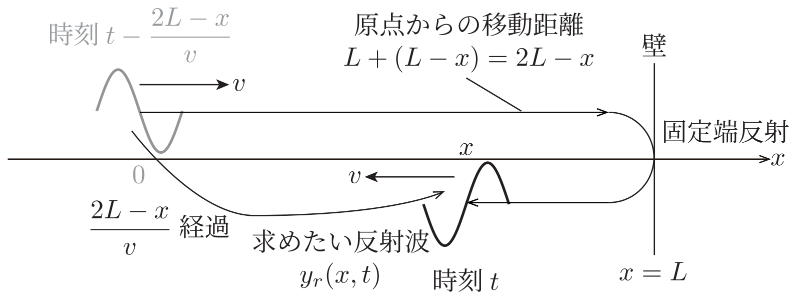

Fig.2　求めたい反射波の波動式 $y_r(x,t)$ と原点での波動式の関係

求めたい反射波の波動式を $y_r(x,t)$ とする．反射波は $x=L$ の壁に当たって位置 x にいるため，原点からの総移動距離は $2L-x$．上図より，求めたい反射波の波動式は原点 $x=0$ を時刻 $t-\dfrac{2L-x}{v}$ に通過する．反射が固定端反射であることに注意すると，入射波と位相が π だけずれているため，

$$y_r(x,t) = A\sin\frac{2\pi}{T}\left(t-\frac{2L-x}{v}+\pi\right), \tag{2.5}$$

$$= \underline{\underline{-A\sin\frac{2\pi}{T}\left(t-\frac{2L-x}{v}\right)}}. \tag{2.6}$$

最後の式変形では，$\sin(\theta+\pi) = -\sin\theta$ を利用しました．固定端反射における反射波の作図で，入射波の変位をひっくり返して壁に対して折り返す作業をすると思いますが，これは三角関数の位相が π ずれると符号が反転することを意味していたのです．

(4)　(2)，(3) で求めた入射波と反射波を和積の式を用いて合成します．和積の公式は覚えるものでもないので，まずは導出から始めましょう[*1]．

任意の位相を α，β として，次の 2 つの sin 関数を考える．

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \sin\beta\cos\alpha, \tag{2.7}$$

$$\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos\beta - \sin\beta\cos\alpha. \tag{2.8}$$

入射波 $y(x,t)$ と $y_r(x,t)$ の和を考えたいが，2 つの波動式の符号はずれているため，(2.7) と (2.8) を引くと，

$$\sin(\alpha+\beta) - \sin(\alpha-\beta) = 2\sin\beta\cos\alpha. \tag{2.9}$$

ここで，$\alpha+\beta := C$，$\alpha-\beta := D$ とすると，

$$\alpha = \frac{C+D}{2}, \tag{2.10}$$

$$\beta = \frac{C-D}{2}. \tag{2.11}$$

これを (1.7) に代入すると，

$$\sin C + \sin D = 2\sin\frac{C-D}{2}\cos\frac{C+D}{2}. \tag{2.12}$$

[*1] 当たり前ですが，和積の導出を本番の入試の解答欄に書く必要はありません．

求める合成波を $Y(x,t)$ とする．

$$Y(x,t) = A\sin\frac{2\pi}{T}\left(t-\frac{x}{v}\right) - A\sin\frac{2\pi}{T}\left(t-\frac{2L-x}{v}\right) \tag{2.13}$$

(2.13) を (2.12) に適用すると，

$$Y(x,t) = 2A\sin\frac{2\pi}{T}\frac{1}{2}\left(\frac{2L-2x}{v}\right)\cos\frac{2\pi}{T}\frac{1}{2}\left(2t-\frac{2L}{v}\right), \tag{2.14}$$

$$= \underline{\underline{2A\sin\frac{2\pi}{T}\left(\frac{L-x}{v}\right)\cos\frac{2\pi}{T}\left(t-\frac{L}{v}\right)}}. \tag{2.15}$$

位置の変数 x と時刻 t が分離しているので，この波は定在波．定在波は左右に進行することなく，その場で大きな振動を周期的に繰り返す．

入射波と反射波はそれぞれ同じ振幅，波長，速さであり，それらが逆向きに衝突するため，定在波ができる条件を満たします．**入射波と反射波が登場すると，必ず定在波ができます．**

(5)　最大振幅の時なので，(4) で求めた定在波の波動式の，時刻 t に依存する三角関数のが ±1 になるときの定在波を書けばよいです．

最大振幅の時，定在波の式 $Y(x,t)$ は，$L=\frac{5}{4}\lambda$ であることを考慮すると，

$$Y(x) = \pm 2A\sin\frac{2\pi}{T}\left(\frac{5\lambda}{4v}-\frac{x}{v}\right), \tag{2.16}$$

$$= \pm 2A\sin\frac{2\pi}{T}\left(\frac{5}{4}T-\frac{x}{v}\right), \tag{2.17}$$

$$= \pm 2A\sin 2\pi\left(\frac{5}{4}-\frac{x}{\lambda}\right). \tag{2.18}$$

$x=L=\frac{5}{4}\lambda$ を代入すると，$Y=0$．つまり，壁の位置は定在波の節．節は $\frac{\lambda}{2}$ ずつ並ぶので，$0\le x\le L$ の範囲で定在波を書くと，以下の図になる．

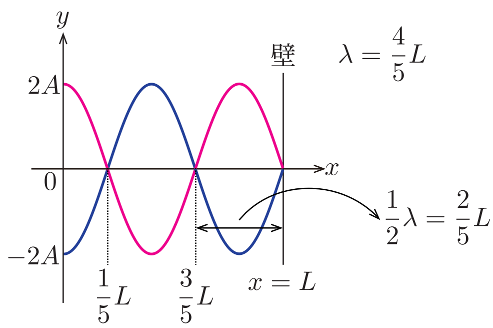

Fig.3　x 軸上にできる定在波の様子

壁では固定端反射のため，位相が π ずれるということから，壁は必ず節になります．定在波は腹か節がどこにできるのかさえ分かれば，あとは同じ構造の繰り返しでグラフを書くことが容易にできます．