19 歳の古典力学
Part1

野口　駿

2025

はじめに

印象派を代表する画家，クロード・モネは，モネが見たその風景と一瞬の時間をキャンバスの中に描き続けました．今なお多くの人間がモネの絵に魅了されるのは，モネがその筆跡に閉じ込めた一瞬の経験全てを，私たちが手に取るように感じることができるからではないでしょうか．

時が経ち，人間は多くのことを理解し，進歩していきました．そして同時に，人間が大切にしてきたものが，変わりゆくようになりました．モネがキャンバスに刻みこもうとした悠久の瞬間は，いつの日か人間にとって当たり前のものとなったのです．

学問を修めることは，人類の歴史の追体験です．法則の背景を理解し，その使い方を学ぶことは，真っ白なキャンバスに筆跡を残すことと等価な営みではないでしょうか．そして，その時々で描かれる瞬間の絵は，みなさんの中で永遠の価値となるのです．モネがあの日あの時，最愛の人を陽光と風の中に閉じ込めた時と，同じように．

“*Color is my day-long obsession, joy and torment.*”
—*Claude Monet*

テキストの内容と表記上の注意

このテキストでは，受験における古典物理学の基礎の内容を，高校生が習う数学を用いて真正面から記述していきます．ベクトル表示は，$\vec{a}$ ではなく，$\boldsymbol{a}$ とボールドイタリック体で表記しています．

目次

Part1
古典力学基礎論

1 古典力学の原理—運動の未来予言—

1.1 古典物理学を学ぶ意義

具体的な力学の議論の前に，これから学ぶ物理学とはどういうものなのかを少しだけ話しておきます．高校三年間で学ぶ物理学（受験で必要な物理）の範疇は，古典物理学 (Classical physics) のほんのさわりです．この『古典』という言葉は，決して『古い』という意味ではありません．物理学では，量子論 (Quantum theory)*1を用いないで記述される物理のことを古典物理学と呼びます．大学入学後も，まずは古典物理学を本格的に学び，量子論を学び始めるのは一通りの古典物理学を修めた後でしょう．

では古典物理学とはどのような性格を帯びているのでしょうか．様々な答え方があるとは思いますが，1 つとして現象の未来を完全に予言することができます．たとえばこれから学ぶ古典力学では，物体の運動は運動方程式と運動の初期条件だけで，原理的には完全に予言ができてしまいます*2．ここで『予言』という言葉を使いましたが，もう少し正確に言うのならば，ある時刻に物体がどんな所にいて，どんな速度を持っているのか，を完全に計算で求めることができるのです*3．

また扱う対象（物理では系（System）と言います）は，私たちが実際に触れること，見ること，聞くことができるくらい，『大きな』（物理ではマクロスケールの系，と言います）系を扱います．古典力学だったら，容器の中を飛び回る気体分子から，太陽系を回るハレー彗星の運動（もちろんもっと大きな系でもいいですが）などを対象とすることができます．

物理学は，自然科学の 1 つです．それは机上の理論だけでなく，実験によって，現象が実際に起こることを確認することができるということです．これまで人類は，数々の実験と考察によって，様々な自然現象の仕組みについて考えてきました．そうして，**実験事実と理論的な要請から体系立てて，自然の中から物理法則を浮かび上がらせてきたのです．**古典物理学は，みなさんが触れることができる身近な現象についての，人類が導き出した結論の 1 つです．結論の正しさは，理論的な側面と，そして自然科学である以上，正しく行われた実験でその結果を再現できることによって担保されます．誤解を恐れずに踏み込んで言うのならば，みなさんが受験で必要とされる物理学は，既に『確立された』古典物理学の中のほんの一部です．学ぶべきことは，何故その法則が成立するのか，という法則の背景について．そして実際に問題を解くということは，どのようにして問題の中の現象に，物理法則を使うのか，という実践的な応用についてです．物理学は，なぞなぞではありません．みなさんは，人類が辿ってきた歴史の追体験の中で法則を学び，受験においてそれを最大限に利用するのです．人間の直感に沿うもの，そして沿わないもの，物理の学習の中でみなさんは様々な経験をするでしょう．そして真摯に学習を積めば，古典物理学が教育課程として採用される意味や意義が，受験が終わったそのあとに，みなさんの中できっと芽生えているはずです．

*1 電子などのミクロなスケールの物理学を記述する物理学の体系で，現代物理学の根幹を担います．しかし，既に誕生から 100 年近くが経過しており，人類の歴史という観点から見たら，量子論も文字通りの意味で『古典的』な学問になりつつあるかもしれません．

*2 2 重振り子のようなカオス系の古典力学では，未来予言は難しいとされています．こういった研究も現代物理学の最先端であり，古典物理学は決して『終わった』学問ではないです．

*3 先述した量子論では，物体の位置や運動量は確率分布でしか記述されず，測定するまでその物理量は確定しません．

1.2 運動の記述

古典力学は，物体の運動を記述する学問体系です．ここでは，どのように運動が決定され記述される道筋を議論します．

1.2.1 慣性系の存在

運動の観測を真っ白なキャンバスの上で行うと，物体が動いていることは分かるかもしれませんが，どこからどこまで動いているのかを定量的に理解することはできません．したがって，運動を記述する前には（物理現象を記述する前には），その空間に座標軸（Coordinate axis）を設定します．柔らかい言葉で言い換えれば，『正負の向きが定まった目盛り』の設定です[*4]．この『目盛り』が空間に設定されると，物体がどの向きに動いたのか，どの位置にいるのかを数学的に表現することができます．

また，運動を観測する観測者（Observer）は，どのような立場から観測するのでしょうか．物理学では観測者の立場によって，観測される結果（実験結果）は異なります．したがって，どんな立場から運動を観測するのかは極めて重要です．

古典力学では，指示がない限り慣性系（Inertial frame of reference）において運動を記述します．これは，物体に力が働かないとき，物体が等速直線運動を行うように観測される座標系と観測者の立場のことを指します[*5]．このような見え方になる観測者は，『止まって』いればいいことが想像できるのではないかと思います．それは間違いではないですが，**正確には『観測者の加速度がゼロである』，が正しい表現になります．**[*6]慣性系は，後述する運動方程式を最もシンプルな形で立式できる座標系です．

しかし，『止まった観測者』，や『観測者の加速度がゼロ』という表現は，よく考えると何を基準にするかが問題になります．普通の古典力学の問題を考える際には，地球上での運動（実験）を考えます．そこで『加速度を持たない観測者』，という観測者の立場は，『地面に対して加速度ゼロ』，という様に多くの人が考えるでしょう．しかし，よく考えると地球は宇宙空間の中で公転運動をしており，宇宙規模で見ると地球は加速度を有しています．また，宇宙の外に行くことが仮にできたとすれば，宇宙自体が加速度運動をしているかもしれません．要するに，少なくとも宇宙空間の中で実験を行う際には，絶対的な静止は存在しないということです．そうすると，物理現象を記述する完全な慣性系は存在しえないことになります．しかしながら，地球上で物体の運動を観測する場合，地面に対して静止した観測者が観測する力学現象は，運動方程式によって精度良く記述され[*7]，太陽系の惑星の運動を記述するときも，太陽を焦点とした極座標系は慣性系に近くなることが分かっています．従って，**地球上での古典力学を考えるならば，観測者は地面に対して静止する立場を慣性系として，宇宙空間のような大きな系でも適宜静止した慣性系を考えて差し支えありません．**

また，慣性系でない立場を非慣性系と呼びます．この立場では観測者が加速度を有しています．この場合に

[*4] 座標については，数学で学習したデカルト座標系（Cartesian coordinate system）がまず一番最初に思い浮かぶと思います．物理でよく使う座標も，このデカルト座標系です．しかし，数学で学んだように，座標系はデカルト座標のみならず，極座標（Polar coordinate system）といったものも存在します．これは，後の学習で登場する円運動と大きな関係があるのです．このように，ひとえに座標系と言っても沢山の座標系が存在し，適宜適切な座標軸を設定して物理現象に向き合う必要がありますが，受験物理の範疇ではデカルト座標を思い浮かべるだけで問題はないでしょう．

[*5] これは後述するように運動の第 1 法則に対応します．

[*6] 従って，観測者は等速直線運動をしても構いません．正確には，等速直線運動する観測者が立式した運動方程式は，静止した観測者が立式した運動方程式と等価であるということです．これをガリレイ変換の共変性（Covariance of Galilean transformation）と言います．

[*7] 地球の公転運動や自転運動の加速度は大変穏やかで，実験室で行うような現象には大きく影響しないということです．しかし，大砲の弾丸や雲の運動は地球の運動の影響が大きく及ぶため，非慣性系としての取り扱いが必要です．

は，慣性力（Inertial force）の導入で，正しく運動方程式を立式することができます．これは Part2 の各論で学びましょう．

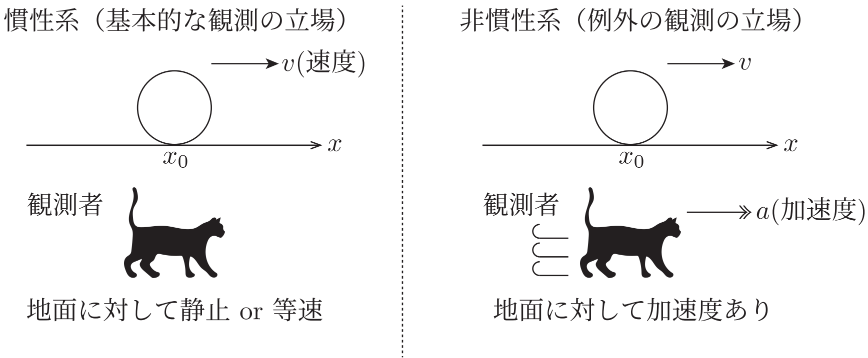

Fig.1　慣性系と非慣性系

1.2.2　速度と加速度

速度（Velocity）とは，単位時間あたりの位置座標の変化（変位）であり，向きが指定された速さを指します（逆を言えば，速度の絶対値が速さということです）．つまり，**速度は向きと大きさを持つベクトル量であるということです**．1 次元の運動では，速度は座標軸に対して正の向きか負の向きか，の 2 通りしかないため，速さに ± の符号をつけて速度を表現します．2 次元以上の運動であれば，速度は高校数学の表記だと $\vec{v}$ か，このテキストや大学以降の学習では $\boldsymbol{v}$ と表記され，各座標軸方向の成分表示の形で表現されます．

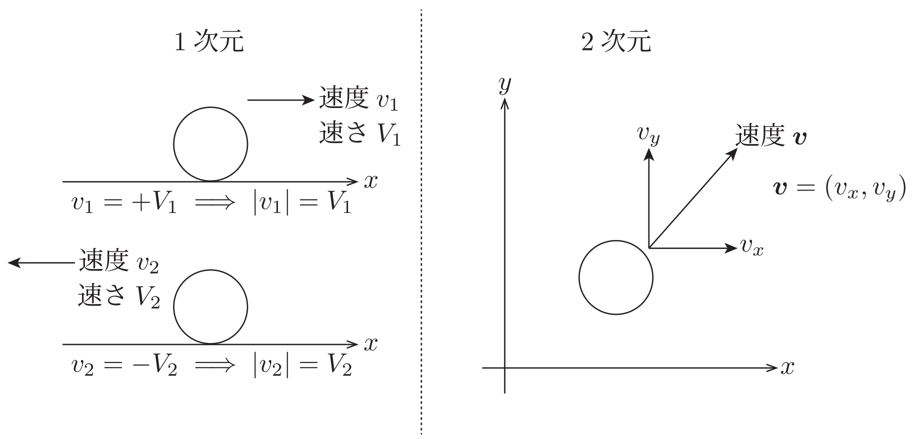

Fig.2　速度と速さの違い

物理学で単に速度と言われたら，基本的には静止した観測者から観測された値であることに注意してください． 観測者に速度がある場合は，次節で議論します．

運動を記述するとは，任意の時刻 t において，物体の速度を時刻の関数として $v(t)$，および物体の位置座標を $x(t)$ として求めることです．この 2 つの関数を求めるためには，物体の加速度（Acceleration）$a(t)$ を求

める必要があります．**加速度とは，単位時間あたりの速度変化を表す物理量です**．加速度の数式での表現と，加速度と速度と位置座標の数学的な関係は，以降の節で確認します．

1.2.3　相対速度

慣性系の観測者は，基本的には静止した立場ですが，等速直線運動をしてもいいということを 1.2.1 節で議論しました．ここでは，観測者に速度がある場合に，物体の速度がどのように観測されるかを考えます．このときの速度は，相対速度（Relative velocity）と言います[*8]．

相対速度

相対速度とは，観測者に速度がある場合に，観測される物体の速度である．相対速度は，以下の式で求められる．

$$（相対速度）=（物体の速度）-（観測者の速度）. \tag{1.1}$$

相対速度も，向きと大きさをもつベクトル量で，1 次元では向きに対する符号つきの値で，2 次元以上ではベクトル記号か成分表示される．(1.1) の考え方は，1 次元の運動でも，2 次元の速度ベクトルでも同じである．

以下に具体例を示します．

e.g.1 同一直線上を運動する 2 つの物体

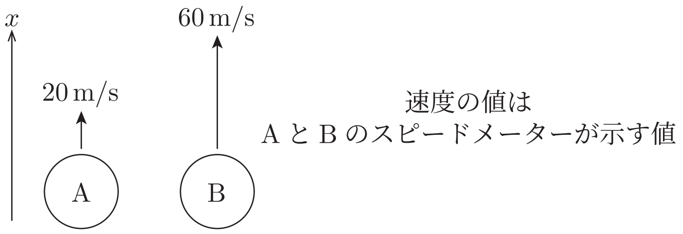

Fig.3　1 軸上の相対速度

Fig.3 で，A からみた B の速度を考えましょう．これは物理の用語で言うと，A に対する B の相対速度そのものです．

(1.1) より，A からみた B の速度 v_{AB}[*9]は，

$$v_{AB} = 60 - 20 = 40\,\mathrm{m/s} \tag{1.2}$$

直感的にも，この 40 m/s という値が浮かんだ人も多いはずです．A から B を見れば，B のスピードメーターが示す 60 m/s より遅く見えるのはわかるのではないでしょうか．[*10]

[*8] 観測者が非慣性系，つまり観測者の速度が時間変化したとしても，相対速度の考え方は変わりません

[*9] A からみた B の，と言う意味をこの添え字の順番で表すことが多いです．しかし，これがルールではないので注意．試験の際には問題文の設定をよく見てください．

[*10] 並走する電車の例などを思い浮かべてもいいかもしれません．

e.g.2 2 次元の場合

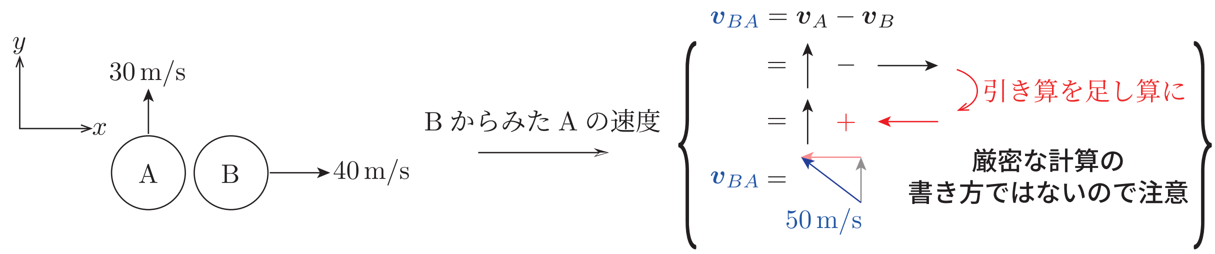

Fig.4　2 次元平面における相対速度

今回は B からみた A の速度を考えてみます．2 次元の場合も同様に，(1.1) を用いて計算しますが，矢印の計算になることに注意が必要です．相対速度の向きを図示できるようにしましょう．大きさは，図形的に処理する他ありません．今回の例では直角三角形になるので，三平方の定理を利用します．

今回の例では，B からみて A は，左斜め上方向にすすんでいくことが分かります．これは，A と B の速度の様子から想像できてもよいですが，**計算で機械的に求められることも極めて重要です．**

1.2.4　運動と数学の関係

加速度 $a(t)$ が時刻 t の関数として求められると，速度 $v(t)$ や物体の位置座標 $x(t)$ は数学的に求められます．

運動と数学の関係

加速度 $a(t)$，速度 $v(t)$，物体の位置座標 $x(t)$ には，以下に示す数学的な関係が成立する．

$$v(t) = \int a(t)dt \qquad x(t) = \int v(t)dt$$

$$a(t) \underset{\text{微分}}{\overset{\text{積分}}{\rightleftarrows}} v(t) \underset{\text{微分}}{\overset{\text{積分}}{\rightleftarrows}} x(t)$$

$$a(t) = \frac{dv}{dt} \qquad v(t) = \frac{dx}{dt}$$

Fig.5　運動と数学の関係

これは数学の微積分の考え方を思い出すと，納得できるはずです．x 軸上を運動する物体について，微小時間 Δt だけ経過したときのことを考えましょう．

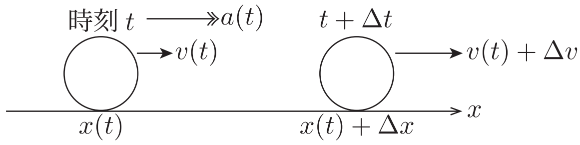

Fig.6　x 軸上の運動（時間 Δt）

加速度の定義である単位時間あたりの速度変化は，

$$\frac{\Delta v}{\Delta t}. \tag{1.3}$$

(1.3) の $\Delta t \to 0$ の極限をとると，微分の定義から，

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{dv}{dt} := a(t). \tag{1.4}$$

同様に，速度の定義である単位時間あたりの位置座標の変化は，

$$\frac{\Delta x}{\Delta t}. \tag{1.5}$$

(1.5) の $\Delta t \to 0$ の極限をとると，微分の定義から，

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{dx}{dt} := v(t). \tag{1.6}$$

微分積分の基本定理から，微分の逆操作は積分になります．ただし，積分は不定積分なので，運動の初期条件を設定することで関数 $v(t)$, $x(t)$ を求めることができます．詳しくは後述します．

1.2.5　時間積分による運動の記述—地球上での鉛直投げ上げ—

何らかの方法で，加速度 $a(t)$ が求められたとします．この加速度を用いて速度 $v(t)$ と物体の位置座標 $x(t)$ は，時刻 t に関する積分で求めることができます．ただし，先述したように積分は不定積分なので，積分定数が含まれます．この積分定数を決定するためには，**運動の初期条件（Initial conditions）が必要です．**

時間積分による運動の記述

以下に示す 2 つの情報によって，速度と物体の位置座標は原理的には求められる．

1. 任意の時刻 t における物体の加速度 $a(t)$.
2. 時刻 $t=0$ における運動の速度と位置座標の初期条件（広義には，ある特定の時刻における速度と位置座標の情報）.

ここでは具体例として，地球上の地面からの鉛直上向きに初速度の大きさ v_0 で投げたときの，その後の運動を記述していきます．

e.g. 地球上での鉛直投げ上げ

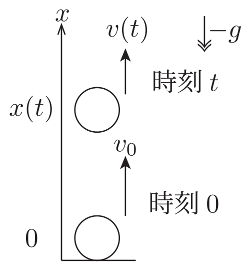

Fig.7　地球上での鉛直投げ上げ

上図のように，座標軸を設定する．地球上での投げ上げ運動より，物体に働く加速度は鉛直上向きを正として，重力加速度の大きさを g とすると[*11],

$$a(t) = -g. \ \text{(Constant)} \tag{1.7}$$

加速度 $a(t)$ と速度 $v(t)$ の関係より，

$$v(t) = \int a(t)dt = \int -gdt = -g\int dt = -gt + C. \ (C: \text{積分定数}) \tag{1.8}$$

運動の初期条件より，時刻 0 のとき，物体の速度は $v(0) = +v_0$ であるため，(1.6) に代入すると，

$$\begin{aligned} v(0) &= 0 + C = v_0, \\ C &= v_0. \end{aligned} \tag{1.9}$$

(1.8)，(1.9) より，速度 $v(t)$ は，

$$v(t) = v_0 - gt. \tag{1.10}$$

物体の位置座標 $x(t)$ は，速度 $v(t)$ を用いて，

$$x(t) = \int v(t)dt = \int (v_0 - gt)dt = v_0 t - \frac{1}{2}gt^2 + D. \ (D: \text{積分定数}) \tag{1.11}$$

運動の初期条件より，時刻 0 のとき，物体の位置座標は $x(0) = 0$ であるため，(1.9) に代入すると，

$$\begin{aligned} x(0) &= 0 + 0 + D = 0, \\ D &= 0. \end{aligned} \tag{1.12}$$

(1.11)，(1.12) より，

$$x(t) = v_0 t - \frac{1}{2}gt^2. \tag{1.13}$$

数学において，積分とは曲線が描く領域の面積を求める操作です．物理において，速度 $v(t)$ を時刻 t に関して積分すると，物体の位置座標 $x(t)$ を求めることができました．これは，**$v-t$ グラフで囲まれた面積の絶対値がその時刻までに物体が走った距離を表していることと同じです**[*12].

[*11] 後述しますが，地球上での落下や投射運動は，加速度の大きさが運動の途中のいつどこであっても約 $9.8\,\mathrm{m/s^2}$ の等加速度運動になります．この加速度を重力加速度と呼び，よく文字 g を使って表します．

[*12] ここで絶対値と書いたのは，物体の位置座標は負符号になることもあるからです．曲線の積分は符号付きなので，その絶対値をとることで領域の面積が求められます．物理において距離とは，符号のつかない大きさを表す量です．

$v-t$ グラフの面積

$v-t$ グラフで囲まれる面積は，物体が走った距離に等しい．

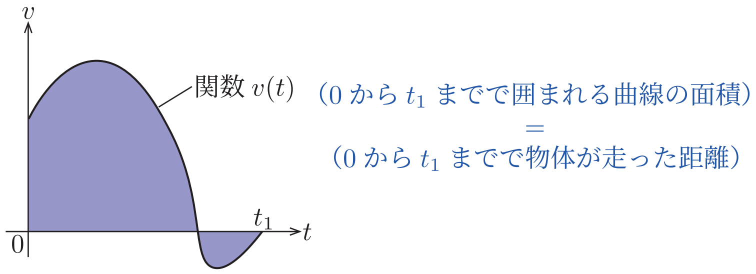

Fig.8　$v-t$ グラフと距離の関係

上述の議論から，加速度が定数の運動は速度が時刻に対して 1 次関数，物体の位置座標が時刻に対して 2 次関数になることが分かります．この 2 式は，等加速度直線運動の公式として暗記した人も多いのではないでしょうか．このように速度と位置座標の関数が分かれば，物体の運動の未来を予言できたも同然です．この 2 式を用いて，もう 1 つ式を作ることができます．

(1.10) より，

$$t = \frac{v_0 - v(t)}{g}. \tag{1.14}$$

(1.13) 式に代入すると，

$$\begin{aligned} x(t) &= v_0 \frac{v_0 - v(t)}{g} - \frac{1}{2} g \left(\frac{v_0 - v(t)}{g} \right)^2, \\ v^2(t) - v_0^2 &= 2(-g)x(t). \end{aligned} \tag{1.15}$$

(1.15) も，公式として見たことがある人も多いと思います．等加速度直線運動は数多の運動の中の一例に過ぎませんが，非常に身近な地球上での投射運動を記述します．そして大学受験においては必須の内容です．以下の節では等加速度直線運動について詳しく議論します．

1.2.6　等加速度直線運動

前節での具体例より，加速度が時刻によらず定数の場合の運動を，等加速度直線運動と呼びます．

等加速度直線運動

時刻に依らず，物体の加速度が定数 a であるとする．また，運動の初期条件として，時刻 0 のとき初速度が v_0，位置座標が x_0 であるとする．

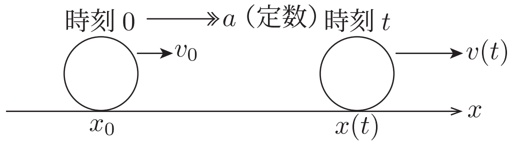

Fig.9　等加速度直線運動

この等加速度直線運動において，任意の時刻 t における運動を記述する式として，以下の 3 つがある．

1. **『速度の式』**

$$v(t) = v_0 + at. \tag{1.16}$$

2. **『位置座標の式』**

$$x(t) = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2. \tag{1.17}$$

3. **『便利な式』**

$$v^2(t) - v_0^2 = 2a\{x(t) - x_0\}. \tag{1.18}$$

この 3 つの式のうち，『速度の式』と『位置座標の式』を導出していきます．前節で議論したように，積分を用いて求めることもできますが，ここではより初歩的なアプローチをとります．まずは『速度の式』[*13]である (1.16) から導出します．

加速度が定数であるということは，『速度が時刻に対して等しい割合で変化する』，ということです．これを数学に置き換えると，『速度は時刻に対して線型[*14]の関係にある』と言うことができます．つまり，**速度と時刻は 1 次関数の関係です．** これを，$v-t$ グラフで表すと直線になります．時刻 0 のとき，初速度が v_0 なので，v 切片が v_0 であることに注意しましょう．また，加速度の定義が単位時間あたりの速度変化であることを思い出すと，**加速度 a は $v-t$ グラフの傾きです．**

*13 上述の『速度の式』，『位置座標の式』，『便利な式』という名称は，物理の専門用語ではなくこのテキストにおける名称であるので注意してください．

*14 線型（Linear）とは，対応する変数同士の関係が 1 次関数となるような代数的関係を指します．グラフにすると直線（あるいは多変数の場合平面）となるような関係です．線型性には正確な定義がありますが，ここでは立ち入らないことにします．物理や工学において，線型性は極めて重要であり，複雑な代数関係が成立している場合でも，微小な区間においては線型性が成立すると仮定して，議論を進めることが多々あります．高校数学では曲線の長さの議論，高校物理では仕事や光学における経路差の計算など，様々な場面で線型性は登場します．

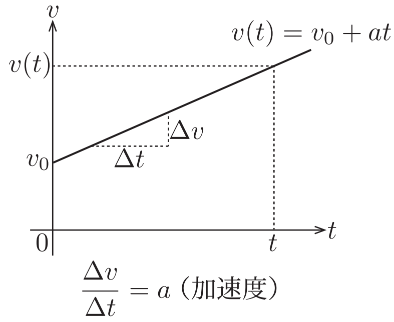

Fig.10　等加速度直線運動の $v-t$ グラフ

Fig.8 の $v-t$ グラフより，等加速度の『速度の式』は，

$$v(t) = v_0 + at.$$

次は『位置座標の式』である (1.15) です．前節で述べた『$v-t$ グラフで囲まれる面積は，物体が走った距離に等しい』，を利用します．今回だと，Fig.8 の時刻 0 から t までで囲まれた台形の台形の面積が，物体の走った距離になります．初期位置が x_0 で，時刻 t の時の座標が $x(t)$ なので，物体が走った距離は $x(t)-x_0$ です．

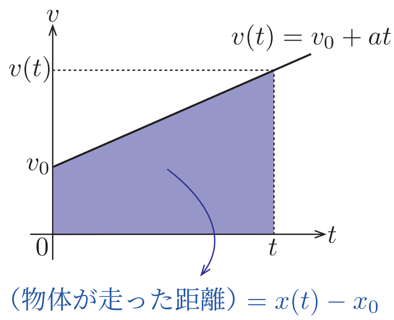

Fig.11　$v-t$ グラフで囲まれた面積

物体が時刻 0 から t までの間に走った距離は，$x(t)-x_0$ である．Fig.9 より，時刻 0 から t まで囲まれた面積は，台形の面積の式より，

$$x(t) - x_0 = \frac{1}{2}(t-0)\{v(t)+v_0\}. \tag{1.19}$$

(1.16) の『速度の式』より，

$$x(t) - x_0 = \frac{1}{2}t(v_0 + at + v_0),$$
$$x(t) = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2.$$

3 つ目の『便利な式』は，前節で行った計算と同様に，『速度の式』から時刻 t を消去して，『位置座標の式』である (1.17) に代入することにより求められます．手を動かしてみてください．

ここまでの議論で，運動の記述には加速度を求められればよいことが分かりました．次の節では，力学においてどのように物体の加速度を求めることができるのかを議論します．

1.3 力と運動方程式

この節では，力学の原理の 1 つである運動方程式について学び，加速度がどのようにして定量的に決定されるかを学びます．以下では特に断らない限り，物体とは質量を持ち，大きさを考えない質点であるとします．

1.3.1 力学における力のイメージ

これからの議論の根幹を担う，力（Force）について正しいイメージをここで確認しておきましょう．力は，日常生活でも非常に身近な概念で，物理学を学んだことがない人でも想像したり，実際に感じることができるものでしょう．日常生活で『力』と聞くと，『パワー』と『ダメージ』という 2 つの視点が浮かぶのではないでしょうか．具体例を示します．

e.g. A さんと B さんの喧嘩
A さんが B さんを殴る力 $\Longrightarrow$ A さんの『パワー』
B さんが A さんから殴られる力 $\Longrightarrow$ B さんの『ダメージ』

力学で考える視点はどちらでしょうか．答えは『ダメージ』です．力学において力とは，**物体が受ける力（物体に働く力）を考えます**．受け身の目線で考える，ということです．これは以降の節で後述する，力について数学的な立式をする場合でも，力を受けている物体の『気持ち』を考えて立式をしていきます．この考え方は，以降の節で接触力や見かけの力などを扱うときにも，重要になります．

1.3.2 力の書き方と種類

力は大きく分けて 2 種類に分類できます．力の書き方も含めて，以下に示します．

力の書き方と種類

力（Force）は，向きと大きさを持つベクトル量である． 力を図示するとき，受け身の目線で物体に働く力を書く．そのとき，力が物体に作用する作用点から書く．力の種類は接触力と場からの力に分けられる．**力は物体同士で触れ合う時か，場がある場合にしか作用しない．運動する方向に必ずしも力があるわけではない．**

1. 接触力

   力は，物体同士が接触するときに，それぞれの物体に対して接触する点から作用する（つまり作用点は接触点）．具体例は，抗力（Normal force）や張力（Tension），摩擦力（Friction）などが挙げられる．

物体の『気持ち』を考えて力を書く

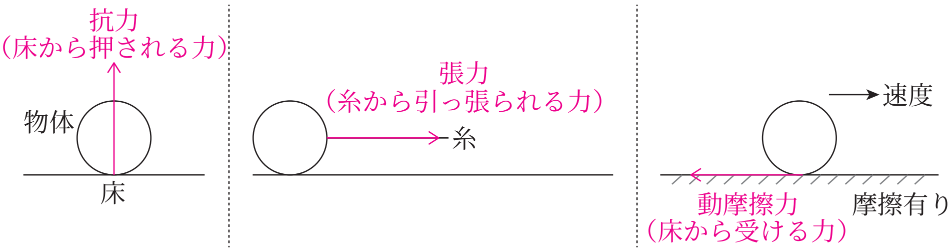

Fig.12　接触力の具体例

2. 場からの力

   空間に何かしらの場（Field）があると，物体はその場から力を受ける（作用点は重心）．具体例は，重力場からの重力や，電磁気学で学ぶ電場からのクーロン力，磁束密度（磁場）からのローレンツ力が挙げられる．特に地球上における重力は，物体が地球から引っ張られる力であり，地球との接触の有無に関わらず，必ず鉛直下向きに作用し，その大きさ W は，物体の質量 m と重力加速度 g を用いて，以下の式で表される．

$$W = mg. \tag{1.20}$$

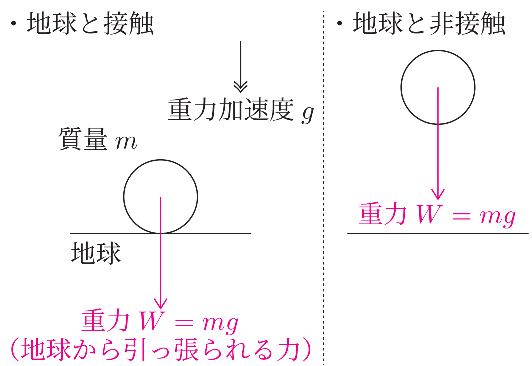

Fig.13　地球上での重力

言葉の注意ですが，物理学において『重さ』とは，重力の大きさ（Fig.11 なら mg）を指し，『質量』ではないことに注意してください．『重さ』の単位は N（ニュートン）で，『質量』の単位は kg ということです[*15]．

力は接触する物体同士で作用する接触力の考え方は，直感的ではあると思いますが，極めて重要です．特に，今後運動する物体に働く力を書くとき，運動方向に何か力があると思ってしまう人が多いのですが，決してそんなことはないのです[*16]．あくまで，何かと何かが触れているときに，接触力が作用するという考え方を身につけておきましょう．

力の図示は，力の関係式を立式する上で必須です．繰り返しになりますが，物体の『気持ち』を考えて力を図示するという技能を，しっかり身につけましょう．

1.3.3　力のつりあい

運動する物体を扱う前に，物体が静止する状況を考えてみます[*17]．

力の釣り合い

1. 物体が静止するための（十分）条件は，物体に働く力の和（合力）がゼロになることである．これを，力の釣り合いの状態という．
2. 力が釣り合っているとき，物体はその場に静止し続けるか，等速直線運動を行う．言い換えると，**力の釣り合いの状態のとき，物体の加速度はゼロである．**

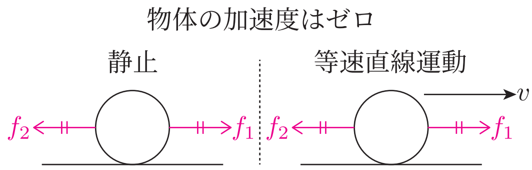

Fig.14　力の釣り合いの状態

力の釣り合いの状態を，数式で表現できるようになりましょう．具体例で考えます．

*15 質量の物理的意味を考えると，意外にも難しいです．実は質量も種類分けされ，慣性質量（Inertial mass）と重力質量（Gravitational mass）の 2 つに分類できます（他にも有効質量（Effective mass）もありますが，受験の範疇を大きく超えるので触れません）．慣性質量は運動の起こりにくさ（物体の動かしにくさ）を指す量で，重力質量は後の各論で学ぶ万有引力の大きさを指す量になります．両者は相対論（Relativity theory）における等価原理（Equivalence principle）において等価なものとされています．もちろん受験において，これを意識することは（ほぼ）ないでしょう．

*16 もちろん，物体にエンジン等がついている場合は，推進力は力として存在しますが，推進力も『エンジンによって押される力』で，接触力の 1 つです．例えば，野球選手が投げたボールにはエンジンはついていませんから，ボールの進行方向に力は存在しないのです．ボールが受ける力は重力と空気抵抗のみです．（ただし，ボールを剛体として考えるのならば，ボールの回転による推進力はあるでしょうが，受験物理の範囲外です．）

*17 物体の静止を議論する分野は，静力学（Statics）と呼ばれ，物理的にも重要な内容を数多く含んでいます．

e.g. 斜面上で静止する糸に繋がれた状態

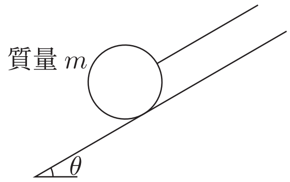

Fig.15　斜面上で静止する物体

力の議論をするときは，まず物体に働く力を全て抜き出す必要があります．前節で学んだように，力には接触力と場からの力の 2 種類しかないため，まずは物体同士が触れているところから接触力を書き出し，そして地球上での話なので重力を書き込みましょう．

次は座標軸の設定です．物理学の重要な考え方ですが，**物理現象は各座標軸に分けて考えます．**問題で座標軸が指定される場合もありますが，そうでない場合は自分でどの向きを正の向きに定める必要があります．どんな座標軸を設定してもいいですが，問題に応じた適切な座標軸の設定が，問題を簡単にします．今回のような斜面の題材では，斜面に平行な方向と，斜面に垂直な方向の 2 軸を設定します[*18].

座標軸が設定できたら，次は力の分解です．力はベクトル量で，2 次元平面での問題であれば，どの力も向きはバラバラです．このバラバラな方向を向いた力を揃えるために，座標軸を設定したのです．**書き込んだ力は設定した座標軸に沿って分解します．**こうすることで，各座標軸方向の力について，正確に議論することができます．

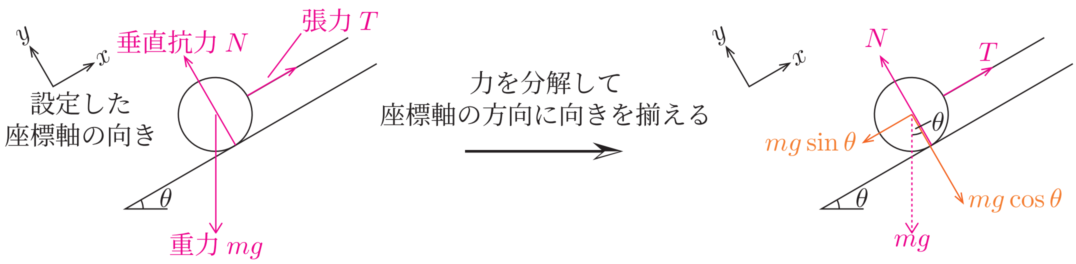

Fig.16　力の書き込み・座標軸の設定・力の分解が済んだ状態

ここまでくれば，釣り合いの状態を数学的に表現するのは簡単です．力が座標軸の方向に対して正負どちらなのかを判断して立式します．今回の例では物体は静止状態なので，力の釣り合いの状態です．詳しく言えば，**設定した座標軸の両方向が，釣り合いの状態です．各軸に対して，力の釣り合いの式を立式します．**

x 方向，y 方向のどちらの方向も力の釣り合いの状態である．力の釣り合いは，物体に働く合力がゼロ

[*18] 適切な座標軸の設定の仕方は，問題演習による経験で分かっていくと思います．しかし，斜面上の運動ならいつも『斜面に平行・垂直の 2 軸』，というわけではないです．水平・鉛直の 2 軸でとらなくてはならない問題もあります．また，2 次元の問題なら軸は 2 軸とる必要があり，受験物理の範疇なら軸は垂直の 2 軸で設定します．

なので，各座標軸について力の釣り合いを立式すると，

$$x\text{ 方向}: 0 = +T - mg\sin\theta, \tag{1.21}$$
$$y\text{ 方向}: 0 = +N - mg\cos\theta. \tag{1.22}$$

この一連の流れは，機械的な作業です．力の図示は間違えると後戻りできなくなるので，**どんな問題でも同じように，同じことができるようになるのが目標です**[*19]**．**この流れは，後述するように，物体が運動しているときでも同じプロセスを踏むことになります．重要なので，以下にもまとめておきます．

力の図示から立式へ

1. 物体同士が触れているところから接触力を，そして場からの力（力学なら基本的には重力）を物体に書き出す．物体の『気持ち』を考える．
2. 問題を考えるための，座標軸を設定する．問題の指示がある場合にはそれに従う．
3. 座標軸の方向に，書き出した力を分解する．
4. 各座標軸の方向に対して，力の関係式を立式する．静止（もしくは等速）なら，合力がゼロの式．加速度をもつ場合には，運動方程式（後述）．

1.3.4　作用・反作用の法則

ここでは，力に関する極めて重要な原理である，作用・反作用の法則（Principle of action and reaction）について説明します[*20]．

[*19] 入試では，初見の問題に皆さんは向き合います．これまでに解いた問題は，基本的には出ないのです．私が皆さんに身につけて欲しい能力は，初見の問題にも対応できる統一的な物理の方法です．
[*20] 後述するように，これは運動の第 3 法則です．

作用・反作用の法則

接触力・場からの力は，関係する 2 つの物体に対して，互いに逆向きで同じ大きさで作用する．

1. 接触力の場合
   互いに接触する 2 物体は，逆向きで同じ大きさの力をそれぞれ受ける．

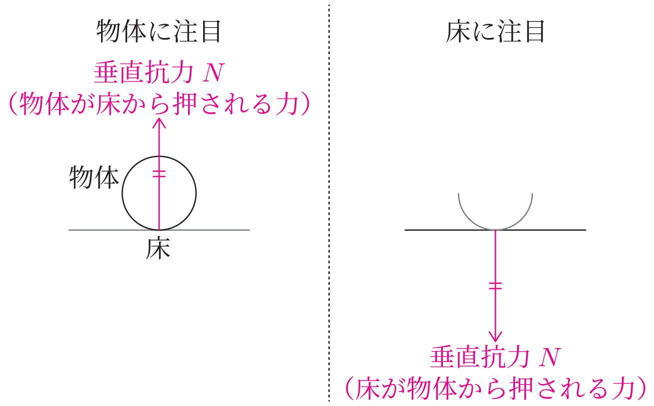

Fig.17　接触力における作用・反作用の法則

2. 場からの力の場合
   場が物体に力を及ぼす時，場の源も物体から力を受ける．その 2 力の関係は，同じ大きさで逆向きになる．

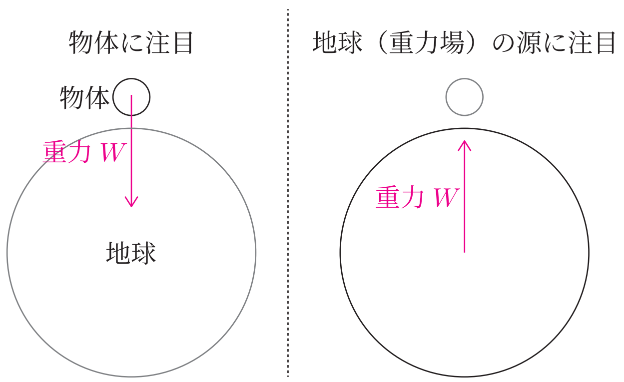

Fig.18　場からの力（重力）における作用・反作用の法則

力の釣り合いとは全く異なる概念であることに注意．力の釣り合いとは，1 物体に注目したときの力の関係で，**作用反作用の法則は，相互作用する 2 物体の間の力の関係である．**

力の釣り合いとの区別をしっかりつけましょう．簡単な具体例を示します．

e.g. 壁と指で挟まれて静止する小球

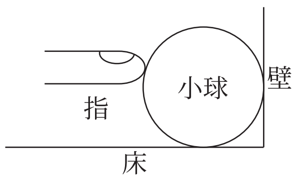

Fig.19　壁と指で挟まれて静止する小球

注目物体を指・小球・壁と床の 3 つに分けて力を書き出し，釣り合いの 2 力関係と作用・反作用の 2 力関係を示してみます（簡単のために指や壁と床にはたらく重力は無視します）.

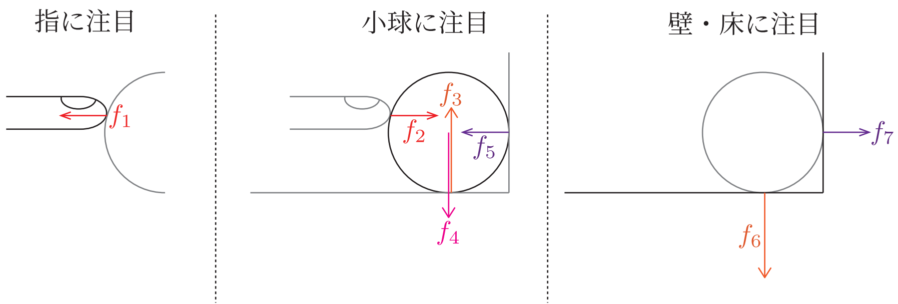

Fig.20　指・小球・壁と床にそれぞれ働く力

各力の関係は次のようになる：

f_1，f_2: 指と小球の間で働く力 $\Longrightarrow$ 作用・反作用の関係,
f_3，f_6: 小球と床の間で働く力 $\Longrightarrow$ 作用・反作用の関係,
f_5，f_7: 小球と壁の間で働く力 $\Longrightarrow$ 作用・反作用の関係,
f_2，f_5: 静止した小球に働く水平方向の 2 力 $\Longrightarrow$ 釣り合いの関係,
f_3，f_4: 静止した小球に働く鉛直方向の 2 力 $\Longrightarrow$ 釣り合いの関係,
f_4: 小球が地球から引っ張られる重力.

この例で学んで欲しいことは，**力は物体ごと別々に図示するということです．**物体ごとに分けて図を書くことで，力の釣り合いの関係なのか，作用・反作用の関係なのかを見抜くことができます.

1.3.5　運動の 3 法則

1687 年，イギリスの物理学者であるアイザック・ニュートン（Sir Isaac Newton）が著書『自然哲学の数学的諸原理』（通称『プリンキピア』）の中で，古典力学における基礎原理 3 つを述べました.

運動の 3 法則

1. 慣性の法則（Principle of inertia）：慣性系の存在の主張（1.2.1 節）
質点に力が働かない時，静止もしくは等速運動をするように観測される座標系（慣性系）が存在する．
2. 運動方程式（Equation of motion）：物体の加速度と働く力の関係式
質点の加速度 $\boldsymbol{a}$ と，質点の質量 m，質点に働く合力 $\boldsymbol{f}$ には次の関係式が成立する．

$$m\boldsymbol{a} = \boldsymbol{f} \tag{1.23}$$

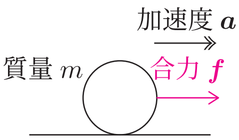

Fig.21　力を受けて加速度運動する物体

3. 作用・反作用の法則（Principle of action and reaction）：相互作用する 2 力間の関係（1.3.4 節）
2 つの質点間で相互作用する力は，それぞれ同じ大きさで向きが逆になる．

$$\boldsymbol{f}_{12} = -\boldsymbol{f}_{21} \tag{1.24}$$

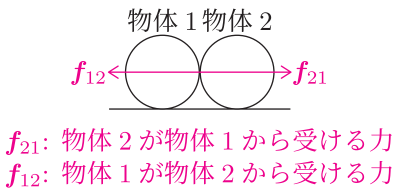

Fig.22　作用・反作用の 2 力関係

第 1 法則，第 3 法則はこれまでの節で議論した通りです．加速度の定量的な決定は，第 2 法則である運動方程式が担います．運動方程式の主張は,『物体に働く合力は，質量と加速度の積に等しい』，であり，**物体にゼロでない合力がかかると，合力と同じ方向に加速度が生じることを説明しています．**物体の加速度は，力によって決まるため，**物体に働く力を全て書き出すことができれば，定量的に加速度を求めることができるのです**[*21]．

左辺の $m\boldsymbol{a}$ の物理的な意味は，後の節において運動量（Momentum）を定義することで説明することができます．**今ここで勘違いしないで欲しいのが，$m\boldsymbol{a}$ という力は物体にはかかっていないということです**[*22]**．**物体に働く力は，あくまで接触力と場からの力のみで，**物体にかかる力の直接的な情報は右辺に集約されます．**

また，運動方程式は力の定義式でもありません．1.3.3 節で議論したように，静止した物体は合力はゼロですが，それぞれ力が働いた結果ゼロになっているのであって，物体には力がかかっています．加速度がある場

[*21] 運動の初期条件も，この運動方程式には入り込みません．初期条件で瞬間的に加えた力がある場合もありますが，それは任意の運動の最中に影響することはないのです．しつこく述べますが，運動方程式は物体にかかる合力と加速度の関係式です．
[*22] 非慣性系においては，$m\boldsymbol{a}$ は慣性力を意味しますが，これは Part2 で述べます．

合にしか，力は存在しないという認識は誤りです[*23]．

簡単な具体例で，加速度を求めて運動を記述するプロセスを追いかけてみましょう．1.3.3 節で述べた手順通りに力を書き出し，運動方程式を用いて加速度を決定します．座標軸毎に運動を分けて考えることが重要です．

e.g.1 斜面を滑る物体

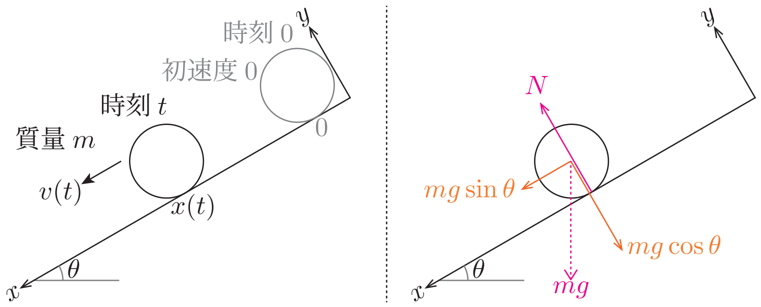

Fig.23　任意の時刻 t における運動の様子と力の図示

y 方向の運動は，座標が変化しないので静止状態であり，これは加速度ゼロの運動とみなせる．各軸の運動方程式は，x 方向の加速度を a とすると[*24]，

$$x \text{ 方向} : ma = mg\sin\theta, \tag{1.25}$$
$$y \text{ 方向} : 0 = N - mg\cos\theta. \tag{1.26}$$

(1.25) より，

$$a = g\sin\theta. \text{ (Constant)} \tag{1.27}$$

x 軸方向の運動は等加速度直線運動であることが分かる．従って時刻 t における速度 $v(t)$ と位置座標 $x(t)$ は，運動の初期条件を考慮すると，等加速度運動の式からそれぞれ，

$$v(t) = g\sin\theta t,\ x(t) = \frac{1}{2}g\sin\theta t^2. \tag{1.28}$$

この例でも分かりますが，1.3.3 節の力の釣り合いの式は，加速度がゼロの特別な場合における運動方程式であることが分かります．加速度が定数であれば，1.2.5 節で議論したように等加速度運動になります．

[*23] 実は力の定義もよく考えると難しいです．この疑問に対する 1 つの答えは，古典力学の数学的な構造を考える解析力学（Analytical Mechanics）が力というものを一般化した概念（そのまま一般化力と言います）を与えてくれます．解析力学は量子力学への橋渡しともなる重要で（難しい）物理学の体系の 1 つです．

[*24] 運動の様子から，加速度が x 方向だけの成分であることは自明なので，ベクトル表示ではありません．数学において，ベクトル成分に矢印はつけないことと同じです．

e.g.2 斜方投射（空気抵抗は無視）

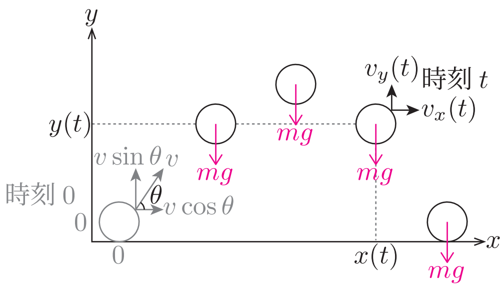

Fig.24　斜方投射する物体

物体は地球上で，運動中何にも触れていないことから，どの位置にいたとしても働く力は鉛直下向きの重力 mg のみ．各軸の運動方程式は，x，y 方向の加速度をそれぞれ a_x，a_y とすると，

$$x \text{ 方向} : ma_x = 0, \tag{1.29}$$
$$y \text{ 方向} : ma_y = -mg. \tag{1.30}$$

(1.29)，(1.30) より，

$$a_x = 0, \tag{1.31}$$
$$a_y = -g. \text{ (Constant)} \tag{1.32}$$

従って，物体は x 軸方向には等速直線運動，y 軸方向には等加速度直線運動をする．運動の初期条件を考慮すると，時刻 t における速度・位置座標の関数は，

$$v_x(t) = v\cos\theta, \tag{1.33}$$
$$x(t) = v\cos\theta t, \tag{1.34}$$
$$v_y(t) = v\sin\theta - gt, \tag{1.35}$$
$$y(t) = v\sin\theta t - \frac{1}{2}gt^2. \tag{1.36}$$

1.2.4 節で述べた地球上での投射運動が等加速度直線運動になるのは，物体にかかる力が重力のみで，その値が地球上のどこにいても同じ値になるためです．このように，物体に働く力さえ分かれば，運動を一意に決定することができ，冒頭で述べた通り未来を予言をすることができるのです．

1.4　拘束条件下での運動

垂直抗力や糸の張力は拘束力（Constraint force）とも呼ばれ，この力が働く時には，運動にはある自明な条件が課されます．この条件を拘束条件（もしくは束縛条件）(Constraint condition）は呼ばれ，この条件から拘束力や加速度が正確に決定されます．以下に具体例を示します．

e.g. 定滑車の運動（糸の質量は無視）

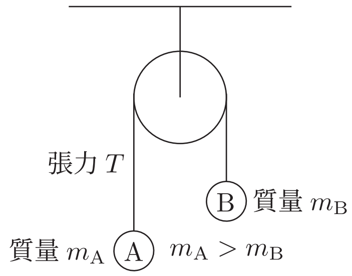

Fig.25 定滑車の運動

質量の条件から，A が鉛直下向きの加速度で，B が鉛直上向きの加速度を持ち，両方の加速度は同じ大きさであることが直感的にも想像されます．この直感は正しいのですが，それを定量的に示すことはできるのでしょうか？この議論をするためには，A と B の加速度をそれぞれ別の文字で置いて，計算する必要がありそうです．以下のように鉛直下向きを正の方向として座標を設定し，A と B の加速度をそれぞれ a_{A}，a_{B} と置きます．

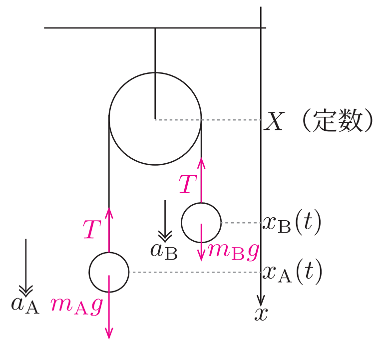

Fig.26 定滑車の運動の座標設定

今後の議論のため，A，B の任意の位置座標や定滑車の座標も設定しました．力は重力と張力のみなので，運動方程式は簡単に立式できます．鉛直下向きが正方向であることに注意しましょう．

A，B の運動方程式は，

$$x : m_{\mathrm{A}}a_{\mathrm{A}} = m_{\mathrm{A}}g - T, \tag{1.37}$$
$$x : m_{\mathrm{B}}a_{\mathrm{B}} = m_{\mathrm{B}}g - T. \tag{1.38}$$

(1.37) と (1.38) から計算すればよさそうですが，未知数が 3 つ（a_{A}，a_{B}，T）に対して式の数が 2 つで，この連立方程式は解くことができません．条件が 1 つ足りないのです．ここで登場するのが，拘束条件です．拘束条件は自明な条件と上述しましたが，**『張力が働く問題の拘束条件は，糸の長さは一定である』**，になります[*25]．拍子抜けな感じもしますが，とりあえず立式してみましょう．Fig.26 のように座標を設定すれば，糸の長さを数式で表現することができます．

[*25] ゴム紐のような，糸の伸びを考えないということを意味しています．

糸の長さを l とする．拘束条件より，糸の長さ l は時刻に依らず一定．これを数式表現すると，

$$l = (x_{\mathrm{A}}(t) - X) + (x_{\mathrm{B}}(t) - X). \tag{1.39}$$

(1.39) のままでは，やはり運動方程式と連立することはできません．が，ここで運動と数学の関係を思い出しましょう．位置座標の関数 $x(t)$ は，時刻 t で 1 階微分することにより物理量が速度 $v(t)$ へ，さらにもう 1 階微分することで加速度 $a(t)$ へと，物理量が変化するのでした．これを用いて，拘束条件 (1.39) を加速度の関係式に変化させましょう．

(1.39) を時刻 t で 2 階微分すると，定数の微分はゼロより[*26]，

$$\begin{aligned} 0 &= a_{\mathrm{A}} + a_{\mathrm{B}}, \\ a_{\mathrm{A}} &= -a_{\mathrm{B}}. \end{aligned} \tag{1.40}$$

(1.40) は，まさに最初に予想した答えで，A と B の加速度は同じ大きさで向きが逆であることを意味しています．これで運動方程式と連立させて，加速度や張力を完全に決定することができ，物体がどの方向に動くのかまで完全に求めることができるようになります．

(1.37) から (1.40) より，

$$a_{\mathrm{A}} = \frac{m_{\mathrm{A}} - m_{\mathrm{B}}}{m_{\mathrm{A}} + m_{\mathrm{B}}} g,\ a_{\mathrm{B}} = \frac{m_{\mathrm{B}} - m_{\mathrm{A}}}{m_{\mathrm{A}} + m_{\mathrm{B}}} g,\ T = \frac{2 m_{\mathrm{A}} m_{\mathrm{B}}}{m_{\mathrm{A}} + m_{\mathrm{B}}} g. \tag{1.41}$$

$m_{\mathrm{A}} > m_{\mathrm{B}}$ より，$a_{\mathrm{A}} > a_{\mathrm{B}}$ で，A が鉛直下向きに運動し，B が鉛直上向きに運動する．

この定滑車の例においては加速度の関係は自明と言ってもよいので，最初から加速度の向きが逆で同じ大きさであるというのは仮定して解いても何ら問題はありません．しかし動滑車が入り込むような問題などでは，拘束条件を考えることで，運動の様子を慣性系から定量的に求めることができます．改めて拘束条件についてまとめておきます．

拘束条件

一般論として，2 次元平面の運動を考える．物体に拘束力が働くとき，拘束条件である，

$$f(x, y) = C, (C\text{: 定数}) \tag{1.42}$$

が運動には課される．ここで x, y は時刻 t の関数で物体の任意の位置座標を指す．この拘束条件は運動の条件から極めて自明であるため，問題文で明記されることはない．この拘束条件を時刻 t で微分することにより，加速度の関係式を得ることができる．

[*26] ここでの微分は『x を x で微分して 1 になる』，という操作ではなく，任意の位置座標 $x(t)$ を時刻 t で微分することにより，新しい物理量に変化させるという操作になります．$x(t)$ の具体的な形は決まっていませんが，速度や加速度が位置座標の時間微分で定義されているため，このような変形が可能なのです．

2　身近な力による運動

この章では，私たちの日常においても非常に身近な力と，それに起因する運動を議論していきます．

2.1　フックの法則

バネを縮めたり伸ばしたりすると，バネは元の長さ（自然長）に戻ろうとします．このバネによる力を復元力（Restoring force）と呼びます．この復元力の大きさに関する法則が，フックの法則（Hooke's law）です．

フックの法則

物体がバネの伸縮によって受ける復元力の大きさ f は，**バネの自然長からの伸縮の長さ l に比例する．**

$$f = kl. \ (k\text{: バネ定数}) \tag{2.1}$$

バネ定数 k はバネの硬さを表し，硬いバネほど k は大きくなる．**復元力の向きは，自然長の方向に戻ろうとする向きである．**

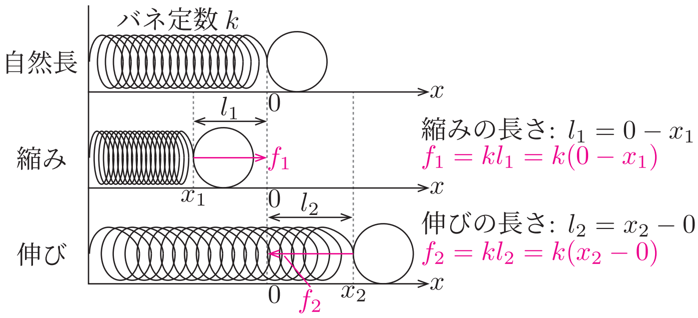

Fig.27　バネからの復元力

『伸縮の長さ』の，座標表示に注意．

$$(\text{長さ}) = (\text{大きな座標の値}) - (\text{小さな座標の値}), \tag{2.2}$$

であるため，**座標表示では，長さに負符号がつくこともある（Fig.27 の縮みを参照）．**また，原点の位置は問題設定によって異なり，必ずしも自然長の位置が原点ではないので注意．

以下に具体例を示します．座標の原点は，全て自然長の位置に設定しています．

e.g.1 鉛直バネによる物体の静止

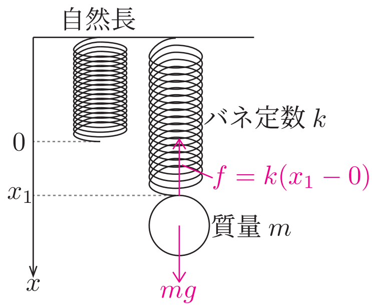

Fig.28　鉛直バネに取り付けられた物体

物体は静止しているので，力の釣り合いの状態である．x 軸方向の力の釣り合いの式は，

$$x \text{ 方向} : 0 = mg - k(x_1 - 0) \tag{2.3}$$

e.g.2 水平バネによる単振動（Simple harmonic motion）

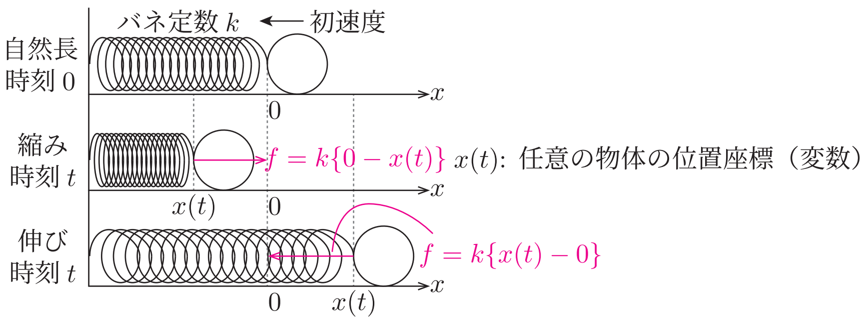

Fig.29　水平バネの単振動

水平バネに物体を取り付け，適当な初期条件を与えると，物体は左右に振動します．この運動を単振動（Simple harmonic motion）と呼び，物理学のいたるところで現れる運動です．ここでは任意の時刻における運動方程式を立式してみましょう．任意の運動の様子として，Fig.29 で示したようにバネが縮んでいるときと伸びている時の両方が考えられます．それぞれの場合で立式してみましょう．

縮みの時，復元力の方向は正．バネの自然長からの縮みの長さは $0 - x(t)$ より，加速度を a として運動方程式を立てると，

$$x \text{ 方向} : ma = +k\{0 - x(t)\} = -k\{x(t) - 0\}. \tag{2.4}$$

伸びの時，復元力の方向は負．バネの自然長からの伸びの長さは $x(t) - 0$ より，加速度を a として運動方程式を立てると，

$$x \text{ 方向} : ma = -k\{x(t) - 0\}. \tag{2.5}$$

縮みでも伸びでも同じ運動方程式になることが分かります．極めて重要なことですが，**物体の任意の位置座標 $\boldsymbol{x(t)}$ は，文字 $\boldsymbol{x(t)}$ の中に符号が入り込んでいます．**したがって，上図における縮みの時は $x(t) < 0$ で，縮みの長さ $0 - x(t)$ はちゃんと正になっています．

この運動方程式の形は単振動の運動方程式と呼ばれます．式を見て分かる通り，時刻 t の関数 $x(t)$ が入り込んでいるため，単振動は加速度が定数となる運動ではありません．どのような運動になるのか，詳しくはPart2 で議論しましょう．

2.2 摩擦力による運動

これまで，物体と物体との接触面は滑らかである仮定のもと議論が進んでいましたが，実際には『ざらつき』があります．物理学では，この面を粗い面と呼ぶことが大きです．物体は粗い面から，摩擦力（Friction）を受けます．

2.2.1 摩擦力の分類

摩擦力は，静止摩擦力（Static friction）と動摩擦力（Kietic friction）の 2 種類があります．この区別には，1.2.3 節で議論した相対速度を利用します．

摩擦力の分類

静止摩擦力とは，粗い面に対して物体が静止していて，外力等の影響があるときに生じる摩擦力．つまり，

$$（粗い面に対する相対速度）= 0 \implies （静止摩擦力）. \tag{2.6}$$

動摩擦力とは，粗い面に対して物体が速度をもつときに生じる摩擦力．つまり，

$$（粗い面に対する相対速度）\neq 0 \iff （動摩擦力）. \tag{2.7}$$

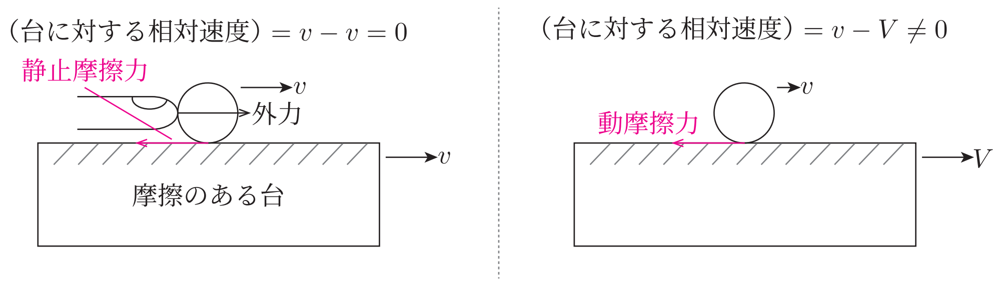

Fig.30　静止摩擦力と動摩擦力

静止摩擦力は，物体が粗い面の上にただのっているだけでは働かないことに注意です．物体に対して外力が働いている時など，周囲からの影響があるときに物体に作用します．

また，摩擦力の基本的なイメージは，『運動を妨げる方向に力が作用する』，です．このイメージをもとに，『物体の気持ち』を考えると，摩擦力の向きは決まると思います．しかし，このイメージだけでは難しい問題もあります．このような細かい話は，次節以降で議論します．

2.2.2　静止摩擦力

粗い面の上に物体を置き，物体を押しても静止している状況を考えます．

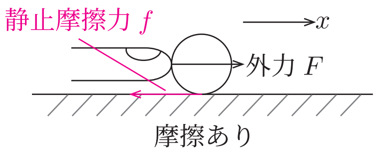

Fig.31　粗い面上で静止する物体

物体は静止しているので，力の釣り合いの状態です．

力の釣り合いの方程式は,

$$
\begin{aligned}
x\text{ 方向}: 0 &= F - f, \\
f &= F.
\end{aligned}
\tag{2.8}
$$

つまり，静止摩擦力の大きさは外力 F に依存していることになります．この (2.8) をみて分かる通り，ただ粗い面上に物体が静止しているだけでは静止摩擦力は作用しないことが分かります．$F = 0$ ならば，$f = 0$ となるためです．

今度は，F の値をどんどん大きくしていくことを考えます．F の上昇に伴って，f の値も大きくなりますが，無限に大きくなることはあるでしょうか？答えは否で，**外力 F が大きくなっていくと，やがて物体は動き出してしまうはずです．**つまり，あまりに外力の影響が大きいと，物体の力の釣り合いが壊れ，速度を持った運動を始めてしまうのです．これは，**静止摩擦力には最大値が存在し，その最大値の時は物体がぎりぎり釣り合いを保っている不安定な状態を指します．**この静止摩擦力の最大値（正の値）を，最大静止摩擦力（Maximum static friction）と呼びます．

静止摩擦力

静止摩擦力は以下に示す特徴を持つ．

1. 静止摩擦力は，物体に働く外力に依存し，値が変動する摩擦力である．作用点は，垂直抗力の作用点と同じく，粗い面との接触点．
2. 静止摩擦力は上限値があり，その最大値を最大静止摩擦力と呼ぶ．この最大静止摩擦力の大きさ $f_{\max}$ は，以下の式で求められる．

$$f_{\max} = \mu N. \tag{2.9}$$

   ここで，N は物体に働く垂直抗力の大きさで，μ は物体と粗い面の組み合わせで決まる，静止摩擦係数である．この最大静止摩擦力のとき，物体は動き出す寸前の，不安定な釣り合いとなる．
3. 静止摩擦力の大きさが，最大静止摩擦力の大きさを超えると，物体は動き出してしまう．つまり，任意の静止摩擦力を f とすると，

$$|f| > f_{\max} \implies \text{（物体は粗い面に対して動き出す），} \tag{2.10}$$
$$|f| = f_{\max} = \mu N \implies \text{（物体は動き出す寸前で静止），} \tag{2.11}$$
$$|f| < f_{\max} = \mu N \implies \text{（物体は静止）.} \tag{2.12}$$

   つまり，物体の静止条件は (2.11) と (2.12) を合わせて，

$$|f| \le f_{\max} = \mu N. \tag{2.13}$$

静止摩擦力 f には，符号が入り込んでいることに注意．最大静止摩擦力 μN は値しかもたないスカラー量である．

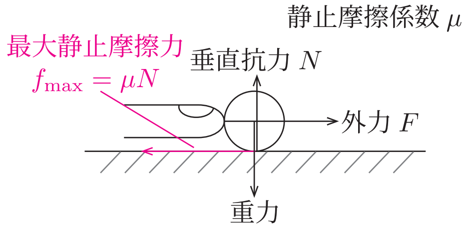

Fig.32　最大静止摩擦力を受ける物体

絶対値の有無に惑わされないでください．Fig.31 のような例では，静止摩擦力の向きは簡単に決まるため，(2.8) の f は大きさとして捉えていますが，**一般に静止中の静止摩擦力 f というのは，簡単に決まらない場合が多いです．その時には，力の釣り合いの式から，計算によって静止摩擦力の方向も含めて求めることになります．** 最大静止摩擦力 μN は，垂直抗力 N の方向が一意に決まるため，向きを持たないスカラー量です[*27]．

また，なぜ摩擦力と垂直抗力に関係があるのか不思議に思うかもしれません．これは重要なので，動摩擦力の議論が終わったあとに詳しく述べます．

[*27] 正確には $|f_{\max}| = \mu|N|$ ですが，垂直抗力 N の方向はほぼ確実に決まるために，わざわざこんな書き方はしません．

2.2.3 静止摩擦力による運動

2.2.1 節で述べたように，粗い面に対する相対速度がゼロのときに作用する摩擦力が静止摩擦力でした．あくまで相対速度がゼロが条件となるので，**台と物体が同じ速度であれば，運動をしていても静止摩擦力が物体に作用することがあります．**以下に具体例を示します．

e.g. 摩擦のある台と物体が一体となった運動

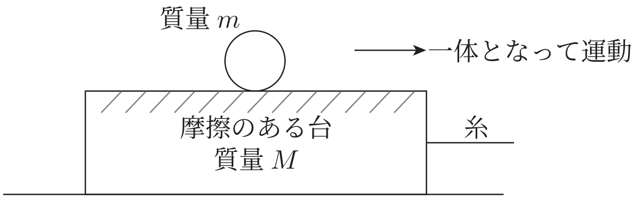

Fig.33 一体となって動く物体と台

摩擦のある台の上に物体を乗せて，台に糸をつけて右向きに一定の張力 T をかけ，台と物体が一体となって右方向に等加速度運動したとしましょう．このときの物体と台はどのような運動をするのかを考えてみます．これまで議論した通り，物体と台に働く力を考えて，運動方程式を立式します．

このような二体問題のときは，上に乗っている物体から考えるとよいです．物体に働く力は何力があるでしょうか？重力と垂直抗力はすぐに分かると思いますが，問題は水平方向の力です．物体は等加速度運動しているため，水平方向に加速度があるわけですが，運動方程式を考えると，水平方向に力が生じている必要があるわけです．この力の正体こそ，静止摩擦力です．**物体は手で押されているわけではないので，水平方向の加速度を生み出す力は，静止摩擦力が担うしかないのです**[*28]**．**

あとは静止摩擦力の向きですが，これは運動を観測する『観測者の気持ち』になると決まります．物体と台が，右方向に動いているということから，加速度の方向は右方向になります．つまり，物体に作用する水平方向の力も右方向でなくてはなりません．

また 1.3.4 節で議論したように，全ての力には作用・反作用の法則が成立します．これは，摩擦力にも例外なく適用されます．作用・反作用の法則は．接触する物体間で力が逆向きに同じ大きさで作用するということでしたから，**物体に右向きの静止摩擦力が作用するということは，台は反作用で物体から左向きの静止摩擦力が作用するということです．**

[*28] 摩擦力はブレーキのように，運動を妨げるイメージが先行しがちですが，今回の例のように物体同士をくっつかせて共に動かす力，という側面もあります．

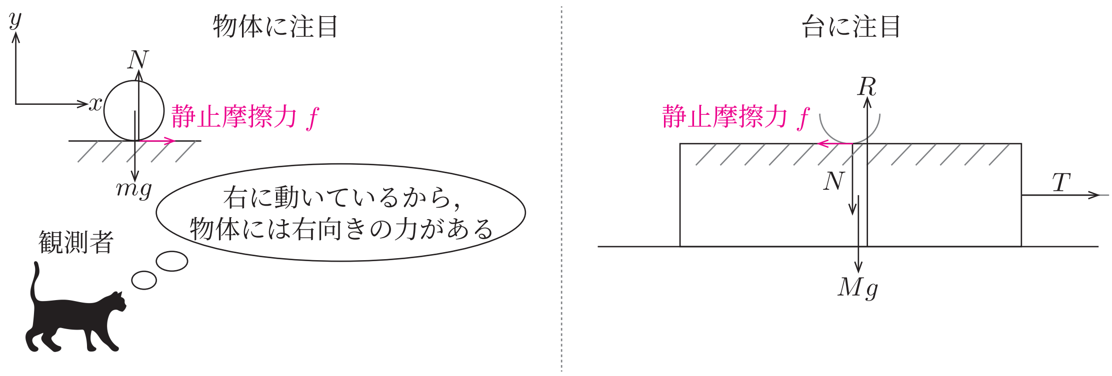

Fig.34　物体と台に働く力

物体と台の加速度を a とする．物体の運動方程式は，

$$x\text{ 方向}: ma = f, \tag{2.14}$$
$$y\text{ 方向}: 0 = N - mg. \tag{2.15}$$

台の運動方程式は，

$$x\text{ 方向}: Ma = T - f, \tag{2.16}$$
$$y\text{ 方向}: 0 = R - N - Mg. \tag{2.17}$$

(2.14)，(2.16) より，

$$a = \frac{T}{m+M} \tag{2.18}$$

(2.14) より，

$$f = \frac{m}{m+M}T \tag{2.19}$$

物体が右に動く原因を，静止摩擦力と捉えられるかが重要です．特に，静止摩擦力が絡む運動は，その力の向きが難しくなることが多くなります．以下に，静止摩擦力の向きの決め方についてまとめておきます．

静止摩擦力の決め方

- 物体の速度がゼロ．
  1. 外力の影響を妨げるように，静止摩擦力が作用．『物体の気持ち』を考える．
  2. 静止摩擦力が正の方向に働いていると仮定した上で，力の釣り合いの式を立てて計算で求める．
- 物体が台と一体となって運動．
  1. 『観測者の気持ち』を考えて，運動の方向から静止摩擦力の向きを決める．
  2. 粗い面上の上に観測者を設定し，慣性力の方向から，静止摩擦力を決める．（Part2 で議論）

2.2.4　動摩擦力

動摩擦力は，物体の粗い面上を物体が滑るときに作用する摩擦力です．**静止摩擦力とは違い，常に一定値をとります．**

動摩擦力

動摩擦力は以下に示す性質を持つ．

1. 物体が粗い面上に対して相対速度をもつとき，つまり粗い面に対して物体が滑るときに，動摩擦力は作用する．作用点は，垂直抗力の作用点と同じく，粗い面との接触点．
2. 動摩擦力の大きさ f' は，以下の式で示される．

$$f' = \mu' N. \tag{2.20}$$

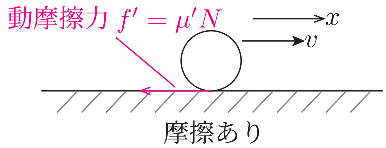

Fig.35　粗い面上で運動する物体

ここで，N は垂直抗力の大きさで，μ' は物体と粗い面との組み合わせで決まる，動摩擦係数である．動摩擦力は，物体の速度に依存せず，常に一定値をとる．

3. 動摩擦力の向きは，基本的には運動方向と逆方向となる．正確には，**粗い面に対する相対速度と逆向き．**
4. 一般に，静止摩擦係数 μ と動摩擦係数 μ' は，$\mu > \mu'$ であるため，最大静止摩擦力の方が動摩擦力よりも大きい．

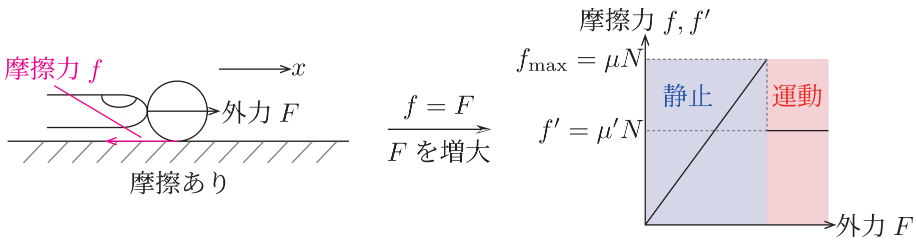

Fig.36　外力と摩擦力の関係

動摩擦力の方が，ブレーキのイメージが強いかもしれません．しかし，上で述べた性質 3 の，粗い面に対する相対速度の値で動摩擦力の向きを決めるのは，応用問題において重要です．

動摩擦力の運動について，以下に具体例を示します．

e.g. 摩擦のある斜面上を滑る物体

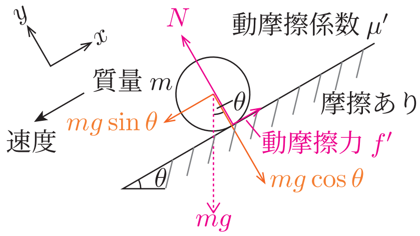

Fig.37 斜面上を滑る物体

動摩擦力の方向は，すぐにイメージできると思います．運動方程式を立式しましょう．

加速度を a とする．運動方程式は，

$$x\text{ 方向}: ma = mg\sin\theta - f', \tag{2.21}$$
$$y\text{ 方向}: 0 = N - mg\cos\theta. \tag{2.22}$$

物体に働く動摩擦力の大きさ f' は，(2.22) より，

$$f' = \mu' N = \mu' mg\cos\theta. \tag{2.23}$$

(2.21)，(2.23) より，

$$a = g(\sin\theta - \mu'\cos\theta) \tag{2.24}$$

摩擦があっても，斜面上を滑る場合は等加速度運動になることが分かりました．

2.2.5 垂直抗力と摩擦力の関係

ここまでの摩擦力の議論で，作用点が垂直抗力と同じ点であったり，摩擦力の大きさが垂直抗力に関係があったりと，摩擦力と垂直抗力には関係があることが分かったと思います．ここではその詳細に踏み込みます．

実は摩擦力の正体は，物体が接触面から押される力（抗力）の水平成分です．これは垂直抗力とは異なるもので，**物体と接触面の間に摩擦があると，抗力が斜め方向を向くのです．**この斜めの抗力を，水平方向に分解したのが摩擦力で鉛直方向に分解した成分が垂直抗力となるのです．

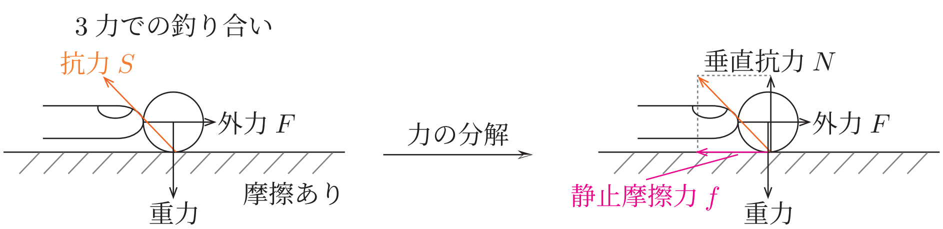

Fig.38 摩擦による斜め方向の抗力

最大静止摩擦力や動摩擦力の大きさに，垂直抗力の大きさが関係したのは，静止摩擦係数及び動摩擦係数が，斜め方向の抗力を水平方向に分解したときの大きさの比を表すものだからです．動摩擦力を例にすると，

垂直抗力の大きさを N，動摩擦係数を μ' とすると，$N : f' = 1 : \mu'$ の関係が成立します．**動摩擦力の大きさは抗力を 1:μ' に分解したときの水平方向の大きさであるということです．** もちろんこの議論は，最大静止摩擦力にもそのまま適用されます．

以上の議論が理解できると，摩擦力の作用・反作用もスムーズに理解できると思います．2.2.3 節で摩擦のある台と物体が一体となって運動する例を扱いましたが，**摩擦力の作用・反作用は，斜め方向の抗力の作用・反作用の水平成分だったということです．**

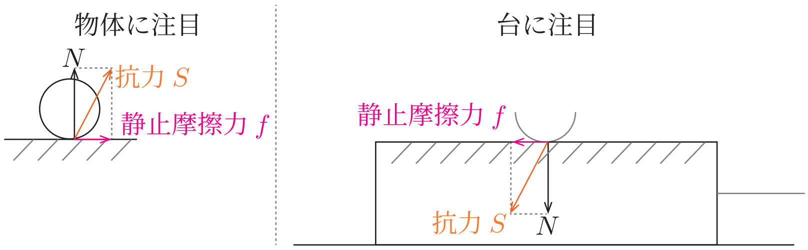

Fig.39　抗力の作用・反作用

摩擦力の本質的な理解は，問題をスムーズに解くための布石になります．ここまでの議論は入試でも頻出の，極めて重要な部分です．

2.3　空気抵抗による運動

地球上には大気が存在するため，実際に地球上で物体の投射を行うと接触する大気から空気抵抗（Air resisitance）を受けます．この空気抵抗は，物体の速度に依存します．

空気抵抗

物体が大気中を運動すると，進行方向と逆向きに空気抵抗を受ける．その大きさを f は，物体の速さを v として，

$$f = kv.\ (k\text{: 比例定数}) \tag{2.25}$$

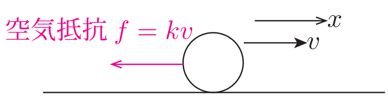

Fig.40　空気抵抗

ただし，(2.25) は空気抵抗に関する一例で，実験によっては kv^2 などの表式を用いた方が精度良く記述できる場合もある．

この空気抵抗の表式は実験から導かれるものであり，演算的に導かれるものではありません．そのため，行った実験によって，速さの 1 次に比例するのか，それとも 2 次に比例するのかは実験結果に応じて変化します．

空気抵抗の運動の具体例として，落下運動を考えましょう．これまでは大気の影響を無視して議論してきま

したが，空気抵抗を受けると物体の運動はどのように記述されるのでしょうか．

e.g. 空気抵抗を考慮した落下運動

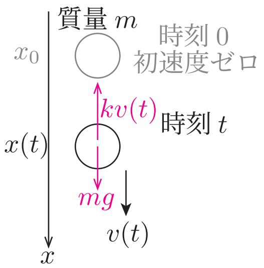

Fig.41　空気抵抗を考慮した落下運動

運動方程式を立式しましょう．速度が時間変化するため．空気抵抗も時間変化します．従って，**物体の加速度も時間変化することに注意してください．**

物体の加速度を $a(t)$ として，運動方程式を立式すると，

$$ma(t) = -kv(t) + mg. \tag{2.26}$$

(2.26) から運動の記述をするためには，1.2.4 節で述べた，微積分を用いた議論が必要です[*29]．加速度 $a(t)$ を，速度の微分の形で書き換えます．

加速度 $a(t)$ は，速度 $v(t)$ をもちいて，$a(t) = \dfrac{dv}{dt}$ であるため，(2.26) より，

$$\begin{aligned} m\frac{dv}{dt} &= -kv(t) + mg, \\ \frac{dv}{dt} &= -\frac{k}{m}\left\{v(t) - \frac{mg}{k}\right\}. \end{aligned} \tag{2.27}$$

(2.27) は，速度の時間微分が入り込む方程式であるため，微分方程式（Differential equation）と呼ばれます．これは『方程式』の名の通り，解くことができます[*30]．今回の方程式は，速度 $v(t)$ に関する微分方程式なので，この方程式を解くと $v(t)$ が時刻 t の関数として求まります．

微分方程式の解き方は様々ありますが，方程式の形に応じて適切な方法をとることが多いです．今回の形は，今後の電磁気学の議論でも登場する重要な形で，この場合は変数分離法を用いて解くことができます．この方法は，文字通り左辺と右辺にそれぞれ変数を分けることにより，積分をしやすい形にする方法です．今回であれば，t と $v(t)$ を左辺と右辺に分けていきます．以降，$v(t)$ の t は省略します．

(2.27) を変数分離すると，

$$\frac{dv}{v + \frac{mg}{k}} = -\frac{k}{m}dt. \tag{2.28}$$

[*29] ここから先は受験範囲外なので，気になる人以外は計算を追わなくてもよいです．ただし，最後の結果は重要です．

[*30] 微分項があるため，微分方程式は積分により解く方程式です．

(2.28) の両辺をそれぞれ積分すると，

$$\begin{aligned}
\int \frac{dv}{v-\frac{mg}{k}} &= \int -\frac{k}{m}dt, \\
\ln\left|v-\frac{mg}{k}\right| &= -\frac{k}{m}t+C, (C\text{: 積分定数}) \\
\left|v-\frac{mg}{k}\right| &= e^{-\frac{k}{m}t+C}.
\end{aligned} \tag{2.29}$$

(2.29) の e^C は定数なので，新しく C' とおく．

$$\begin{aligned}
\left|v-\frac{mg}{k}\right| &= C'e^{-\frac{k}{m}t}, \\
v(t)-\frac{mg}{k} &= \pm C'e^{-\frac{k}{m}t}.
\end{aligned} \tag{2.30}$$

(2.30) の $\pm C'$ は定数なので，新しく D とおく．

計算中の $\ln\left|v-\frac{mg}{k}\right|$ は $\log_e\left|v-\frac{mg}{k}\right|$ のことです．底が e の指数関数は，この書き方をすることが大学以降でよくあります[*31]．

積分定数 D は，1.2.5 節で述べたように，運動の初期条件により決定できます．今回の初期条件は $t=0$ で $v(0)=0$ です．

初期条件を (2.30) に代入すると，

$$0-\frac{mg}{k}=D. \tag{2.31}$$

従って，任意の速度 $v(t)$ は，

$$v(t)=-\frac{mg}{k}\left\{e^{-\frac{k}{m}t}-1\right\}. \tag{2.32}$$

速度は指数関数として振る舞うことが分かります．このまま，任意の位置座標 $x(t)$ を積分して求めましょう．

物体の任意の位置座標 $x(t)$ は，$v(t)$ を時間積分することで求まる．

$$\begin{aligned}
x(t) &= \int v(t)dt = \int -\frac{mg}{k}\left\{e^{-\frac{k}{m}t}-1\right\}dt, \\
&= -\frac{mg}{k}\left\{-\frac{m}{k}e^{-\frac{k}{m}t}-t+C\right\}. (C\text{: 積分定数})
\end{aligned} \tag{2.33}$$

運動の初期条件は，$t=0$ で $x(0)=x_0$ であるため，

$$\begin{aligned}
x_0 &= -\frac{mg}{k}\left\{-\frac{m}{k}+C\right\}, \\
C &= -\frac{k}{mg}x_0+\frac{m}{k}.
\end{aligned} \tag{2.34}$$

(2.34) を (2.33) に代入すると，

$$\begin{aligned}
x(t) &= -\frac{mg}{k}\left\{-\frac{m}{k}e^{-\frac{k}{m}t}-t-\frac{k}{mg}x_0+\frac{m}{k}\right\}, \\
&= \frac{m^2g}{k^2}e^{-\frac{k}{m}t}+\frac{mg}{k}t-\frac{m^2g}{k^2}+x_0.
\end{aligned} \tag{2.35}$$

[*31] 高校数学では，単に $\log\left|v-\frac{mg}{k}\right|$ と書くかもしれません．

特に，$v(t)$ のグラフはかなり重要です．その振る舞いを知るために，充分な時間が経過したときを考えてみます．

$v(t)$ において，$t \to \infty$ の極限をとると，

$$v(t) \to \frac{mg}{k}. \text{（定数）} \tag{2.36}$$

つまり，**充分な時間経過によって，物体の速度は定数になる，つまり加速度がゼロになるということです．**この速度を終端速度（Terminal velocity）と呼びます．終端速度は，運動方程式 (2.26) からも求まります．

運動方程式である (2.26) において，加速度 $a(t)$ をゼロとなるときの速度を v_f，とする．

$$\begin{aligned} 0 &= -kv_\mathrm{f} + mg, \\ v_\mathrm{f} &= \frac{mg}{k}. \end{aligned} \tag{2.37}$$

これらを踏まえて，$v-t$ グラフを以下に示します．

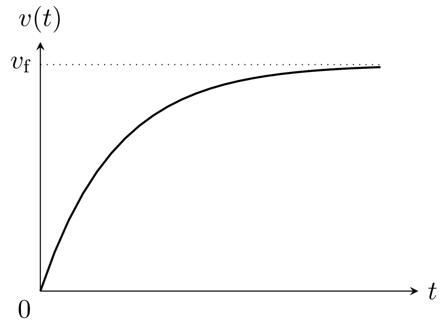

Fig.42　空気抵抗を受ける際の $v-t$ グラフ

時刻の経過とともに，物体の速度は収束していきます．また $v-t$ グラフの傾きである加速度も時刻の経過とともに値がゼロになっていきます．つまり，加速度が一番大きい瞬間は，運動が始まった瞬間です．

以上の微分方程式を解く議論や，$v(t)$，$x(t)$ の式は，受験の範疇を越えるものなので覚えるものではないですが，このグラフの形は極めて重要ですので，頭に入れておきましょう．

2.4　圧力

圧力（Pressure）とは，単位面積あたりにはたらく力です．単位は，$\mathrm{N/m^2}$ となりますが，これを Pa（パスカル）と書くことが多いです．ここでは，圧力の考え方の基礎を学び，浮力（Buoyancy）までを議論します．以降で登場する流体は，全て静止していると仮定します[*32]．

2.4.1　圧力の基礎

地球には，大気や水といった，流体（Fluid）が存在します．当たり前ですが，物体は流体と接するとその流体から接触力を受けます．特に，**物体が気体から押されるときの単位面積あたりの力を大気圧（Atmospheric pressure），物体が水から押されるときの単位面積あたりの力を水圧 (Watre pressure) と言います．**

[*32] 流体が運動する場合の一般論は，流体力学（Fluid dynamics）という学問体系で学ぶことができます．もちろん受験範囲外で，工学などへの応用において極めて重要です．

これら流体からの圧力の大きさは，その流体の密度と流体中における深さに関係します．以下に，流体からの圧力の式と性質をまとめます．

圧力

- 重力加速度を g，物体が存在する流体の密度を ρ，流体中での深さを h とする．その時点での圧力の大きさ P は，

$$P = \rho g h \tag{2.38}$$

圧力の大きさは，流体中の深さに比例する． 流体が大気の場合は，地面からよほど高度が高くならない限り，大気圧の値は $P_0 = 1.0 \times 10^5\,\mathrm{Pa}$ と一定値になる．
- **圧力は，流体中の全ての方向から面に対して垂直に作用する．**
- 大気と水の両方を考える場合，水面から深さ h の点での圧力は，大気圧と水圧の和になる．

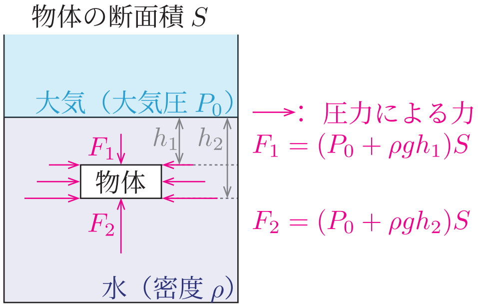

Fig.43　大気圧と水圧を受ける物体

圧力は単位面積あたりの力なので，力にするときは力がかかる面の面積を掛け算することを忘れないでください．

この (2.38) を示します．Fig.43 の例で考えてみましょう．**物体の上の大気と水の柱を注目物体にとり，力の絵を図示します．**

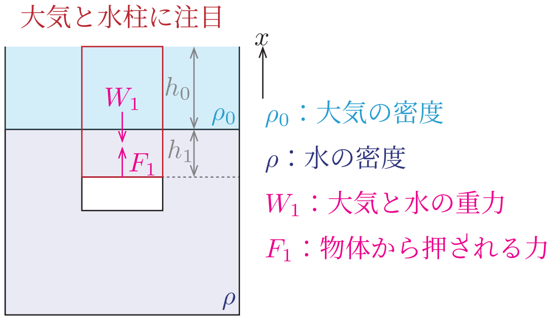

Fig.44　大気と水柱の力の図示

大気と水の柱は静止しているので，力の釣り合いの式を立式できます．

大気と水柱の力の釣り合いの式は,

$$x : 0 = F_1 - W_1 \tag{2.39}$$

大気と水の重力 W_1 は,

$$W_1 = (\rho_0 h_0 S + \rho h_1 S)g. \tag{2.40}$$

大気の重力は，大気が水を押す力に等しい．物体は地上表面におかれているとすると，大気圧 P_0 を用いて,

$$\rho_0 h_0 S g = P_0 S. \tag{2.41}$$

(2.39) より,

$$F_1 = P_0 S + \rho h_1 S g. \tag{2.42}$$

従って，深さ h_1 における圧力 P_1 は,

$$P_1 = \frac{F_1}{S} = P_0 + \rho h_1 g. \tag{2.43}$$

Fig.41 で，**物体の上面が下向きの圧力を受けるのは，$\boldsymbol{F_1}$ の作用・反作用によるものです．**流体によって押される力にも，当然ですが作用・反作用は存在します．

つまるところ，圧力とは流体が物体を押す力，つまり流体の重力そのものであるという考え方と，作用・反作用の組み合わせで理解することができます．

2.4.2 浮力

Fig.41 物体に働く力について，改めて考えます．物体に働く力を図示してみましょう．

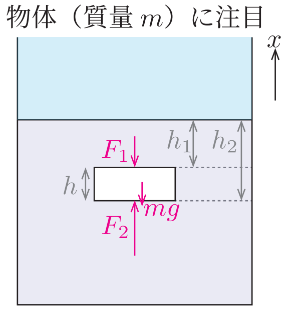

Fig.45 物体に働く力の図示

物体は静止しているため，やはり力の釣り合いの式を立式することができます．

物体の力の釣り合いの式は,

$$x : 0 = F_2 - F_1 - mg. \tag{2.44}$$

圧力の式を F_1 と F_2 に適用すると,

$$F_1 = (P_0 + \rho h_1 g)S, \tag{2.45}$$
$$F_2 = (P_0 + \rho h_2 g)S. \tag{2.46}$$

(2.44) より，

$$0 = (\rho h_2 - \rho h_1)gS - mg. \tag{2.47}$$

$h_2 - h_1 = h$ より，

$$0 = \rho hSg - mg. \tag{2.48}$$

(2.48) の ρhSg は，その表式から，物体が押し除けた水の重力であることが分かります．この力を，浮力（Buoyancy）と呼びます．

浮力

流体の密度を ρ，物体の体積を V，重力加速度を g とすると，物体が完全に流体中に存在するとき，流体からの圧力による力の差が物体にはたらく．この力の差を浮力と呼び，その大きさ f は，

$$f = \rho Vg. \tag{2.49}$$

浮力は，圧力による力の差なので，必ず鉛直上向きになる．作用点は重心．また浮力の大きさは，物体が押し除けた流体の重力と等しくなる．

物体が完全に流体中にある場合には，圧力による力ではなく，いきなり浮力が働くとして力の図示をしてもよいということです．その場合には，圧力による力は書いてはいけないので注意してください．複雑な問題では，浮力の式を使うよりも，圧力による力を丁寧に書き下すことで見通しがよくなる問題も多いです．

3　保存則

古典力学では運動の前後で，ある物理量が時間によらず一定になるときがあります．これは一般に，物理量の保存（Conservation of physical quantity）と呼ばれ，全ての保存則は運動方程式から導出されます．この節では，古典力学における重要な保存則を 2 つ学びます．運動方程式からの直接的な運動の議論ではなく，保存則による議論を理解できると，力学現象の様々な側面を見つめることができ，現象への向き合い方がより豊かなものとなります．

3.1　エネルギーと仕事

エネルギー（Energy）と仕事（Work）という新しい概念について学び，両者にどのような関係があるかを議論します．

3.1.1　エネルギーの概念

運動する物体や何かしらの場に存在する物体は，エネルギーを持ちます（エネルギーの表式は次節以降で議論します）．ここで**エネルギーとは，運動の潜在能力を指す新しい物理量です．**単位は J（ジュール）が用いられます．潜在能力という文字どおり，物体がエネルギーを持つと，それは現在運動中であるか，もしくはこれから先何かしらの物理現象を起こしうる可能性があるのです．可能性と書いたのは，**運動の途中でこのエネルギーは一定値をとることもありますが，増減することもあるからです．**このエネルギーを増減させる物理量が，次に述べる仕事です．

3.1.2　仕事

仕事（Work）とは，先述したエネルギーを増減させる物理量です．仕事は力によって引き起こされます．以下に正確な定義を述べます．

仕事

物体に力 $\boldsymbol{f}$ がかかりながら，物体の変位が x となったとき，力 $\boldsymbol{f}$ がする仕事 W は，以下の式で定義される．

$$W := \boldsymbol{f} \cdot \boldsymbol{x} = |\boldsymbol{f}||\boldsymbol{x}| \cos\theta. \tag{3.1}$$

ここで θ は，力と変位がなす角度である．仕事は力と変位の内積で定義される．内積を書き下すと，仕事は以下のように簡易的になる．

$$W = \pm(\text{力の大きさ}) \cdot (\text{距離}). \tag{3.2}$$

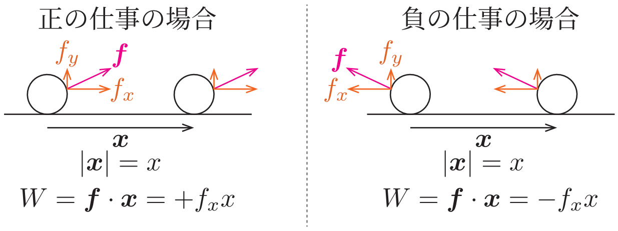

Fig.46　正の仕事と負の仕事

- **（3.2）で計算する場合，力と変位はそれぞれ平行な向き同士で掛け算する．力と変位が直角の関係のとき，仕事はゼロである．**符号が正の時，力の向きと変位が同じ向きで，負の時は逆向き．
- **正の仕事は，エネルギーを増加させる仕事で，負の仕事は，エネルギーを減少させる仕事である．**
- 定義からも明らかであるが，仕事の主体は力である．

仕事は定義通り内積で計算してももちろんよいですが，簡易的な式である（3.2）は直感的で使いやすいと思います．力と変位を平行になるように分解するのが重要です．分解するものは，力でも変位でもどちらでも構いません．以下に具体例を示します．

e.g. 粗い斜面上を下る物体

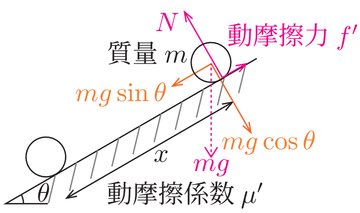

Fig.47　粗い斜面上を下る物体

物体に働く全ての力がする仕事を求めてみます．

垂直抗力 N の仕事 W_N，重力の仕事 W_{mg}，動摩擦力の仕事 $W_{f'}$ とする．垂直抗力と変位は直角の関係より，

$$W_N = 0. \tag{3.3}$$

重力については，変位と平行な力の大きさが $mg\sin\theta$ で，この力は変位と同じ向きであることから，

$$W_{mg} = +mg\sin\theta x. \tag{3.4}$$

動摩擦力については，変位と平行で向きが逆向きであるので，

$$W_{f'} = -f'x = -\mu' mg\cos\theta x. \tag{3.5}$$

ここで重要なのは，**仕事の符号は座標軸に依存しないということです．**あくまで，運動の向きと力の向きだけで決まります．どんな座標をとって計算をしたとしても，仕事は常に同じ値をとります．

3.1.3　運動エネルギーと仕事の関係

いよいよエネルギーと仕事の関係を議論します．運動エネルギー（Kinetic energy）とは，物体が運動をする際に有するエネルギーの一種です[*33]．この運動エネルギーは，前節で学んだ力による仕事で変化します，

運動エネルギーと仕事の関係

物体が速度を v で運動している時，物体は以下で定義される運動エネルギー K を有する．

$$K := \frac{1}{2}mv^2. \tag{3.6}$$

この運動エネルギーは，物体に力がかかるとき，その力の仕事で増減する．最初の運動エネルギーが K_0，最後の運動エネルギーが K_1，運動中，物体にかかる仕事が W であるとき，両者の関係は以下の式で表される．

$$K_0 + W = K_1 \tag{3.7}$$

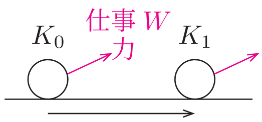

Fig.48　運動エネルギーと仕事の関係

柔らかい言葉にすると，以下のようになる．

$$（『まえ』の運動エネルギー）+（全ての力の仕事）=（『あと』の運動エネルギー）. \tag{3.8}$$

（3.7）や（3.8）を運動エネルギーと仕事の関係式，またはエネルギー方程式（Energy equation）と呼ぶ．

（3.7）や（3.8）はとても直感的な式ではないでしょうか．運動エネルギーは，力による仕事で変化するというのを主張しているだけです．感覚的には，お金のやりとりを思い浮かべるといいかもしれません[*34]．

立式における注意点は，**仕事 W という単語は，その W の中に正負の符号を含みます．**仕事の符号が明らかに負の場合でも，勝手に W の前に負符号をつけないようにしましょう．

では，このエネルギーと仕事の関係式は，経験的なものなのでしょうか．この関係式は，前節で学んだ力学の原理，運動方程式から導かれるものです．以下の具体例で考えます．

[*33] 後述しますが，エネルギーには種類があります．

[*34] エネルギーは財布の中の所持金で，仕事はアルバイトによる収入や，買い物による散財に対応します．

e.g.1 x 軸上を運動する物体

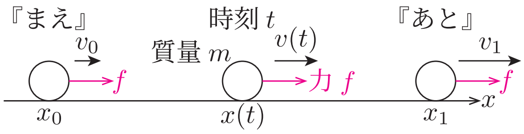

Fig.49　x 軸上を運動する物体

上図における運動エネルギーと仕事の関係式は，以下のようになります．

力 f がする仕事 W は，力と変位が同じ向きであるため，

$$W = +f(x_1 - x_0). \tag{3.9}$$

運動エネルギーと仕事の関係は，

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}mv_0^2 + W &= \frac{1}{2}mv_1^2, \\ \frac{1}{2}mv_0^2 + f(x_1 - x_0) &= \frac{1}{2}mv_1^2. \end{aligned} \tag{3.10}$$

この（3.10）を導いてみましょう[*35]．スタートは，運動方程式です．

任意の時刻 t における運動方程式は，加速度を a として，

$$x : ma = f. \tag{3.11}$$

加速度 a は，速度 $v(t)$ を用いると，

$$m\frac{dv}{dt} = f. \text{（変数 } t \text{ は省略）} \tag{3.12}$$

（3.12）の両辺に速度 v をかけると，

$$m\frac{dv}{dt}v = fv. \tag{3.13}$$

速度 v は，物体の位置座標 $x(t)$ を用いると，

$$\begin{aligned} mv\frac{dv}{dt} &= f\frac{dx}{dt}, \text{（変数 } t \text{ は省略）} \\ mvdv &= fdx. \end{aligned} \tag{3.14}$$

両辺を運動の前後で積分すると，

$$\int_{v_0}^{v_1} mvdv = \int_{x_0}^{x_1} fdx, \tag{3.15}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}mv_1^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 &= f(x_1 - x_0), \\ \frac{1}{2}mv_0^2 + f(x_1 - x_0) &= \frac{1}{2}mv_1^2. \end{aligned} \tag{3.16}$$

[*35] ここから先は発展内容です．興味のある人は式を追いかけてみてください．

このように，運動エネルギーも自然と導出され，エネルギーと仕事の関係式も導くことができました．このように運動方程式の両辺に速度 $v = \dfrac{dx}{dt}$ をかけ，両辺の積分をとる操作は，運動方程式からエネルギーの関係式を導く一般的な方法です*36．またこの方法は，電磁気学における回路方程式（Equation of circuit）に電流 i をかけて積分し，回路のエネルギー収支を立式することと等価で，運動方程式と回路方程式が基礎方程式として等価であることを示唆します．詳しくは電磁気学で学びましょう．

運動方程式からエネルギーの関係式へ（発展）

運動方程式の両辺に速度をかけ，積分を施すことで，運動の前後のエネルギーの関係式を求めることが可能．

ここで強調しておきますが，受験においてこの操作をする必要は一切ありません．**むしろ，運動方程式から厳密に導かれるこの関係式が，非常に直感的に立式できることが驚くべき事実です．***37運動の前後のエネルギーと，途中の仕事を抜き出すように立式しましょう．

次はこの運動エネルギーと仕事の関係式を用いて，力学の物理量を計算してみましょう．先ほども例としてとりあげた，粗い斜面上を下る物体を取り上げます．

e.g.2 粗い斜面上を下る物体（再掲）

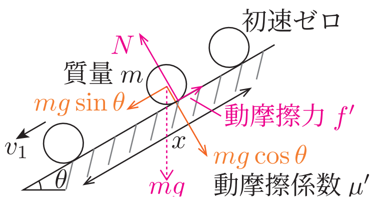

Fig.50　粗い斜面上を下る物体

Fig.48 で，初速ゼロで斜面上を距離 x だけ滑り降りたときの速さ v_1 を運動エネルギーと仕事の関係式で求めてみます．

滑り始めたときの運動エネルギーはゼロ．運動中，重力と動摩擦力は仕事をする．垂直抗力は変位に垂直なので，仕事をしない．それぞれの仕事を W_{mg}，$W_{f'}$ とすると，運動エネルギーと仕事の関係式は，

$$0 + W_{mg} + W_{f'} = \frac{1}{2}mv_1^2. \tag{3.17}$$

$W_{mg} = +mg\sin\theta x$，$W_{f'} = -\mu' mg\cos\theta x$ を (3.17) に代入すると，

$$mg\sin\theta x - \mu' mg\cos\theta x = \frac{1}{2}mv_1^2,$$
$$v_1 = \sqrt{g(\sin\theta - \mu'\cos\theta)x}. \tag{3.18}$$

これは運動方程式から加速度を求め，その加速度から計算したときと勿論同じ結果です．

*36 より一般に，3 次元での運動方程式からエネルギーの関係式を導くときには，速度 $\boldsymbol{v}$ の内積をとって，積分を施します．これは，大学初年級での古典力学で学ぶでしょう．

*37 自然科学を学んでいくと，数式の振る舞いが人間の直感に反することはいくらでもあります．むしろ，反するものばかりかもしれません．

斜面下向きを正の方向とする．加速度を a として運動方程式は，

$$x : ma = mg\sin\theta - \mu' mg\cos\theta, \tag{3.19}$$
$$a = g(\sin\theta - \mu'\cos\theta). \tag{3.20}$$

等加速度の『便利な式』より，

$$v_1^2 - 0 = 2g(\sin\theta - \mu'\cos\theta)x,$$
$$v_1 = \sqrt{g(\sin\theta - \mu'\cos\theta)x}. \tag{3.21}$$

このように，力学の問題は運動方程式から加速度を求めて解く時間追跡以外にも，エネルギーや仕事に注目することによって物理量を求めるアプローチがあります．どちらも等しい結果を与えますが，問題に応じて適切な方法を選べるようになることが重要です*38.

3.1.4　保存力と位置エネルギー

仕事の主体は力である，ということを協調してきましたが，**仕事の値が物体の動く経路に依存しない特別な力があります．**こういった性質をもつ力を保存力（Conservative force）と呼びます．代表的な保存力は，重力です．以下に具体例を示すので，重力のする仕事が経路に依存しないことを確認してみましょう*39.

e.g. 重力の仕事

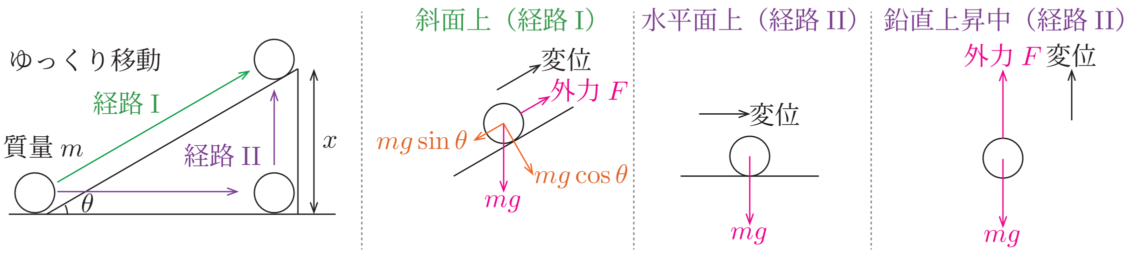

Fig.51　2 つの経路における重力の仕事

Fig.49 における，2 つの経路でそれぞれ重力を求めてみましょう．『ゆっくり移動』とは，力を釣り合わせた状態で動かすという意味です．そのため，経路 II の水平面上を変位するときは，摩擦や空気抵抗を考慮しないので，水平方向に力は働かない理想的な状態を考えています．もちろん，この例では外力が働いて斜面の頂上に到達しているわけですが，**仕事は物体に働く力全てで求めることができるので，この例でも重力がする仕事が存在することに注意しましょう．***40

経路 I について，進む距離は $\dfrac{x}{\sin\theta}$．変位と平行な力の大きさは $mg\sin\theta$．変位と力の方向が逆なので，この経路 I での重力の仕事 W_I は，

$$W_\mathrm{I} = -mg\sin\theta\frac{x}{\sin\theta} = -mgx. \tag{3.22}$$

*38 特に，加速度が時間に依存するような場合には，エネルギーと仕事からのアプローチはかなり強力です．

*39 以下の議論は，重力が保存力であることの厳密な証明ではありません．力が仕事に依存しない保存力である条件は，厳密にはベクトル解析を用いて表現されます．大学初年級の古典力学の内容です．

*40 日常用語の意味での『仕事』とは，この意味で違います．『物体が変位する方向に働く力が物体を動かした』，という意味での仕事ではないので注意しましょう．

経路 II について，水平面上を動く時は，変位と重力が垂直の関係なので，このときの仕事はゼロ．鉛直方向に上昇する時は，変位と重力の方向が逆方向なので，経路 II における重力がする仕事 W_{II} は，

$$W_{\mathrm{II}} = -mgx. \tag{3.23}$$

両者が一致することを確認できました．今回はこの 2 つの経路だけを考えましたが，実際にはどんな運び方をしても，重力の仕事は一致します．**運動の前後の様子だけで仕事量が一意に決定されるのが，保存力の特徴です．**

また外力の仕事についても保存力と逆向きなので，仕事の符号が異なるだけになり，やはり経路に依存しなくなります[*41]．**この保存力の特徴から，保存力が働く空間において，物体が基準位置からどこかしらに動いた場合，つねに定められた量の仕事が物体になされていることになります．この保存力に起因する仕事を，位置エネルギー（Potential energy）として定義し，物体がある基準位置から動いたことで有するエネルギーとして解釈します．**

保存力と位置エネルギー

- 保存力とは，その仕事の値が運動の前後の状態だけで一意に決定される特別な力である．物体に保存力が働く場合，物体が基準位置からある場所に動いた際には，どんな動き方をしたとしても一定量の仕事がなされた状態である．
- 基準からある場所まで動いた際に，保存力と逆向きの外力がした仕事を，物体がその場所で有する位置エネルギーと定義する．位置エネルギー U の数式での定義は，以下のようになる．

$$U := \boldsymbol{F}_{\text{外力}} \cdot \boldsymbol{x}. \tag{3.24}$$

- また外力とただ逆向きなので，保存力の仕事として位置エネルギーを定義するのであれば，(3.24) に負符号をつければよい．

$$U := -\boldsymbol{f}_{\text{保存力}} \cdot \boldsymbol{x}. \tag{3.25}$$

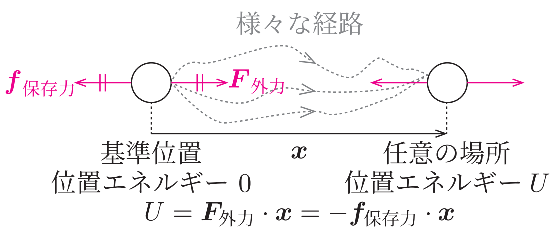

Fig.52　位置エネルギーの定義

外力を用いて位置エネルギーを定義するのは，外力がないとそもそも任意の場所まで動かすことができないためです．噛み砕いて言うと，**ある問題設定を作る際には必ず保存力と逆向きの外力が必要で，その外力がする仕事がどんな運び方をしても一定値であるから，その仕事を物体がその場所で有するエネルギーであると解釈できる**，ということです[*42]．

[*41] 保存力と逆向きにはたらく外力だけが，仕事が経路に依存しなくなります．一般的な外力は，保存力となりません．

[*42] ある状況を作り出そうとしたときに，外力による仕事が物体に蓄えられたとイメージしてもよいです．が，とても厳密な位置エネルギーの考え方は，保存力が働く場自体に位置エネルギーは存在すると考えるので，物体に何か形として『蓄えられる』ものではありません．

(3.24)，(3.25) のどちらの定義でも位置エネルギーは定義できますが，上述したように (3.24) の外力で定義する方が直感的で分かりやすいと思います．が，(3.25) の定義の方が保存力を直接用いたスマートな表現なので，こちらの方が物事を考えやすい場合もあり，大学以降での古典力学の学習ではこちらの表現を用いることが多いと思います．

少し抽象的な話が続いたので，古典力学でよく登場する位置エネルギー 2 つを次節で紹介します．

3.1.5 重力と弾性力の位置エネルギー

古典力学における保存力の代表例は，重力と弾性力です．この 2 つの力は，仕事が経路に依存しないため，位置エネルギーを定義できます．どのような位置エネルギーをとるのかを，まずは先に示します．

重力と弾性力の位置エネルギー

1. 重力
   質量 m の物体がある基準位置より h だけ高いとき，その物体が有する重力の位置エネルギー U_{mg} は，以下の式で示される．
   $$U_{mg} = mgh. \tag{3.26}$$
   基準位置より低ければ，位置エネルギーは負の値を取る．**重力の位置エネルギーの基準位置は任意である．**
2. 弾性力
   バネ定数 k のバネに物体がつけられ，バネが自然長より X だけ伸縮する場合に物体が有する弾性力の位置エネルギー U_k は，以下の式で示される．
   $$U_k = \frac{1}{2}kX^2. \tag{3.27}$$
   バネが伸びていても縮んでいても，弾性エネルギーは常に正の値を取る．

位置エネルギーの値は，座標軸の取り方に依存しない．あくまで基準位置からどの位置にあるのかで決まる．

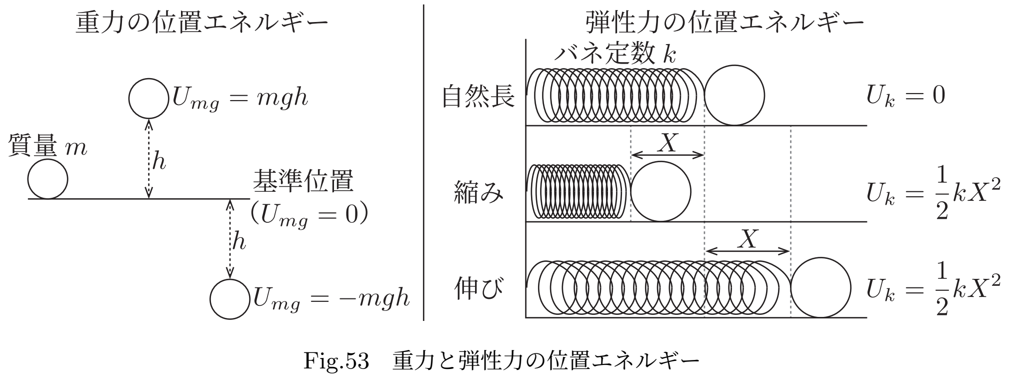

Fig.53 重力と弾性力の位置エネルギー

それぞれの式を導出してみましょう．まずは重力の位置エネルギーからです．外力で基準位置から高い位置にきた時を考えます．

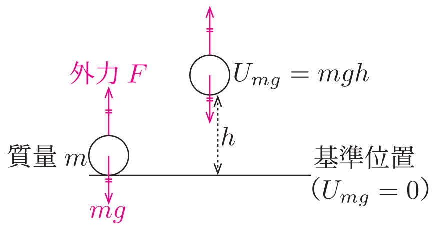

Fig.54　重力の位置エネルギー

外力による仕事の定義，(3.24) を用いて計算してみます．

外力と重力が釣り合いを保ったままゆっくり運ぶとする．基準位置から外力の大きさ F で，高さ h のところまで物体を運んだ時に外力がする仕事 W_F は，

$$W_F = +F \cdot h = mgh := U_{mg}. \tag{3.28}$$

もちろん，保存力による定義，(3.25) を用いても同じ結果になります．

高さ h のところまで物体を運んだ時，(3.25) による保存力の仕事による位置エネルギーの定義から，

$$U_{mg} := -(-mg \cdot h) = mgh. \tag{3.29}$$

(3.29) の最初の負符号は (3.25) の定義の負符号で，2 番目の負符号は重力のする仕事が負であることを示す負符号です．

次は弾性力の位置エネルギーについてです．同様に，外力を加えて釣り合いを保ちながら，基準位置からバネを伸ばすことを考えましょう．

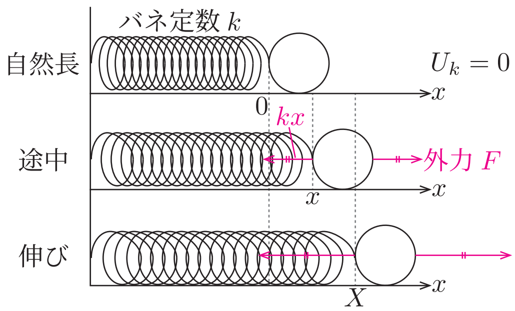

Fig.55　弾性力の位置エネルギー

重力の位置エネルギーの導出と 1 つ異なるのが，外力 F の大きさが変動することです．弾性力はフックの法則より，バネの伸縮の長さに比例するため，伸びの長さが大きくなると弾性力が増大し，それに伴って外力も増大するのです．この場合の外力の仕事は，微小区間で考えたのちに積分を施します．**微小変位 dx だけ伸ばす間は，外力の大きさ F は一定であるとみなせます．**

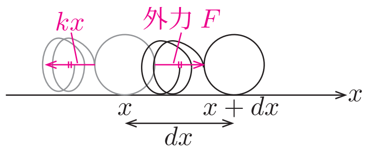

Fig.56　微小区間の仕事

微小変位 dx だけ動いた時の，外力がする微小な仕事 dW_F は，

$$dW_F = +F \cdot dx = kxdx. \tag{3.30}$$

(3.30) の積分を取ると，

$$W_F = \int_0^X kxdx = \frac{1}{2}kX^2 := U_k. \tag{3.31}$$

もちろん，保存力の定義からでも求まります．

伸びの長さが X のところまで物体を運んだ時，(3.25) による保存力の仕事による位置エネルギーの定義から，

$$U_k := -\int_0^X -kxdx = \frac{1}{2}kX^2. \tag{3.32}$$

負符号の重力の位置エネルギーの時と同様，最初の負符号は定義の負符号で，2 番目の負符号は弾性力のする仕事が負であることを示す負符号です．

これら一連の積分の動作は，外力 F と座標 x の $F-x$ グラフが囲む面積であることを示しています．

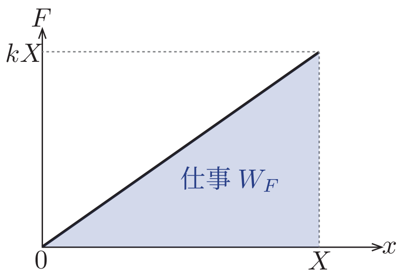

Fig.57　$F-x$ グラフが囲む面積

Fig.57 より，$F-x$ グラフの面積が仕事に等しくなるため，

$$W_F = \frac{1}{2} \cdot kX \cdot X = \frac{1}{2}kX^2. \tag{3.33}$$

力が変動する場合の仕事の導出について，まとめておきましょう．

変動する力がする仕事

力が変動する場合の仕事は，次の 2 通りがある．

1. 微小な変位では力の大きさは一定とみなし，微小区間の仕事を求め，積分をとる．
2. 力の大きさと座標の関係をグラフで書き，グラフで囲まれた面積を求める．

両者の計算方法は等価なものですが，グラフを書いて面積で処理する方が初等的で分かりやすいかもしれません．

3.1.6　力学的エネルギーと仕事の関係

前節で定義した位置エネルギーと運動エネルギーの総和を，力学的エネルギー（Mechanical energy）と呼びます．この力学的エネルギーも，やはり仕事によって増減します．ただし，**運動エネルギーの場合と異なり，非保存力がする仕事によって増減します．**保存力の仕事は，位置エネルギーとしてエネルギーに取り込まれているからです．また，**非保存力が仕事をしないとき，力学的エネルギーの総和は運動の前後で一定値をとります．これを，力学的エネルギー保存則（Conservation of mechanical energy ）と呼びます．**

力学的エネルギーと仕事の関係

- 位置エネルギーと運動エネルギーの和である力学的エネルギーは，運動の前後で非保存力がする仕事で値が増減する．具体的な関係式は以下のようになる．
$$(『まえ』の力学的エネルギー) + (非保存力の仕事) = (『あと』の力学的エネルギー). \tag{3.34}$$
これを力学的エネルギーと仕事の関係式，もしくはエネルギー方程式と呼ぶ．これは，(3.8) の運動エネルギーと仕事の関係と等価である．
- 非保存力が仕事をしないとき，運動の前後の力学的エネルギーは一定値となる．すなわち，
$$(『まえ』の力学的エネルギー) = (『あと』の力学的エネルギー), \tag{3.35}$$
という関係式が成立する．これを力学的エネルギー保存則と呼ぶ．

(3.34)，(3.35) は運動エネルギーと仕事の関係式である (3,8) と解釈が異なるだけで等価なものです．具体例で確認してみましょう．

e.g.1 滑らかな斜面を下る物体

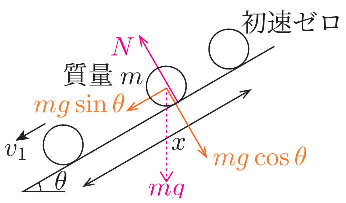

Fig.58　滑らかな斜面を下る物体

運動の前後で物体に働く力は垂直抗力と重力です．重力は保存力なので位置エネルギーとしてとりこまれ，垂直抗力は非保存力ですが変位と垂直な向きの力なので仕事はありません．したがって，この例では力学的エネルギー保存則が成立します．速さ v_1 を計算で求めてみましょう．

非保存力が運動の前後で仕事をしない．重力の位置エネルギーの基準を最下点にとる．力学的エネル

ギー保存則より，

$$mgx\sin\theta = \frac{1}{2}mv_1^2, \tag{3.36}$$
$$v_1 = \sqrt{2gx\sin\theta}. \tag{3.37}$$

重力の位置エネルギーの基準位置の取り方は自由です．最高点を基準位置にしても同じ結果が得られます．これは皆さんで確認してみてください．

同じことを，(3.8) の運動エネルギーと仕事の関係式で計算してみます．働く力が全てがする仕事を計算します．

運動の前後で垂直抗力のする仕事はゼロ．重力のする仕事 W_{mg} は，

$$W_{mg} = +mg\sin\theta x. \tag{3.38}$$

運動エネルギーと仕事の関係式より，

$$0 + W_{mg} = \frac{1}{2}mv_1^2, \tag{3.39}$$
$$mgx\sin\theta = \frac{1}{2}mv_1^2,$$
$$v_1 = \sqrt{2gx\sin\theta}. \tag{3.40}$$

2 つの考え方は等価であることが確認できました．繰り返しになりますが，保存力がする仕事が経路に依存しないため，その仕事をエネルギーとして解釈することができる，というのが位置エネルギーです．**位置エネルギーの立場で問題を考える場合には，保存力の仕事を考えることがないように注意しましょう．**

e.g.2 粗い斜面上を下る物体（再々掲）

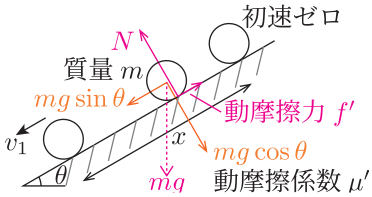

Fig.59　粗い斜面上を下る物体

3.1.3 節でも取り上げた粗い斜面上を下る物体の速さを，力学的エネルギーの立場で考えてみます．非保存力として動摩擦力があるため，その仕事を考えましょう．

運動の前後における動摩擦力の仕事 $W_{f'}$ は，

$$W_{f'} = -\mu' mg\cos\theta x. \tag{3.41}$$

重力の位置エネルギーの基準を最下点にとると，力学的エネルギーと非保存力の関係式より，

$$mgx\sin\theta + W_{f'} = \frac{1}{2}mv_1^2, \tag{3.42}$$
$$mgx\sin\theta - \mu' mg\cos\theta x = \frac{1}{2}mv_1^2,$$
$$v_1 = \sqrt{g(\sin\theta - \mu'\cos\theta)x}. \tag{3.43}$$

当然ですが，3.1.3 節と同様の結果を得ることができます．どちらの立場でも問題なく計算できます．問題により適切な立場を選べばよいですが，バネが絡む場合には弾性力の仕事は先述した通り少し手間なので，弾性力の位置エネルギーを最初から取り入れて立式する方が早いかもしれません．

これまで議論した通り，エネルギーという新しい概念は運動の前後で仕事によって増減したり，異なるエネルギーに変換されることが分かります．例えば摩擦や空気抵抗がある場合に，物体の力学的エネルギーは減少するわけですが，実際には音や熱といった別のエネルギーの形に姿を変えて存在します．つまり，物体のエネルギーは広い視点では保存が保たれているのです．このエネルギーの特徴が，今日の現代社会を支える発電や，生き物の生命維持に大きく関わっています．

3.2 運動量と力積

エネルギーとはまた異なる物理量である、運動量（Momentum）と力積（Impulse）について学びます．

3.2.1 運動量の概念

まずは運動量という物理量を定義しましょう．

運動量の定義

質量 m の物体が速度 $\boldsymbol{v}$ をもつとき，その物体の運動量 $\boldsymbol{p}$ は，以下の式で定義される．

$$\boldsymbol{p} := m\boldsymbol{v}. \tag{3.44}$$

(3.44) より，運動量 $\boldsymbol{p}$ は速度と同じ方向をもつベクトル量である．

この運動量が意味する物理的な意味合いは中々に難しいです．参考書や教科書では『運動の勢い』であると記述されることもありますが，本質的ではないと思います．運動量とは，力学（というより物理学全体）における最も一般的な変数の 1 つである[*43]というのが答えの 1 つではないでしょうか．物理的な意味合いを考えるよりも，この新しい物理量が，運動中でどのように増減したり，一定値をとるのかをということに注目して議論を進めましょう．

3.2.2 運動量と力積の関係

1 次元上で，大きさ f の力を受けている物体の運動方程式を考えてみます．加速度を a としましょう．

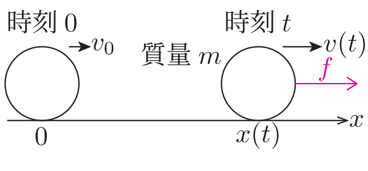

Fig.60 x 軸上での運動方程式

*43 運動量は，解析力学や統計力学，そして量子力学における重要な物理量ハミルトニアン H を表す正準変数（Canonical variable）の 1 つであり，学習が進むと物体の運動は一般化座標と一般化運動量で表現される相空間（Phase space）において記述されます．統一的な目線における物理現象の記述とは，現象の前後において運動量の推移を考えることと等価です．

物体の運動方程式は,

$$x : ma = f. \tag{3.45}$$

(3.45) は変数 t を省略しました．この運動方程式に 1.2.4. 節で述べた運動と数学の関係を用いて，式の見た目を変化させます．加速度 a は，速度 v を用いると $a = \dfrac{dv}{dt}$ です．この形を加速度に代入します．

$a = \dfrac{dv}{dt}$ を (3.45) に用いると，

$$m\frac{dv}{dt} = f. \tag{3.46}$$

Fig.60 における運動量 p は，$p = mv$ です．これを時刻 t で微分してみます．

運動量 p を時刻 t で微分すると，m は定数であることに注意して，

$$\frac{dp}{dt} = m\frac{dv}{dt}. \tag{3.47}$$

(3.46) に代入すると，

$$\frac{dp}{dt} = f. \tag{3.48}$$

ここまでただ書き換えを行なってきただけですが，(3.48) は運動方程式に解釈を加えることができます．運動方程式の左辺 ma は，運動量 p の時間微分，**つまり単位時間における運動量変化を意味していたのです．** (3.48) をさらに式変形します．

(3.48) の両辺に dt をかけると，

$$dp = fdt. \tag{3.49}$$

両辺の積分を，Fig.60 より時刻 0 から t までで実行する．時刻 0 のときの物体の運動量を $mv_0 = p_0$ とすると，

$$\int_{p_0}^{p} dp = \int_0^t fdt, \tag{3.50}$$

$$p - p_0 = \int_0^t fdt. \tag{3.51}$$

$p = mv$，$p_0 = mv_0$ と，速度を用いて表現すると，

$$mv - mv_0 = \int_0^t fdt, \tag{3.52}$$

$$mv_0 + \int_0^t fdt = mv. \tag{3.53}$$

(3.53) は運動量の変化を記述しています．『まえ』の運動量は $\displaystyle\int_0^t fdt$ によって，『あと』の運動量に変化しています．この $\displaystyle\int_0^t fdt$ を力積と呼びます．**運動量は力積によって変化するのです．**

運動量と力積の関係

物体に力 f が時刻 0 から t_0 まで働いていたとき，力積 I を，以下の式で定義する．

$$I := \int_0^{t_0} f dt. \tag{3.54}$$

力積は，物体に働く力が運動の時間中に物体に及ぼした影響を意味している．**力積には向きがあり，その方向は力の向きと座標の正負の方向により決まる．**またこの定義より，力積 I の大きさは，**$f-t$ グラフが囲む面積の大きさに等しいことが分かる．**
力が時間変化せずに一定値 F であるとき，力が掛かっていた時間を Δt とすると，力積 I は以下の式で表される．

$$I = F\Delta t. \tag{3.55}$$

運動量は力積で変化する．つまり，

$$(『まえ』の運動量) + (物体に加えられた力積) = (『あと』の運動量). \tag{3.56}$$

(3.56) を，運動量と力積の関係式（Relation of momentum and impluse）と呼ぶ．**(3.56) は向きを持ったベクトルの式であることに注意．**

(3.56) はエネルギーと仕事の関係によく似ています．考え方のプロセスも同様です．注意点は，エネルギーと仕事の関係式は正負の符号をもつスカラー量であったことに対し，運動量と力積の関係式は向きをもつベクトルの関係式であることです．またエネルギーと仕事の関係式は，力と変位の関係を表すものでしたが，この運動量と力積の関係式は力と時間の関係を表すものです．**運動量の変化が，力と時間経過によって引き起こされることを主張しています．**

3.2.3 運動量変化の具体例

抽象的な議論が続いたので，具体的な運動で運動量の変化を見ていきましょう．

e.g.1 動摩擦力を受ける物体

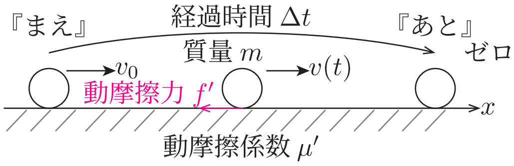

Fig.61　動摩擦力を受ける物体

まずは直感的に，運動量の変化を数式で記述してみます．

物体に働く動摩擦力の大きさ f' は，

$$f' = \mu' mg. \tag{3.57}$$

運動の前後での，経過時間が Δt より，動摩擦力の力積 I は，

$$I = -\mu' mg\Delta t. \tag{3.58}$$

運動の前後における，運動量と力積の関係式は,

$$mv_0 + I = 0, \tag{3.59}$$
$$mv_0 - \mu' mg\Delta t = 0. \tag{3.60}$$

動摩擦力は一定の大きさであるため，力積はとてもシンプルな形の（力）×（時間）で表されます．また (3.58) の負符号は，力が x 軸負方向を向いていることを意味しています．力積は向きを持ったベクトル量であることに注意をしましょう．

(3.60) は，運動方程式の積分によっても導くことができます．

任意の運動途中における運動方程式は,

$$m\frac{dv}{dt} = -\mu' mg. \tag{3.61}$$

両辺の dt を払い，運動の前後で積分をとると,

$$\int_{v_0}^{0} mdv = \int_{0}^{\Delta t} -\mu' mgdt, \tag{3.62}$$
$$0 - mv_0 = -\mu' mg\Delta t,$$
$$mv_0 - \mu' mg\Delta t = 0. \tag{3.63}$$

エネルギー方程式の節でも述べましたが，運動方程式から導ける関係式は，人間の直感に基づいて立式できる点が重要です．この操作を入試で行う必要はありません．

e.g.2 2 次元における運動量と力積の関係式—バットとの衝突—

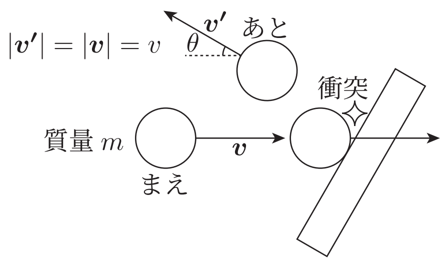

Fig.62　バットと衝突する物体

エネルギーと仕事の関係と大きく異なる点は，運動量の関係式はベクトルの関係式であるという点です．立式のプロセスは同じですが，ベクトルの足し引きによる立式もできるようにしておきましょう．Fig.62 において，物体に加えられた力積を計算してみましょう．

物体が受けた力積を $\boldsymbol{I}$ とする．運動量と力積の関係式より,

$$m\boldsymbol{v} + \boldsymbol{I} = m\boldsymbol{v}', \tag{3.64}$$
$$\boldsymbol{I} = m\boldsymbol{v}' - m\boldsymbol{v}. \tag{3.65}$$

Fig.62 においてベクトルの引き算を行うと以下のようになる．

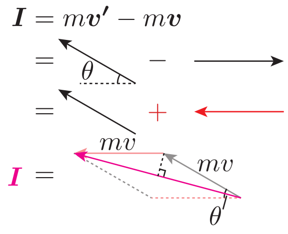

Fig.63　力積のベクトル算

Fig.63 より，求めたい力積の大きさは直角三角形の斜辺の長さに等しくなるため，力積の大きさ $|\boldsymbol{I}| = I$ は,

$$I = 2mv\cos\frac{\theta}{2}. \tag{3.66}$$

2 次元の問いでも，このように同じように立式し，答えることができます．ただし，大きさの計算は幾何学的な処理になることに気をつけましょう．

3.2.4　2 体系における運動量の変化

物体が複数存在する多体系において，運動量の変化の議論は豊かな物理現象を記述します．ここでは，物体が 2 つの 2 体系について具体的な運動を例に議論してみましょう．まずは動摩擦力を受ける小物体と台の運動についてです．

e.g.1 動摩擦力を受ける小球と台

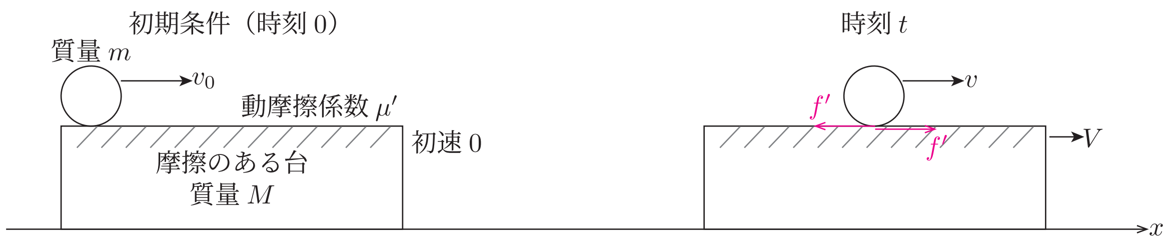

Fig.64　動摩擦力を受ける小球と台

議論の始まりは，やはり運動方程式です．小球と台の加速度をそれぞれ a，b と置いて運動方程式を立式します．

初期条件のとき，台から見た小球の相対速度は，$v_0 - 0 = v_0$ より，x 軸正方向の速度．動摩擦力は粗い面に対する相対速度と逆向きであるため，小球には x 軸負の方向に，台には作用・反作用の法則より x 軸正方向に動摩擦力が作用する．動摩擦力の大きさを f' とすると，小球と台の運動方程式は,

$$\text{小球} : ma = -f' = -\mu' mg, \tag{3.67}$$
$$\text{台} : Mb = +f' = \mu' mg. \tag{3.68}$$

それぞれの運動方程式から加速度が求まり，その結果が等加速度であることも明白なので，等加速度の式を用いれば何でも計算することはできますが，ここでは運動量の視点からこの運動を議論したいと思います．立

式したそれぞれの運動方程式 (3.67) と (3.68) の両辺を足してみます．

(3.67) と (3.68) の両辺をそれぞれ足すと，

$$ma + Mb = 0. \tag{3.69}$$

(3.69) は何を主張しているのでしょうか．前節でも述べましたが，運動方程式の左辺（今回の例では ma と Mb）は，単位時間における運動量変化を意味していました．つまり，(3.69) を運動量の観点で読むと，**単位時間において台と小球の運動量変化の和はゼロである**ということが読み取れます．単位時間で運動量が変化しないのであれば，系の運動量の総和は，何か一定の値に保たれているはずです．運動量が一定値ということは，物体の速度が一定値となることと同値です．この速度を V_0 と置いて，初期条件を利用して計算してみましょう．

小球と台が時間経過で一定の速度となることを仮定し，そのときの速度を V_0 とする．台と小球の運動量の総和は運動中常に等しくなることから，

$$mv_0 + 0 = mV_0 + MV_0, \tag{3.70}$$

$$V_0 = \frac{mv_0}{m+M}. \tag{3.71}$$

この結果は，等加速度運動から導けるものでしょうか．一定速度になったときの時刻を T として，等加速度運動の式から計算してみましょう．

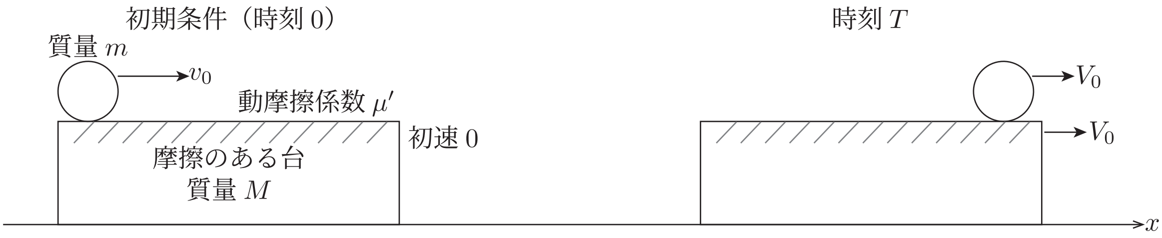

Fig.65　一定速度となる小球と台

小球と台の加速度はそれぞれ $a = -\mu' g$，$b = \dfrac{\mu' mg}{M}$．小球と台の等加速度の『速度の式』より，

$$\text{小球} : V_0 = v_0 - \mu' gT, \tag{3.72}$$

$$\text{台} : V_0 = \frac{\mu' mg}{M}T. \tag{3.73}$$

(3.73) より，

$$T = \frac{M}{\mu' mg}V_0. \tag{3.74}$$

(3.73) に代入して，

$$V_0 = v_0 - \mu' g \frac{M}{\mu' mg}V_0,$$

$$V_0 = \frac{mv_0}{m+M}. \tag{3.75}$$

等加速度からも同じ結果が導かれました．この一体となる速度に関しては，運動量による議論から導くことができるということです．(3.70) のように，系の運動量の総和が一定値となる法則を，運動量保存則（Conservation of momentum）と呼びます．この運動量保存則が成立した鍵は，小球と台の運動方程式の和である (3.69) でした．この式から，3.2.2 節で議論したのと同様に，積分を用いて定量的に運動量保存則を導くと，以下に示す議論になります．

任意の時刻 t における小球と台の加速度 a，b は，それぞれの速度 v，V を用いると，$a = \dfrac{dv}{dt}$，$b = \dfrac{dV}{dt}$ となる．この表式を (3.69) に代入すると，

$$m\frac{dv}{dt} + M\frac{dV}{dt} = 0, \tag{3.76}$$

$$mdv + MdV = 0. \tag{3.77}$$

両辺をそれぞれ初期条件から一定速度 V_0 となるまでで積分すると，

$$\int_{v_0}^{V_0} mdv + \int_{0}^{V_0} MdV = 0, \tag{3.78}$$

$$mv_0 + 0 = mV_0 + MV_0. \tag{3.79}$$

ここまでの議論をまとめます．

運動量保存則

他体系において，運動方程式の総和がゼロになるとき，運動量の値が運動の前後で一定となる運動量保存則が成立する．質量 m の物体 A と質量 M の物体 B の 2 体系の場合，それぞれの加速度を a，b とすると，

$$ma + Mb = f_\mathrm{A} + f_\mathrm{B} = 0, \tag{3.80}$$

が成立する場合，A と B の運動量は保存する．ここで f_A と f_B は A と B の合力を示す．$f_\mathrm{A} + f_\mathrm{B} = 0$ となるような 2 力関係を，内力（Internal force）と呼ぶ．内力の関係となる代表的な関係は，作用・反作用の法則を満たす 2 力である．**多体系で，内力のみを受けて運動する場合，系全体の運動量は保存する．** この議論は，物体が複数ある場合でもそのまま適用できる．

運動量保存則が成立するための条件を，運動方程式から議論できるか否かは極めて重要です．『内力のみで運動する』という言葉による理解だけでなく，運動方程式から考えられるようになると，設定が複雑な問いにもアプローチすることができます[*44]．

この運動量保存則が成立する設定でよく登場するのが，2 物体の衝突の問題です．以下に具体例を示します．

[*44] 今回は 2 体系で議論しましたが，物体（質点）が一般に複数あるときの運動量保存則が成立するための必要十分条件は，$\Sigma_{i=1} m_i \boldsymbol{a}_i = \Sigma_{i=1} m_i \dfrac{d\boldsymbol{v}_i}{dt} = \boldsymbol{0}$，です．ここで，$m_i$ と $\boldsymbol{a}_i = \dfrac{d\boldsymbol{v}_i}{dt}$ は i 番目の質点の質量と加速度を表しています．本来はベクトルの式であることに留意しましょう．

e.g.2 x 軸上で衝突する 2 物体

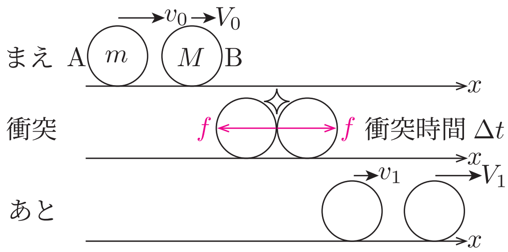

Fig.66　衝突する 2 物体

衝突時には，2 物体には撃力（Impulsive force）が作用しますが，これは作用・反作用を満たします．つまり，それぞれ同じ大きさで，向きが逆であるということです．この撃力によって速度が変化した 2 物体の運動を議論してみましょう．まずは運動方程式です．

衝突した瞬間，物体 A の物体の加速度を a，物体 b の物体の加速度を b とすると，運動方程式は,

$$\mathrm{A} : ma = -f, \tag{3.81}$$
$$\mathrm{B} : Mb = +f. \tag{3.82}$$

(3,80)，(3.81) の両辺を足すと，

$$ma + Mb = 0. \tag{3.83}$$

つまり，撃力が作用する運動では，系全体の運動量は保存することが分かります．運動量保存則を立式してみましょう．

運動量保存則より，

$$mv_0 + MV_0 = mv_1 + MV_1. \tag{3.84}$$

この運動量保存則は，A と B のそれぞれの運動量と力積の関係からも導けます．

A，B が受けた撃力による力積をそれぞれ I_A，I_B とすると，それぞれの運動量と力積の関係は,

$$\mathrm{A} : mv_0 + I_\mathrm{A} = mv_1, \tag{3.85}$$
$$\mathrm{B} : MV_0 + I_\mathrm{B} = MV_1. \tag{3.86}$$

力積の定義より，$I_\mathrm{A} = -\int_0^{\Delta t} f dt$，$I_\mathrm{B} = \int_0^{\Delta t} f dt$．これを (3.85)，(3.86) に代入すると，

$$\mathrm{A} : mv_0 - \int_0^{\Delta t} f dt = mv_1, \tag{3.87}$$
$$\mathrm{B} : MV_0 + \int_0^{\Delta t} f dt = MV_1. \tag{3.88}$$

(3.87)，(3.88) の両辺を足すと，

$$mv_0 + MV_0 = mv_1 + MV_1. \tag{3.89}$$

力積の符号は，力の方向と座標軸の向きで決まることに注意してください．ここで，この撃力による力積を考えてみます．撃力は短い衝突時間 Δt の中でも値が増減します．衝突直後から徐々に力が大きくなり，終わりに向かうにつれて大きさが小さくなっていく様子がイメージできるでしょうか．$f-t$ グラフにすると，以下のようになります．

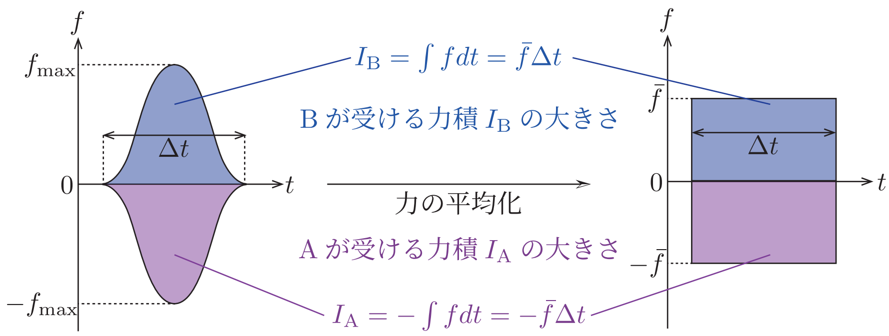

Fig.67　撃力の時間依存性と撃力の平均化

力積の定義から，$f-t$ グラフで囲まれる面積の大きさが，力積の大きさでした．Fig.68 の右側のグラフは，面積を同じ大きさに保つようにして，撃力の大きさを平均化したときのグラフです．時間依存する撃力を時刻の関数として導出することはかなり難しいですが，撃力の平均の大きさ $\bar{f}$ であれば，衝突時間を計測することによって求めることができます．

3.2.5　反発係数

衝突の議論でよく登場する，反発係数（Coefficient of restitution）についてここで学びます．反発係数とは，物体が何かに衝突した際に，物体の速さがどの程度変化するのかを表す指標です．

反発係数

物体同士の衝突における反発係数 e を，以下の式で定義する．

$$e := \frac{\left|(\text{衝突後の速度})\right|}{\left|(\text{衝突前の速度})\right|}. \tag{3.90}$$

- 衝突後の速さが，衝突前の速さを上回ることはないため，$0 \leq e \leq 1$ である．
- $e = 1$ のとき，衝突前後で速さが変化していないことを意味する．これを弾性衝突（Elastic collision）と呼ぶ．**速さが不変であるため，衝突前後で運動エネルギーが保存する．**
- $e = 0$ のとき，衝突で速さがゼロになったことを意味する．これを，完全非弾性衝突（Perfectly inelastic collision）と呼ぶ．このとき，**衝突物同士が一体となる．**

速さなので，速度の絶対値で定義されます．衝突の際には，運動エネルギーの一部が音や熱に変化するため，衝突後の方が早くなることは通常の衝突ではありえません．反発係数 e が 1 に近いほど，固いもの同士の衝突（ビリヤード玉の衝突）に近く，0 に近いほど，柔らかいものへの衝突（粘土のような壁）をイメージすると良いかもしれません．

(3.90) をもう少し具体化して考えます．まずは 1 物体と壁の衝突を考えましょう．

e.g.1 壁に衝突する物体

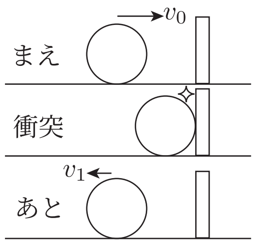

Fig.68　壁に衝突する物体

速度 v_0 で壁に衝突した物体が，衝突により速度が v_1 となったとします．この状況における反発係数 e は，(3.90) より以下のようになります．

$$e = \frac{|v_1|}{|v_0|}. \tag{3.91}$$

(3.91) の絶対値は，どのようにして外れるでしょうか．**この絶対値は，運動の様子を考えることで外すことができます．** Fig.68 で右向きを正に取ると，$v_0 > 0$ で，$v_1 < 0$ となります．v_0 と v_1 は速度なので，文字の中に符号があることに注意してください．これを踏まえると，絶対値を外すことができます．

右向きが正であるとき，速度の符号を考えると，

$$e = \frac{-v_1}{v_0} = -\frac{v_1}{v_0}. \tag{3.92}$$

絶対値はその中身が負の時，負符号をつけることで外れるのでした[*45]．これは，左向き正でも同じ結果になります．

左向き正のとき，$v_0 < 0$，$v_1 > 0$．(3.91) の絶対値は，以下のように外れる．

$$e = \frac{v_1}{-v_0} = -\frac{v_1}{v_0}. \tag{3.93}$$

どちらの方向が正の向きでも，同じ結果になるということですが，厳密には負符号が分母に付くか分子に付くかは決まっています．

次は，2 物体の衝突における反発係数です．

e.g.2 2 物体の衝突

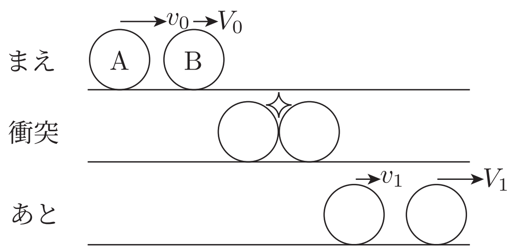

Fig.69　2 物体の衝突

[*45] 具体例を提示すると，$|-3| = -(-3) = 3$．絶対値が付いた数式は，必ず正の値になるという意識が大切です．

2 物体の場合は，**相対速度の大きさの比で反発係数は計算されます．**

A からみた B の相対速度の大きさで，衝突前後で比をとることにより，

$$e = \frac{|V_1 - v_1|}{|V_0 - v_0|}. \tag{3.94}$$

この絶対値も，運動の様子を考えることで絶対値を外すことができます．衝突が起きたということは，$v_0 > V_0$ でなければなりません．また，衝突後について考えると，B は後ろから A によって力積を加えられているため，$V_1 > v_1$ であるはずです．こういった条件は，ある種自明なので問題で明記されることは少ないですが，絶対値を外すために必要な条件になります．

衝突が起きたという運動の条件から，$V_0 - v_0 < 0$，$V_1 - v_1 > 0$．(3.94) の絶対値は，

$$e = \frac{V_1 - v_1}{-(V_0 - v_0)} = -\frac{V_1 - v_1}{V_0 - v_0}. \tag{3.95}$$

相対速度は，どちらの物体から見ても同じ結果になります．

B からみた A の相対速度の大きさで，反発係数 e を立式すると，

$$e = \frac{|v_1 - V_1|}{|v_0 - V_0|}. \tag{3.96}$$

衝突が起きたという運動の条件から，$v_0 - V_0 > 0$，$v_1 - V_1 < 0$．(3.95) の絶対値は，

$$e = \frac{-(v_1 - V_1)}{v_0 - V_0} = -\frac{v_1 - V_1}{v_0 - V_0}. \tag{3.97}$$

(3.95) と (3.97) は分子と分母を負符号でくくれば，同じ式になります．**どちらの物体から見た相対速度で考えても，同じ結果になるということですが，1 物体の時と同様に，分子と分母のどちらに負符号が付くかは，どちらから見た相対速度であるのかに応じて決まっているということです．**

この反発係数の式は，運動量保存則との連立で用いられることが多いです．また弾性衝突の場合，$e = 1$ であるという式は，運動エネルギーが保存するということと同値であることを先述しました．**したがって，位置エネルギーが登場しない 1 次元の運動においては，運動エネルギー保存則の代わりに $e = 1$ の式を用いて計算してもよいということです．この考えは，計算を大幅に減らすテクニックとなります．** Fig.69 では，$e = 1$ であるとすると，

$$\frac{1}{2}mv_0^2 + \frac{1}{2}MV_0^2 = \frac{1}{2}mv_1^2 + \frac{1}{2}MV_1^2 \iff 1 = \frac{|V_1 - v_1|}{|V_0 - v_0|}. \tag{3.98}$$

ということです．どちらを使って計算しても良いですが，反発係数の式の方が簡単に処理できると思います．

3.2.6 重心速度

運動量保存則が成立する系では，重心速度（Verocity of center of mass）が一定になるという重要な物理法則があります．この概念は，複雑な系の問題を解く上で重要です．

まずは重心（Center of mass）を定義しましょう．重心とは，重力の作用点を意味し[*46]，ここでは複数物体を 1 つの物体であると考えたときの，重力の作用点について考えます．定義は以下の式です．

[*46] 大きさのある物体（剛体）の重心については，Part2 の剛体の静力学で学びます．

重心

x 軸上に質量 m と M の 2 物体が，それぞれ位置座標 x_1，x_2 に置かれている時，2 物体の系の重心 x_G は，以下の式で定義される．

$$x_G := \frac{mx_1 + Mx_2}{m+M}. \tag{3.99}$$

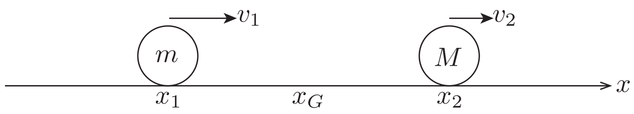

Fig.70　2 体系の重心

重心は，位置座標と質量の内分により定義される．

上式は 2 体系における定義ですが，正確には複数物体で重心は定義されます[*47].

Fig.70 において，重心の定義式に時間微分を施してみます．変化するのは，物体の位置座標のみです．運動と数学の関係を思い出しましょう，

(3.99) に時間微分を施すと，

$$\frac{dx_G}{dt} = \frac{m\frac{dx_1}{dt} + M\frac{dx_2}{dt}}{m+M} = \frac{mv_1 + Mv_2}{m+M} := v_G. \tag{3.100}$$

重心座標の時間微分なので，(3.100) は重心速度と呼ばれる速度です．重心速度である (3.100) の分子に，見覚えはないでしょうか．これは系の運動量の総和です．つまり，**系が運動量保存則を満たす場合，重心速度は一定値をとるということです．**

重心速度と運動量保存則の関係

重心座標の時間微分を，$\dfrac{dx_G}{dt} := v_G = \dfrac{mv + MV}{m+M}$ と重心速度と定義する．質量が m と M の 2 体系において，それぞれの速度を v，V とすると，運動量保存則は,

$$mv + MV = Const. \tag{3.101}$$

このとき，重心速度 v_G は.

$$v_G = \frac{mv + MV}{m+M} = Const. \tag{3.102}$$

系の重心速度は定数となることから，**運動量保存則が成立するとき，系の重心は等速運動をする．**

この事実は極めて重要です．複雑な系の問題でも，運動量が保存している場合には重心はただの等速運動をしています[*48].

*47 複数物体の重心 $\boldsymbol{x}_G$ は，$\boldsymbol{x}_G = \Sigma_i \dfrac{m_i \boldsymbol{x_i}}{m_i}$ です．重心も本来はベクトルである意識はもっておきましょう．

*48 運動量保存則が成立するための条件は，内力のみで運動するとき，つまり系全体に働く力が無くなる時でした．重心運動を考えるということは，複数ある物体を 1 つの物体とみなすことと等価なので，全体にはたらく力がゼロであるならば等速運動するのは，直感的と言えるかもしれません．

重心速度が一定になることを利用した問題を，以下に示します．

e.g. 台上での振り子運動
長さ l の糸に繋がれた小球を，初期条件の様子で落下させると，台と小球はそれぞれ運動し，最終的に静止した．小球と台が最終的に静止した位置座標 X を求めよ．

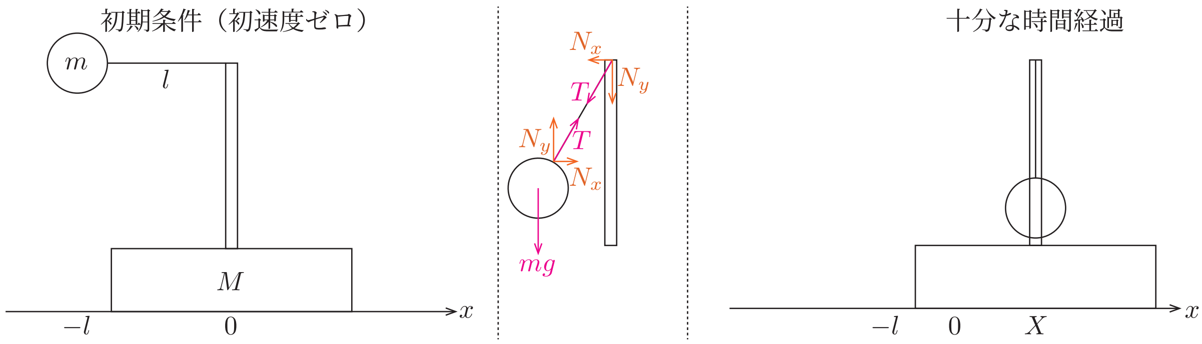

Fig.71　台上での振り子運動．初期条件と運動途中の力，最終的な状態

まずは任意の運動途中での x 方向の運動方程式を立式してみます．

任意の運動途中における x 方向の運動方程式は，台と小球の加速度をそれぞれ A，a とすると，

$$\text{台} : MA = -N_x, \tag{3.103}$$
$$\text{小球} : ma = +N_x. \tag{3.104}$$

(3.103) と (3.104) を足すと，

$$MA + ma = 0. \tag{3.105}$$

(3.105) より，台と小球の x 方向の運動量は保存する．運動量保存則は，初期条件で台と小球の初速度はゼロであるため，

$$0 = mv + MV. \tag{3.106}$$

運動量保存則が示されたため，系全体の重心速度は等速になります．

台と小球の重心速度 V_G は，

$$V_G = \frac{mv + MV}{m + M}. \tag{3.107}$$

(3.106) より，

$$V_G = 0. \tag{3.108}$$

(3.108) より，小球と台の重心は動かないことが分かります．**重心が動かないということは，初期条件と最終的な状態の重心座標は一致するということです．**

初期条件における重心 x_{G0} は,

$$x_{G0} = \frac{-ml}{m+M}. \tag{3.109}$$

最終的に静止した状態の重心 x_{G1} は,

$$x_{G1} = \frac{mX + MX}{m+M}. \tag{3.110}$$

(3.108) より，重心は動かないため，x_{G0} と x_{G1} は一致する．

$$\begin{aligned} \frac{-ml}{m+M} &= \frac{mX+MX}{m+M}, \\ X &= \underline{-\frac{ml}{m+M}}. \end{aligned} \tag{3.111}$$

最終的な静止位置は，図では正方向に書きましたが，実際には負の位置で最初の重心位置だということです．重心が動かないのであるから，当然の結果と言えるでしょう．

この例で見るように，運動量保存則が成立する場合には，重心の議論にまで及ぶことがあります．重心の議論は，複雑な系の運動を驚くほど簡単なものにし，求めることが難しそうな現象にアプローチするための有効な手段になります．このため，系の運動量が保存するか否かをまず見極められるようになる必要があるのです．その全てのきっかけは，力学の原理の 1 つ，運動方程式なのです．