基礎力養成トレーニング集—古典力学

野口　駿

2025

テキストの内容と表記上の注意

　このテキストは，受験における古典物理学の基礎力を養成する立式トレーニング集です．物理法則を正しく使えるようになることを目的に編成しています．ベクトル表示は，$\overrightarrow{a}$ ではなく，$\boldsymbol{a}$ とボールドイタリック体で表記しています．

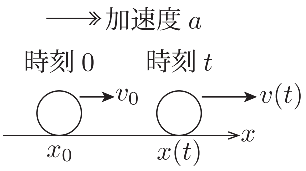
目次

1　等加速度運動

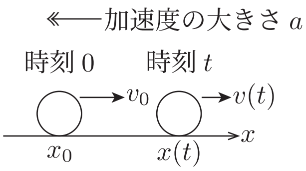
1.1　等加速度直線運動

<u>**Ex.**</u> 以下の図に示す等加速度運動において，指定された物理量や関係式を答えよ．速さと示されていない文字『v』は，速度であることに注意せよ．

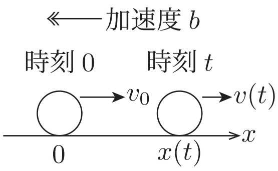
(1)　$v(t)$，$x(t)$.



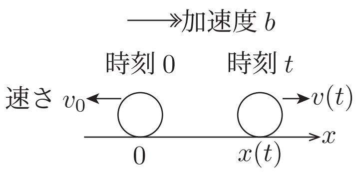
(2)　$v(t)$，$x(t)$.



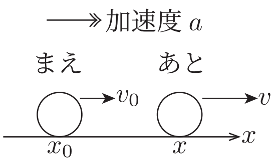
(3)　$v(t)$，$x(t)$.



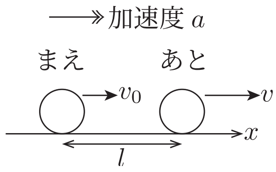
(4)　$v(t)$，$x(t)$.



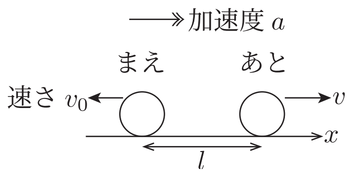
(5)　位置座標と速度の関係式.



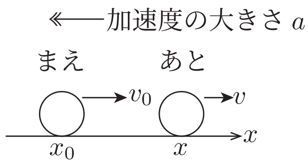
(6)　距離と速度の関係式.



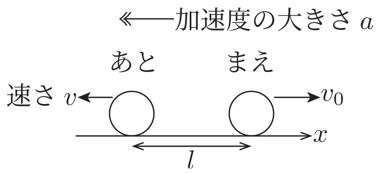
(7)　距離と速度の関係式.



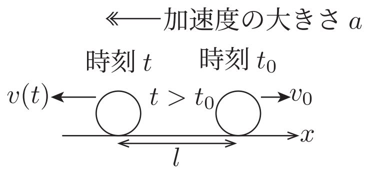
(8)　位置座標と速度の関係式.



(9)　距離と速度の関係式.



(10)　等加速度の 3 つの式.



1.1 の解答

(1)
$\underline{\underline{v(t) = v_0 + at.}}$
$\underline{\underline{x(t) = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2.}}$

(2)　a は加速度の大きさなので，自分で負符号を付ける．
$\underline{\underline{v(t) = v_0 - at.}}$
$\underline{\underline{x(t) = 0 + v_0 t + \frac{1}{2}(-a)t^2.}}$

(3)　b は加速度なので，符号は文字の中．自分で符号をつけてはならない．
$\underline{\underline{v(t) = v_0 + bt.}}$
$\underline{\underline{x(t) = 0 + v_0 t + \frac{1}{2}bt^2.}}$

(4)　v_0 は速さなので，自分で負符号を付ける．
$\underline{\underline{v(t) = -v_0 + bt.}}$
$\underline{\underline{x(t) = 0 - v_0 t + \frac{1}{2}bt^2.}}$

(5)
$\underline{\underline{v^2 - v_0^2 = 2a(x - x_0).}}$

(6)　『あと』と『まえ』の差が l．これは，位置座標の変化（変位）とそのまま等しい．
$\underline{\underline{v^2 - v_0^2 = 2al.}}$

(7)　v_0 は速さなので，自分で負符号を付ける．もちろん 2 乗すると正になるが，今回はあえてそのまま残している．
$\underline{\underline{v^2 - (-v_0)^2 = 2al.}}$

(8)　a は加速度の大きさなので，自分で負符号を付ける．
$\underline{\underline{v^2 - (-v_0)^2 = 2(-a)(x - x_0).}}$

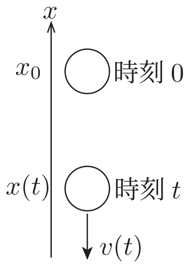
(9)　a は加速度の大きさ，v も速さなので，自分で負符号を付ける．『あと』の位置が，『まえ』よりも負の方向なので，今回の変位は $-l$.
$\underline{\underline{(-v)^2 - (v_0)^2 = 2(-a)(-l).}}$

(10)　a は加速度の大きさなので，負符号をつける．経過時間は，$t > t_0$ より $t - t_0$ かつ今回の変位は $-l$．変位とは，位置座標の変化（『あと』$-$『まえ』）であることに注意.
$\underline{\underline{v(t) = v_0 + (-a)(t - t_0).}}$
$\underline{\underline{-l = v_0 t + \frac{1}{2}(-a)t^2.}}$
$\underline{\underline{v^2(t) - v_0^2 = 2(-a)(-l).}}$

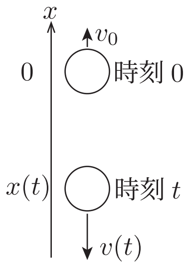
1.2　地球上での投射運動

Ex. 以下の図に示す投射運動において，指定された物理量や関係式を答えよ．速さと示されていない文字『v』は，速度であることに注意せよ．重力加速度の大きさは g である．

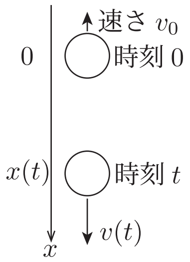
(1)　$v(t)$，$x(t)$.



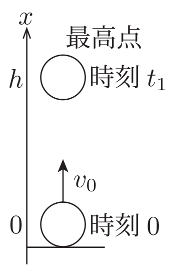
(2)　$v(t)$，$x(t)$.



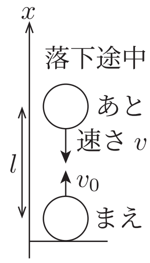
(3)　$v(t)$，$x(t)$.



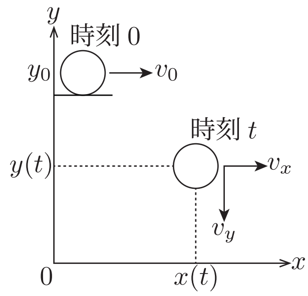
(4)　t_1，h.



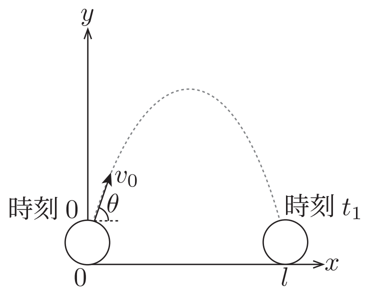
(5)　距離と速度の関係式.



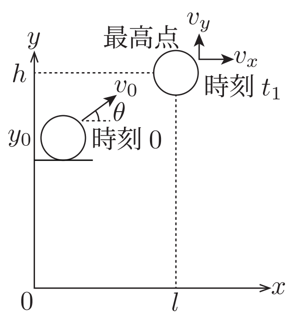
(6)　v_x，v_y，$x(t)$，$y(t)$.



(7)　t_1，l.



(8)　t_1，v_x，v_y，l，h.



1.2 の解答

重力加速度は常に鉛直下向きで，g は加速度の大きさであることに注意.

(1)

$v(t) = -gt$.

$x(t) = x_0 + \frac{1}{2}(-g)t^2$.

(2)

$(t) = v_0 - gt$.

$x(t) = 0 + v_0 t + \frac{1}{2}gt^2$.

(3)

$v(t) = v_0 + gt$.

$x(t) = -v_0 t + \frac{1}{2}gt^2$.

(4)　最高点は速度ゼロ.

$0 = v_0 - gt_1$ より，$t_1 = \frac{v_0}{g}$.

$0^2 - v_0^2 = 2(-g)(h-0)$ より，$h = \frac{v_0^2}{2g}$.

(5)　鉛直上向き正より，変位は $+l$.

$(-v)^2 - v_0^2 = 2(-g)l$.

(6)　x 方向は等速運動，y 方向は等加速度運動.

$v_x = v_0$.

$v_y = -gt$.

$x(t) = v_0 t$.

$y(t) = y_0 + \frac{1}{2}(-g)t^2$.

(7)　x 方向の初速度は $v_0 \cos\theta$，y 方向の初速度は $v_0 \sin\theta$.

$0 = v_0 \sin\theta t_1 + \frac{1}{2}(-g)t_1^2$ より，$t_1 = \frac{2v_0 \sin\theta}{g}$.

(8)　最高点は y 方向の速度ゼロ．x 方向の初速度は $v_0 \cos\theta$，y 方向の初速度は $v_0 \sin\theta$.

$0 = v_0 \sin\theta - gt_1$ より，$t_1 = \frac{v_0 \sin\theta}{g}$.

$v_x = v_0 \cos\theta$.

$v_y = 0$.

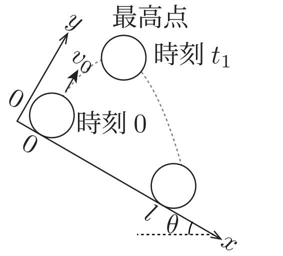
$l = v_0 \cos\theta t_1 = \frac{v_0^2 \sin\theta \cos\theta}{g}$.

$0^2 - (v_0 \sin\theta)^2 = 2(-g)(h-0)$ より，$\frac{(v_0 \sin\theta)^2}{2g}$.

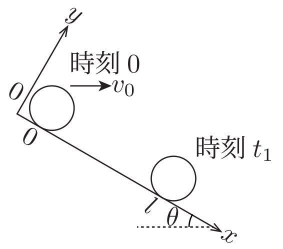
1.3　斜面上からの投射運動

Ex. 以下の図に示す等加速度運動において，指定された物理量や関係式を答えよ．速さと示されていない文字『v』は，速度であることに注意せよ．

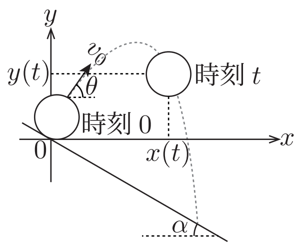
(1)　t_1，l.



(2)　t_1，l.



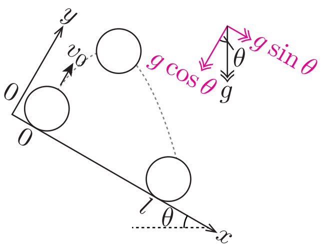
(3)　$x(t)$，$y(t)$.



1.3 の解答

各軸方向に運動を分けて考えることが重要．常に鉛直下向きの重力加速度も，軸の方向に分解して考える．

(1)　重力加速度を，x 軸と y 軸の方向に分ける．



x 方向の加速度は $g\sin\theta$，y 方向の加速度は $g\cos\theta$ であるため，各軸方向は等加速度運動．最高点では y 方向の速度はゼロ．

$0 = v_0 - g\cos\theta t_1$ より，$\underline{\underline{t_1 = \frac{v_0}{g\cos\theta}}}$.

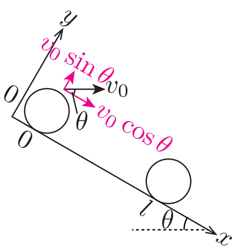
再び斜面上に物体が落ちてくるときの時刻（$y = 0$ となるときの時刻）を t_2 とする．

$0 = 0 + v_0 t_2 + \frac{1}{2}(-g\cos\theta)t_2^2$ より，$t_2 = \frac{2v_0}{g\cos\theta}$.

x 方向も加速度 $g\sin\theta$ の等加速度運動をするため，

$l = \frac{1}{2}g\sin\theta t_2^2 = \frac{1}{2}g\sin\theta(\frac{2v_0}{g\cos\theta})^2 = \underline{\underline{\frac{2v_0^2\tan\theta}{g\cos\theta}}}$.

(2)　重力加速度は (1) と同様に分解できる．初速度を分解する．



再び斜面上に物体が落ちてくるときの時刻（$y = 0$ となるときの時刻）を t_1 とする．

$0 = 0 + v_0\sin\theta t_1 + \frac{1}{2}(-g\cos\theta)t_1^2$ より，$\underline{\underline{t_1 = \frac{2v_0}{g\tan\theta}}}$.

x 方向の等加速度運動より，

$l = 0 + v_0\cos\theta t_1 + \frac{1}{2}g\sin\theta t_1^2 = \underline{\underline{\frac{4v_0^2\cos^2\theta}{g\sin\theta}}}$.

(3)　x 方向は水平方向，y 方向は鉛直方向なので，x 方向の加速度はゼロで等速運動，y 方向の加速度は $-g$ で等加速度運動．

x 方向の初速度は $v_0\cos\theta$ より，$\underline{\underline{x(t) = v_0\cos\theta t}}$.

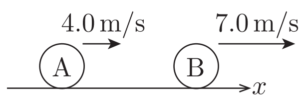
y 方向の初速度は $v_0\sin\theta$ より，

$\underline{\underline{y(t) = v_0\sin\theta t + \frac{1}{2}(-g)t^2}}$.

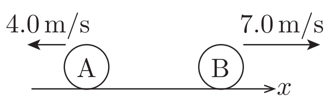
1.4　相対速度

Ex. 以下の図において，指定された相対速度を求めよ．

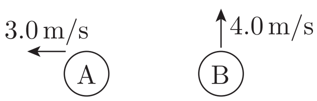
(1)　A に対する B の相対速度 v_{AB}，B に対する A の相対速度 v_{BA}．



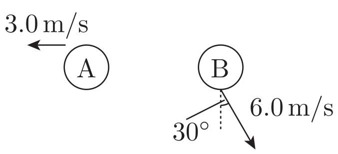
(2)　A に対する B の相対速度 v_{AB}，B に対する A の相対速度 v_{BA}．



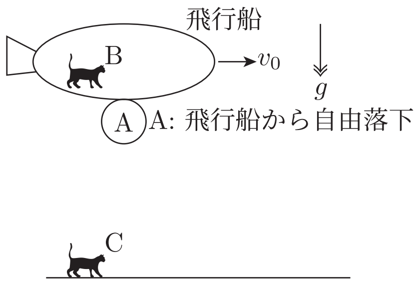
(3)　B に対する A の相対速度の大きさ v_{BA} とその向き．向きはベクトル図で図示せよ．



(4)　A に対する B の相対速度の大きさ v_{AB} とその向き．向きはベクトル図で図示せよ．$\sqrt{7} \sim 2.65$ を用いよ．



(5)　B から見た A の運動と，C から見た A の運動をそれぞれ記述せよ．



1.4 の解答

相対速度の式の本質は，（相手の速度）–（自分の速度）.『相手』と『自分』がどの物体なのかを，問題から見抜くことが重要.

(1) 『A に対する B の...』⇒『A から見た B の...』. B が『相手』で A が自分.

$v_{AB} = v_B - v_A = 7.0 - 4.0 = \underline{\underline{3.0\,\mathrm{m/s}}}.$

『B に対する A の...』⇒『B から見た A の...』. A が『相手』で B が自分.

$v_{BA} = v_A - v_B = 4.0 - 7.0 = \underline{\underline{-3.0\,\mathrm{m/s}}}.$

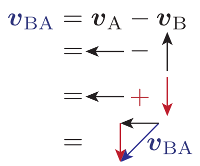
(2) 『A に対する B の...』⇒『A から見た B の...』. B が『相手』で A が自分.

$v_{AB} = v_B - v_A = 7.0 - (-4.0) = \underline{\underline{11\,\mathrm{m/s}}}.$

『B に対する A の...』⇒『B から見た A の...』. A が『相手』で B が自分.

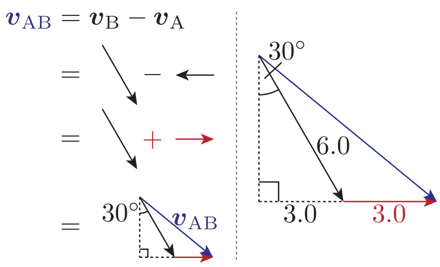
$v_{BA} = v_A - v_B = -4.0 - 7.0 = \underline{\underline{-11\,\mathrm{m/s}}}.$

(3) 『B に対する A の...』⇒『B から見た A の...』. A が『相手』で B が自分.



上図より，三平方の定理から $\underline{\underline{v_{BA} = 5.0\,\mathrm{m/s}}}.$

(4) 『A に対する B の...』⇒『A から見た B の...』. B が『相手』で A が自分.



左図より，三平方の定理から，

$v_{BA} = \sqrt{(3.0\sqrt{3})^2 + 6.0^2} = \underline{\underline{3\sqrt{7} \sim 8.0\,\mathrm{m/s}}}.$

(5) 『飛行船から自由落下』とあるため，地面にいる C から見ると A は飛行船と同じ水平方向の速さ v_0 で投射される.

<u>C に対する A の運動は，水平右向きの水平投射.</u>

飛行船と同じ速度を持つ B からみると，B に対する A の水平方向の相対速度はゼロになる.

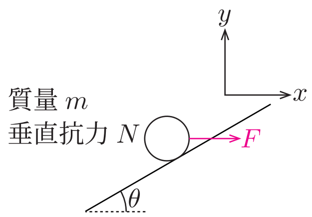
<u>B に対する A の運動は，自由落下.</u>

2　運動方程式

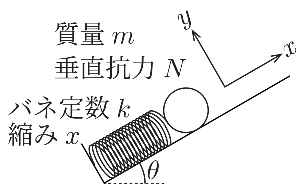
2.1　力の釣り合い

Ex. 以下の図における，静止する物体に働く力を図示し，各軸方向の力の釣り合いの式を立式せよ．重力加速度の大きさは g とする．

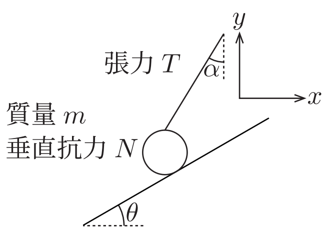
(1)



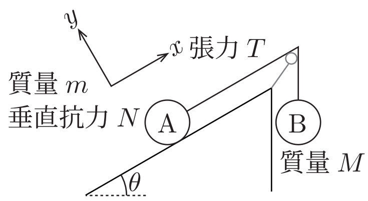
(2)



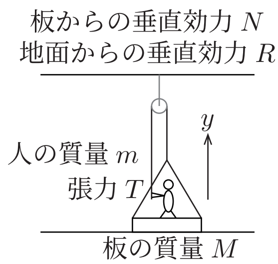
(3)



(4)　A，B それぞれで釣り合いの式を立式せよ．



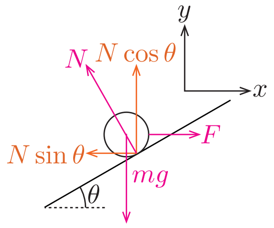
(5)　人，板でそれぞれで釣り合いの式を立式せよ．



2.1 の解答

力は場からの力と接触力に分けられる．場からの力は重力のみなので，物体同士が触れあうところから接触力を考える．『物体の気持ち』を考える．

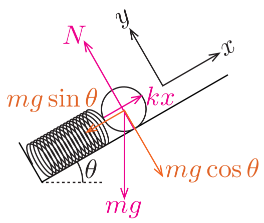
(1)



$x : \underline{\underline{0 = F - N\sin\theta}}.$

$y : \underline{\underline{0 = N\cos\theta - mg}}.$

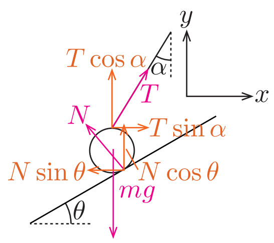
(2)



$x : \underline{\underline{0 = kx - mg\sin\theta}}.$

$y : \underline{\underline{0 = N - mg\cos\theta}}.$

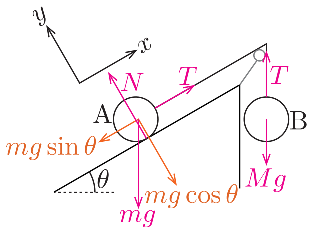
(3)



$x : \underline{\underline{0 = T\sin\alpha - N\sin\theta}}.$

$y : \underline{\underline{0 = T\cos\alpha + N\cos\theta - mg}}.$

(4)　同じ糸に働く張力は，異なる物体同士に繋がれていても同じ大きさになる．



A について，

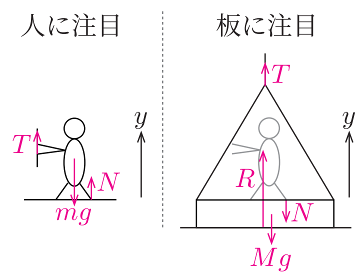
$x : \underline{\underline{0 = T - mg\sin\theta}}.$

$y : \underline{\underline{0 = N - mg\cos\theta}}.$

B について，

$\underline{\underline{0 = Mg - T}}.$

(5)　注目物体が複数あるときは，それぞれの物体毎力を分けて図示する．同じ境界面から働く力には，作用・反作用があることにも注意．



人について，

$y : \underline{\underline{0 = T + N - mg}}.$

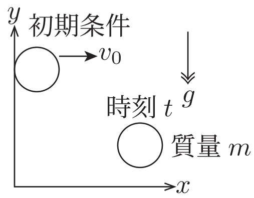
物体について，

$y : \underline{\underline{0 = T + R - Mg - N}}.$

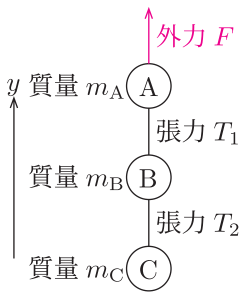
2.2 運動方程式

Ex. 以下の図に示す運動において，指定された加速度を用いて各軸方向の運動方程式を立式せよ．また指定された物理量や関係式を答えよ．重力加速度の大きさは g とする．

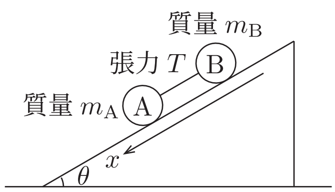
(1) 時刻 t における x 軸方向の加速度 a_x，y 軸方向の加速度 a_y とする．



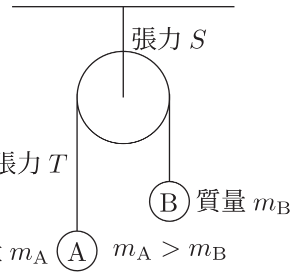
(2) 加速度 a とする．A，B，C それぞれの運動方程式と A + B + C の運動方程式．



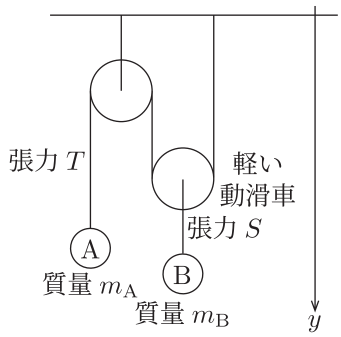
(3) 加速度 a とする．A，B それぞれの運動方程式と A + B の運動方程式．



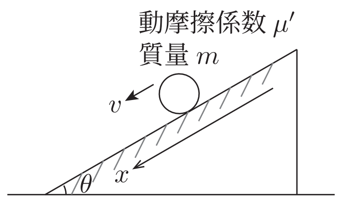
(4) 加速度の大きさ a とする．A，B それぞれの運動方程式と定滑車の釣り合いの式．



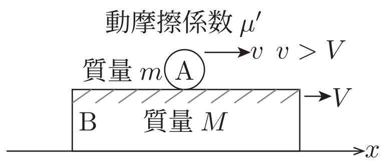
(5) A の加速度 a，B の加速度 b，動滑車の加速度を c とする．A と B と動滑車の運動方程式．また，3 つの加速度の関係を拘束条件より求め，全ての加速度を計算せよ．



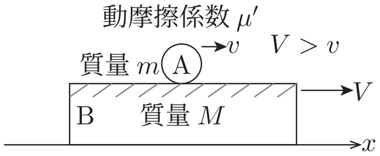
(6) 加速度を a とする．



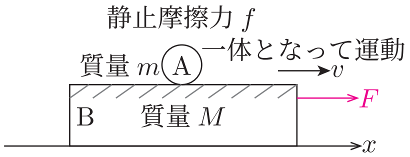
(7) A の加速度 a，B の加速度 b とする．



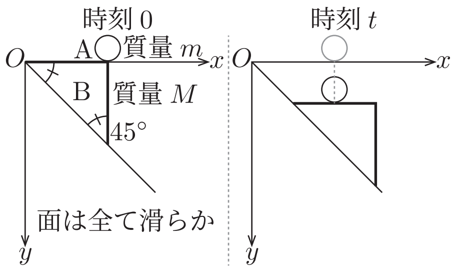
(8)　A の加速度 a，B の加速度 b とする．



(9)　A の加速度，B の加速度を a とする．

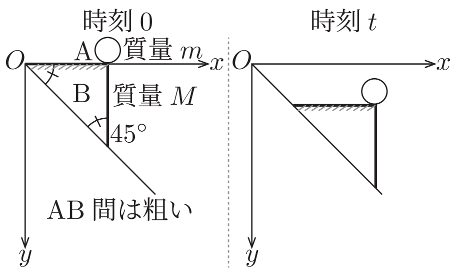


(10)　A の x，y 方向の加速度 a_x，a_y，B の x，y 方向の加速度 A_x，A_y とする．A_x，A_y の関係を拘束条件より求めよ．また全ての加速度を計算せよ．



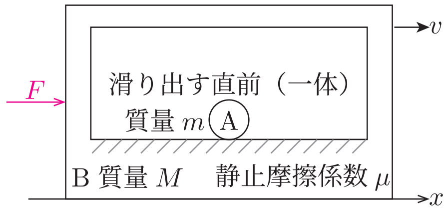
A が B から受ける垂直効力：N
B が斜面から受ける垂直効力：R

(11)　A と B の x 方向の加速度を a，y 方向の加速度をそれぞれ a_y，A_y とする．a，A_y の関係を拘束条件より求めよ．また全ての加速度を計算せよ．

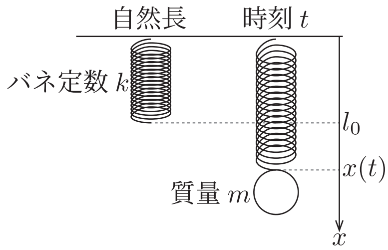


静止摩擦力：f
A が B から受ける垂直効力：N
B が斜面から受ける垂直効力：R

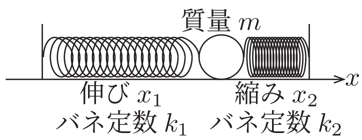
(12)　A,B の加速度を a とする．



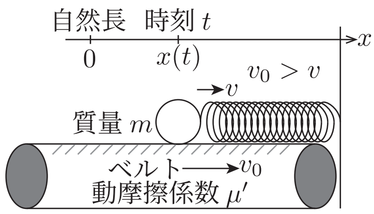
(13)　時刻 t における加速度を a とする．



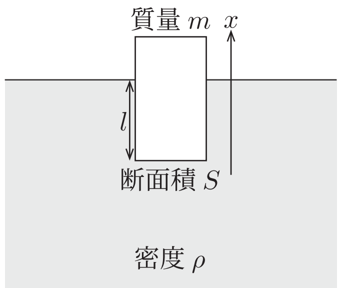
(14)　加速度を a とする．



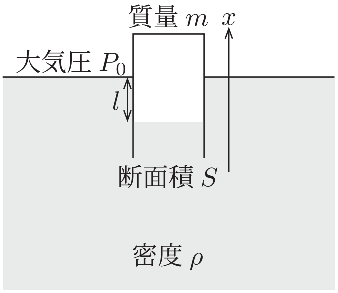
(15)　時刻 t における加速度を a とする．



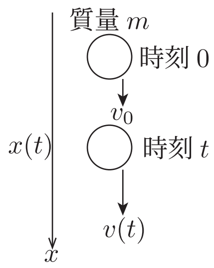
(16)　加速度を a とする．



(17)　静止状態とする．

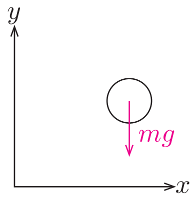


(18)　時刻 t における加速度を a とする．



2.2 の解答

(1)　水平方向には一切力は作用しない．

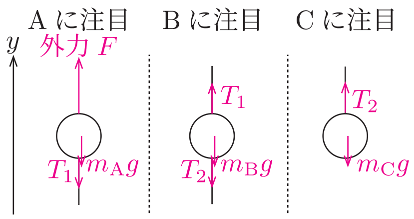


$x : \underline{\underline{ma_x = 0.}}$

$y : \underline{\underline{ma_y = -mg.}}$

鉛直方向が等加速度運動になるのは，重力が常に一定値であるためである．

(2)　物体それぞれに働く力を図示する．



$A : \underline{\underline{m_{\mathrm{A}}a = F - T_1 - m_{\mathrm{A}}g.}}$

$B : \underline{\underline{m_{\mathrm{B}}a = T_1 - m_{\mathrm{B}}g.}}$

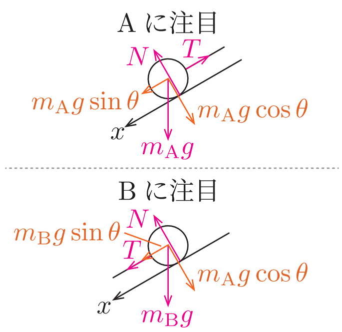
$C : \underline{\underline{m_{\mathrm{A}}a = T_2 - m_{\mathrm{c}}g.}}$

A，B，C を一体と見た時には，全ての運動方程式を足せばいい．

A+B+C :

$\underline{\underline{(m_{\mathrm{A}} + m_{\mathrm{B}} + m_{\mathrm{C}})a = F - (m_{\mathrm{A}}g + m_{\mathrm{B}}g + m_{\mathrm{C}}g).}}$

(3)

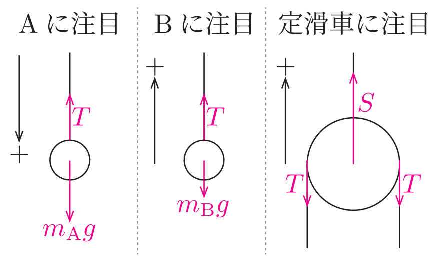


$A : \underline{\underline{m_{\mathrm{A}}a = m_{\mathrm{A}}g\sin\theta - T.}}$

$B : \underline{\underline{m_{\mathrm{B}}a = m_{\mathrm{B}}g\sin\theta + T.}}$

A+B : $\underline{\underline{(m_{\mathrm{A}} + m_{\mathrm{B}})a = (m_{\mathrm{A}} + m_{\mathrm{B}})g\sin\theta.}}$

(4)　1 本のひもに繋がれているため，A と B の加速度は同じ大きさで逆向き．

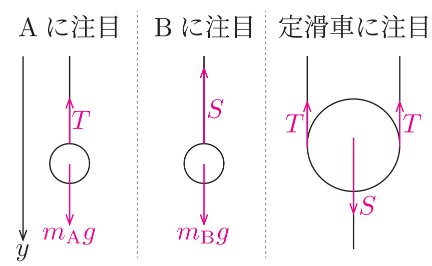


$A : \underline{\underline{m_{\mathrm{A}}a = m_{\mathrm{A}}g - T.}}$

$B : \underline{\underline{m_{\mathrm{B}}a = T - m_{\mathrm{B}}g.}}$

定滑車 : $\underline{\underline{0 = S - 2T.}}$

(5)　鉛直下向きが正の方向としてまずは運動方程式の立式．

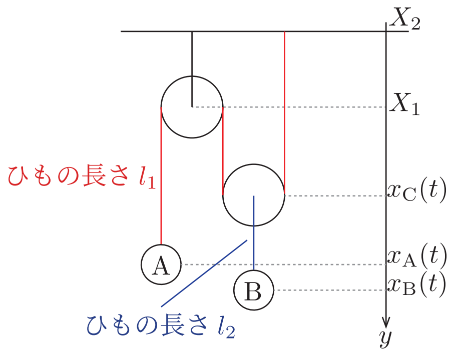


$A : \underline{\underline{m_{\mathrm{A}}a = m_{\mathrm{A}}g - T.}}$

$B : \underline{\underline{m_{\mathrm{B}}b = m_{\mathrm{B}}g - S.}}$

動滑車 : $\underline{\underline{0 \cdot c = S - 2T.}}$

以下のように座標を設定し，『ひもの長さは一定』の拘束条件を立式する．



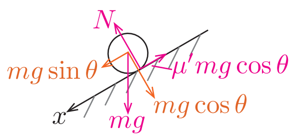
$l_1 = (x_{\mathrm{A}}(t) - X_1) + (x_{\mathrm{C}}(t) - X_1) + (x_{\mathrm{C}}(t) - X_2)$.
二階微分して $\underline{0 = a + 2c.}$

$l_2 = x_{\mathrm{B}}(t) - x_{\mathrm{C}}(t)$．二階微分して $\underline{0 = b - c.}$

これらを連立して，$\underline{a = -\frac{2g(m_{\mathrm{B}} - 2m_{\mathrm{A}})}{m_{\mathrm{B}} + 4m_{\mathrm{A}}}}$.

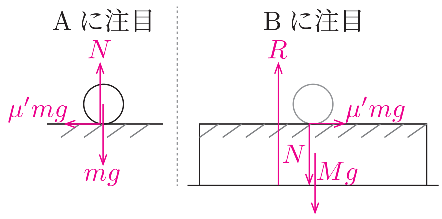
$\underline{b = c = \frac{g(m_{\mathrm{B}} - 2m_{\mathrm{A}})}{m_{\mathrm{B}} + 4m_{\mathrm{A}}}}$.

(6)



$x : \underline{ma = mg\sin\theta - \mu' mg\cos\theta.}$

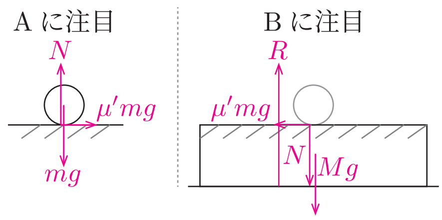
(7)　動摩擦力の向きは，粗い面に対する相対速度と逆向き．B からみた A の相対速度は，$v - V > 0$. B からみて，A は x 軸正方向に運動するので，動摩擦力の向きは x 軸負方向.



$x : \underline{ma = -\mu' mg.}$

$x : \underline{Mb = \mu' m\mathrm{A}g.}$

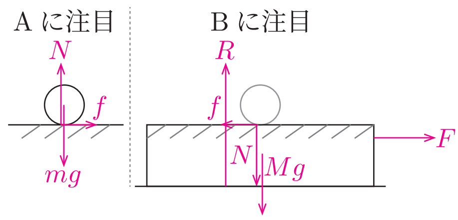
(8)　B からみた A の相対速度は，$v - V < 0$. B からみて，A は x 軸負方向に運動するので，動摩擦力の向きは x 軸正方向.



$x : \underline{ma = \mu' mg.}$

$x : \underline{Mb = -\mu' mg.}$

(9)　B と A が一体となって運動しているため，B からみた A の相対速度はゼロ．従って，働く摩擦力は静止摩擦力．A と B が x 軸正方向に動いていることから，A には x 軸正方向に力がなければならない．この力を担うのは，静止摩擦力以外ない．

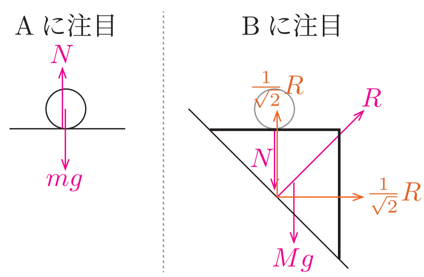


$x : \underline{ma = f.}$

$x : \underline{Mb = F - f.}$

A+B : $\underline{(m + M)a = F}$

(10)　B と A は滑らかなので，A の x 軸方向には何も力は働かない．



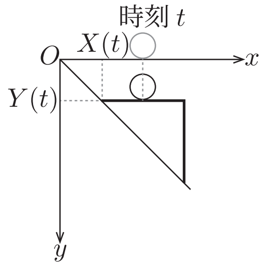
A について，

$x : \underline{ma_x = 0}$，$y : \underline{ma_y = mg - N.}$

B について，

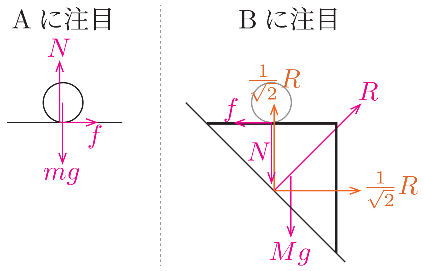
$x : \underline{MA_x = \frac{1}{\sqrt{2}}R}$，$y : \underline{MA_y = Mg + N - \frac{1}{\sqrt{2}}R.}$

以下のように座標を設定し，『斜面の角度は 45° で一定』の拘束条件を立式する．



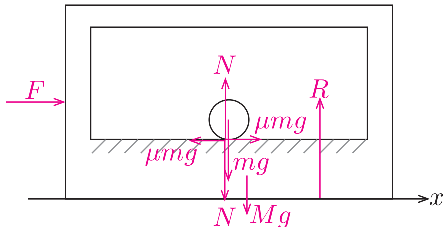
$\frac{Y(t)-0}{X(t)-0} = \tan 45°$．二階微分して，$A_x = A_y$．
これらを連立して，$a_x = 0$，$A_x = A_y = \frac{m+M}{2M+m} g$.

(11)　B と A は粗く一体となって運動するため，A には静止摩擦力が作用．A と B が x 正方向に動くため，A には x 正方向の力が必要．これが，静止摩擦力となる．



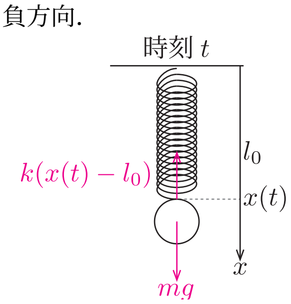
A について，
$x : ma = f$，$y : ma_y = mg - N$.
B について，
$x : Ma = \frac{1}{\sqrt{2}}R - f$，$y : MA_y = Mg + N - \frac{1}{\sqrt{2}}R$.
拘束条件は (11) と同様．$A_x = A_y$.
これらを連立して，$a = A_y = \frac{1}{2}g$.

(12)　B と A は粗く一体となって運動するため，A には静止摩擦力が作用．A と B が x 軸正方向に動くため，A には x 軸正方向の力が必要．これが，静止摩擦力となる．滑り出す直前なので，働く静止摩擦力は最大静止摩擦力になる．



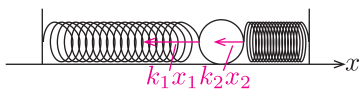
A について，
$x : ma = \mu mg$.
B について，
$x : Ma = F - \mu mg$.

(13)　ばねは自然長よりも伸びているため，弾性力は x 負方向.



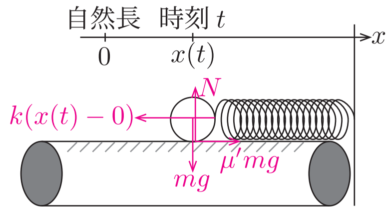
$x : ma = mg - k(x(t) - l_0)$.

(14)



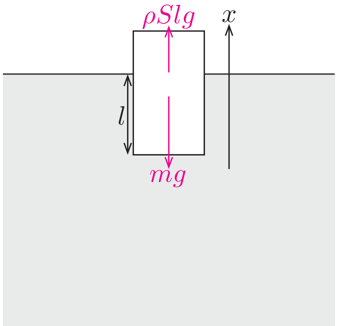
$x : ma = -k_1x_1 - k_2x_2$.

(15)　ベルトからみた A の相対速度は，$v - v_0 < 0$ ．ベルトからみて，A は x 軸負方向に運動するので，動摩擦力の向きは x 軸正方向.



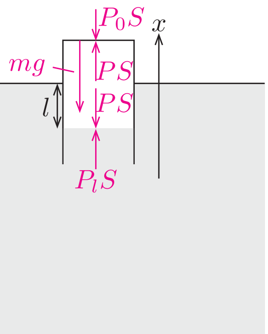
$x : \underline{\underline{ma = \mu' mg - k(x(t) - 0).}}$

(16)　浮力は常に鉛直上向きに作用．



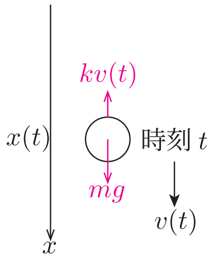
$x : \underline{\underline{ma = \rho Slg - mg.}}$

(17)　水面での釣り合いを考える．圧力による力を全て書き下す場合には，浮力の式は用いない．コップの中の気圧を P，深さ l の場所の圧力を P_l とする．



深さ l の場所の圧力 P_l は，水圧の式より，
$P_l = P_0 + \rho gl$．水面での釣り合いから，
$x : 0 = P_lS - PS$．したがって，
$P = P_l = P_0 + \rho gl$．
コップの釣り合いは，
$x : 0 = PS - P_0S - mg = \underline{\underline{\rho Slg - mg}}.$

(18)



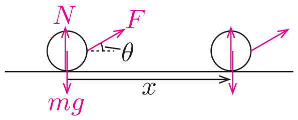
$x : \underline{\underline{ma = mg - kv(t).}}$

3　エネルギーと仕事

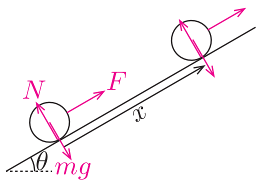
3.1　仕事

Ex. 以下の図における，物体に働く力がする仕事を求めよ．重力加速度の大きさは g とする．

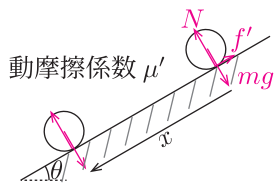
(1)　重力 mg，垂直抗力 N，外力 F の仕事.



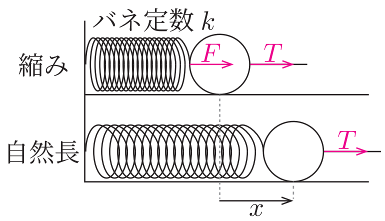
(2)　重力 mg，垂直抗力 N，外力 F の仕事.



(3)　重力 mg，垂直抗力 N，動摩擦力 f' の仕事. 動摩擦力の大きさ f' を求めて仕事を計算せよ.



(4)　張力 T，弾性力 F の仕事.



3.1 の解答

(1)

$\underline{\underline{W_{mg} = 0.}}$

$\underline{\underline{W_N = 0.}}$

$\underline{\underline{W_F = +F\cos\theta x.}}$

(2)

$\underline{\underline{W_{mg} = -mg\sin\theta x.}}$

$\underline{\underline{W_N = 0.}}$

$\underline{\underline{W_F = +Fx.}}$

(3)

$\underline{\underline{W_{mg} = mg\sin\theta x.}}$

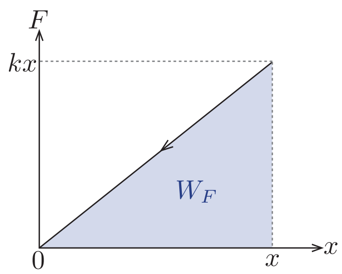
$\underline{\underline{W_N = 0.}}$

$f' = \mu' N = \mu' mg\cos\theta$ より，

$\underline{\underline{W_{f'} = -\mu' mg\cos\theta x.}}$

(4)　弾性力は一定の大きさではないことに注意.

$F - x$ グラフをかいてその囲む面積を求める.

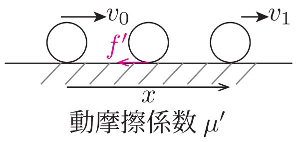


グラフの面積より，$\underline{\underline{W_F = \frac{1}{2}kx^2.}}$ $\underline{\underline{W_T = Tx.}}$

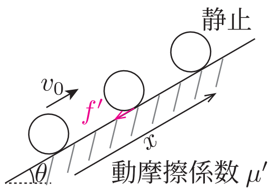
3.2　エネルギーと仕事の関係式

Ex. 以下の図における，エネルギーと仕事の関係式を立式せよ．重力加速度の大きさは g とする．

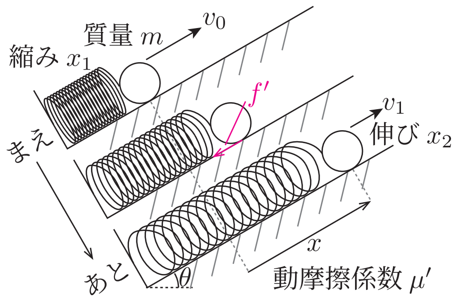
(1)　f' の大きさは具体的に計算せよ．



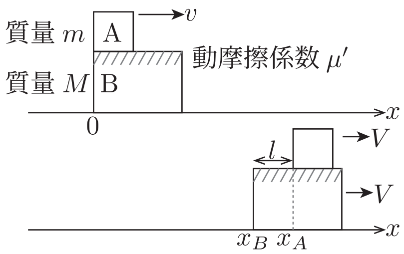
(2)　f' の大きさは具体的に計算せよ．



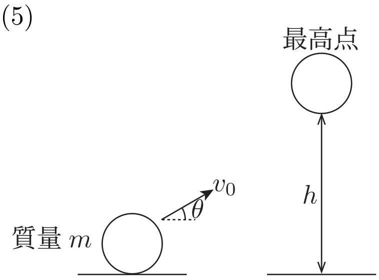
(3)　f' の大きさは具体的に計算せよ．



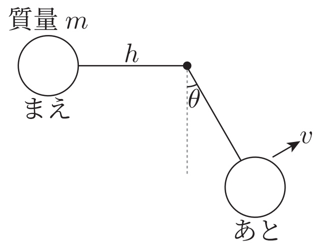
(4)　A と B，それぞれで立式した後，系全体（A+B）での立式をせよ．



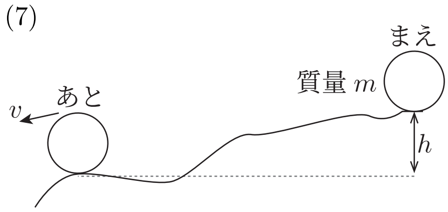
(5)



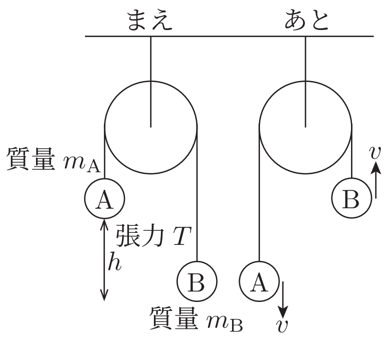
(6)



(7)



(8)　A と B，それぞれで立式した後，系全体（A+B）での立式をせよ．



3.1 の解答

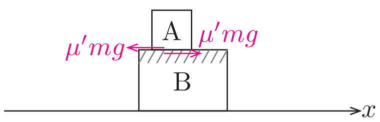
重力の位置エネルギーの基準は任意．今回は全て『まえ』を基準にとるが，どこでとっても式としては等価．

(1)　非保存力として動摩擦力がある．その仕事 $W_{f'}$ は，$W_{f'}=-\mu' mgx$．
エネルギーと仕事の関係は，
$\frac{1}{2}mv_0^2+W_{f'}=\frac{1}{2}mv_1^2$,
$\underline{\underline{\frac{1}{2}mv_0^2-\mu' mgx=\frac{1}{2}mv_1^2.}}$

(2)　非保存力として動摩擦力がある．その仕事 $W_{f'}$ は，$W_{f'}=-\mu' mg\cos\theta x$．
エネルギーと仕事の関係は，
$\frac{1}{2}mv_0^2+W_{f'}=mgx\sin\theta$,
$\underline{\underline{\frac{1}{2}mv_0^2-\mu' mg\cos\theta x=mgx\sin\theta.}}$

(3)　非保存力として動摩擦力がある．その仕事 $W_{f'}$ は，$W_{f'}=-\mu' mg\cos\theta x$．
エネルギーと仕事の関係は，
$\frac{1}{2}mv_0^2+\frac{1}{2}kx_1^2+W_{f'}=\frac{1}{2}mv_1^2+\frac{1}{2}kx_2^2+mgx\sin\theta$,
$\underline{\underline{\frac{1}{2}mv_0^2+\frac{1}{2}kx_1^2-\mu' mg\cos\theta x=}}$
$\underline{\underline{\frac{1}{2}mv_1^2+\frac{1}{2}kx_2^2+mgx\sin\theta.}}$

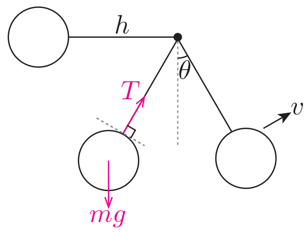
(4)　運動の初期条件より，A にはたらく動摩擦力は左向きに $\mu' mg$．作用・反作用の法則より，B にはたらく動摩擦力は右向きに $\mu' mg$．



A に働く動摩擦力がする仕事を W_A は，$W_A=-\mu' mgx_A$．B に働く動摩擦力がする仕事を W_B は，$W_B=\mu' mgx_B$．
A のエネルギーと仕事の関係は，
$\underline{\underline{\frac{1}{2}mv^2-\mu' mgx_A=\frac{1}{2}mV^2.}}$
B のエネルギーと仕事の関係は，
$\underline{\underline{\mu' mgx_B=\frac{1}{2}mV^2.}}$
系全体（A+B）のエネルギーと仕事の関係は，
$\frac{1}{2}mv^2-\mu' mg(x_A-x_B)=\frac{1}{2}mV^2$,
$\underline{\underline{\frac{1}{2}mv^2-\mu' mgl=\frac{1}{2}mV^2.}}$

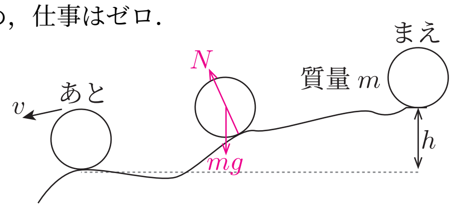
(5)　斜方投射であるため，最高点は水平方向の速度をもつことに注意．保存力である重力のみが仕事をするので，力学的エネルギーは保存する．力学的エネルギー保存則より，
$\underline{\underline{\frac{1}{2}mv_0^2=mgh+\frac{1}{2}mv_0^2\cos\theta.}}$

(6)　物体に働く力は張力 T と重力 mg だけだが，張力は常に変位と直角向きに働いているため，仕事はゼロ．



保存力である重力のみが仕事をするので，力学的エネルギーは保存する．力学的エネルギー保存則は，
$\underline{\underline{0=-mgh\cos\theta+\frac{1}{2}mv^2.}}$

(7)　物体に働く力は垂直抗力 N と重力 mg だけだが，垂直抗力は常に変位と直角向きに働いているため，仕事はゼロ．



保存力である重力のみが仕事をするので，力学的エネルギーは保存する．力学的エネルギー保存則は，
$\underline{\underline{0=-mgh+\frac{1}{2}mv^2.}}$

(8)　物体に働く力は張力 T と重力 mg．張力と変位は平行であるため，張力は仕事をする．A に働く張力の仕事 W_A は，$W_A = -Th$．A のエネルギーと仕事の関係は,

$0 + W_{\mathrm{A}} = -m_{\mathrm{A}}gh + \frac{1}{2}m_{\mathrm{A}}v^2$,

$\underline{\underline{-Th = -m_{\mathrm{A}}gh + \frac{1}{2}m_{\mathrm{A}}v^2}}$.

B に働く張力がする仕事 W_B は，$W_B = Th$．B のエネルギーと仕事の関係は,

$0 + W_B = m_{\mathrm{B}}gh + \frac{1}{2}m_{\mathrm{B}}v^2$,

$\underline{\underline{Th = m_{\mathrm{B}}gh + \frac{1}{2}m_{\mathrm{B}}v^2}}$.

同じ糸で繋がれているので，A と B の加速度は同じ大きさであるため，両者の速さは等しいことに注意する．系全体（A+B）のエネルギーと仕事の関係は,

$\underline{\underline{0 = -m_{\mathrm{A}}gh + m_{\mathrm{B}}gh + \frac{1}{2}m_{\mathrm{A}}v^2 + \frac{1}{2}m_{\mathrm{B}}v^2}}$.

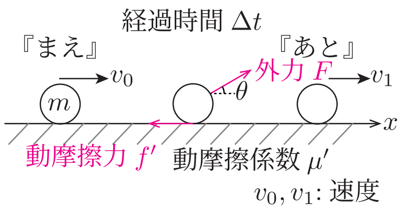
つまり，系全体では力学的エネルギーは保存する．

4　運動量と力積

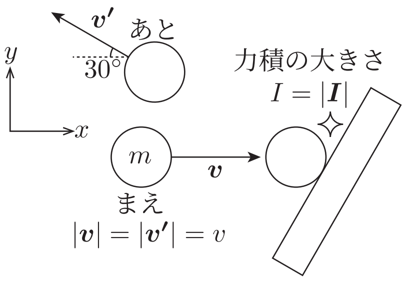
4.1　運動量と力積の関係

Ex. 以下の図における，各物体の運動量と力積の関係を立式せよ．複数物体の系では，系全体で運動量が保存するか否かを確認せよ．

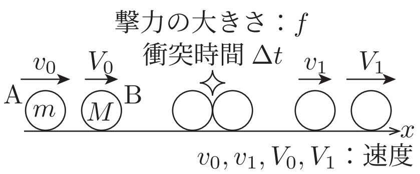
(1)　動摩擦力の大きさは求めて立式せよ．



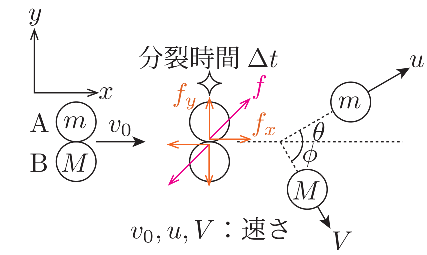
(2)　ベクトルを用いて運動量と力積の関係を立式し，力積の大きさ I を計算せよ．



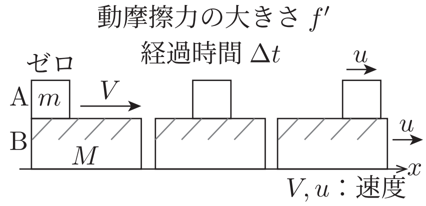
(3)　A，B それぞれについて立式せよ．



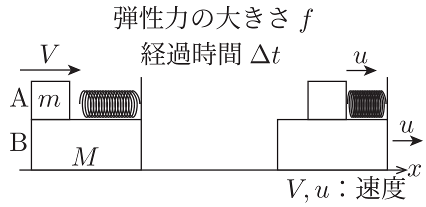
(4)　A, B それぞれを x, y 方向について立式せよ．



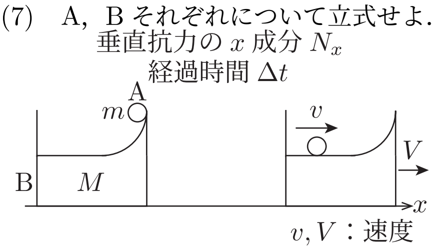
(5)　A，B それぞれについて立式せよ．



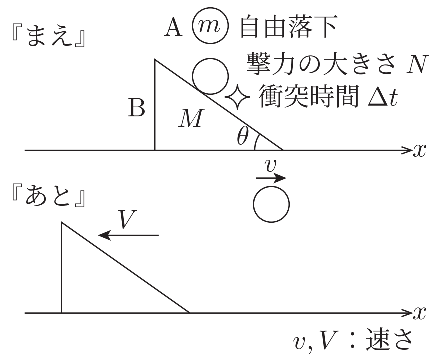
(6)　A，B それぞれについて立式せよ．



(7)　A，B それぞれについて立式せよ．



(8)　A，B それぞれについて立式せよ．



4.1 の解答

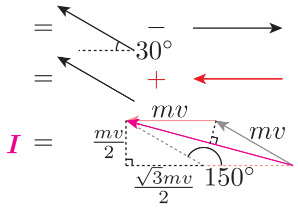
(1)　x 方向の運動量と力積の関係は,

$mv_0 + (F\cos\theta - \mu' mg)\Delta t = mv_1$.

(2)　運動量と力積の関係は,

$m\boldsymbol{v} + \boldsymbol{I} = m\boldsymbol{v}'$.

$$\boldsymbol{I} = m\boldsymbol{v}' - m\boldsymbol{v}$$



力積の大きさ I は，図より,

$I = \sqrt{(\frac{mv}{2})^2 + (mv(1+\frac{\sqrt{3}}{2}))^2} = mv\sqrt{2+\sqrt{3}}$.

(3)　A について，運動量と力積の関係は,

$mv_0 - f\Delta t = mv_1$.

B について，運動量と力積の関係は,

$MV_0 + f\Delta t = MV_1$.

2 式を足すと,

$mv_0 + MV_0 = mv_1 + MV_1$.

力積が消え，系全体の運動量は保存する.

(4)　A について，x, y 方向の運動量と力積の関係は,

$x : mv_0 + f_x\Delta t = mv\cos\theta$.

$y : 0 = f_y\Delta t = mv\sin\theta$.

B について，x, y 方向の運動量と力積の関係は,

$x : Mv_0 - f_x\Delta t = MV\cos\phi$.

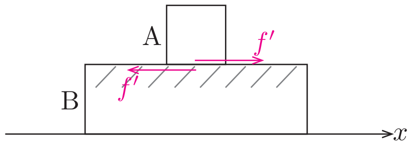
$y : 0 - f_y\Delta t = -mv\sin\phi$.

x, y 方向のそれぞれの式を足すと,

$x : mv_0 + Mv_0 = mv\cos\theta + MV\cos\phi$.

$y : 0 = mv\sin\theta - MV\sin\phi$.

(5)　運動途中の A と B に働く力を図示すると，以下のようになる.



A について，運動量と力積の関係は,

$0 + f'\Delta t = mu$.

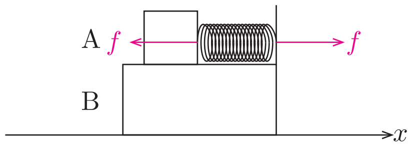
B について，運動量と力積の関係は,

$MV - f'\Delta t = Mu$.

2 式を足すと,

$MV = mu + Mu$.

(6)　運動途中の A と B に働く力を図示すると，以下のようになる.



A について，運動量と力積の関係は,

$mV - f\Delta t = mu$.

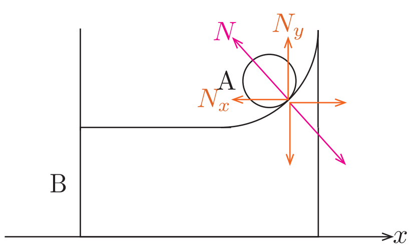
B について，運動量と力積の関係は,

$0 + f\Delta t = Mu$.

2 式を足すと,

$mV = mu + Mu$.

(7)　運動途中の A と B に働く力を図示すると，以下のようになる.



A について，運動量と力積の関係は,

$0 - N_x\Delta t = mv$.

B について，運動量と力積の関係は，

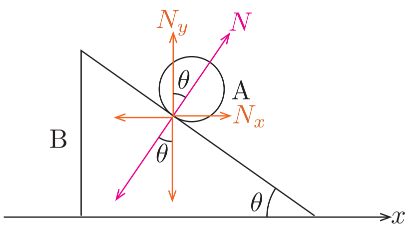
$\underline{\underline{0 + N_x \Delta t = MV}}$.

2 式を足すと，

$\underline{\underline{0 = mv + MV}}$.

力のかかり方から，A は左に動くことは明白だが，与えられている文字が『速度』なので，自分で符号を入れてはならない．文字の中に符号が入っていることに注意すること．

(8)　衝突の瞬間の A と B に働く力を図示すると，以下のようになる．



A について，運動量と力積の関係は，

$\underline{\underline{0 + N_x \Delta t = mv}}$.

B について，運動量と力積の関係は，

$\underline{\underline{0 - N_x \Delta t = -MV}}$.

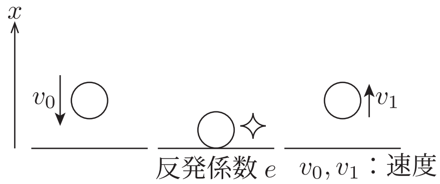
2 式を足すと，

$\underline{\underline{0 = mv - MV}}$.

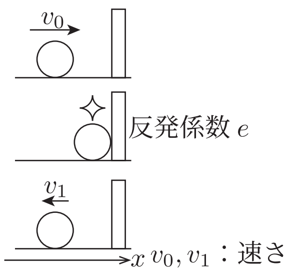
4.2 反発係数

Ex. 以下の図における，反発係数の式を立式せよ．

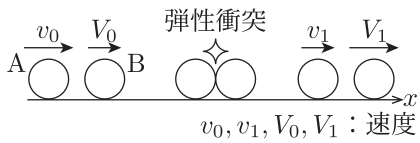
(1)



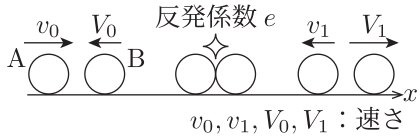
(2)



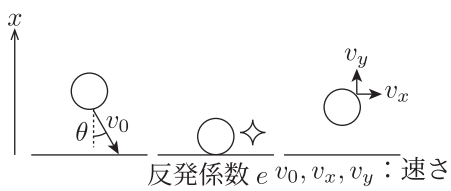
(3)



(4)



(5) v_x も求めよ．



4.2 の解答

(1)　反発係数の式は,
$e = \dfrac{|v_1|}{|v_0|} = \underline{\underline{\dfrac{v_1}{-v_0}}}.$

(2)　反発係数の式は,
$e = \dfrac{|-v_1|}{|v_0|} = \underline{\underline{\dfrac{v_1}{v_0}}}.$

(3)　A からみた B の相対速度で考える．弾性衝突なので $e = 1$. 反発係数の式は,
$1 = \dfrac{|V_1 - v_1|}{|V_0 - v_0|}.$
衝突が起きていることから，$v_0 > V_0$，$V_1 > v_1$．したがって,
$1 = \underline{\underline{\dfrac{V_1 - v_1}{-(V_0 - v_0)}}}.$
もちろん B からみた A の相対速度で考えても同じ結果になる.

(4)　A からみた B の相対速度で考える．反発係数の式は,
$e = \dfrac{|V_1 - (-v_1)|}{|-V_0 - v_0|} = \underline{\underline{\dfrac{V_1 + v_1}{V_0 + v_0}}}.$

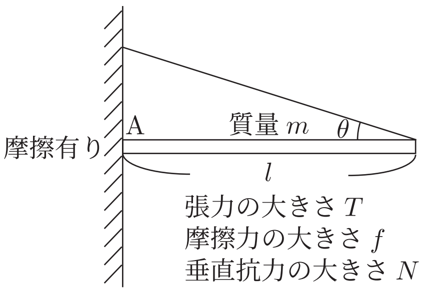
(5)　反発係数の式は，撃力作用線と平行な速度成分でないと立式できない．撃力は x 方向を向くため, x 方向の速度について反発係数の式を立式できる. 撃力作用線と直角の方向の速度は，衝突の前後で変化しない.
$v_x = \underline{\underline{v_0 \sin\theta}}.$
x 方向について，反発係数の式は,
$e = \dfrac{|v_y|}{|-v_0 \cos\theta|} = \underline{\underline{\dfrac{v_y}{v_0 \cos\theta}}}.$

5　剛体の静力学

5.1　剛体の静止条件

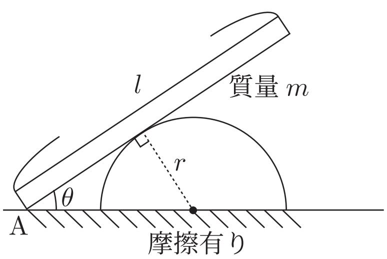
Ex. 以下の図における，剛体の静止条件を立式せよ．剛体は全て一様なものとする．モーメントの釣り合いは，A を中心に立式せよ．

(1)



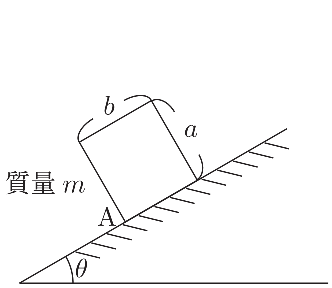
張力の大きさ T
摩擦力の大きさ f
垂直抗力の大きさ N

(2)



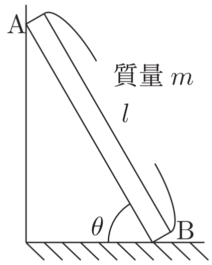
摩擦力の大きさ f
円筒から受ける垂直抗力の大きさ R
A から受ける垂直抗力の大きさ N

(3)



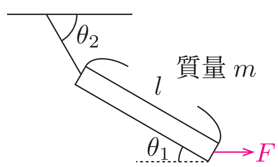
摩擦力の大きさ f
垂直抗力の大きさ R
A から垂直抗力の作用点までの距離 x

(4)



B からの摩擦力の大きさ f
B からの垂直抗力の大きさ R
A からの垂直抗力の大きさ N

(5)

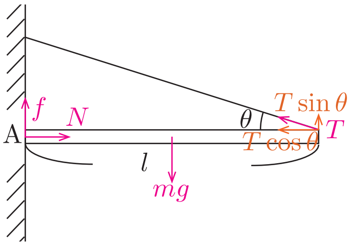


張力の大きさ T

5.1 の解答

以下鉛直上向き，水平右向きを正とする．

(1)



鉛直方向の釣り合いの式より，

$0 = f + T\sin\theta - mg.$

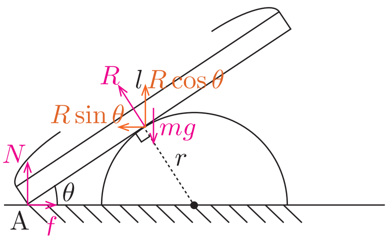
水平右向きの力の釣り合いより，

$0 = N - T\cos\theta.$

A 中心のモーメントの釣り合いより，

$0 = -\frac{l}{2}mg + lT\sin\theta.$

(2)



鉛直方向の釣り合いの式より，

$0 = R\cos\theta + N - mg.$

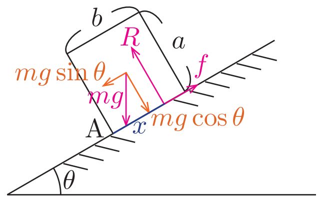
水平右向きの力の釣り合いより，

$0 = f - R\sin\theta.$

A 中心のモーメントの釣り合いより，

$0 = -\frac{r}{\tan\theta}R + \frac{l\cos\theta}{2}mg.$

(3)　この問いでは，斜面平行下向き，斜面垂直上向きを正とする．



斜面平行方向の釣り合いの式より，

$0 = mg\sin\theta - f.$

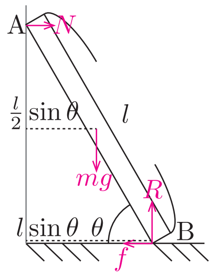
斜面垂直上向きの力の釣り合いより，

$0 = R - mg\cos\theta.$

A 中心のモーメントの釣り合いより，

$0 = \frac{a}{2}mg\sin\theta - \frac{b}{2}mg\cos\theta + xR.$

(4)



鉛直方向の釣り合いの式より，

$0 = R - mg.$

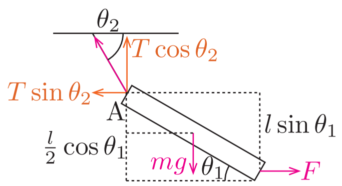
水平右向きの力の釣り合いより，

$0 = N - f.$

A 中心のモーメントの釣り合いより，

$0 = -\frac{l}{2}\sin\theta mg + l\sin\theta R.$

(5)



鉛直方向の釣り合いの式より，

$0 = T\cos\theta_2 - mg.$

水平右向きの力の釣り合いより，

$0 = F - T\sin\theta_2.$

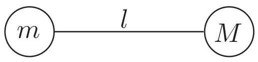
A 中心のモーメントの釣り合いより，

$0 = -\dfrac{l}{2}\cos\theta_1 mg + l\sin\theta_1 F.$

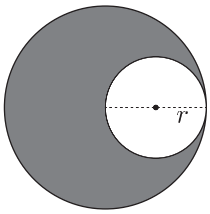
5.2 重心

Ex. 以下の図における，剛体の重心を求めよ．剛体は全て一様であるとする．

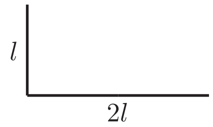
(1)



(2)



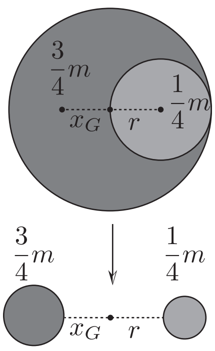
(3)



5.2 の解答

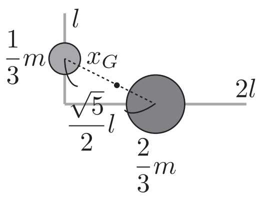
(1)　右から重心までの距離を x_G とする．重力のモーメントの釣り合いより，
$0 = +x_G mg - (l - x_G)Mg$,
$\underline{\underline{x_G = \dfrac{Ml}{m+M}}}$.

(2)　くり抜く前の円盤の質量を m とする．今考えている円盤の質量は，面積比を考えることにより，$\dfrac{3}{4}m$．くり抜かれた円盤の質量は，$\dfrac{1}{4}m$．円盤を埋めると，全体の重心は円の中心となる．全体の円盤の中心から，求める重心までの距離を x_G とする．



上図から，重力のモーメントの釣り合いより，
$0 = x_G\dfrac{3}{4}mg - r\dfrac{1}{4}mg$,
$\underline{\underline{x_G = \dfrac{r}{3}}}$.

(3)　棒全体の質量を m とする．鉛直向きと水平向きの棒にそれぞれ分ける．長さの比より，l，$2l$ の棒の質量はそれぞれ $\dfrac{1}{3}m$，$\dfrac{2}{3}m$．2 つの棒のそれぞれの重心は，分けた棒の中点．全体の重心は，2 つの重心を結ぶ線分上にある．



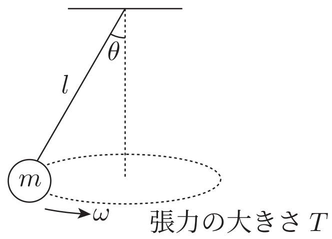
上図における重心周りの重力のモーメントの釣り合いより，
$0 = x_G\dfrac{1}{3}mg - (\dfrac{\sqrt{5}l}{2} - x_G)\dfrac{2}{3}mg$,
$x_G = \dfrac{\sqrt{5}l}{3}$.
2 つの重心を結ぶ線分を，2 : 1 に内分する点が求める重心．

6　円運動

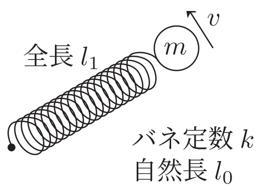
6.1　円運動の記述

Ex. 以下の図における，円運動を記述する式を立式せよ．

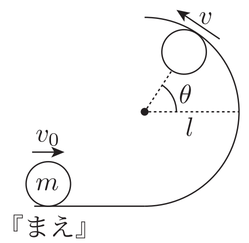
(1)



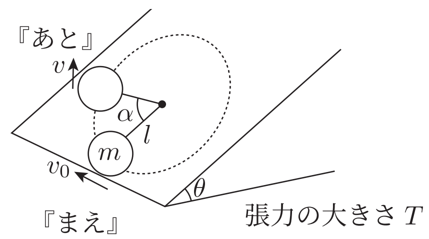
(2)



(3)

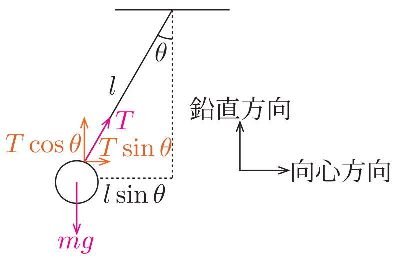


(4)



6.1 の解答

(1)　向心方向のみに力が働いている（鉛直方向は釣り合いで合力ゼロ）ため，角運動量保存則から等速円運動．



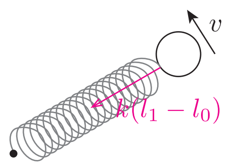
向心方向の運動方程式より，

$ml\sin\theta\omega^2 = T\sin\theta$.

鉛直方向は力の釣り合い，釣り合いの式より，

$0 = T\cos\theta - mg$.

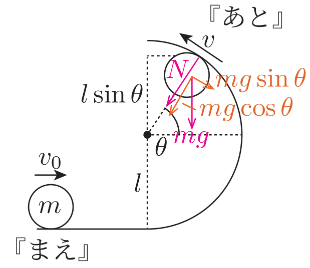
(2)　向心方向のみに力が働いているため，角運動量保存則から等速円運動．



向心方向の運動方程式より，

$m\dfrac{v^2}{l_1} = k(l_1 - l_0)$.

(3)　向心方向意外にも力が働くため，角運動量保存則は成立しないため非等速円運動．



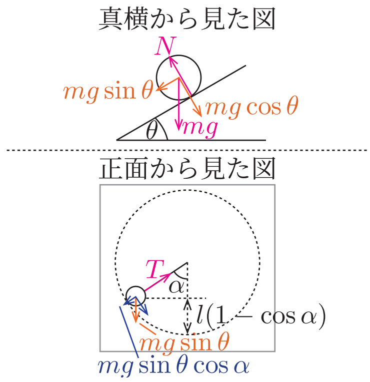
向心方向の運動方程式より，

$m\dfrac{v^2}{l} = N + mg\sin\theta$.

垂直抗力は仕事をしないため，力学的エネルギーは保存する．力学的エネルギー保存則より，

$\dfrac{1}{2}mv_0^2 = \dfrac{1}{2}mv^2 + mgl(1+\sin\theta)$.

(4)　向心方向意外にも力が働くため，角運動量保存則は成立しないため非等速円運動．



向心方向の運動方程式より，

$m\dfrac{v^2}{l} = T - mg\sin\theta\cos\alpha$.

垂直抗力，張力は仕事をしないため，力学的エネルギーは保存する．力学的エネルギー保存則より，

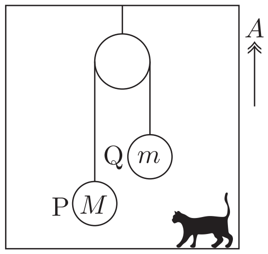
$\dfrac{1}{2}mv_0^2 = \dfrac{1}{2}mv^2 + mgl(1-\cos\alpha)\sin\theta$.

7　非慣性系の力学

7.1　慣性力の導入

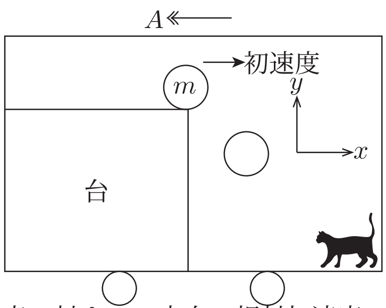
Ex. 以下の図において，質量 m の物体の非慣性系からみた運動方程式を立式せよ．A は非慣性系の観測者が有する加速度の大きさである．

(1)　P，Q それぞれの運動方程式を立式せよ．



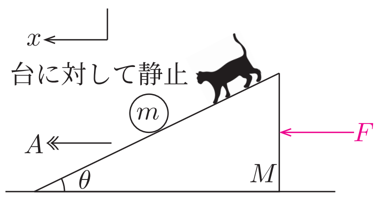
箱に対する相対加速度 a
$M > m$

(2)　台から飛び出して，宙に浮いている時の，x，y 方向それぞれで立式せよ．



車に対する x 方向の相対加速度 a
y 方向の加速度 b

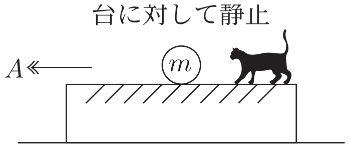
(3)　慣性系からみた台の x 方向の運動方程式も立式せよ．



垂直抗力の大きさ N

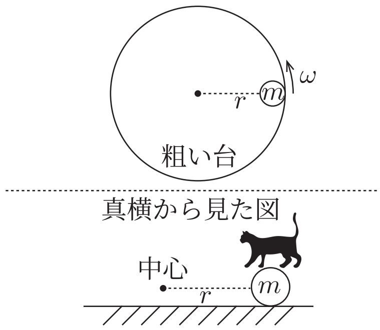
(4)

台に対して静止



静止摩擦力の大きさ f

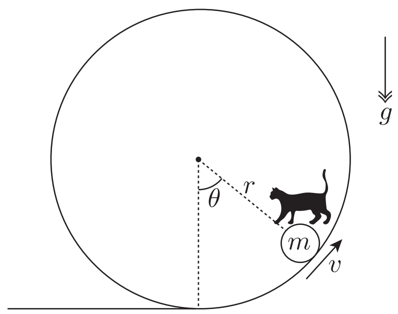
(5)



静止摩擦力の大きさ f

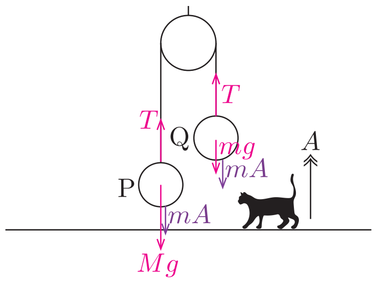
(6)

垂直抗力の大きさ N



7.1 の解答

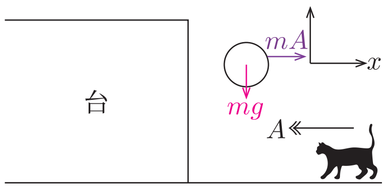
(1)



$P : Ma = Mg + MA - T.$

$Q : ma = -mg - mA + T.$

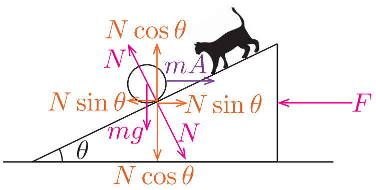
(2)



$x : ma = mA.$

$y : mb = -mg.$

(3)



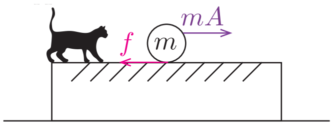
小球について，$x : 0 = N\sin\theta - mA.$

$y : 0 = N\cos\theta - mg.$

台について，

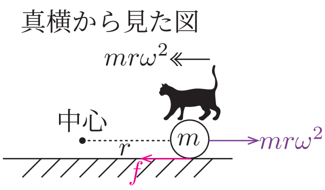
$x : MA = F - N\sin\theta.$

(4)



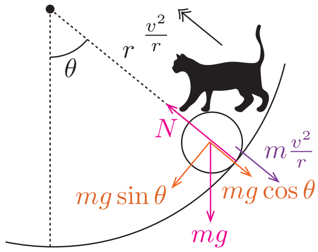
$x : 0 = f - mA.$

(5)



$x : 0 = f - mr\omega^2.$

(6)

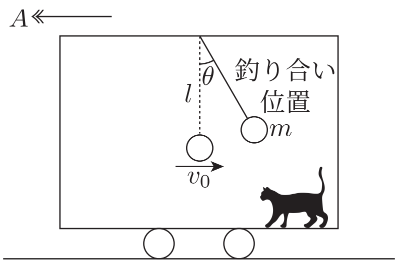


$x : 0 = N - mg\cos\theta - m\dfrac{v^2}{r}.$

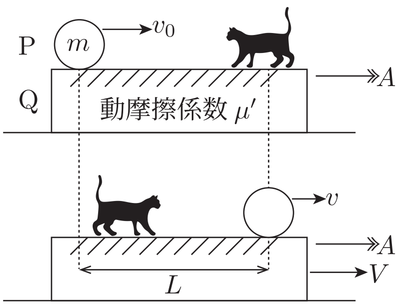
7.2 非慣性系におけるエネルギー変化

Ex. 以下の図において，運動の前後に注目して，非慣性系においてエネルギーの変化を立式せよ．A は非慣性系の観測者が有する加速度の大きさである．

(1) みかけの重力加速度の大きさ g' を，A だけを用いて求めよ．また，一番早くなる時の速さを v_{max} として，エネルギーの変化を立式せよ．

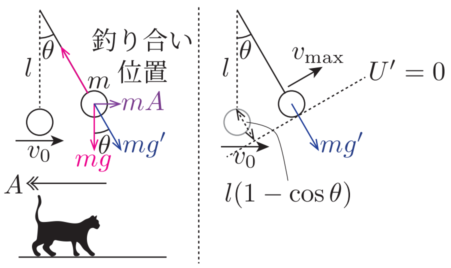


(2) v_0，v，V は慣性系における速度であることに注意せよ．



7.2 の解答

(1)

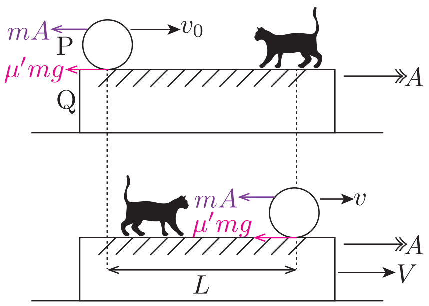


$g' = \dfrac{A}{\sin\theta}$.

張力は仕事をしないので，見かけの重力を用いれば非慣性系において力学的エネルギーは保存.

$$\frac{1}{2}mv^2 + m\frac{A}{\sin\theta}l(1-\cos\theta) = \frac{1}{2}mv_{\max}^2.$$

(2)



Q の上の観測者からみると，Q からみた P の速度は，$v - V$.

非慣性系におけるエネルギーと仕事の関係は，

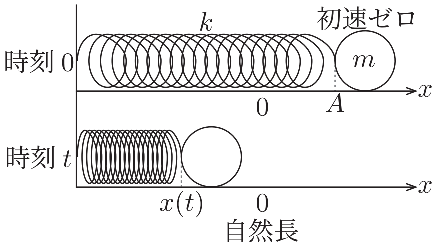
$$\frac{1}{2}mv_0^2 - \mu' mgL - mAL = \frac{1}{2}m(v-V)^2.$$

8　単振動

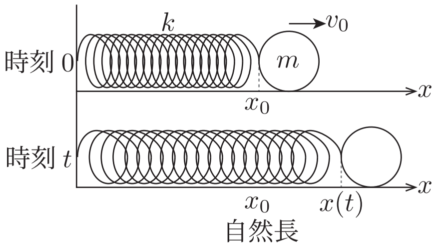
8.1　単振動の運動方程式と運動の様子

Ex. 以下の図において，単振動の運動方程式を立式し，角速度 ω，振動中心座標 X_0 を求めよ．加速度を a とする．また初期条件から，$x(t)$，$v(t)$ を決定せよ．

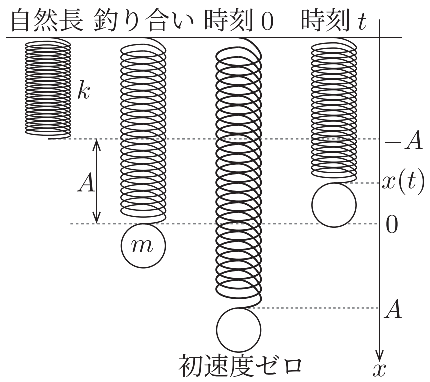
(1)



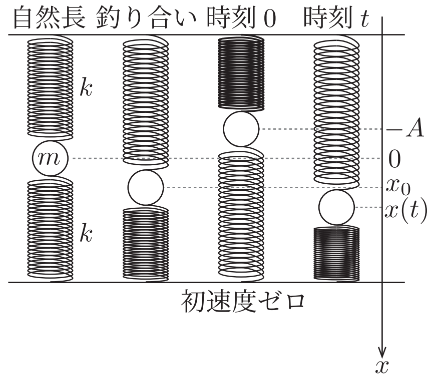
(2)



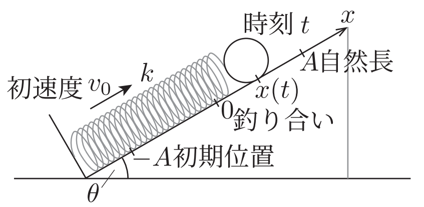
(3)　k を消去して答えよ．



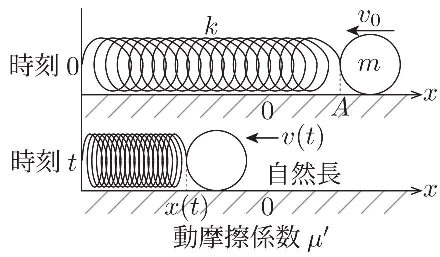
(4)　k を消去して答えよ．



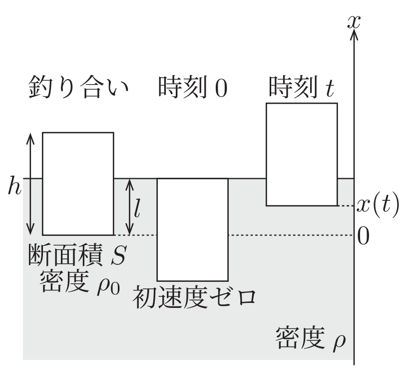
(5)　k を消去して答えよ．



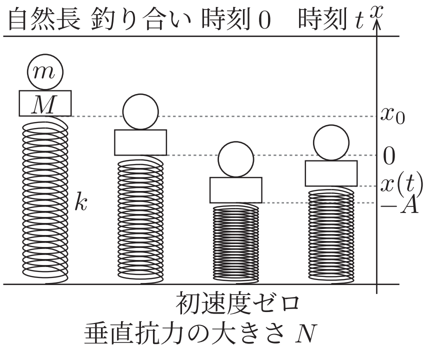
(6)



(7)　周期 T も求めよ．

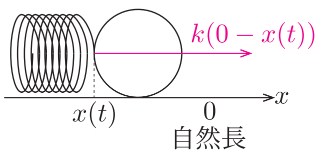


(8)　N を位置座標 x の関数である $N(x)$，また時刻 t の関数である $N(t)$ も求めよ．



8.1 の解答

(1)



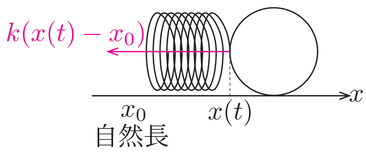
$\underline{\underline{ma = +K(0 - x(t)) = -k(x(t) - 0)}}$.

$\underline{\underline{\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}}}$, $\underline{\underline{X_0 = 0}}$.

初期条件より，

$\underline{\underline{x(t) = A\cos\sqrt{\frac{k}{m}}t}}$, $\underline{\underline{v(t) = -A\sqrt{\frac{k}{m}}\sin\sqrt{\frac{k}{m}}t}}$.

(2)



$\underline{\underline{ma = -k(x(t) - x_0)}}$.

$\underline{\underline{\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}}}$, $\underline{\underline{X_0 = x_0}}$.

初期条件が 2 つあるため，一般解を用いる．一般解の定数を C，D とする．単振動の一般解は，

$x(t) = C\cos\omega t + D\sin\omega t + x_0$,

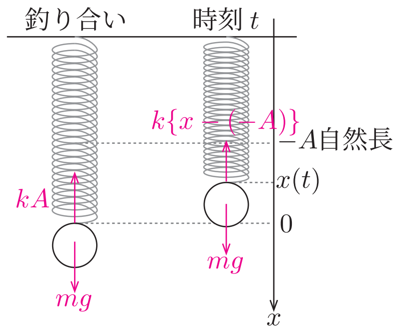
$v(t) = -C\omega\sin\omega t + D\omega\cos\omega t$．初期条件を一般解に代入すると，

$x(0) = C + 0 + x_0 = x_0$，$v(0) = D\omega = v_0$.

$\underline{\underline{x(t) = v_0\sqrt{\frac{m}{k}}\sin\sqrt{\frac{k}{m}}t + x_0}}$.

$\underline{\underline{v(t) = v_0\cos\sqrt{\frac{k}{m}}t}}$.

(3)



釣り合いより，

$k = \frac{mg}{A}$,

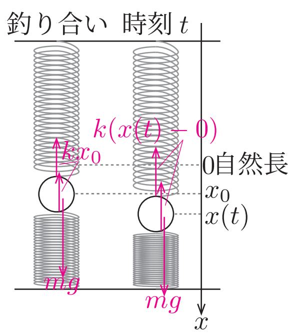
$\underline{\underline{ma = mg - k\{x(t) - (-A)\} = -kx(t) = -\frac{mg}{A}x(t)}}$.

$\underline{\underline{\omega = \sqrt{\frac{g}{A}}}}$, $\underline{\underline{X_0 = 0}}$.

初期条件より，

$\underline{\underline{x(t) = A\cos\sqrt{\frac{g}{A}}t}}$, $\underline{\underline{x(t) = -A\sqrt{\frac{g}{A}}\sin\sqrt{\frac{g}{A}}t}}$.

(4)



釣り合いより，

$k = \frac{mg}{2x_0}$,

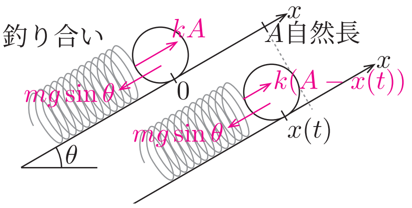
$\underline{\underline{ma = mg - 2k(x(t) - 0) = -2k(x(t) - \frac{mg}{2k}) = -\frac{mg}{x_0}(x(t) - x_0)}}$.

$\underline{\underline{\omega = \sqrt{\frac{g}{x_0}}}}$, $\underline{\underline{X_0 = x_0}}$.

初期条件より，

$\underline{\underline{x(t) = -A\cos\sqrt{\frac{g}{x_0}}t}}$, $\underline{\underline{x(t) = A\sqrt{\frac{g}{x_0}}\sin\sqrt{\frac{g}{x_0}}t}}$.

(5)



釣り合いより，

$k=\dfrac{mg\sin\theta}{A}$,

$ma=-\dfrac{mg\sin\theta}{A}(x(t)-0)$.

$\omega=\sqrt{\dfrac{g\sin\theta}{A}}$, $X_0=0$.

初期条件が 2 つあるため，一般解を用いる．一般解の定数を C，D とする．単振動の一般解は，

$x(t)=C\cos\omega t+D\sin\omega t+0$,

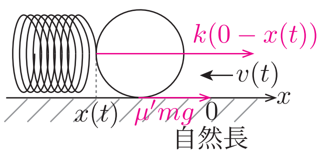
$v(t)=-C\omega\sin\omega t+D\omega\cos\omega t$．初期条件を一般解に代入すると，

$x(0)=C+0+0=-A$, $v(0)=D\omega=v_0$.

$x(t)=-A\cos\sqrt{\dfrac{g\sin\theta}{A}}t+v_0\sqrt{\dfrac{A}{g\sin\theta}}\sin\sqrt{\dfrac{g\sin\theta}{A}}t$.

$v(t)=\sqrt{Ag\sin\theta}\sin\sqrt{\dfrac{g\sin\theta}{A}}t+v_0\cos\sqrt{\dfrac{g\sin\theta}{A}}t$.

(6)



$ma=+k(0-x(t))+\mu' mg=-k(x(t)-\dfrac{\mu' mg}{k})$.

$\omega=\sqrt{\dfrac{k}{m}}$, $X_0=\dfrac{\mu' mg}{k}$.

初期条件が 2 つあるため，一般解を用いる．一般解の定数を C，D とする．単振動の一般解は，

$x(t)=C\cos\omega t+D\sin\omega t+\dfrac{\mu' mg}{k}$,

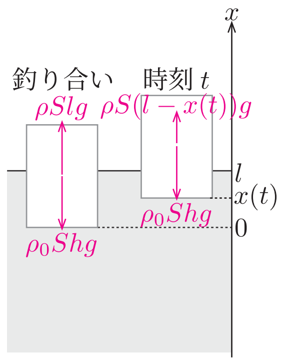
$v(t)=-C\omega\sin\omega t+D\omega\cos\omega t$．初期条件を一般解に代入すると，

$x(0)=C+0+\dfrac{\mu' mg}{k}=A$, $v(0)=D\omega=-v_0$.

$x(t)=(A-\dfrac{\mu' mg}{k})\cos\sqrt{\dfrac{k}{m}}t-v_0\sqrt{\dfrac{m}{k}}\sin\sqrt{\dfrac{k}{m}}t+\dfrac{\mu' mg}{k}$.

$v(t)=-(A-\dfrac{\mu' mg}{k})\sqrt{\dfrac{k}{m}}\sin\sqrt{\dfrac{k}{m}}t-v_0\cos\sqrt{\dfrac{k}{m}}t$.

(7)



釣り合いより，$0=\rho Slg-\rho_0 Shg$.

$\rho_0 Sha=\rho S(l-x(t))g-\rho_0 Shg=-\rho Sg(x(t)-0)$.

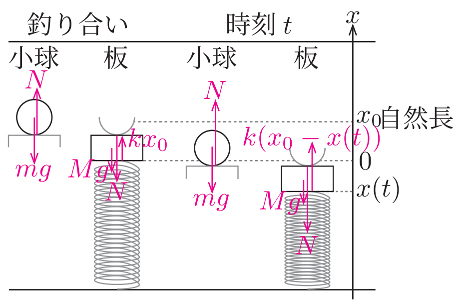
$\omega=\sqrt{\dfrac{\rho g}{\rho_0 h}}$, $T=2\pi\sqrt{\dfrac{\rho_0 h}{\rho g}}$, $X_0=0$.

初期条件より，

$x(t)=(l-h)\cos\sqrt{\dfrac{\rho g}{\rho_0 h}}t$,

$v(t)=-(l-h)\sqrt{\dfrac{\rho g}{\rho_0 h}}\sin\sqrt{\dfrac{\rho g}{\rho_0 h}}t$.

(8)



釣り合いより，小球 : $0=N-mg$,

台 : $0=kx_0-Mg-N$.

小球 : $ma=N-mg$,

台 : $Ma=k(x_0-x(t))-Mg-N$.

小球 + 台 : $\underline{\underline{(m+M)a = -k(x(t)-0)}}$,

$\underline{\underline{\omega = \sqrt{\frac{k}{m+M}}}}$, $\underline{\underline{X_0 = 0}}$.

$\underline{\underline{N(x) = ma + mg = -\frac{km}{m+M}x(t) + mg.}}$

初期条件より,

$\underline{\underline{x(t) = -A\cos\sqrt{\frac{k}{m+M}}t,}}$

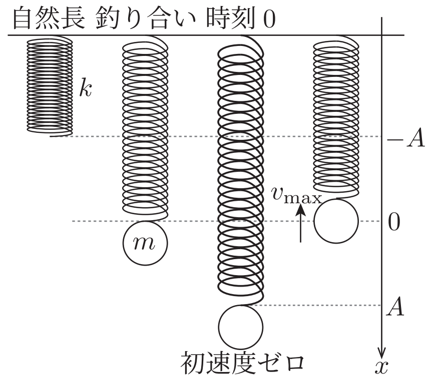
$\underline{\underline{v(t) = A\sqrt{\frac{k}{m+M}}\sin\sqrt{\frac{k}{m+M}}t.}}$

$\underline{\underline{N(t) = \frac{Akm}{m+M}\cos\sqrt{\frac{k}{m+M}}t + mg.}}$

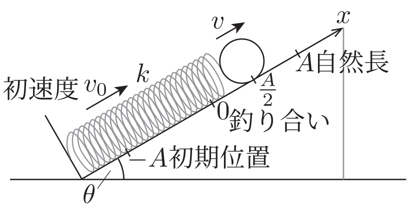
8.2 単振動におけるエネルギー変化

Ex. 以下の図において，釣り合いの位置からのバネの伸縮を考えることにより，運動の前後に注目して単振動のエネルギー保存則を立式せよ．

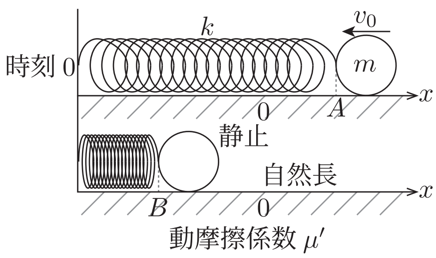
(1)



(2)



(3)



8.2 の解答

釣り合いの位置からバネの伸縮を考えると，重力の位置エネルギーや動摩擦力の仕事を考えなくてもよくなることを利用する．

(1)　釣り合いの位置は $x=0$．単振動のエネルギー保存則より，

$$\underline{\underline{\frac{1}{2}kA^2=\frac{1}{2}mv_{\mathrm{max}}^2.}}$$

(2)　釣り合いの位置は $x=0$．単振動のエネルギー保存則より，

$$\underline{\underline{\frac{1}{2}kA^2+\frac{1}{2}mv_0^2=\frac{1}{2}k(\frac{A}{2})^2+\frac{1}{2}mv^2.}}$$

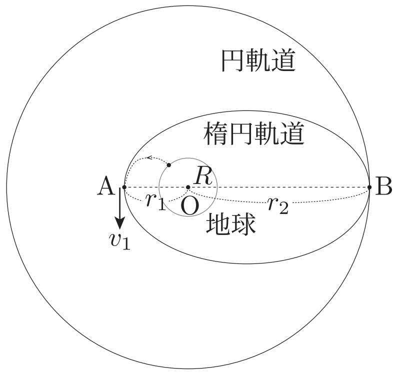
(3)　運動方程式より，$ma=-k(x(t)-\dfrac{\mu' mg}{k})$．従って釣り合いの位置は $x=\dfrac{\mu' mg}{k}$．単振動のエネルギー保存則より，

$$\underline{\underline{\frac{1}{2}k(A-\frac{\mu' mg}{k})^2+\frac{1}{2}mv_0^2=\frac{1}{2}k(\frac{\mu' mg}{k}-B)^2.}}$$

9　万有引力による運動

9.1　惑星の運動

Ex. 地球の中心 O を焦点とする人工衛星の運動について次の問いに答えよ．楕円軌道の近日点を A，遠日点を B とする．地球の質量を M，人工衛星の質量を m，万有引力定数を G，地球の半径を R とする．万有引力の位置エネルギーを無限遠方にとる．



(1)　近日点 A で人工衛星の速さが v_1 になるために，地球表面から打ち出す時の運動エネルギーはいくらか．ただし，軌道修正のためのエネルギーは無視する．

(2)　楕円軌道状の遠日点 B を通る時の速さを v_2 として，A と B について，

- (a)　面積速度保存則を立式せよ．
- (b)　力学的エネルギー保存則を立式せよ．

(3)　これらの指揮から，人工衛星が B を通る時の運動エネルギーは，そのときの位置エネルギーの絶対値の何倍になるか．r_1，r_2 を用いて求めよ．

(4)　B で人工衛星は加速して円軌道に移った．円運動の速さ V は v_2 の何倍か．

(5)　円軌道に移った後の周期 T_0 は，楕円軌道の周期 T の何倍か．

9.1 の解答

(1)　地表面での運動エネルギーを K とする．地表面から近日点までの力学的エネルギー保存則より，

$$K - \frac{GMm}{R} = \frac{1}{2}mv_1^2 - \frac{GMm}{r_1}$$
$$\underline{\underline{K = \frac{1}{2}mv_1^2 - \frac{GMm}{r_1} + \frac{GMm}{R}.}}$$

(2)(a)　面積速度保存則より，

$$\underline{\underline{\frac{1}{2}r_1v_1 = \frac{1}{2}r_2v_2.}}$$

(b)　力学的エネルギー保存則より，

$$\underline{\underline{\frac{1}{2}mv_1^2 - \frac{GMm}{r_1} = \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{GMm}{r_2}.}}$$

(3)　(2) より，

$$v_1 = \frac{r_2}{r_1}v_2.$$

力学的エネルギーの式に代入すると，

$$\frac{1}{2}mv_2^2\frac{r_1+r_2}{r_1} = \frac{GMm}{r_2},$$
$$\underline{\underline{\frac{r_1}{r_1+r_2}\text{倍.}}}$$

(4)　円軌道での運動方程式は，

$$m\frac{V^2}{r_2} = \frac{GMm}{r_2^2},$$
$$\frac{1}{2}mV^2 = \frac{1}{2}\frac{GMm}{r_2}.$$

(3) より，

$$\underline{\underline{\frac{V}{v_2} = \sqrt{\frac{r_1+r_2}{2r_1}}.}}$$

(5)　ケプラーの第 3 法則より，

$$\frac{T^2}{r_2^3} = \frac{T^2}{\left(\dfrac{r_1+r_2}{2}\right)^3}$$
$$\underline{\underline{\frac{T_0}{T} = \left(\frac{2r_2}{r_1+r_2}\right)^{\frac{3}{2}}.}}$$