19 歳の波動論 Part1

野口　駿

2025

テキストの内容と表記上の注意

このテキストでは，受験における古典物理学の基礎の内容を，高校生が習う数学を用いて真正面から記述していきます．ベクトル表示は，$\vec{a}$ ではなく，$\boldsymbol{a}$ とボールドイタリック体で表記しています．

目次

Part1

波動基礎論

1 進行波の波動式

波動現象は，私たちにとって非常に身近で幅広いスケールで観測されるものです．例えば，海が波を立てて進行する様子や，光がレンズを通して 1 箇所に集められるようなマクロな現象から，電子の運動を，物質波の波動方程式として記述するシュレディンガー方程式[*1]などのミクロな現象まで，古典物理学から現代物理学までに応用されるのです．まずは波動の運動のイメージをしっかりと掴んだのち，数式を用いた定量的な議論ができるようになりましょう．

1.1 波動における 2 つの運動

波動において考えるべき運動が 2 つあります．それは，『波形の運動』と『媒質の運動』です．それぞれ確認していきましょう．

1.1.1 波形の運動

波形とは，実際に私たちが観測する文字通り『波の形』です．水面波が広がる様子や，ひもを上下に振動させて発生させる波など，さまざまな波形がありますが，波形の運動で誤解を産まないイメージの 1 つとして，『スタジアムなどで起こる観衆のビッグウェーブ』を例に挙げます．

このビッグウェーブは，観客が隣の人を横目で見ながら，手を少し遅れたタイミングで上げることで発生します．この様子をテレビなどの画面越しに見ると，観客による波形が左右のどちらかの方向に進んでいるように見えるはずです．

Fig.1　スタジアムにおける観客のビッグウェーブ．観客は手を上下に上げるだけだが，画面越しには波面が水平方向に進むように見える．

ここで重要なことは，**波形が客席上を進むとき，観客自体が左右に移動しているわけではないということです．**観客はただ手を上げ下げしているだけで，それぞれの手の振動運動が遅れて伝わることで波形が水平方向に進んでいるように見えるのです．この例における観衆のことを，物理では振動する媒体として媒質

[*1] いわゆる量子力学（Quantum Mechanics）の指導原理の 1 つです．

（Medium）と呼び，波形が進む速度を位相速度（Phase velocity）と呼びます．

特に，**受験で扱う波動はこの位相速度が等速のものしか扱いません**[*2]．波形は等速で，形を保ったまま平行移動するように進んでいきます．この波形の平行移動は数学的に $x-y$ グラフを用いて記述されます．$x-y$ グラフで表された波形は，等速運動する波形の瞬間の『写真』そのものです．

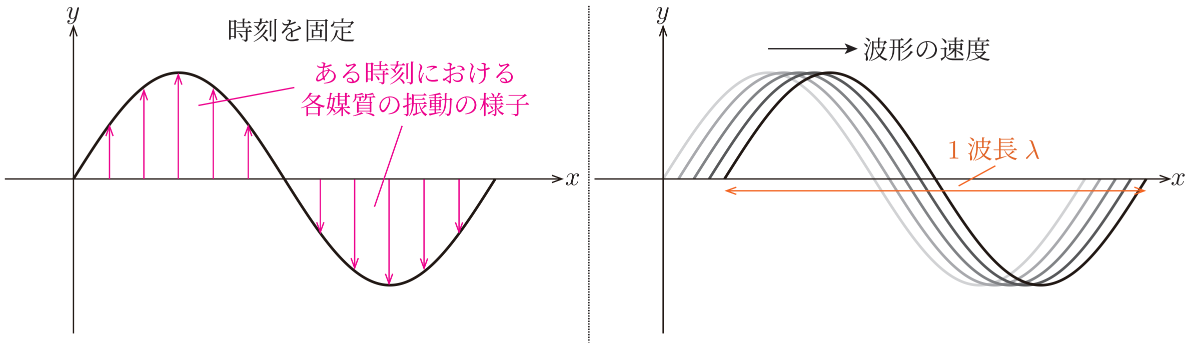

Fig.2　ある時刻における媒質の振動の様子と波形の等速運動．波形として正弦波を用いた．

波形 1 つ分の長さを波長（Wavelength）と呼び，よく文字 λ が与えられます．上図における 1 波長は，変位が 0 から 0 までの 1 つ分でしたが，山から山，谷から谷を 1 波長と考えることもできます．

波形が等速で進む速さを v として，波形が λ だけ進むのにかかる時間を T としましょう．この 3 つの物理量の間にある関係を考えます．

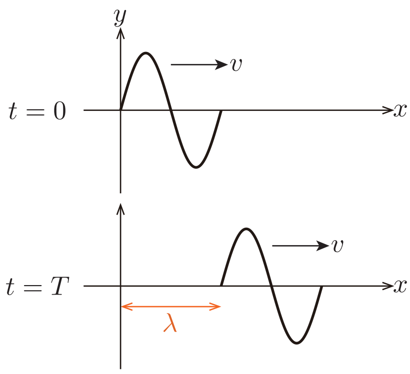

Fig.3　時間 T の間だけ等速運動する波形

波形は等速運動であることを思い出すと，この波形は時間 T で λ だけ進んでいることになります．等速運動の式を立式しましょう．そして，ここまでの議論を 1 度まとめます．

[*2] 理論上は波形の位相速度を加速度的に変化させることもできますが，受験の範疇を超えます．

波動の運動 (i)—波形の等速運動

- 波形は $y-x$ グラフ内で等速運動をする．
- 波形が 1 波長進むのにかかる時間を，1 周期と呼ぶ．
- 波長を λ，波形の進む速さ（位相速度）を v，周期を T とすると，以下の式が成立する．

$$\lambda = vT. \tag{1.1}$$

後述するように波動論における周期の意味合いは 2 つの意味がありますが，まずは波形の等速運動における周期の意味を理解しましょう．

1.1.2 媒質の運動

先述したように，媒質での振動運動が各媒質で遅れて伝わることで，媒質上を波形が進行していきます．ここで，正弦波が 1 波長分進行するときの，媒質の振動の様子を考えてみます．つまり，媒質 P の $y-t$ グラフを考えるということです．波形は Fig.3 のときと同様，左から右に進行するとしましょう．

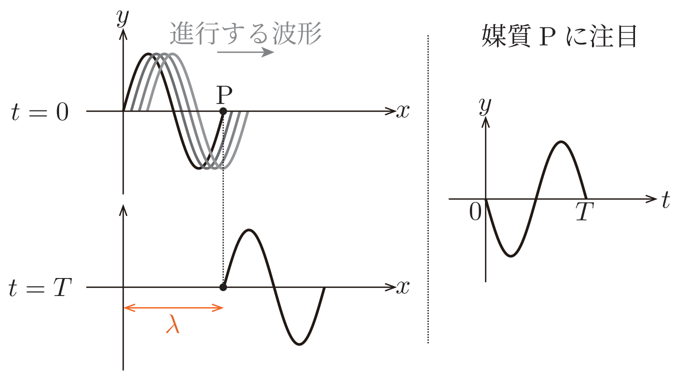

Fig.4　進行する正弦波と媒質 P の時間変位

$t=0$ の時から少しだけ時間を進めると，P は下方向に変位することが分かります．そして，進行する波源が正弦波であることから，媒質 P の振動の様子を表す $y-t$ グラフも，正弦波の形で表すことができます．つまり，**波形が正弦波になるときの媒質の振動は単振動になるということです．**

波形が 1 波長進むとき，媒質 P は単振動を 1 回することがグラフから分かります．つまり **1 周期の時間の間で媒質は 1 回の単振動をしたということです．** これが周期の意味合いの 2 つ目です．このことから，単位時間あたり媒質が何回振動するかを表す振動数 f が周期 T を用いて表現できます．そしてここまでの内容をまとめます．

波動の運動 (ii)—媒質の振動運動

- 波形が進行する間，媒質は振動運動をする．特に，進行する波形が正弦波であるときは，媒質の運動は $y-t$ グラフで表される単振動になる．
- 波形が正弦波であるとき，波形が 1 波長進む間に媒質は 1 回分単振動する．つまり，1 周期の間に媒質は 1 回の単振動を行う．
- 単位時間あたりの媒質の振動回数である振動数 f は，T を用いて以下のように表される．

$$f = \frac{1}{T}. \tag{1.2}$$

- 波形の等速運動の式である (1.1) と (1.2) を合わせると，以下に示す波の基本式が得られる．

$$v = f\lambda. \tag{1.3}$$

1.2 波動式の導出

この節では，波動現象を定量的に記述するための第一歩である，波動式[*3]（Wave equation）の導出を議論します．波動式は，対象とする波動の全ての情報を含んだ 2 変数関数 $y(x,t)$ です．波動式に時刻 t を代入すれば，その瞬間の波形が $y-x$ グラフ上に示すことができ，逆に位置座標 x を代入すれば，その位置の媒質の振動の様子である $y-t$ が分かります．以下では，扱う波動は全て正弦波[*4]であるとします．

2 変数関数をいきなり考えるのは難しいため，まずは 1 変数の波動式から考え，その後 2 変数に拡張していきます．x を固定するか t を固定するかの 2 つがあるため，それぞれで議論していきましょう．以下で議論する波動の，$t=0$ での様子を以下に示します．

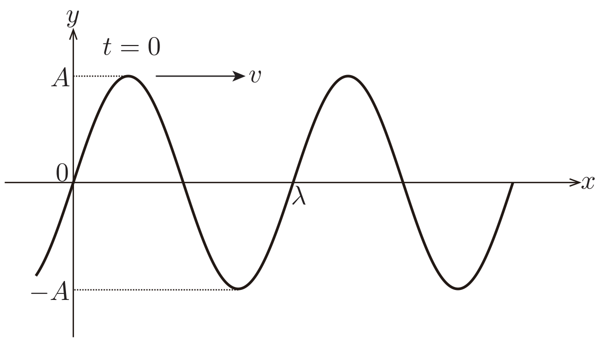

Fig.5　x 軸正方向に進行する正弦波．波長は λ，速さは v，振幅は A.

1.2.1 位置座標 x を固定してからの導出

まずは位置座標 x を固定した波動式から考える方法です．つまり，**どこかの媒質の単振動の様子 $y-t$ グラフを求めるのが議論のスタートであるということです．** 媒質はどこでもいいですが，単振動の様子が分かりや

[*3] 量子力学におけるシュレディンガー方程式の解は，波動関数（Wave function）と呼ばれることが多いです．

[*4] 『19 歳の古典力学 Part2』の単振動でも述べましたが，正弦波というのは sin 関数も cos 関数も含みます．両者は位相が $\frac{\pi}{2}$ だけずれているだけだからです．正接である tan 関数は登場しません．

すい点がよく，頻繁に選ばれるのは $x=0$ の媒質です．$x=0$ の媒質の単振動の様子を $y-t$ グラフに書いてみましょう．**媒質での単振動の様子が知りたい場合は，波形を少しだけ時間経過させるとすぐに分かります．**

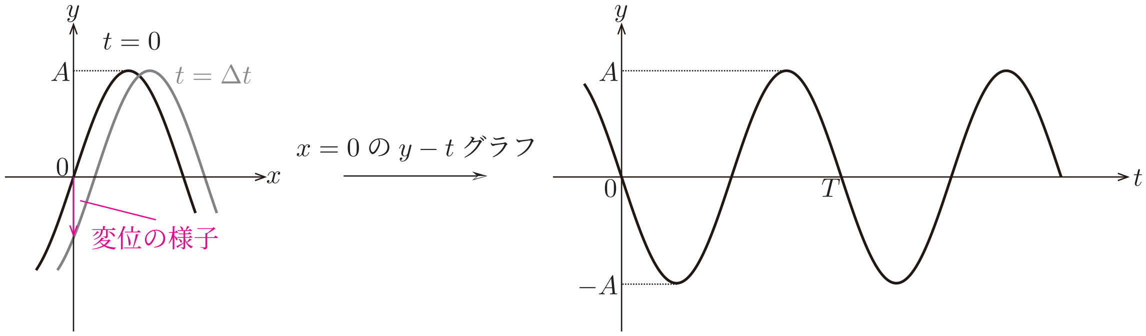

Fig.6　$x=0$ における媒質の単振動の様子

この $y-t$ グラフから関数の様子を求めてみましょう．$x=0$ の波動式なので，今から求める波動式は $y(0,t)$ です．グラフから，$y=0$ スタートで，時間経過と共に負の方向に変位しているので，関数全体の概形は $-\sin$ であることが分かります．

$$y(0,t)=-A\sin\frac{2\pi}{T}t. \tag{1.4}$$

ここで注意は，sin 関数の位相を，ただ t としてはいけない点です．**三角関数は変数として角度しか許されないため，t に $\frac{2\pi}{T}$ をかけることで時刻を角度に直しています．**実際に (1.4) に $t=T$ を代入すると，$-A\sin 2\pi$ となり，1 周期の時間 T が 2π 分の長さであることが分かります．この変数を位相に変換する手続きは後にも登場します．

この関数を 2 変数 $y(x,t)$ に拡張しましょう．**考え方のポイントは『波形は等速運動する』こと，そして今求めた関数 $y(0,t)$ を上手に利用するために，『過去を考える』ことです．**以下に示す概念図を書いて考えてみましょう．

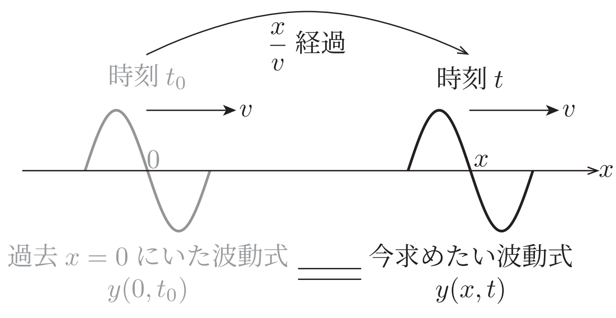

Fig.7　求めたい波動式 $y(x,t)$ と過去の波動式 $y(0,t_0)$ の関係

今考えている波動は連続ですが，分かりやすいように 1 波長の波形だけを図では示しました．『波形は等速で運動する』という事実より，今求めたい波動式 $y(x,t)$ で表される波形は，過去のある時刻 t_0 に $x=0$ を通過しており，時刻 t_0 から時間 $\frac{x}{v}$ だけ経過して時刻 t に位置 x に到達したことになります．波の減衰などは考

えないため，両者の波形は同じですから，以下の式が成立します．

$$y(x,t) = y(0,t_0). \tag{1.5}$$

過去の時刻 t_0 は t と $\dfrac{x}{v}$ を用いて以下の式で表されます．

$$t_0 = t - \frac{x}{v}. \tag{1.6}$$

(1.4)，(1.5)，(1.6) を用いることで，波動式 $y(x,t)$ を求めることができます．

$$y(x,t) = -A\sin\frac{2\pi}{T}\left(t - \frac{x}{v}\right). \tag{1.7}$$

1.2.2 波形が x 軸負の方向に進む場合

先ほどは波形が x 軸正の方向に進む場合で議論しましたが，負の方向に進む場合も議論してみましょう．同様に $x = 0$ における単振動の様子は前節と同じ $y(0,t) = -A\sin\frac{2\pi}{T}t$ であると仮定しましょう．前節と同様に．過去を考えた波形の運動の様子を図示します．

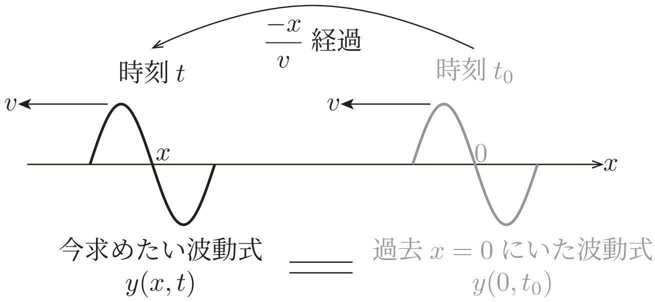

Fig.8　求めたい波動式 $y(x,t)$ と過去の波動式 $y(0,t_0)$ の関係．負の方向に進むことに注意．

波形が負の方向に進むため，『過去』として $x = 0$ を選択すると，今求めたい波動式の位置 x は $x < 0$ になることに注意する必要があります．つまり，波形が走る距離は $-x$ となるため，経過時間は $\dfrac{-x}{v}$ になります[*5]．したがって，過去の時刻 t_0 は，以下の式になります．

$$t_0 = t - \left(\frac{-x}{v}\right) = t + \frac{x}{v}. \tag{1.8}$$

前節と同様，$y(x,t) = y(0,t_0)$ ですから，(1.8) を (1.4) に代入することで波動式が得られます．

$$y(x,t) = -A\sin\frac{2\pi}{T}\left(t + \frac{x}{v}\right). \tag{1.9}$$

慣れてくると，位相の中の符号で波形がどちらの方向に進むのかがすぐに分かるようになります．

[*5] 距離 $-x$ も，経過時間 $\dfrac{-x}{v}$ も，どちらも正の値です．

1.2.3 時刻 t を固定してからの導出

次は時刻 t を固定してから，$y(x,t)$ を導出してみましょう．1.2.1 節と同様，どの時刻を固定してもよいのですが，やはり分かりやすい時刻がよく，頻繁に選ばれるのが $t=0$ でしょう．したがってまずは $y(x,0)$ の波動式を求めることからスタートです．このグラフは Fig.5 で示したグラフそのものです．以下に再掲します．

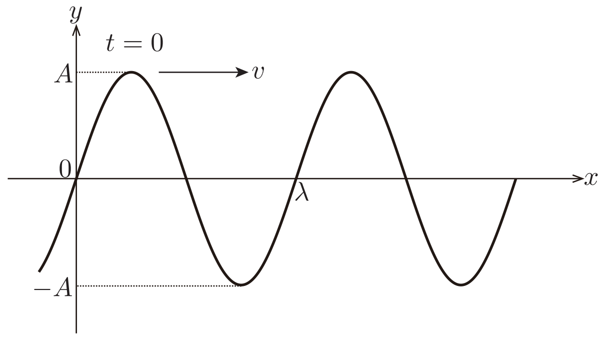

Fig.9　x 軸方向に進行する正弦波（再掲）

この関数の概形は，$+\sin$ であることがすぐに分かります．三角関数の中身ですが，やはり x だけでは角度にならないので，位置 x を角度に直します．このグラフを見ればすぐに分かりますが，1 波長 λ で三角関数の 2π 分の長さになっているので，$\dfrac{2\pi}{\lambda}x$ とすることで角度にすることができます．変数の位相化の手続きは 1.2.1 節でもでてきましたが，重要なので以下にまとめておきます．

時刻 t，位置 x の位相化

- 時刻 t を三角関数の位相にするためには，$\dfrac{2\pi}{T} := \omega$ を t にかける．この ω を角速度（Angular velocity）と呼ぶ．

$$t \to \frac{2\pi}{T}t = \omega t. \tag{1.10}$$

- 位置 x を三角関数の位相にするためには，$\dfrac{2\pi}{\lambda} := k$ を x にかける．この k を波数（Wave number）と呼ぶ．

$$x \to \frac{2\pi}{\lambda}t = kx. \tag{1.11}$$

この知識は波動の議論の中でよく利用します．それぞれの変数を位相になおせるようにしておきましょう．

Fig.9 の波動式は，以下の式で表せます．

$$y(x,0) = A\sin\frac{2\pi}{\lambda}x. \tag{1.12}$$

(1.12) を 2 変数の波動式 $y(x,t)$ に直すには，1.2.1 節と同様に『過去』に注目します．1.2.1 節でも書いた波形の概念図を書きましょう．先ほど求めた (1.12) を上手に利用するために，$t=0$ の『過去』を考えます．

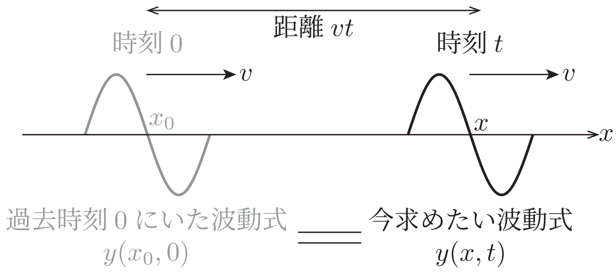

Fig.10　求めたい波動式 $y(x,t)$ と過去の波動式 $y(x_0,0)$ の関係

$t=0$ の過去では，波形はある位置 $x=x_0$ を通過していて，その後 t の時間経過で波形は vt だけ進み，位置 x に到着します．両者の波形は等しいので，以下の関係式が成立します．

$$y(x,t)=y(x_0,0). \tag{1.13}$$

また x_0 は x，v，t を用いて次の式で表されます．

$$x_0=x-vt. \tag{1.14}$$

(1.12)，(1.13)，(1.14) を用いることで，波動式 $y(x,t)$ を求めることができます．

$$y(x,t)=A\sin\frac{2\pi}{\lambda}(x-vt). \tag{1.15}$$

1.2.1 節で求めた (1.7) の結果と式の形が異なるように見えるかもしれませんが，少し式変形することで (1.7) と (1.15) は等価であることが分かります．(1.15) を変形します．

$$\begin{aligned} y(x,t)&=A\sin\left\{-\frac{2\pi}{\lambda}(vt-x)\right\},\\ &=-A\sin\frac{2\pi v}{\lambda}\left(t-\frac{x}{v}\right). \end{aligned} \tag{1.16}$$

また波の基本式より，振動数を f とすると，$f=\dfrac{v}{\lambda}=\dfrac{1}{T}$ です．これを (1.16) に代入します．

$$y(x,t)=-A\sin\frac{2\pi}{T}\left(t-\frac{x}{v}\right). \tag{1.17}$$

(1.17) と同じ式になることが確認できました．高校数学で習う三角関数の基本的な式変形はすぐにできるようにしておきましょう[*6]．

1.2.4　波動式の導出のまとめ

ここまで議論した波動式の導出をまとめましょう．

[*6] (1.16) の変形は，$\sin(-\theta)=-\sin\theta$ を利用しました．そのほか利用する性質は加法定理が使えれば十分です．

波動式の導出

1. まずは 1 変数での波動式を求める．どちらの変数を固定して求めてもよい．どの値に変数を固定するかは自由だが，多いのは $y(0,t)$ や $y(x,0)$.
2. 『過去』を考えることにより，最初に求めた 1 変数の波動式から $y(x,t)$ へ 2 変数に拡張する．波形が等速で進むことと，『過去』の波形と求めたい $y(x,t)$ の波形が同じであることを利用する．波形の進む方向に注意する．

- 逆に，波動式の位相から波形がどの方向に進んでいるのかが分かる．つまり，以下の関係が成立する．

$$
\begin{aligned}
t - \frac{x}{v} &\to \text{正の方向}, \\
t + \frac{x}{v} &\to \text{負の方向}.
\end{aligned}
$$

- また進行波の特徴として，**位置座標 x と時刻 t が同一の三角関数の位相中に入り込む．**

最後の進行波の特徴は重要です．自分が考えている波動式から，波としてどんな特徴を持つのかを考えられるようになりましょう．

2 波の干渉

3 反射

4 屈折

5 横波と縦波