

基礎力養成トレーニング集—古典力学

野口 駿

2025

テキストの内容と表記上の注意

このテキストは、受験における古典物理学の基礎力を養成する立式トレーニング集です。物理法則を正しく使えるようになることを目的に編成しています。ベクトル表示は、 \vec{a} ではなく、 a とポールドイタリック体で表記しています。

目次

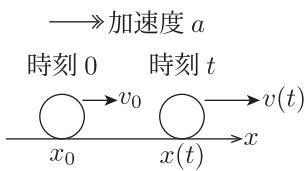
1	等加速度運動	1
1.1	等加速度直線運動	1
1.2	地球上での投射運動	3
1.3	斜面上からの投射運動	5
1.4	相対速度	7
2	運動方程式	9
2.1	力の釣り合い	9
2.2	運動方程式	11
3	エネルギーと仕事	18
3.1	仕事	18
3.2	エネルギーと仕事の関係式	20
4	運動量と力積	23
4.1	運動量と力積の関係	23
4.2	反発係数	26
5	剛体の静力学	28
5.1	剛体の静止条件	28
5.2	重心	31
6	円運動	33
6.1	円運動の記述	33
7	非慣性系の力学	35
7.1	慣性力の導入	35
7.2	非慣性系におけるエネルギー変化	37
8	単振動	39
8.1	単振動の運動方程式と運動の様子	39
8.2	単振動におけるエネルギー変化	44
9	万有引力による運動	46
9.1	万有引力による運動	46

1 等加速度運動

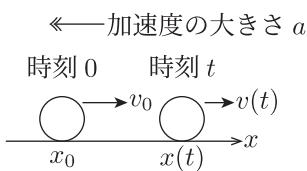
1.1 等加速度直線運動

Ex. 以下の図に示す等加速度運動において、指定された物理量や関係式を答えよ。速さと示されていない文字『 v 』は、速度であることに注意せよ。

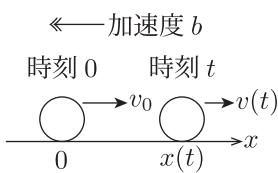
(1) $v(t), x(t)$.



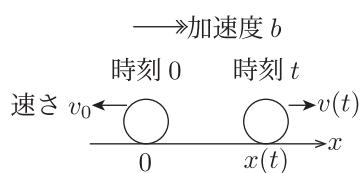
(2) $v(t), x(t)$.



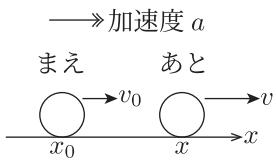
(3) $v(t), x(t)$.



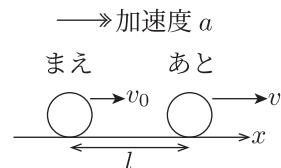
(4) $v(t), x(t)$.



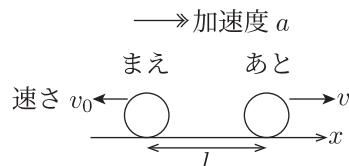
(5) 位置座標と速度の関係式.



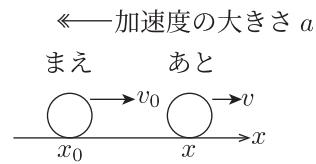
(6) 距離と速度の関係式.



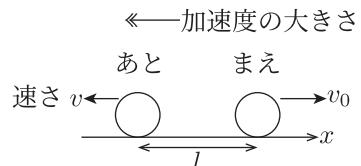
(7) 距離と速度の関係式.



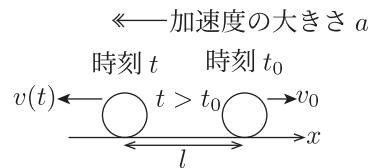
(8) 位置座標と速度の関係式.



(9) 距離と速度の関係式.



(10) 等加速度の3つの式.



1.1 の解答

(1)

$$\underline{\underline{v(t) = v_0 + at.}}$$

$$\underline{\underline{x(t) = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2.}}$$

(2) a は加速度の大きさなので、自分で負符号を付ける。

$$\underline{\underline{v(t) = v_0 - at.}}$$

$$\underline{\underline{x(t) = 0 + v_0 t + \frac{1}{2}(-a)t^2.}}$$

(3) b は加速度なので、符号は文字の中。自分で符号をつけてはならない。

$$\underline{\underline{v(t) = v_0 + bt.}}$$

$$\underline{\underline{x(t) = 0 + v_0 t + \frac{1}{2}bt^2.}}$$

(4) v_0 は速さなので、自分で負符号を付ける。

$$\underline{\underline{v(t) = -v_0 + bt.}}$$

$$\underline{\underline{x(t) = 0 - v_0 t + \frac{1}{2}bt^2.}}$$

(5)

$$\underline{\underline{v^2 - v_0^2 = 2a(x - x_0).}}$$

(6) 『あと』と『まえ』の差が l 。これは、位置座標の変化（変位）とそのまま等しい。

$$\underline{\underline{v^2 - v_0^2 = 2al.}}$$

(7) v_0 は速さなので、自分で負符号を付ける。もちろん 2 乗すると正になるが、今回はあえてそのまま残している。

$$\underline{\underline{v^2 - (-v_0)^2 = 2al.}}$$

(8) a は加速度の大きさなので、自分で負符号を付ける。

$$\underline{\underline{v^2 - (-v_0)^2 = 2(-a)(x - x_0).}}$$

(9) a は加速度の大きさ、 v も速さなので、自分で負符号を付ける。『あと』の位置が、『まえ』よりも負の方向なので、今回の変位は $-l$ 。

$$\underline{\underline{(-v)^2 - (v_0)^2 = 2(-a)(-l).}}$$

(10) a は加速度の大きさなので、負符号を付ける。経過時間は、 $t > t_0$ より $t - t_0$ かつ今回の変位は $-l$ 。変位とは、位置座標の変化（『あと』 - 『まえ』）であることに注意。

$$\underline{\underline{v(t) = v_0 + (-a)(t - t_0).}}$$

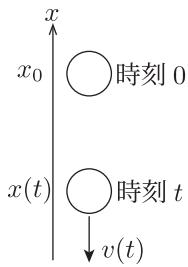
$$\underline{\underline{-l = v_0 t + \frac{1}{2}(-a)t^2.}}$$

$$\underline{\underline{v^2(t) - v_0^2 = 2(-a)(-l).}}$$

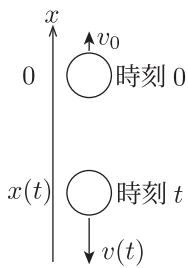
1.2 地球上での投射運動

Ex. 以下の図に示す投射運動において、指定された物理量や関係式を答えよ。速さと示されていない文字『 v 』は、速度であることに注意せよ。重力加速度の大きさは g である。

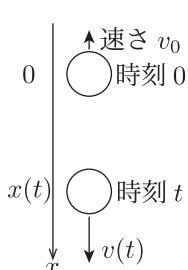
(1) $v(t)$, $x(t)$.



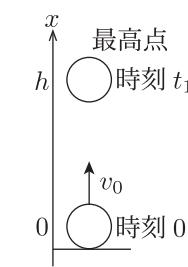
(2) $v(t)$, $x(t)$.



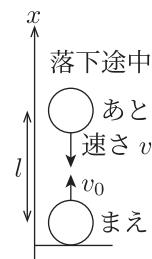
(3) $v(t)$, $x(t)$.



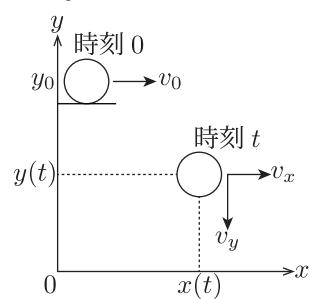
(4) t_1 , h .



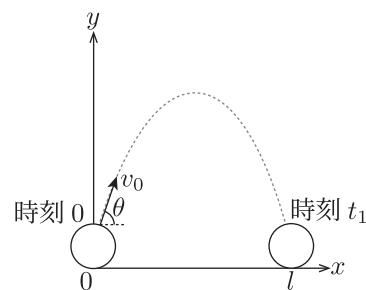
(5) 距離と速度の関係式.



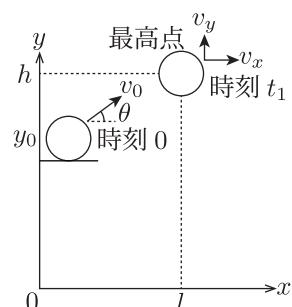
(6) v_x , v_y , $x(t)$, $y(t)$.



(7) t_1 , l .



(8) t_1 , v_x , v_y , l , h .



1.2 の解答

重力加速度は常に鉛直下向きで、 g は加速度の大きさであることに注意。

(1)

$$\underline{\underline{v(t) = -gt.}}$$

$$\underline{\underline{x(t) = x_0 + \frac{1}{2}(-g)t^2.}}$$

(2)

$$\underline{\underline{(t) = v_0 - gt.}}$$

$$\underline{\underline{x(t) = 0 + v_0 t + \frac{1}{2}gt^2.}}$$

(3)

$$\underline{\underline{v(t) = v_0 + gt.}}$$

$$\underline{\underline{x(t) = -v_0 t + \frac{1}{2}gt^2.}}$$

(4) 最高点は速度ゼロ。

$$0 = v_0 - gt_1 \text{ より, } \underline{\underline{t_1 = \frac{v_0}{g}}}.$$

$$0^2 - v_0^2 = 2(-g)(h - 0) \text{ より, } \underline{\underline{h = \frac{v_0^2}{2g}}}.$$

(5) 鉛直上向き正より、変位は $+l$ 。

$$\underline{\underline{(-v)^2 - v_0^2 = 2(-g)l.}}$$

(6) x 方向は等速運動、 y 方向は等加速度運動。

$$\underline{\underline{v_x = v_0.}}$$

$$\underline{\underline{v_y = -gt.}}$$

$$\underline{\underline{x(t) = v_0 t.}}$$

$$\underline{\underline{y(t) = y_0 + \frac{1}{2}(-g)t^2.}}$$

(7) x 方向の初速度は $v_0 \cos \theta$ 、 y 方向の初速度は $v_0 \sin \theta$ 。

$$0 = v_0 \sin \theta t_1 + \frac{1}{2}(-g)t_1^2 \text{ より, } \underline{\underline{t_1 = \frac{2v_0 \sin \theta}{g}}}.$$

(8) 最高点は y 方向の速度ゼロ。 x 方向の初速度は $v_0 \cos \theta$ 、 y 方向の初速度は $v_0 \sin \theta$ 。

$$0 = v_0 \sin \theta - gt_1 \text{ より, } \underline{\underline{t_1 = \frac{v_0 \sin \theta}{g}}}.$$

$$\underline{\underline{v_x = v_0 \cos \theta.}}$$

$$\underline{\underline{v_y = 0.}}$$

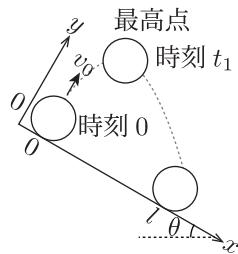
$$\underline{\underline{l = v_0 \cos \theta t_1 = \frac{v_0^2 \sin \theta \cos \theta}{g}.}}$$

$$\underline{\underline{0^2 - (v_0 \sin \theta)^2 = 2(-g)(h - 0) \text{ より, } \frac{(v_0 \sin \theta)^2}{2g}.}}$$

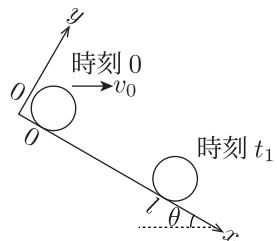
1.3 斜面上からの投射運動

Ex. 以下の図に示す等加速度運動において、指定された物理量や関係式を答えよ。速さと示されていない文字『 v 』は、速度であることに注意せよ。

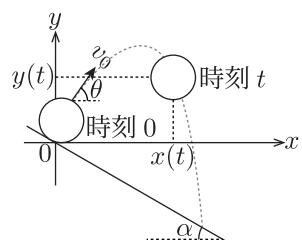
(1) $t_1, l.$



(2) $t_1, l.$



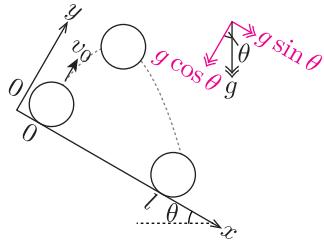
(3) $x(t), y(t).$



1.3 の解答

各軸方向に運動を分けて考えることが重要。常に鉛直下向きの重力加速度も、軸の方向に分解して考える。

(1) 重力加速度を、 x 軸と y 軸の方向に分ける。



x 方向の加速度は $g \sin \theta$, y 方向の加速度は $g \cos \theta$ であるため、各軸方向は等加速度運動。最高点では y 方向の速度はゼロ。

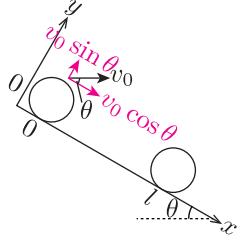
$$0 = v_0 - g \cos \theta t_1 \text{ より, } t_1 = \frac{v_0}{g \cos \theta}.$$

再び斜面上に物体が落ちてくるときの時刻 ($y = 0$ となるときの時刻) を t_2 とする。

$$0 = 0 + v_0 t_2 + \frac{1}{2}(-g \cos \theta) t_2^2 \text{ より, } t_2 = \frac{2v_0}{g \cos \theta}.$$

$$x \text{ 方向も加速度 } g \sin \theta \text{ の等加速度運動をするため, } l = \frac{1}{2} g \sin \theta t_2^2 = \frac{1}{2} g \sin \theta \left(\frac{2v_0}{g \cos \theta} \right)^2 = \frac{2v_0^2 \tan \theta}{g \cos \theta}.$$

(2) 重力加速度は (1) と同様に分解できる。初速度を分解する。



再び斜面上に物体が落ちてくるときの時刻 ($y = 0$ となるときの時刻) を t_1 とする。

$$0 = 0 + v_0 \sin \theta t_1 + \frac{1}{2}(-g \cos \theta) t_1^2 \text{ より, } t_1 = \frac{2v_0}{g \tan \theta}.$$

x 方向の等加速度運動より,

$$l = 0 + v_0 \cos \theta t_1 + \frac{1}{2} g \sin \theta t_1^2 = \frac{4v_0^2 \cos^2 \theta}{g \sin \theta}.$$

(3) x 方向は水平方向, y 方向は鉛直方向なので, x 方向の加速度はゼロで等速運動, y 方向の加速度は $-g$ で等加速度運動。

$$x \text{ 方向の初速度は } v_0 \cos \theta \text{ より, } x(t) = v_0 \cos \theta t.$$

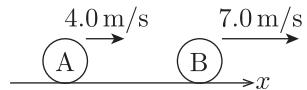
$$y \text{ 方向の初速度は } v_0 \sin \theta \text{ より, }$$

$$y(t) = v_0 \sin \theta t + \frac{1}{2}(-g)t^2.$$

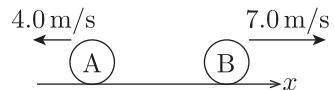
1.4 相対速度

Ex. 以下の図において、指定された相対速度を求めよ。

(1) A に対する B の相対速度 v_{AB} , B に対する A の相対速度 v_{BA} .



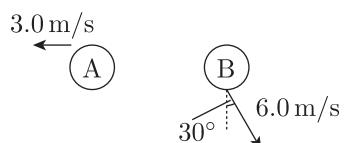
(2) A に対する B の相対速度 v_{AB} , B に対する A の相対速度 v_{BA} .



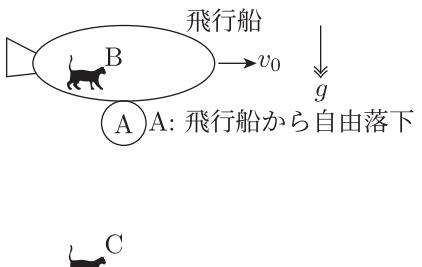
(3) B に対する A の相対速度の大きさ v_{BA} とその向き。向きはベクトル図で図示せよ。



(4) A に対する B の相対速度の大きさ v_{AB} とその向き。向きはベクトル図で図示せよ。 $\sqrt{7} \sim 2.65$ を用いよ。



(5) B から見た A の運動と、C から見た A の運動をそれぞれ記述せよ。



1.4 の解答

相対速度の式の本質は、(相手の速度) – (自分の速度)。『相手』と『自分』がどの物体なのかを、問題から見抜くことが重要。

(1) 『A に対する B の...』 ⇒ 『A から見た B の...』。B が『相手』で A が自分。

$$v_{AB} = v_B - v_A = 7.0 - 4.0 = \underline{\underline{3.0 \text{ m/s}}}$$

『B に対する A の...』 ⇒ 『B から見た A の...』。A が『相手』で B が自分。

$$v_{BA} = v_A - v_B = 4.0 - 7.0 = \underline{\underline{-3.0 \text{ m/s}}}$$

(2) 『A に対する B の...』 ⇒ 『A から見た B の...』。B が『相手』で A が自分。

$$v_{AB} = v_B - v_A = 7.0 - (-4.0) = \underline{\underline{11 \text{ m/s}}}$$

『B に対する A の...』 ⇒ 『B から見た A の...』。A が『相手』で B が自分。

$$v_{BA} = v_A - v_B = -4.0 - 7.0 = \underline{\underline{-11 \text{ m/s}}}$$

(3) 『B に対する A の...』 ⇒ 『B から見た A の...』。A が『相手』で B が自分。

$$\begin{aligned} v_{BA} &= v_A - v_B \\ &= \leftarrow - \uparrow \\ &= \leftarrow + \downarrow \\ &= \quad \curvearrowright v_{BA} \end{aligned}$$

上図より、三平方の定理から $v_{BA} = \underline{\underline{5.0 \text{ m/s}}}$

(4) 『A に対する B の...』 ⇒ 『A から見た B の...』。B が『相手』で A が自分。

$$\begin{aligned} v_{AB} &= v_B - v_A \\ &= \searrow - \leftarrow \\ &= \searrow + \rightarrow \\ &= \quad \curvearrowright v_{AB} \end{aligned}$$

左図より、三平方の定理から、

$$v_{BA} = \sqrt{(3.0\sqrt{3})^2 + 6.0^2} = \underline{\underline{3\sqrt{7} \sim 8.0 \text{ m/s}}}$$

(5) 『飛行船から自由落下』とあるため、地面にいる C から見ると A は飛行船と同じ水平方向の速さ v_0 で投射される。

C に対する A の運動は、水平右向きの水平投射。

飛行船と同じ速度を持つ B からみると、B に対する A の水平方向の相対速度はゼロになる。

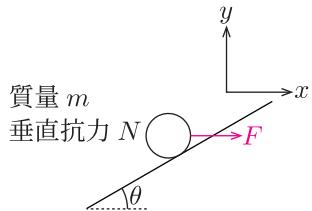
B に対する A の運動は、自由落下。

2 運動方程式

2.1 力の釣り合い

Ex. 以下の図における、静止する物体に働く力を図示し、各軸方向の力の釣り合いの式を立式せよ。重力加速度の大きさは g とする。

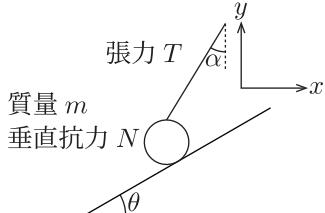
(1)



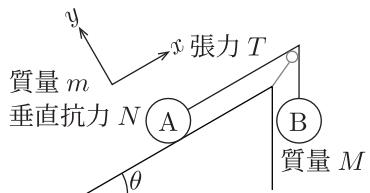
(2)



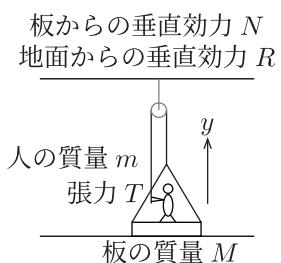
(3)



(4) A, B それぞれで釣り合いの式を立式せよ。



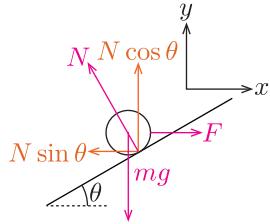
(5) 人、板でそれぞれで釣り合いの式を立式せよ。



2.1 の解答

力は場からの力と接触力に分けられる。場からの力は重力のみなので、物体同士が触れあうところから接触力を考える。『物体の気持ち』を考える。

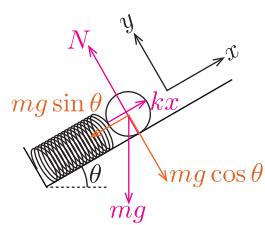
(1)



$$x : 0 = F - N \sin \theta.$$

$$y : 0 = N \cos \theta - mg.$$

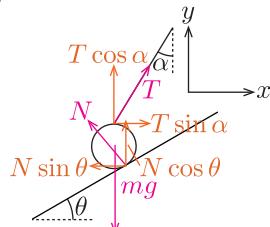
(2)



$$x : 0 = kx - mg \sin \theta.$$

$$y : 0 = N - mg \cos \theta.$$

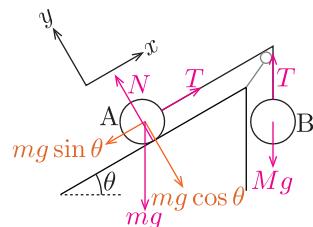
(3)



$$x : 0 = T \sin \alpha - N \sin \theta.$$

$$y : 0 = T \cos \alpha + N \cos \theta - mg.$$

(4) 同じ糸に働く張力は、異なる物体同士に繋がっていても同じ大きさになる。



Aについて、

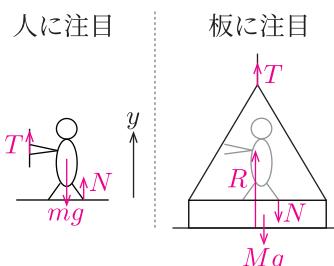
$$x : 0 = T - mg \sin \theta.$$

$$y : 0 = N - mg \cos \theta.$$

Bについて、

$$0 = Mg - T.$$

(5) 注目物体が複数あるときは、それぞれの物体毎力を分けて図示する。同じ境界面から働く力には、作用・反作用があることにも注意。



人について、

$$y : 0 = T + N - mg.$$

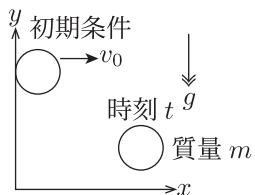
物体について、

$$y : 0 = T + R - Mg - N.$$

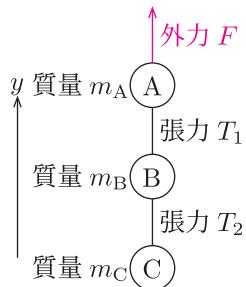
2.2 運動方程式

Ex. 以下の図に示す運動において、指定された加速度を用いて各軸方向の運動方程式を立式せよ。また指定された物理量や関係式を答えよ。重力加速度の大きさは g とする。

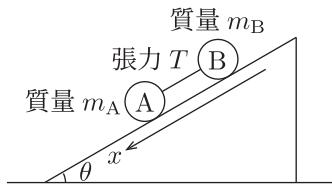
(1) 時刻 t における x 軸方向の加速度 a_x , y 軸方向の加速度 a_y とする。



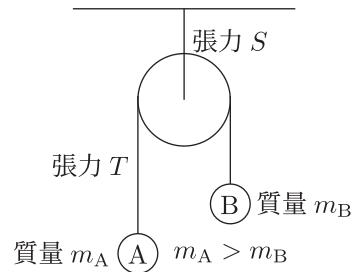
(2) 加速度 a とする。A, B, C それぞれの運動方程式と $A + B + C$ の運動方程式。



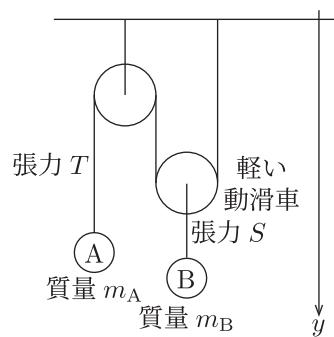
(3) 加速度 a とする。A, B それぞれの運動方程式と $A + B$ の運動方程式。



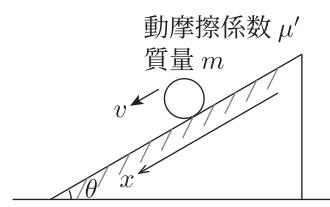
(4) 加速度の大きさ a とする。A, B それぞれの運動方程式と定滑車の釣り合いの式。



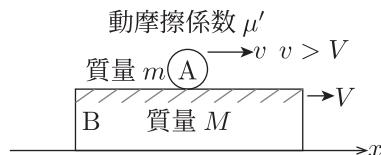
(5) A の加速度 a , B の加速度 b , 動滑車の加速度を c とする。A と B と動滑車の運動方程式。また、3つの加速度の関係を拘束条件より求め、全ての加速度を計算せよ。

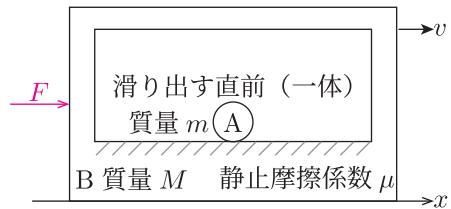
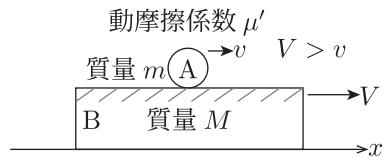
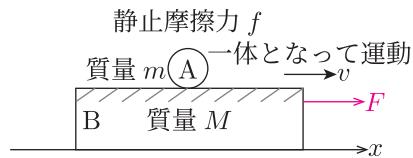
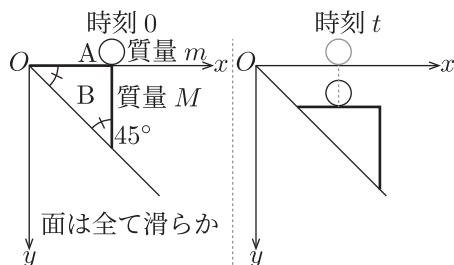


(6) 加速度を a とする。

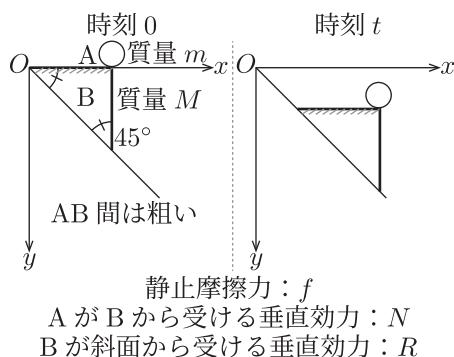


(7) A の加速度 a , B の加速度 b とする。

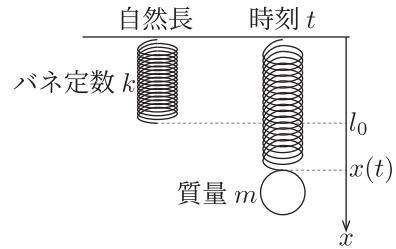
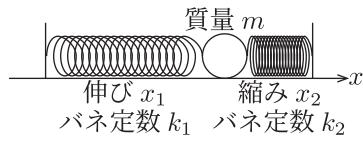
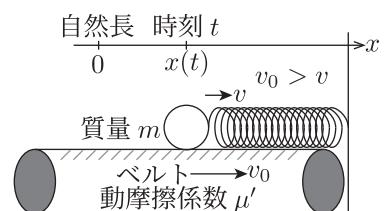
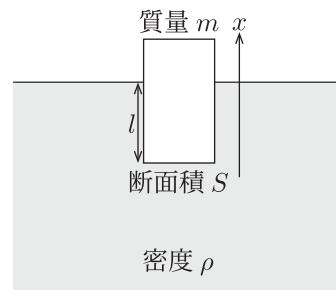


(8) A の加速度 a , B の加速度 b とする.(9) A の加速度, B の加速度を a とする.(10) A の x , y 方向の加速度 a_x , a_y , B の x , y 方向の加速度 A_x , A_y とする. A_x , A_y の関係を拘束条件より求めよ. また全ての加速度を計算せよ.

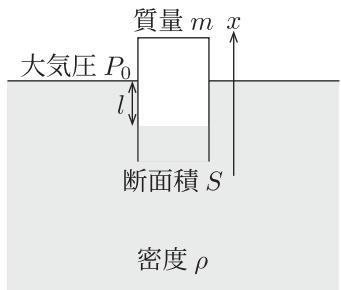
A が B から受ける垂直効力 : N
B が斜面から受ける垂直効力 : R

(11) A と B の x 方向の加速度を a , y 方向の加速度をそれぞれ a_y , A_y とする. a , A_y の関係を拘束条件より求めよ. また全ての加速度を計算せよ.

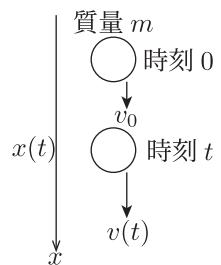
静止摩擦力 : f
A が B から受ける垂直効力 : N
B が斜面から受ける垂直効力 : R

(12) A,B の加速度を a とする.(13) 時刻 t における加速度を a とする.(14) 加速度を a とする.(15) 時刻 t における加速度を a とする.(16) 加速度を a とする.

(17) 静止状態とする.

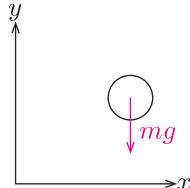


(18) 時刻 t における加速度を a とする。



2.2 の解答

(1) 水平方向には一切力は作用しない。

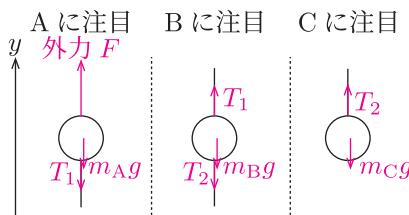


$$x : \underline{ma_x = 0}.$$

$$y : \underline{ma_y = -mg}.$$

鉛直方向が等加速度運動になるのは、重力が常に一定値であるためである。

(2) 物体それぞれに働く力を図示する。



$$A : \underline{m_A a = F - T_1 - m_A g}.$$

$$B : \underline{m_B a = T_1 - m_B g}.$$

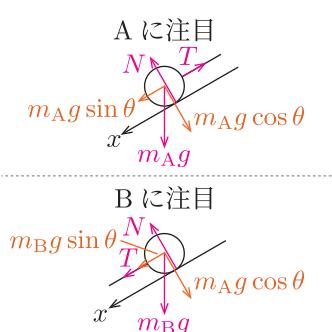
$$C : \underline{m_C a = T_2 - m_C g}.$$

A, B, C を一体と見た時には、全ての運動方程式を足せばいい。

$A+B+C :$

$$\underline{(m_A + m_B + m_C)a = F - (m_A g + m_B g + m_C g)}.$$

(3)

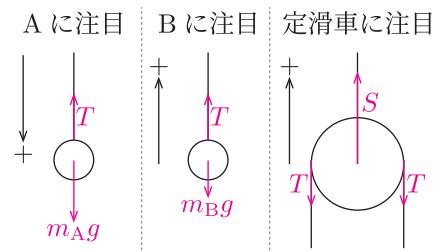


$$A : \underline{m_A a = m_A g \sin \theta - T}.$$

$$B : \underline{m_B a = m_B g \sin \theta + T}.$$

$$A+B : \underline{(m_A + m_B)a = (m_A + m_B)g \sin \theta}.$$

(4) 1 本のひもに繋がれているため、A と B の加速度は同じ大きさで逆向き。

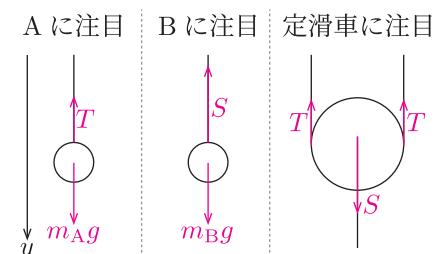


$$A : \underline{m_A a = m_A g - T}.$$

$$B : \underline{m_B a = T - m_B g}.$$

$$\text{定滑車} : \underline{0 = S - 2T}.$$

(5) 鉛直下向きが正の方向としてまずは運動方程式の立式。

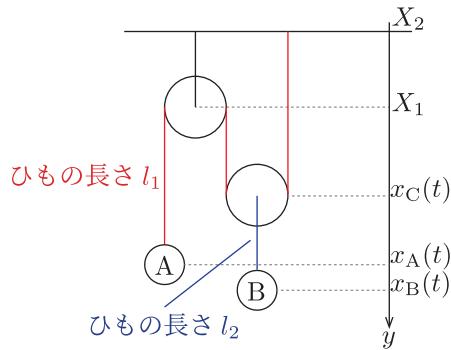


$$A : \underline{m_A a = m_A g - T}.$$

$$B : \underline{m_B a = m_B g - S}.$$

$$\text{動滑車} : \underline{0 \cdot c = S - 2T}.$$

以下のように座標を設定し、『ひもの長さは一定』の拘束条件を立式する。



$$l_1 = (x_A(t) - X_1) + (x_C(t) - X_1) + (x_C(t) - X_2).$$

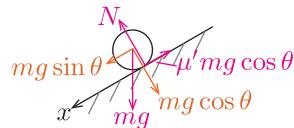
二階微分して $0 = a + 2c.$

$$l_2 = x_B(t) - x_C(t). \text{ 二階微分して } 0 = b - c.$$

これらを連立して, $a = -\frac{2g(m_B-2m_A)}{m_B+4m_A}.$

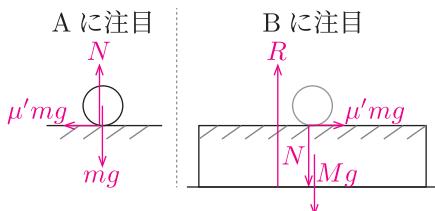
$$b = c = \frac{g(m_B-2m_A)}{m_B+4m_A}.$$

(6)



$$x : ma = mg \sin \theta - \mu' mg \cos \theta.$$

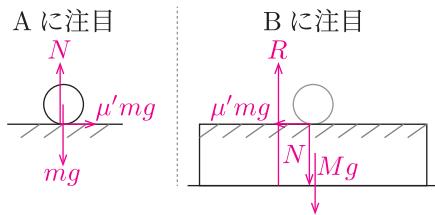
(7) 動摩擦力の向きは、粗い面に対する相対速度と逆向き。B からみた A の相対速度は、 $v - V > 0$. B からみて、A は x 軸正方向に運動するので、動摩擦力の向きは x 軸負方向。



$$x : ma = -\mu' mg.$$

$$x : Mb = \mu' mAg.$$

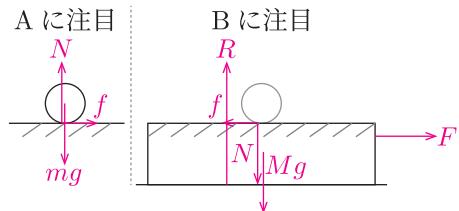
(8) B からみた A の相対速度は、 $v - V < 0$. B からみて、A は x 軸負方向に運動するので、動摩擦力の向きは x 軸正方向。



$$x : ma = \mu' mg.$$

$$x : Mb = -\mu' mg.$$

(9) B と A が一体となって運動しているため、B からみた A の相対速度はゼロ。従って、働く摩擦力は静止摩擦力。A と B が x 軸正方向に動いていることから、A には x 軸正方向に力がなければならぬ。この力を担うのは、静止摩擦力以外ない。

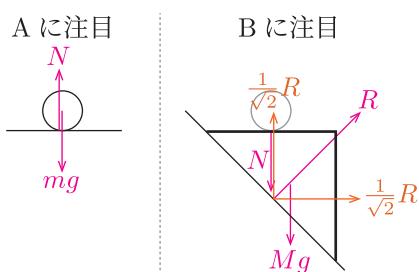


$$x : ma = f.$$

$$x : Mb = F - f.$$

$$A+B : (m+M)a = F$$

(10) B と A は滑らかなので、A の x 軸方向には何も力は働くかない。



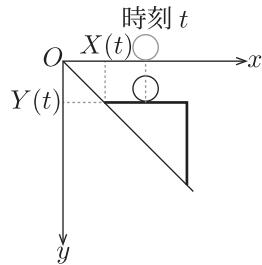
A について,

$$x : ma_x = 0, y : ma_y = mg - N.$$

B について,

$$x : MA_x = \frac{1}{\sqrt{2}}R, y : MA_y = Mg + N - \frac{1}{\sqrt{2}}R.$$

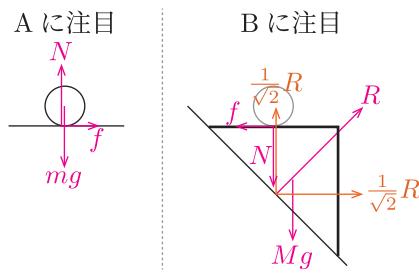
以下のように座標を設定し、『斜面の角度は 45° で一定』の拘束条件を立式する。



$$\frac{Y(t)-0}{X(t)-0} = \tan 45^\circ. \text{ 二階微分して, } \underline{\underline{A_x = A_y}}.$$

$$\text{これらを連立して, } \underline{\underline{a_x = 0}}, \underline{\underline{A_x = A_y = \frac{m+M}{2M+m}g}}.$$

(11) B と A は粗く一体となって運動するため、A には静止摩擦力が作用。A と B が x 正方向に動くため、A には x 正方向の力が必要。これが、静止摩擦力となる。



A について,

$$x : \underline{\underline{ma = f}}, \quad y : \underline{\underline{ma_y = mg - N}}.$$

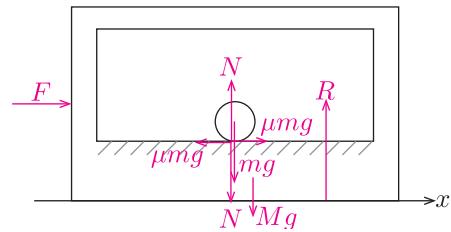
B について,

$$x : \underline{\underline{Ma = \frac{1}{\sqrt{2}}R - f}}, \quad y : \underline{\underline{MA_y = Mg + N - \frac{1}{\sqrt{2}}R}}.$$

拘束条件は (11) と同様。 $\underline{\underline{A_x = A_y}}$ 。

$$\text{これらを連立して, } \underline{\underline{a = A_y = \frac{1}{2}g}}.$$

(12) B と A は粗く一体となって運動するため、A には静止摩擦力が作用。A と B が x 軸正方向に動くため、A には x 軸正方向の力が必要。これが、静止摩擦力となる。滑り出す直前なので、働く静止摩擦力は最大静止摩擦力になる。



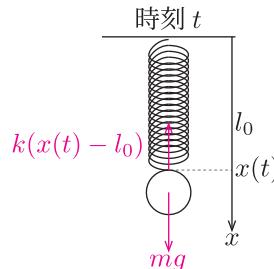
A について,

$$x : \underline{\underline{ma = \mu mg}}.$$

B について,

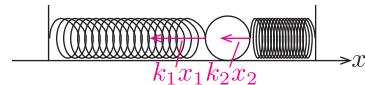
$$x : \underline{\underline{Ma = F - \mu mg}}.$$

(13) ばねは自然長よりも伸びているため、弾性力は x 負方向。



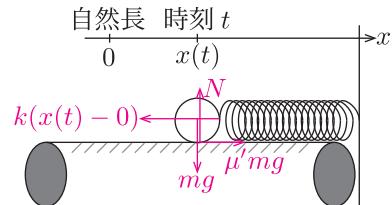
$$x : \underline{\underline{ma = mg - k(x(t) - l_0)}}.$$

(14)



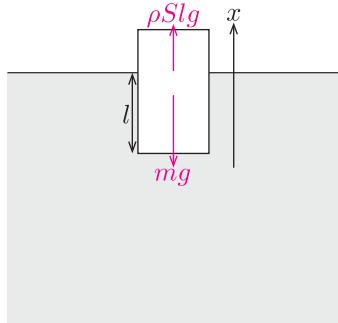
$$x : \underline{\underline{ma = -k_1x_1 - k_2x_2}}.$$

(15) ベルトからみた A の相対速度は、 $v - v_0 < 0$ 。ベルトからみて、A は x 軸負方向に運動するので、動摩擦力の向きは x 軸正方向。



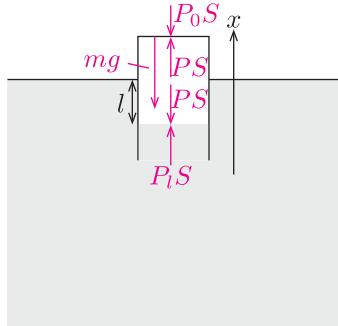
$$x : \underline{\underline{ma = \mu' mg - k(x(t) - 0)}}.$$

(16) 浮力は常に鉛直上向きに作用.



$$x : \underline{\underline{ma = \rho S l g - mg.}}$$

(17) 水面での釣り合いを考える. 圧力による力を全て書き下す場合には, 浮力の式は用いない. コップの中の気圧を P , 深さ l の場所の圧力を P_l とする.



深さ l の場所の圧力 P_l は, 水圧の式より,

$$P_l = P_0 + \rho g l. \text{ 水面での釣り合いから,}$$

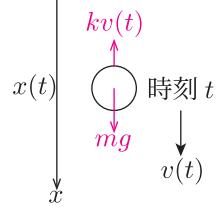
$$x : 0 = P_l S - P S. \text{ したがって,}$$

$$P = P_l = P_0 + \rho g l.$$

コップの釣り合いは,

$$x : 0 = P S - P_0 S - mg = \underline{\underline{\rho S l g - mg.}}$$

$$(18)$$



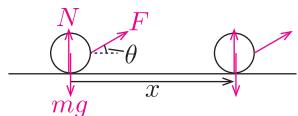
$$x : \underline{\underline{ma = mg - kv(t)}}.$$

3 エネルギーと仕事

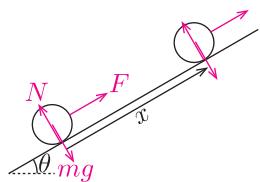
3.1 仕事

Ex. 以下の図における、物体に働く力がする仕事を求めよ。重力加速度の大きさは g とする。

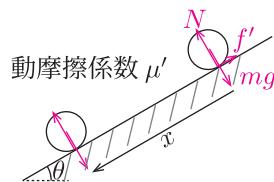
- (1) 重力 mg , 垂直抗力 N , 外力 F の仕事。



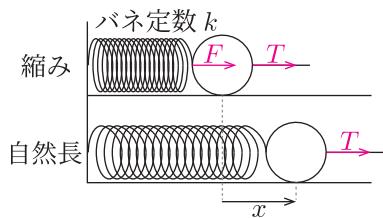
- (2) 重力 mg , 垂直抗力 N , 外力 F の仕事。



- (3) 重力 mg , 垂直抗力 N , 動摩擦力 f' の仕事。
動摩擦力の大きさ f' を求めて仕事を計算せよ。



- (4) 張力 T , 弾性力 F の仕事。



3.1 の解答

(1)

$$\underline{\underline{W_{mg} = 0.}}$$

$$\underline{\underline{W_N = 0.}}$$

$$\underline{\underline{W_F = +F \cos \theta x.}}$$

(2)

$$\underline{\underline{W_{mg} = -m g \sin \theta x.}}$$

$$\underline{\underline{W_N = 0.}}$$

$$\underline{\underline{W_F = +F x.}}$$

(3)

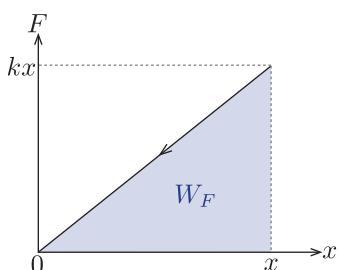
$$\underline{\underline{W_{mg} = m g \sin \theta x.}}$$

$$\underline{\underline{W_N = 0.}}$$

$$f' = \mu' N = \mu' mg \cos \theta \text{ より,}$$

$$\underline{\underline{W_{f'} = -\mu' mg \cos \theta x.}}$$

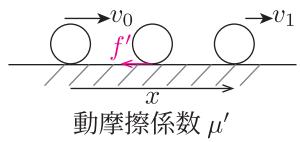
(4) 弾性力は一定の大きさではないことに注意.

 $F - x$ グラフをかいてその囲む面積を求める.グラフの面積より, $\underline{\underline{W_F = \frac{1}{2}kx^2.}}$ $\underline{\underline{W_T = Tx.}}$

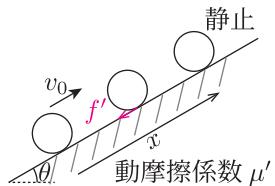
3.2 エネルギーと仕事の関係式

Ex. 以下の図における、エネルギーと仕事の関係式を立式せよ。重力加速度の大きさは g とする。

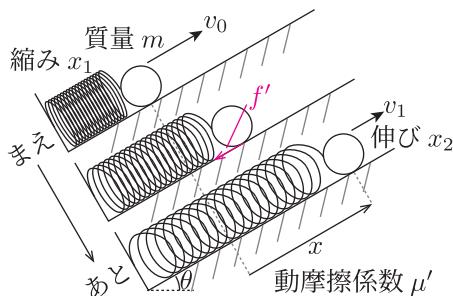
(1) f' の大きさは具体的に計算せよ。



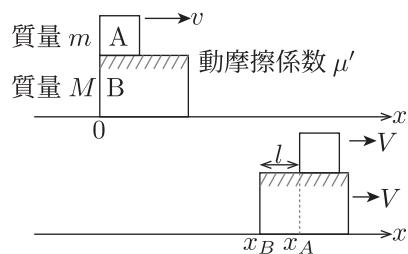
(2) f' の大きさは具体的に計算せよ。



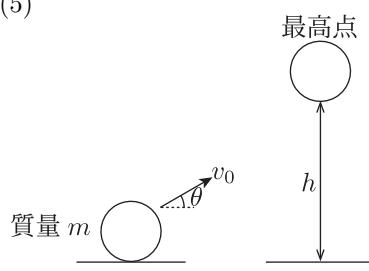
(3) f' の大きさは具体的に計算せよ。



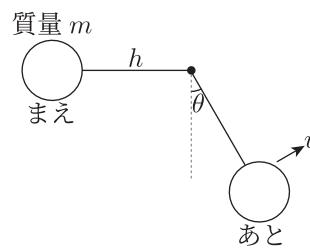
(4) A と B, それぞれで立式した後、系全体 (A+B) での立式をせよ。



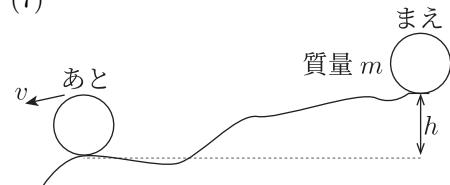
(5)



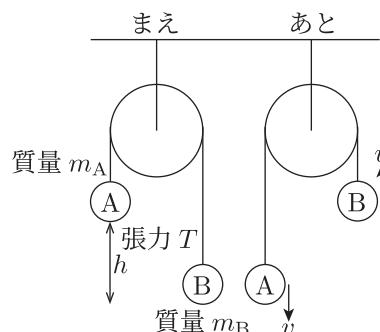
(6)



(7)



(8) A と B, それぞれで立式した後、系全体 (A+B) での立式をせよ。



3.1 の解答

重力の位置エネルギーの基準は任意。今回は全て『まえ』を基準にとるが、どこでとっても式としては等値。

(1) 非保存力として動摩擦力がある。その仕事 $W_{f'}$ は、 $W_{f'} = -\mu' mgx$.

エネルギーと仕事の関係は、

$$\frac{1}{2}mv_0^2 + W_{f'} = \frac{1}{2}mv_1^2,$$

$$\underline{\underline{\frac{1}{2}mv_0^2 - \mu' mgx = \frac{1}{2}mv_1^2.}}$$

(2) 非保存力として動摩擦力がある。その仕事 $W_{f'}$ は、 $W_{f'} = -\mu' mg \cos \theta x$.

エネルギーと仕事の関係は、

$$\frac{1}{2}mv_0^2 + W_{f'} = mgx \sin \theta,$$

$$\underline{\underline{\frac{1}{2}mv_0^2 - \mu' mg \cos \theta x = mgx \sin \theta.}}$$

(3) 非保存力として動摩擦力がある。その仕事 $W_{f'}$ は、 $W_{f'} = -\mu' mg \cos \theta x$.

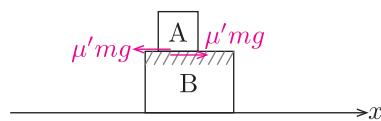
エネルギーと仕事の関係は、

$$\frac{1}{2}mv_0^2 + \frac{1}{2}kx_1^2 + W_{f'} = \frac{1}{2}mv_1^2 + \frac{1}{2}kx_2^2 + mgx \sin \theta,$$

$$\underline{\underline{\frac{1}{2}mv_0^2 + \frac{1}{2}kx_1^2 - \mu' mg \cos \theta x =}}$$

$$\underline{\underline{\frac{1}{2}mv_1^2 + \frac{1}{2}kx_2^2 + mgx \sin \theta.}}$$

(4) 運動の初期条件より、A にはたらく動摩擦力は左向きに $\mu' mg$. 作用・反作用の法則より、B にはたらく動摩擦力は右向きに $\mu' mg$.



A に働く動摩擦力がする仕事を W_A は、

$$W_A = -\mu' mgx_A.$$

B に働く動摩擦力がする仕事を W_B は、 $W_B = \mu' mgx_B$.

A のエネルギーと仕事の関係は、

$$\underline{\underline{\frac{1}{2}mv^2 - \mu' mgx_A = \frac{1}{2}mV^2.}}$$

B のエネルギーと仕事の関係は、

$$\mu' mgx_B = \frac{1}{2}mV^2.$$

系全体 (A+B) のエネルギーと仕事の関係は、

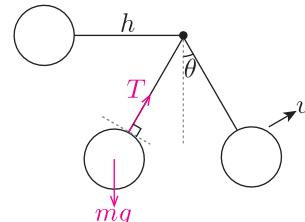
$$\frac{1}{2}mv^2 - \mu' mg(x_A - x_B) = \frac{1}{2}mV^2,$$

$$\underline{\underline{\frac{1}{2}mv^2 - \mu' mgl = \frac{1}{2}mV^2.}}$$

(5) 斜方投射であるため、最高点は水平方向の速度をもつことに注意。保存力である重力のみが仕事をするので、力学的エネルギーは保存する。力学的エネルギー保存則より、

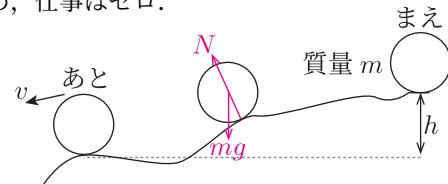
$$\underline{\underline{\frac{1}{2}mv_0^2 = mgh + \frac{1}{2}mv_0^2 \cos \theta.}}$$

(6) 物体に働く力は張力 T と重力 mg だけだが、張力は常に変位と直角向きに働いているため、仕事はゼロ。



保存力である重力のみが仕事をするので、力学的エネルギーは保存する。力学的エネルギー保存則は、
 $0 = -mgh \cos \theta + \frac{1}{2}mv^2.$

(7) 物体に働く力は垂直抗力 N と重力 mg だけだが、垂直抗力は常に変位と直角向きに働いているため、仕事はゼロ。



保存力である重力のみが仕事をするので、力学的エネルギーは保存する。力学的エネルギー保存則は、
 $0 = -mgh + \frac{1}{2}mv^2.$

(8) 物体に働く力は張力 T と重力 mg . 張力と変位は平行であるため、張力は仕事をする. A に働く張力の仕事 W_A は、 $W_A = -Th$. A のエネルギーと仕事の関係は、

$$0 + W_A = -m_A gh + \frac{1}{2}m_A v^2,$$

$$\underline{-Th = -m_A gh + \frac{1}{2}m_A v^2.}$$

B に働く張力がする仕事 W_B は、 $W_B = Th$. B のエネルギーと仕事の関係は、

$$0 + W_B = m_B gh + \frac{1}{2}m_B v^2,$$

$$\underline{Th = m_B gh + \frac{1}{2}m_B v^2.}$$

同じ糸で繋がれているので、A と B の加速度は同じ大きさであるため、両者の速さは等しいことに注意する. 系全体 (A+B) のエネルギーと仕事の関係は、

$$0 = -m_A gh + m_B gh + \frac{1}{2}m_A v^2 + \frac{1}{2}m_B v^2.$$

$$\underline{\underline{}}$$

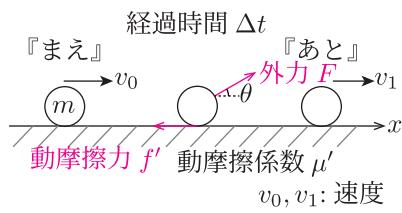
つまり、系全体では力学的エネルギーは保存する.

4 運動量と力積

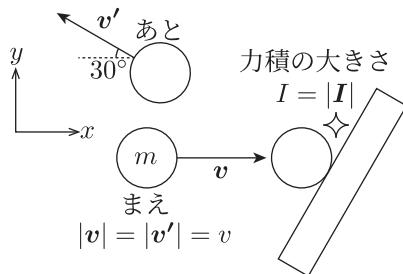
4.1 運動量と力積の関係

Ex. 以下の図における、各物体の運動量と力積の関係を立式せよ。複数物体の系では、系全体で運動量が保存するか否かを確認せよ。

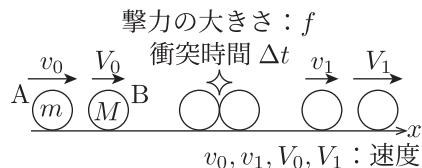
(1) 動摩擦力の大きさは求めて立式せよ。



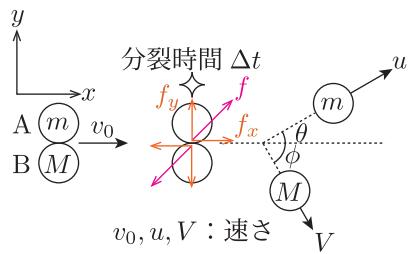
(2) ベクトルを用いて運動量と力積の関係を立式し、力積の大きさ I を計算せよ。



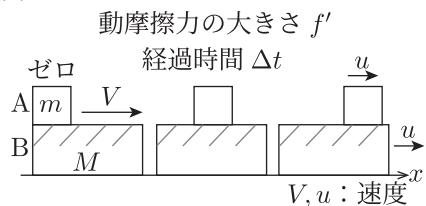
(3) A, B それぞれについて立式せよ。



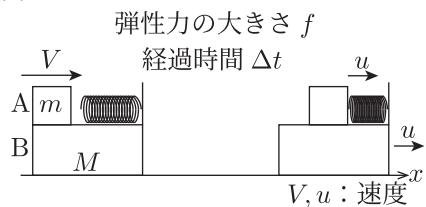
(4) A, B それぞれを x, y 方向について立式せよ。



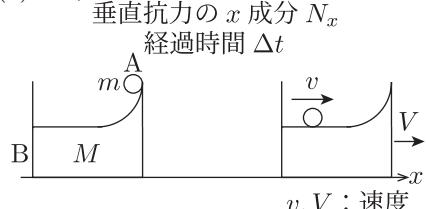
(5) A, B それぞれについて立式せよ。



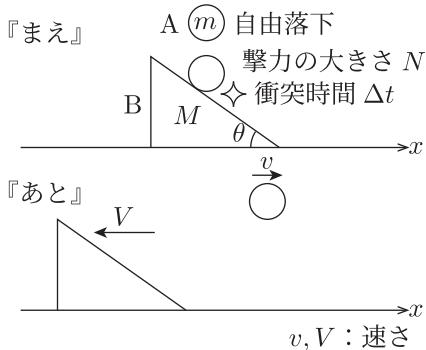
(6) A, B それぞれについて立式せよ。



(7) A, B それぞれについて立式せよ。



(8) A, B それぞれについて立式せよ。



4.1 の解答

(1) x 方向の運動量と力積の関係は,

$$mv_0 + (F \cos \theta - \mu' mg) \Delta t = mv_1.$$

(2) 運動量と力積の関係は,

$$mv + I = mv'.$$

$$\begin{aligned} I &= mv' - mv \\ &= \begin{array}{c} \nearrow \quad \searrow \\ \text{---} \end{array} \quad \begin{array}{c} \nearrow \quad \searrow \\ \text{---} \end{array} \\ &= \begin{array}{c} \nearrow \quad \searrow \\ \text{---} \end{array} \quad \begin{array}{c} \nearrow \quad \searrow \\ \text{---} \end{array} \\ &= \begin{array}{c} \nearrow \quad \searrow \\ \text{---} \end{array} \quad \begin{array}{c} \nearrow \quad \searrow \\ \text{---} \end{array} \\ I &= \frac{mv}{2} \quad \frac{mv}{2} \\ &\quad \sqrt{3}mv \quad 150^\circ \end{aligned}$$

力積の大きさ I は、図より,

$$I = \sqrt{\left(\frac{mv}{2}\right)^2 + \left(mv\left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right)^2} = mv\sqrt{2 + \sqrt{3}}.$$

(3) A について、運動量と力積の関係は,

$$mv_0 - f \Delta t = mv_1.$$

B について、運動量と力積の関係は,

$$MV_0 + f \Delta t = MV_1.$$

2 式を足すと,

$$mv_0 + MV_0 = mv_1 + MV_1.$$

力積が消え、系全体の運動量は保存する。

(4) A について、 x , y 方向の運動量と力積の関係は,

$$x : mv_0 + f_x \Delta t = mv \cos \theta.$$

$$y : 0 = f_y \Delta t = mv \sin \theta.$$

B について、 x , y 方向の運動量と力積の関係は,

$$x : Mv_0 - f_x \Delta t = MV \cos \phi.$$

$$y : 0 - f_y \Delta t = -mv \sin \phi.$$

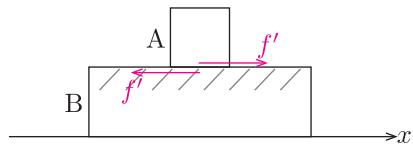
x , y 方向のそれぞれの式を足すと,

$$x : mv_0 + Mv_0 = mv \cos \theta + MV \cos \phi.$$

$$y : 0 = mv \sin \theta - MV \sin \phi.$$

(5) 運動途中の A と B に働く力を図示すると、以

下のようになる。



A について、運動量と力積の関係は,

$$0 + f' \Delta t = mu.$$

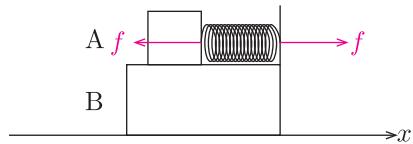
B について、運動量と力積の関係は,

$$MV - f' \Delta t = Mu.$$

2 式を足すと,

$$MV = mu + Mu.$$

(6) 運動途中の A と B に働く力を図示すると、以下のようになる。



A について、運動量と力積の関係は,

$$mV - f \Delta t = mu.$$

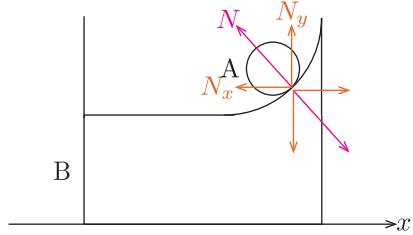
B について、運動量と力積の関係は,

$$0 + f \Delta t = Mu.$$

2 式を足すと,

$$mV = mu + Mu.$$

(7) 運動途中の A と B に働く力を図示すると、以下のようになる。



A について、運動量と力積の関係は,

$$0 - N_x \Delta t = mv.$$

Bについて、運動量と力積の関係は、

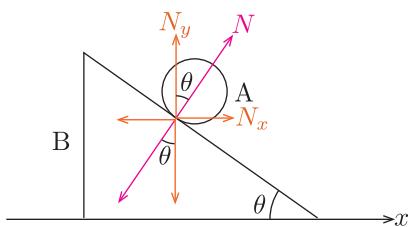
$$\underline{0 + N_x \Delta t = MV.}$$

2式を足すと、

$$\underline{0 = mv + MV.}$$

力のかかり方から、Aは左に動くことは明白だが、与えられている文字が『速度』なので、自分で符号を入れてはならない。文字の中に符号が入っていることに注意すること。

(8) 衝突の瞬間のAとBに働く力を図示すると、以下のようなになる。



Aについて、運動量と力積の関係は、

$$\underline{0 + N_x \Delta t = mv.}$$

Bについて、運動量と力積の関係は、

$$\underline{0 - N_x \Delta t = -MV.}$$

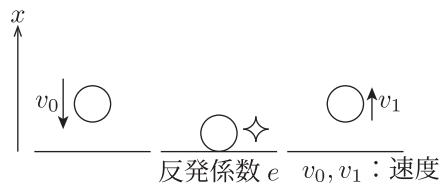
2式を足すと、

$$\underline{0 = mv - MV.}$$

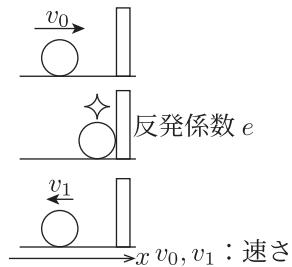
4.2 反発係数

Ex. 以下の図における、反発係数の式を立式せよ。

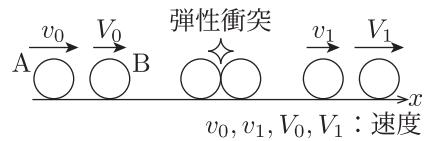
(1)



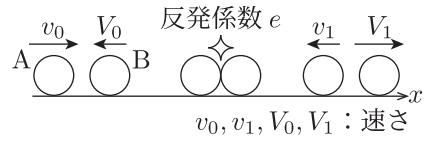
(2)



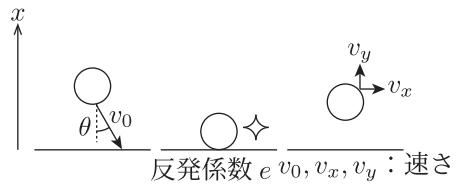
(3)



(4)



(5) v_x も求めよ。



4.2 の解答

(1) 反発係数の式は,

$$e = \frac{|v_1|}{|v_0|} = \frac{v_1}{\underline{\underline{v_0}}}.$$

(2) 反発係数の式は,

$$e = \frac{|-v_1|}{|v_0|} = \frac{v_1}{\underline{\underline{v_0}}}.$$

(3) A からみた B の相対速度で考える。弾性衝突

なので $e = 1$. 反発係数の式は,

$$1 = \frac{|V_1 - v_1|}{|V_0 - v_0|}.$$

衝突が起きていることから, $v_0 > V_0$, $V_1 > v_1$. し

たがって,

$$1 = \frac{V_1 - v_1}{-(V_0 - v_0)}.$$

もちろん B からみた A の相対速度で考えても同じ結果になる。

(4) A からみた B の相対速度で考える。反発係数

の式は,

$$e = \frac{|V_1 - (-v_1)|}{|-V_0 - v_0|} = \frac{V_1 + v_1}{\underline{\underline{V_0 + v_0}}}.$$

(5) 反発係数の式は、撃力作用線と平行な速度成分

でないと立式できない。撃力は x 方向を向くため,

x 方向の速度について反発係数の式を立式できる。

撃力作用線と直角の方向の速度は、衝突の前後で変化しない。

$$v_x = \underline{\underline{v_0 \sin \theta}}.$$

x 方向について、反発係数の式は,

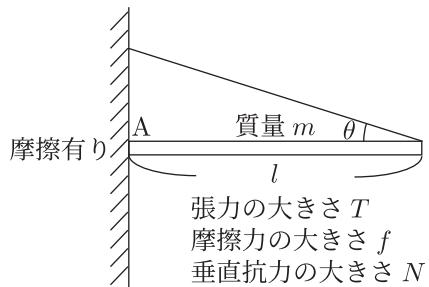
$$e = \frac{|v_y|}{|-v_0 \cos \theta|} = \frac{v_y}{\underline{\underline{v_0 \cos \theta}}}.$$

5 剛体の静力学

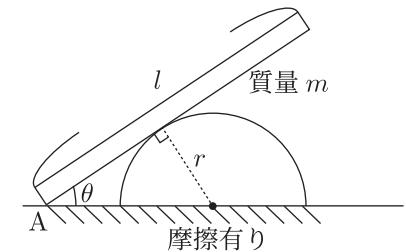
5.1 剛体の静止条件

Ex. 以下の図における、剛体の静止条件を立式せよ。剛体は全て一様なものとする。モーメントの釣り合いは、Aを中心にして立式せよ。

(1)

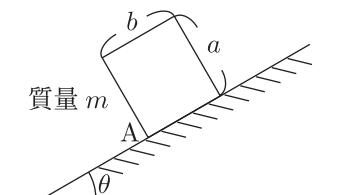


(2)



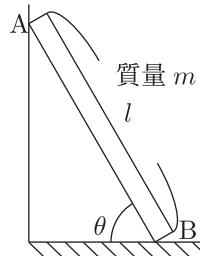
摩擦力の大きさ f
円筒から受ける垂直抗力の大きさ R
A から受ける垂直抗力の大きさ N

(3)



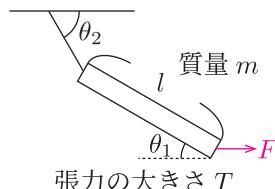
摩擦力の大きさ f
垂直抗力の大きさ R
A から垂直抗力の作用点までの距離 x

(4)



B からの摩擦力の大きさ f
B からの垂直抗力の大きさ R
A からの垂直抗力の大きさ N

(5)

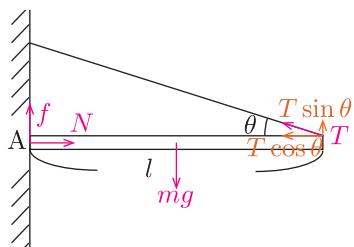


張力の大きさ T

5.1 の解答

以下鉛直上向き、水平右向きを正とする。

(1)



鉛直方向の釣り合いの式より,

$$0 = f + T \sin \theta - mg.$$

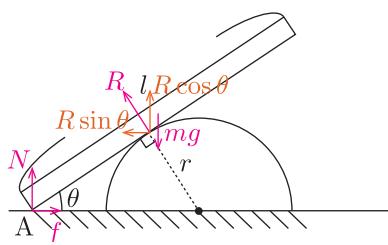
水平右向きの力の釣り合いより,

$$0 = N - T \cos \theta.$$

A 中心のモーメントの釣り合いより,

$$0 = -\frac{l}{2}mg + lT \sin \theta.$$

(2)



鉛直方向の釣り合いの式より,

$$0 = R \cos \theta + N - mg.$$

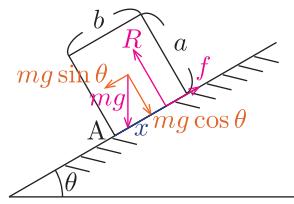
水平右向きの力の釣り合いより,

$$0 = f - R \sin \theta.$$

A 中心のモーメントの釣り合いより,

$$0 = -\frac{r}{\tan \theta}R + \frac{l \cos \theta}{2}mg.$$

(3) この問いでは、斜面平行下向き、斜面垂直上向きを正とする。



斜面平行方向の釣り合いの式より,

$$0 = mg \sin \theta - f.$$

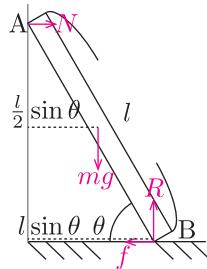
斜面垂直上向きの力の釣り合いより,

$$0 = R - mg \cos \theta.$$

A 中心のモーメントの釣り合いより,

$$0 = \frac{a}{2}mg \sin \theta - \frac{b}{2}mg \cos \theta + xR.$$

(4)



鉛直方向の釣り合いの式より,

$$0 = R - mg.$$

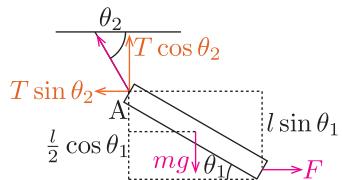
水平右向きの力の釣り合いより,

$$0 = N - f.$$

A 中心のモーメントの釣り合いより,

$$0 = -\frac{l}{2} \sin \theta mg + l \sin \theta R.$$

(5)



鉛直方向の釣り合いの式より,

$$0 = T \cos \theta_2 - mg.$$

水平右向きの力の釣り合いより,

$$0 = F - T \sin \theta_2.$$

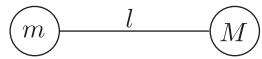
A 中心のモーメントの釣り合いより,

$$0 = -\frac{l}{2} \cos \theta_1 mg + l \sin \theta_1 F.$$

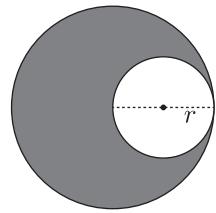
5.2 重心

Ex. 以下の図における、剛体の重心を求めよ。剛体は全て一様であるとする。

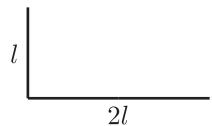
(1)



(2)



(3)



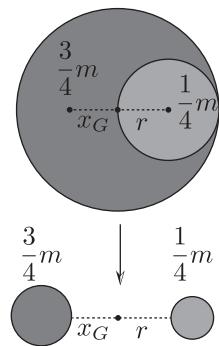
5.2 の解答

(1) 右から重心までの距離を x_G とする。重力のモーメントの釣り合いより、

$$0 = +x_G mg - (l - x_G) Mg,$$

$$\underline{\underline{x_G = \frac{Ml}{m+M}}}.$$

(2) くり抜く前の円盤の質量を m とする。今考えている円盤の質量は、面積比を考えることにより、 $\frac{3}{4}m$ 。くり抜かれた円盤の質量は、 $\frac{1}{4}m$ 。円盤を埋めると、全体の重心は円の中心となる。全体の円盤の中心から、求める重心までの距離を x_G とする。

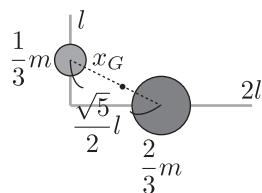


上図から、重力のモーメントの釣り合いより、

$$0 = x_G \frac{3}{4} mg - r \frac{1}{4} mg,$$

$$\underline{\underline{x_G = \frac{r}{3}}}.$$

(3) 棒全体の質量を m とする。鉛直向きと水平向きの棒にそれぞれ分ける。長さの比より、 $l, 2l$ の棒の質量はそれぞれ $\frac{1}{3}m, \frac{2}{3}m$ 。2つの棒のそれぞれの重心は、分けた棒の中点。全体の重心は、2つの重心を結ぶ線分上にある。



上図における重心周りの重力のモーメントの釣り合いでより、

$$0 = x_G \frac{1}{3} mg - (\frac{\sqrt{5}l}{2} - x_G) \frac{2}{3} mg,$$

$$\underline{\underline{x_G = \frac{\sqrt{5}l}{3}}}.$$

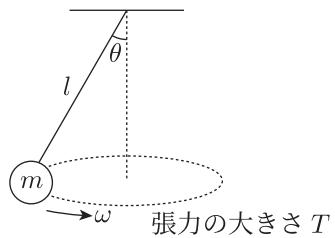
2つの重心を結ぶ線分を、 $2:1$ に内分する点が求めれる重心。

6 円運動

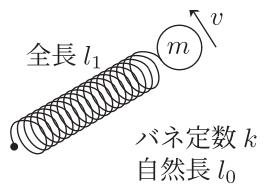
6.1 円運動の記述

Ex. 以下の図における、円運動を記述する式を立てよ。

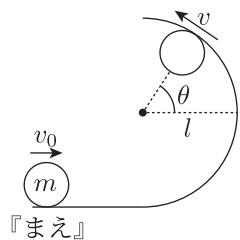
(1)



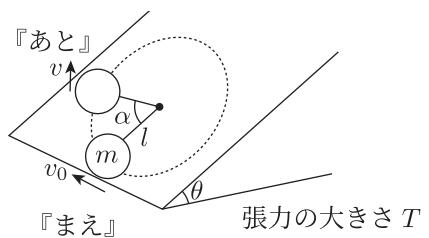
(2)



(3)

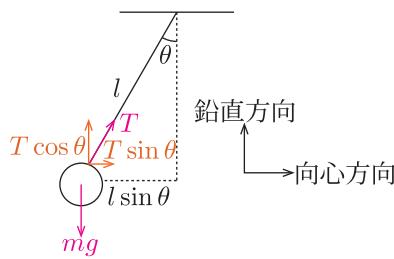


(4)



6.1 の解答

(1) 向心方向のみに力が働いている（鉛直方向は釣り合いで合力ゼロ）ため、角運動量保存則から等速円運動。



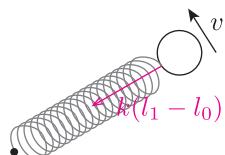
向心方向の運動方程式より、

$$\underline{ml \sin \theta \omega^2 = T \sin \theta}.$$

鉛直方向は力の釣り合い、釣り合いの式より、

$$\underline{0 = T \cos \theta - mg}.$$

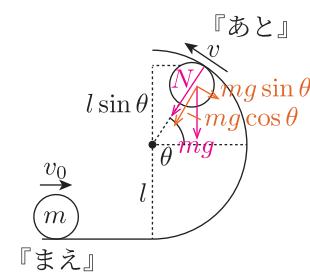
(2) 向心方向のみに力が働いているため、角運動量保存則から等速円運動。



向心方向の運動方程式より、

$$\underline{\frac{v^2}{l_1} = k(l_1 - l_0)}.$$

(3) 向心方向意外にも力が働くため、角運動量保存則は成立しないため非等速円運動。



向心方向の運動方程式より、

$$\underline{m \frac{v^2}{l} = N + mg \sin \theta}.$$

垂直抗力は仕事をしないため、力学的エネルギーは保存する。力学的エネルギー保存則より、

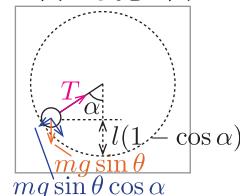
$$\underline{\frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}mv^2 + mgl(1 + \sin \theta)}.$$

(4) 向心方向意外にも力が働くため、角運動量保存則は成立しないため非等速円運動。

真横から見た図



正面から見た図



向心方向の運動方程式より、

$$\underline{m \frac{v^2}{l} = T - mg \sin \theta \cos \alpha}.$$

垂直抗力、張力は仕事をしないため、力学的エネルギーは保存する。力学的エネルギー保存則より、

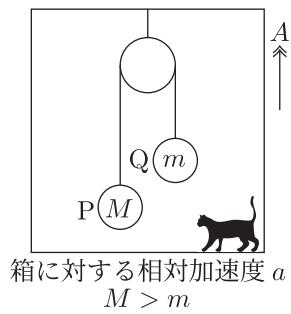
$$\underline{\frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}mv^2 + mgl(1 - \cos \alpha) \sin \theta}.$$

7 非慣性系の力学

7.1 慣性力の導入

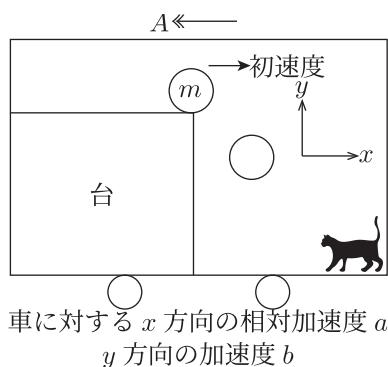
Ex. 以下の図において、質量 m の物体の非慣性系からみた運動方程式を立式せよ。 A は非慣性系の観測者が有する加速度の大きさである。

(1) P, Q それぞれの運動方程式を立式せよ。



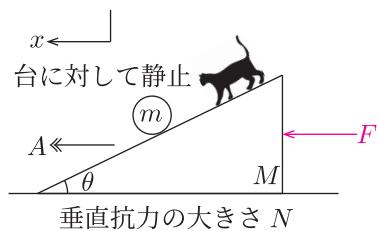
箱に対する相対加速度 a
 $M > m$

(2) 台から飛び出して、宙に浮いている時の、 x , y 方向それぞれで立式せよ。

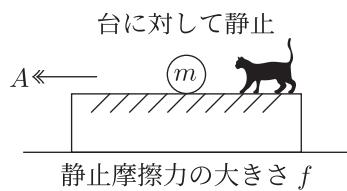


車に対する x 方向の相対加速度 a
 y 方向の加速度 b

(3) 惯性系からみた台の x 方向の運動方程式も立式せよ。



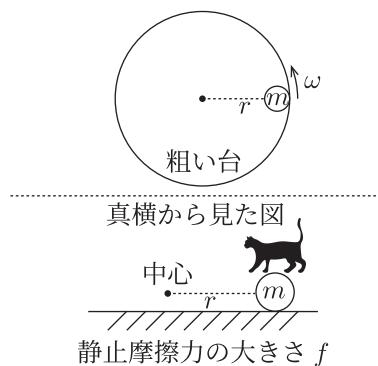
(4)



台に対して静止

静止摩擦力の大きさ f

(5)

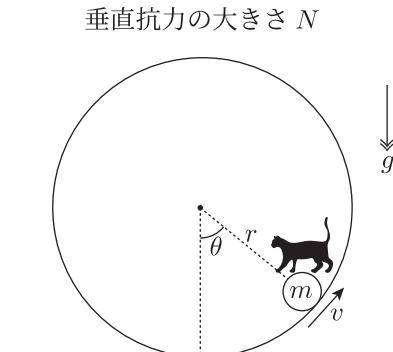


粗い台

中心

静止摩擦力の大きさ f

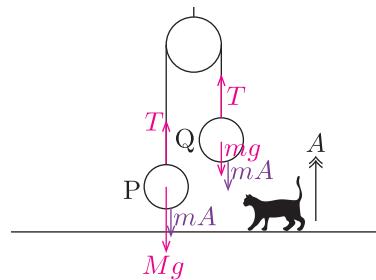
(6)



垂直抗力の大きさ N

7.1 の解答

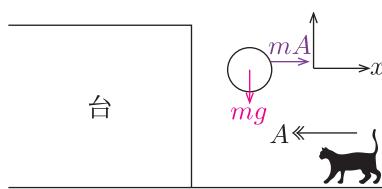
(1)



$$\underline{P : Ma = Mg + MA - T.}$$

$$\underline{Q : ma = -mg - mA + T.}$$

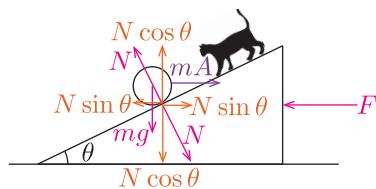
(2)



$$\underline{x : ma = mA.}$$

$$\underline{y : mb = -mg.}$$

(3)



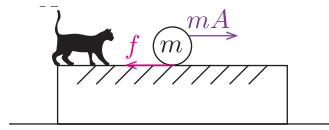
$$\text{小球について, } \underline{x : 0 = N \sin \theta - mA.}$$

$$\underline{y : 0 = N \cos \theta - mg.}$$

台について,

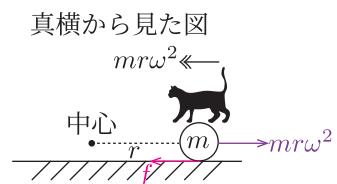
$$\underline{x : MA = F - N \sin \theta.}$$

(4)



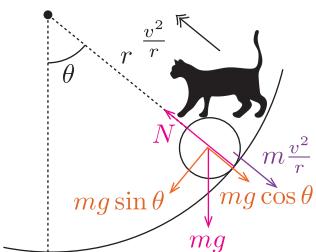
$$\underline{x : 0 = f - mA.}$$

(5)



$$\underline{x : 0 = f - mr\omega^2.}$$

(6)

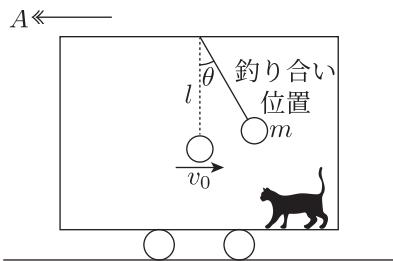


$$\underline{x : 0 = N - mg \cos \theta - m \frac{v^2}{r}.}$$

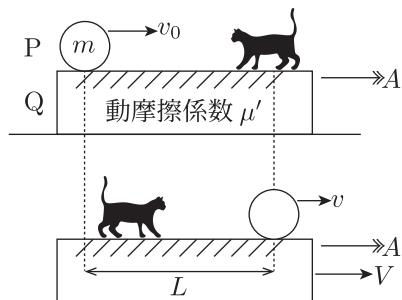
7.2 非慣性系におけるエネルギー変化

Ex. 以下の図において、運動の前後に注目して、
非慣性系においてエネルギーの変化を立式せよ。 A
は非慣性系の観測者が有する加速度の大きさである。

(1) みかけの重力加速度の大きさ g' を、 A だけを
用いて求めよ。また、一番早くなる時の速さを v_{\max}
として、エネルギーの変化を立式せよ。

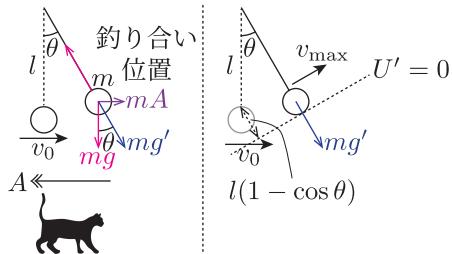


(2) v_0 , v , V は慣性系における速度であること
に注意せよ。



7.2 の解答

(1)

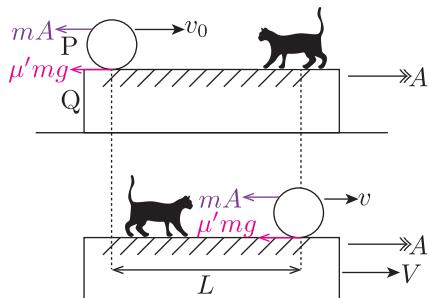


$$\underline{\underline{g' = \frac{A}{\sin \theta}}}.$$

張力は仕事をしないので、見かけの重力を用いれば
非慣性系において力学的エネルギーは保存.

$$\underline{\underline{\frac{1}{2}mv^2 + m\frac{A}{\sin \theta}l(1 - \cos \theta) = \frac{1}{2}mv_{\max}^2.}}$$

(2)



Q の上の観測者からみると、Q からみた P の速度
は、 $v - V$.

非慣性系におけるエネルギーと仕事の関係は、

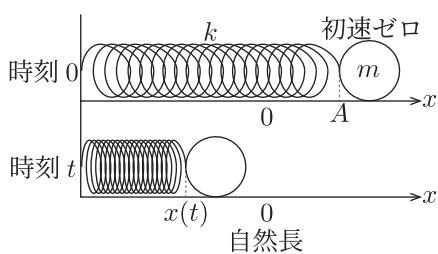
$$\underline{\underline{\frac{1}{2}mv_0^2 - \mu' mgL - mAL = \frac{1}{2}m(v - V)^2.}}$$

8 単振動

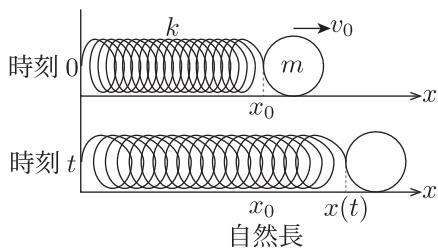
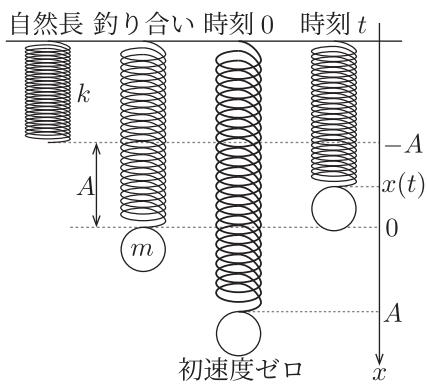
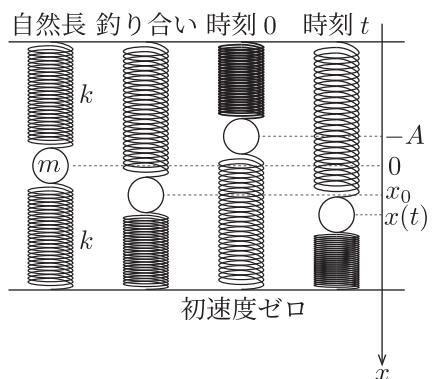
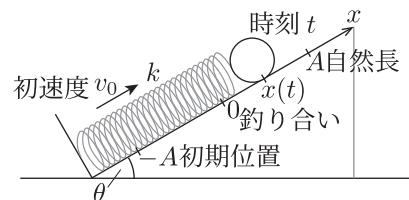
8.1 単振動の運動方程式と運動の様子

Ex. 以下の図において、単振動の運動方程式を立て、角速度 ω 、振動中心座標 X_0 を求めよ。加速度を a とする。また初期条件から、 $x(t)$ 、 $v(t)$ を決定せよ。

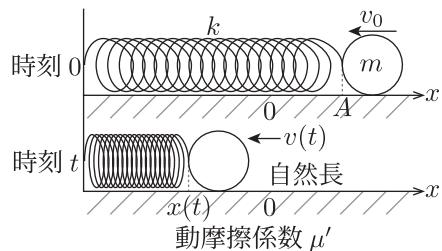
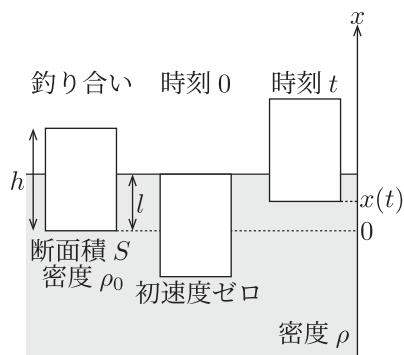
(1)



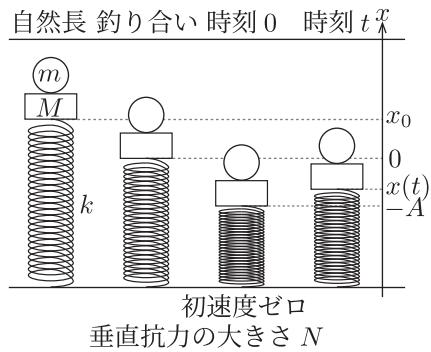
(2)

(3) k を消去して答えよ。(4) k を消去して答えよ。(5) k を消去して答えよ。

(6)

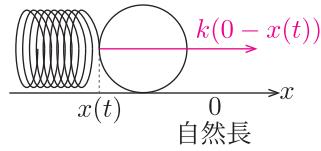
(7) 周期 T も求めよ。

(8) N を位置座標 x の関数である $N(x)$, また時刻 t の関数である $N(t)$ も求めよ.



8.1 の解答

(1)



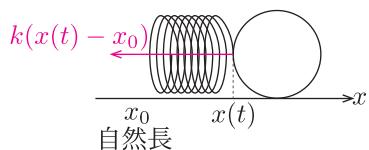
$$ma = +K(0 - x(t)) = -k(x(t) - 0).$$

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}, \quad X_0 = 0.$$

初期条件より,

$$x(t) = A \cos \sqrt{\frac{k}{m}} t, \quad v(t) = -A \sqrt{\frac{k}{m}} \sin \sqrt{\frac{k}{m}} t.$$

(2)



$$ma = -k(x(t) - x_0).$$

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}, \quad X_0 = x_0.$$

初期条件が 2 つあるため、一般解を用いる。一般解の定数を C, D とする。単振動の一般解は、

$$x(t) = C \cos \omega t + D \sin \omega t + x_0,$$

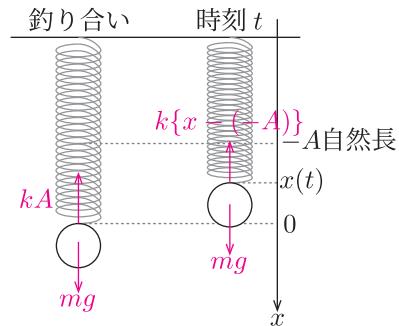
v(t) = -C\omega \sin \omega t + D\omega \cos \omega t. 初期条件を一般解に代入すると、

$$x(0) = C + 0 + x_0 = x_0, \quad v(0) = D\omega = v_0.$$

$$x(t) = v_0 \sqrt{\frac{m}{k}} \sin \sqrt{\frac{k}{m}} t + x_0.$$

$$v(t) = v_0 \cos \sqrt{\frac{k}{m}} t.$$

(3)



釣り合いより、

$$k = \frac{mg}{A},$$

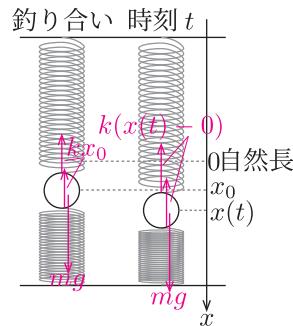
$$ma = mg - k\{x(t) - (-A)\} = -kx(t) = -\frac{mg}{A}x(t).$$

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{A}}, \quad X_0 = 0.$$

初期条件より、

$$x(t) = A \cos \sqrt{\frac{g}{A}} t, \quad x(t) = -A \sqrt{\frac{g}{A}} \sin \sqrt{\frac{g}{A}} t.$$

(4)



釣り合いより、

$$k = \frac{mg}{2x_0},$$

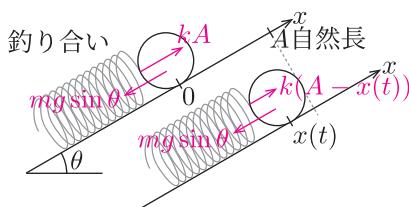
$$ma = mg - 2k(x(t) - 0) = -2k(x(t) - \frac{mg}{2k}) = -\frac{mg}{x_0}(x(t) - x_0).$$

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{x_0}}, \quad X_0 = x_0.$$

初期条件より、

$$x(t) = -A \cos \sqrt{\frac{g}{x_0}} t, \quad x(t) = A \sqrt{\frac{g}{x_0}} \sin \sqrt{\frac{g}{x_0}} t.$$

(5)



釣り合いより,
 $k = \frac{mg \sin \theta}{A}$,
 $ma = -\frac{mg \sin \theta}{A}(x(t) - 0).$

$\omega = \sqrt{\frac{g \sin \theta}{A}}, X_0 = 0.$

初期条件が 2 つあるため、一般解を用いる。一般解の定数を C, D とする。単振動の一般解は、

$$x(t) = C \cos \omega t + D \sin \omega t + 0,$$

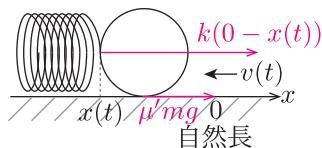
$v(t) = -C\omega \sin \omega t + D\omega \cos \omega t$. 初期条件を一般解に代入すると、

$$x(0) = C + 0 + 0 = -A, v(0) = D\omega = v_0.$$

$$x(t) = -A \cos \sqrt{\frac{g \sin \theta}{A}}t + v_0 \sqrt{\frac{A}{g \sin \theta}} \sin \sqrt{\frac{g \sin \theta}{A}}t.$$

$$v(t) = \sqrt{Ag \sin \theta} \sin \sqrt{\frac{g \sin \theta}{A}}t + v_0 \cos \sqrt{\frac{g \sin \theta}{A}}t.$$

(6)



$$ma = +k(0 - x(t)) + \mu' mg = -k(x(t) - \frac{\mu' mg}{k}).$$

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}, X_0 = \frac{\mu' mg}{k}.$$

初期条件が 2 つあるため、一般解を用いる。一般解の定数を C, D とする。単振動の一般解は、

$$x(t) = C \cos \omega t + D \sin \omega t + \frac{\mu' mg}{k},$$

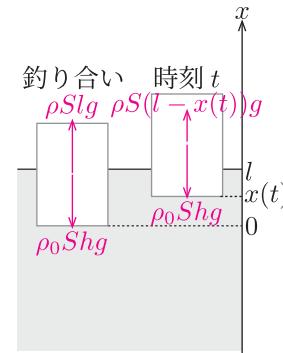
$v(t) = -C\omega \sin \omega t + D\omega \cos \omega t$. 初期条件を一般解に代入すると、

$$x(0) = C + 0 + \frac{\mu' mg}{k} = A, v(0) = D\omega = -v_0.$$

$$x(t) = (A - \frac{\mu' mg}{k}) \cos \sqrt{\frac{k}{m}}t - v_0 \sqrt{\frac{m}{k}} \sin \sqrt{\frac{k}{m}}t + \frac{\mu' mg}{k}.$$

$$v(t) = -(A - \frac{\mu' mg}{k}) \sqrt{\frac{k}{m}} \sin \sqrt{\frac{k}{m}}t - v_0 \cos \sqrt{\frac{k}{m}}t.$$

(7)



釣り合いより、 $0 = \rho S l g - \rho_0 S h g$.

$$\rho_0 S h a = \rho S (l - x(t)) g - \rho_0 S h g = -\rho S g (x(t) - 0).$$

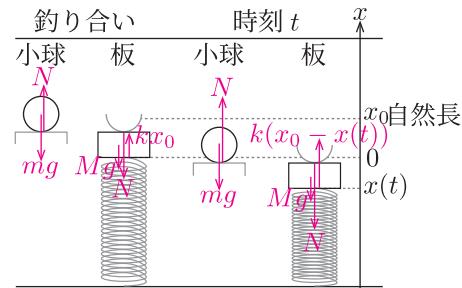
$$\omega = \sqrt{\frac{\rho g}{\rho_0 h}}, T = 2\pi \sqrt{\frac{\rho_0 h}{\rho g}}, X_0 = 0.$$

初期条件より、

$$x(t) = (l - h) \cos \sqrt{\frac{\rho g}{\rho_0 h}}t,$$

$$v(t) = -(l - h) \sqrt{\frac{\rho g}{\rho_0 h}} \sin \sqrt{\frac{\rho g}{\rho_0 h}}t.$$

(8)



釣り合いより、小球 : $0 = N - mg$,

台 : $0 = kx_0 - Mg - N$.

小球 : $ma = N - mg$,

台 : $Ma = k(x_0 - x(t)) - Mg - N$.

$$\text{小球 + 台 : } \underline{(m+M)a = -k(x(t) - 0)},$$

$$\underline{\omega = \sqrt{\frac{k}{m+M}}}, \underline{X_0 = 0}.$$

$$\underline{N(x) = ma + mg = -\frac{km}{m+M}x(t) + mg.}$$

初期条件より,

$$\underline{x(t) = -A \cos \sqrt{\frac{k}{m+M}} t},$$

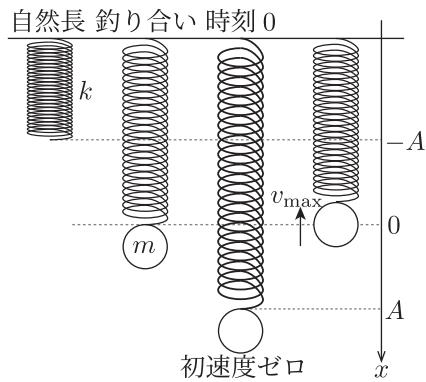
$$\underline{v(t) = A \sqrt{\frac{k}{m+M}} \sin \sqrt{\frac{k}{m+M}} t}.$$

$$\underline{N(t) = \frac{Ak}{m+M} \cos \sqrt{\frac{k}{m+M}} t + mg.}$$

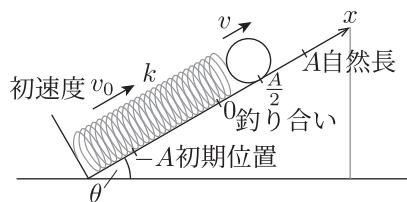
8.2 単振動におけるエネルギー変化

Ex. 以下の図において、釣り合いの位置からのばねの伸縮を考えることにより、運動の前後に注目して単振動のエネルギー保存則を立式せよ。

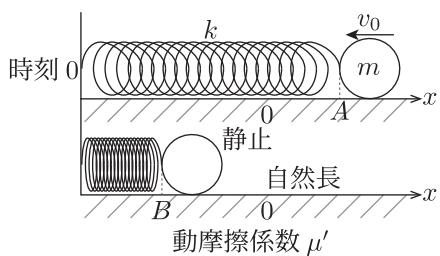
(1)



(2)



(3)



8.2 の解答

釣り合いの位置からバネの伸縮を考えると、重力の位置エネルギーや動摩擦力の仕事を考えなくてもよくなることを利用する。

(1) 釣り合いの位置は $x = 0$. 単振動のエネルギー保存則より,

$$\frac{1}{2}kA^2 = \frac{1}{2}mv_{\max}^2.$$

(2) 釣り合いの位置は $x = 0$. 単振動のエネルギー保存則より,

$$\frac{1}{2}kA^2 + \frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}k\left(\frac{A}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}mv^2.$$

(3) 運動方程式より, $ma = -k(x(t) - \frac{\mu' mg}{k})$.

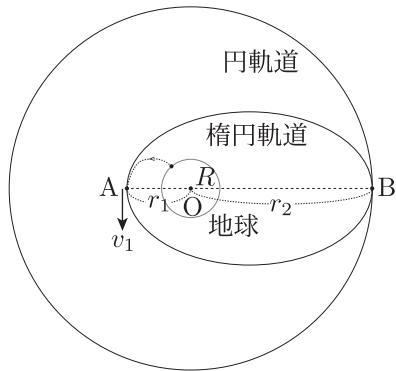
従って釣り合いの位置は $x = \frac{\mu' mg}{k}$. 単振動のエネルギー保存則より,

$$\frac{1}{2}k(A - \frac{\mu' mg}{k})^2 + \frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}k\left(\frac{\mu' mg}{k} - B\right)^2.$$

9 万有引力による運動

9.1 万有引力による運動

Ex. 地球の中心 O を焦点とする人工衛星の運動について次の問い合わせよ。橢円軌道の近日点を A, 遠日点を B とする。地球の質量を M , 人工衛星の質量を m , 万有引力定数を G , 地球の半径を R とする。万有引力の位置エネルギーを無限遠方にとる。



- (1) 近日点 A で人工衛星の速さが v_1 になるために、地球表面から打ち出す時の運動エネルギーはいくらか。ただし、軌道修正のためのエネルギーは無視する。
- (2) 楕円軌道状の遠日点 B を通る時の速さを v_2 として、A と B について、
 - (a) 面積速度保存則を立式せよ。
 - (b) 力学的エネルギー保存則を立式せよ。
- (3) これらの指揮から、人工衛星が B を通る時の運動エネルギーは、そのときの位置エネルギーの絶対値の何倍になるか。 r_1, r_2 を用いて求めよ。
- (4) B で人工衛星は加速して円軌道に移った。円運動の速さ V は v_2 の何倍か。
- (5) 円軌道に移った後の周期 T_0 は、橢円軌道の周期 T の何倍か。

9.1 の解答

(1) 地表面での運動エネルギーを K とする。地表面から近日点までの力学的エネルギー保存則より,

$$\begin{aligned} K - \frac{GMm}{R} &= \frac{1}{2}mv_1^2 - \frac{GMm}{r_1}, \\ \underline{\underline{K = \frac{1}{2}mv_1^2 - \frac{GMm}{r_1} + \frac{GMm}{R}}}. \end{aligned}$$

(2)(a) 面積速度保存則より,

$$\underline{\underline{\frac{1}{2}r_1v_1 = \frac{1}{2}r_2v_2}}.$$

(b) 力学的エネルギー保存則より,

$$\underline{\underline{\frac{1}{2}mv_1^2 - \frac{GMm}{r_1} = \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{GMm}{r_2}}}.$$

(3) (2) より,

$$v_1 = \frac{r_2}{r_1}v_2.$$

力学的エネルギーの式に代入すると,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}mv_2^2 \frac{r_1 + r_2}{r_1} &= \frac{GMm}{r_2}, \\ \underline{\underline{\frac{r_1}{r_1 + r_2} \text{倍.}}} \end{aligned}$$

(4) 円軌道での運動方程式は,

$$\begin{aligned} m\frac{V^2}{r_2} &= \frac{GMm}{r_2^2}, \\ \underline{\underline{\frac{1}{2}mV^2 = \frac{1}{2}\frac{GMm}{r_2}}}. \end{aligned}$$

(3) より,

$$\underline{\underline{\frac{V}{v_2} = \sqrt{\frac{r_1 + r_2}{2r_1}}}}.$$

(5) ケプラーの第3法則より,

$$\begin{aligned} \frac{T^2}{r_2^3} &= \frac{T^2}{\left(\frac{r_1 + r_2}{2}\right)^3} \\ \underline{\underline{\frac{T_0}{T} = \left(\frac{2r_2}{r_1 + r_2}\right)^{\frac{3}{2}}}}. \end{aligned}$$