Chapitre IV : Convolution

1- Définition d'un système

Un système est un ensemble d'éléments (circuits) dont l'entrée est le signal à analysé sortant transformé : $y(t) = T[x(t)]$.

$$x(t) \longrightarrow \boxed{T[.]} \longrightarrow y(t)$$

En traitement du signal, on s'intéresse à l'étude de la linéarité et l'invariance dans le temps des systèmes.

Linéarité : $T[a_1x_1(t) + a_2x_2(t)] = a_1T[x_1(t)] + a_2T[x_2(t)]$

Invariance : $x(t) \xrightarrow{T[\ ]} y(t), x(t-t_0) \xrightarrow{T[\ ]} y(t-t_0)$

Exemple

$y(t) = 2\,\mathrm{t}^2x(t)$

Linéarité :
$T[a_1x_1(t) + a_2x_2(t)] = 2\,\mathrm{t}^2\big(a_1x_1(t) + a_2x_2(t)\big) = a_1 2\,\mathrm{t}^2x_1(t) + a_2 2\,\mathrm{t}^2x_2(t) =$

$a_1T[x_1(t)] + a_2T[x_2(t)] \Rightarrow$ Le système est linéaire.

Invariance :

$x(t-t_0) \xrightarrow{T[\ ]} 2\,(t-t_0)^2x(t-t_0) \neq y(t-t_0) \Rightarrow$ Le système n'est pas invariant dans le temps

2- Définition de la convolution

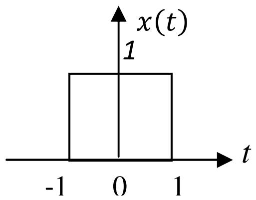
Le signal de sortie d'un système linéaire causal invariant dans le temps est donné par le produit de convolution du signal d'entrée et d'une fonction $h(t)$ appelée réponse impulsionnelle. La valeur du signal de sortie à l'instant t est ainsi obtenue par la sommation des valeurs passées du signal d'excitation, pondérées par la réponse du système.

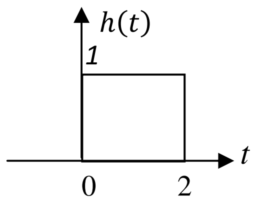
$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau$$

Exemple

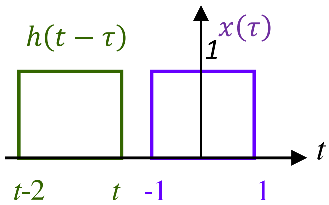
Soit : $x(t) = \mathrm{rect}\left(\frac{t}{2}\right)$ et $h(t) = \mathrm{rect}\left(\frac{t-1}{2}\right)$

$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau$



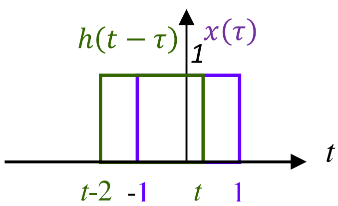


1^er^ Cas $t < -1$ **:**



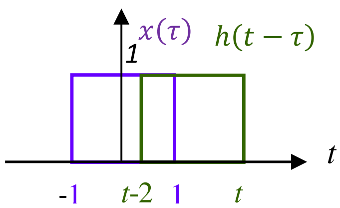
$\Rightarrow y(t) = 0$

2^ème^ Cas $-1 \leq t < 1$ **:**



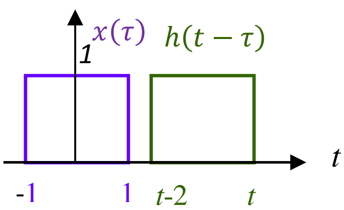
$$\Rightarrow y(t) = \int_{-1}^{t} \mathrm{d}\tau = [\tau]_{-1}^{t} = t + 1$$

3^ème^ Cas $-1 \leq t - 2 < 1 \Rightarrow 1 \leq t < 3$ **:**

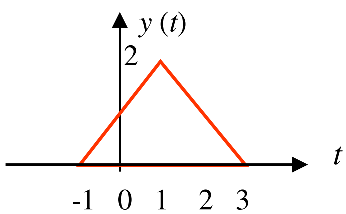


$$\Rightarrow y(t) = \int_{t-2}^{1} \mathrm{d}\tau = [\tau]_{t-2}^{1} = -t + 3$$

4^ème^ Cas $t - 2 \geq 1 \Rightarrow t \geq 3$ **:**



$\Rightarrow y(t) = 0$



Propriétés

$y(t) = x(t) * h(t) = h(t) * x(t)$
$\big(x_1(t) + x_2(t)\big) * h(t) = x_1(t) * h(t) + x_2(t) * h(t)$

$y(t) = x(t) * h(t) \Rightarrow Y(f) = X(f).H(f)$