Méthodes Numériques

Fiche de TD N°1: Résolution des équations non linéaires

Exercice N°1 :

On se propose d'approximer la solution de l'équation $f(x) = 0$

$$\text{où } f(x) = x + 2\ln(x),\ x \in]0 \quad \infty[$$

1- Montrer que cette équation a une solution dans $[0{,}5 \quad 1]$
2- On veut approximer cette solution avec une précision inférieure à 10^{-4}, calculer le nombre d'itérations nécessaires si on utilise la méthode de bipartition.
3- Calculer cette approximation en mettant vos calculs sur un tableau.
4- Refaire ce calcul avec la méthode de Regula-Falsi.
5- Comparer les deux méthodes.

Exercice N°2 :

Soit l'équation : $f(x) = e^x + x - 2 = 0$

1- Montrer que la racine de cette équation $x^* \in [0 \quad 1]$
2- Réécrire cette équation sous la forme $x = g(x)$, en s'assurant que l'algorithme satisfait la condition de convergence de la méthode des approximations successives
3- Partant de l'estimation initiale $x_0 = 0$, calculer une approximation de la racine de l'équation à 10^{-4} prés.
4- Refaire le même calcul en utilisant l'algorithme des approximations successives accéléré. Quel est votre commentaire ?
5- Refaire le même calcul en utilisant la méthode de Newton-Raphson.

Exercice N°3 :

On considère l'équation : $f(x) = x^2 - A = 0$
Montrer que la méthode de Newton-Raphson et une méthode à approximations successives accélérées appliquée à la résolution de cette équation, conduisent au même algorithme, soit :

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{A}{x_n}\right) \qquad n = 0,1,2,\cdots; \qquad x_0\ donné$$

Application numérique : Avec quelle précision connait-on la racine de 9 après 4 itérations de calcul, en partant de de l'estimation initiale $x_0 = 2$.

Exercice N°4:

Une amélioration de la méthode de Regula-Falsi consiste à déduire l'approximation c_{k+1}de la solution de l'équation à partir de l'intersection avec l'axe des abscisses, d'une droite parallèle à la première corde (la droite tracée entre les points d'abscisse a et b) et passant par l'approximation précédente c_k.

Déterminer la relation qui permet de calculer c_{k+1} en fonction de c_k.

Corrigé de la fiche de TD N°1

NB : La durée d'une séance de TD est insuffisante pour effectuer le détail des calculs, alors le calcul sur 2ou 3 itérations est suffisant pour que l'étudiant saisisse la méthode, on donnera ensuite le reste des itérations.

Exercice 1 :

1- Existence et unicité de la solution : la fonction est définie sur l'intervalle $]0 \quad \infty[$. Elle est continue étant donné qu'elle est la somme des 2 fonctions continues sur le domaine de définition.
La dérivée $f'(x) = 1 + \frac{2}{x} > 0$, donc la fonction est croissante strictement, et comme $f(0{,}5) \times f(1) < 0$, alors $f(x)$=0 n'a qu'une solution x^* et que $x^* \in]0{,}5 \quad 1[$

2- Le nombre n d'itérations nécessaire pour avoir une approximation de la solution à ε prés est : $n \geq \frac{Log\left(\frac{b-a}{\varepsilon}\right)}{Log(2)}$
On désir approximer la solution avec trois chiffres significatifs exacts, alors $\varepsilon \leq 10^{-4}$
Ce qui donne $n \geq 12{,}28$ alors $n = 13$

3- Résultats de calcul des 9 itérations :

n	a_n	b_n	x_n	$\lvert a_n - b_n \rvert$
1	0,500000	1,000000	0,750000	0,250000
2	0,500000	0,750000	0,625000	0,125000
3	0,625000	0,750000	0,687500	0,062500
4	0,687500	0,750000	0,718750	0,031250
5	0,687500	0,718750	0,703125	0,015625
6	0,703125	0,718750	0,710937	0,007812
7	0,703125	0,710937	0,707031	0,003906
8	0,703125	0,707031	0,705078	0,001953
9	0,703125	0,705078	0,704102	0,0009766
10	0,704102	0,705078	0,703613	0,0004883
11	0,703613	0,705078	0,703369	0,0002441
12	0,703613	0,703369	0,703491	0,000122
13	0,703491	0,703369	0,703430	0,000061

4- Application de la méthode de Régula-Falsi :

n	a_n	b_n	x_n	$\lvert x_n - x_{n-1} \rvert$
1	0,500000	1,000000	0,734930	
2	0,500000	0,734930	0,707127	0,027803
3	0,500000	0,707127	0,703898	0,003229
4	0,500000	0,703898	0,703518	0,000379
5	0,500000	0,703518	0,703473	0,000045

5- Nous voyons que la méthode de Régula-Falsi est plus rapide que la bipartition pour cette équation, mais ce n'est pas une règle générale, cela dépend de la morphologie de la fonction.

Exercice N°2 :

1- D'une part la fonction est définie, continue et strictement monotone sur R, d'autre part, il se trouve que $f(0) \times f(1) < 0$. Alors la solution de cette équation $x^* \in]0 \quad 1[$

2- Il existe plusieurs façons pour réécrire l'équation $f(x) = 0$ sous la forme $x = g(x)$, les plus simples à trouver seront :

- $x = 2 - e^x = g_1(x)$
- $x = \log(2 - x) = g_2(x)$

Le premier algorithme est divergent car : $|g_1(x)| = e^x \geq 1 \; pour \; tout \; x \in [0 \quad 1]$

Par contre le second algorithme est convergent car :

$$|g'_2(x)| = \frac{1}{2-x} \leq 1 \; pour \; tout \; x \in [0 \quad 1]$$

- Nous utiliserons donc l'algorithme $x = \log(2 - x) = g_2(x)$ qu'on utilisera pour approximer la solution de l'équation.

3- En partant de la valeur initiale $x_0 = 0$, le calcul de la solution est :

N	x_n	$\lvert x_n - x_{n-1}\rvert$
0	0	
1	0,693147	0,693147
2	0,267622	0,425525
3	0,549495	0,281873
4	0,371912	0,177583
5	0,487407	0,115492
6	0,413826	0,073581

	x_n	$\lvert x_n - x_{n-1}\rvert$
7	0,461325	0,047499
8	0,430922	0,030403
9	0,450488	0,019566
10	0,437940	0,012548
….	…..	….
15	0,443391	0,001371
16	0,442510	0,000881

Il a fallu 16 itérations pour trouver une solution approchée à 10^{-3} prés. L'algorithme est sensiblement lent. On voit bien que la solution approchée est exacte à décimales

4- Pour accélérer l'algorithme précédent, nous allons changer la fonction $g_2(x)$ par la fonction $G(x) = \frac{g_2(x)+\lambda\, x}{1+\lambda} \quad où \quad \lambda = -g'_2(x)$

Partant de $x_0 = 0$, les itérations de calcul seront :

N	x_n	$\lvert x_n - x_{n-1}\rvert$
0	0	
1	0,46209812037	0,46209812037
2	0,44290144892	0,01919667145
3	0,4428544012	0,00004704704
4	0,4428544010	$2,78 \,.\, 10^{-10}$

On voit bien qu'à la troisième itération, on atteint une précision <0,5 10^{-4}

A la 4ème itération, la solution approchée est exacte à 9 décimales : $x = 0,442854401$

5- La méthode de Newton-Raphson donne la récurrence

$$x_{n+1} = x_n - \frac{e^{x_n}+x_n-2}{e^{x_n}+1}$$

Partant de $x_0 = 0$ les itérations donnent les résultats :

n	x_n	$\lvert x_n - x_{n-1}\rvert$
0	0	
1	0,5	0,5
2	0.443851671995364	0.0561483280046
3	0.442854703829747	0.9969681656168
4	0.442854401002417	$3.028 \;\; 10^{-7}$

Exercice N°3 :

Méthode de Newton :

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^2 - A}{2x_n} = \frac{x_n^2 + A}{2x_n} = \frac{x_n}{2} + \frac{A}{2x_n} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{A}{x_n}\right)$$

Méthode des approximations successives accélérée :

$$f(x) = x^2 - A = 0$$

$$x - f(x) = x$$

$$x = -x^2 + x + A = g(x)$$

$$l = -g'(x)$$

$$l = 2x - 1$$

L'algorithme accéléré est :

$$x_{n+1} = \frac{-x_n^2 + x_n + A + 2x_n^2 - x_n}{1 + 2x_n - 1}$$

$$x_{n+1} = \frac{x_n^2 + A}{2x_n} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{A}{x_n}\right)$$

Les deux méthodes aboutissent donc au même algorithme.

Application numérique :

A=9 et $x_0 = 2$

Les itérations de calcul seront :

N	x_n	$\lvert x_n - x_{n-1} \rvert$
0	2	
1	3,250000000000000	1.250000000000000
2	3,009615384615385	0,240384615384615
3	3,000015360039322	0,009600024576063
4	3,000000000039321	0,000015360000000

Connaissant la solution exacte, la précision du calcul est de 10 chiffres après la virgule

Exercice N°4 :

On recherche d'abord l'équation de la première corde :

L'équation d'une droite est : $y = p \times x + q$

Pour $x = a$; $y = f(a) = p \times a + q$

Pour $x = b$; $y = f(b) = p \times b + q \quad \Rightarrow p = \frac{f(a)-f(b)}{a-b}$

Comme $y = f(a) = p \times a + q = \frac{f(a)-f(b)}{a-b} \times a + q \;\Rightarrow q = \frac{bf(a)-af(b)}{b-a}$

Donc la première corde Δ a pour équation : $y = \frac{f(a)-f(b)}{a-b} \times x + \frac{bf(a)-af(b)}{b-a}$

La première approximation de la racine donne : $c_1 = \frac{f(a)-f(b)}{a-b}$

- Il est clair que toutes les droites parallèles à la droite Δ ont la même pente, elles s'écrivent alors : $y = \frac{f(a)-f(b)}{a-b} \times x + q'$
- A l'itération k, nous aurons calculé l'approximation c_k , on peut alors détermine le paramètre q' de l'équation de la droite parallèle à Δ et passant par c_k :

$$f(c_k) = \frac{f(a)-f(b)}{a-b} \times c_k + q' \Rightarrow q' = f(c_k) - \frac{f(a)-f(b)}{a-b} \times c_k$$

Alors l'équation de cette droite est : $y = \frac{f(a)-f(b)}{a-b} \times x + f(c_k) - \frac{f(a)-f(b)}{a-b} \times c_k$

L'intersection de cette droite avec l'axe des abscisses donne la nouvelle approximation :

$$\boxed{c_{k+1} = c_k - \frac{a-b}{f(a)-f(b)} \times f(c_k)}$$

C'est l'algorithme de la méthode de Regula-Falsi modifiée.

Il est beaucoup plus rapide que la méthode classique.

Application de la méthode à l'équation de l'exercice N°1:

N	a_n	b_n	x_n	$\lvert x_n - x_{n-1} \rvert$
1	0,500000	1,000000	0,734930	
2	0,500000	0,734930	0,703395	0,031535
3	0,500000	0,703395	0,703469	0,000074

On voit que le calcul se fait en moins d'itérations et avec une précision meilleure.