Méthodes Numériques

Fiche de TD N°4 : Intégration numérique des fonctions et intégration des équations différentielles ordinaires

Exercice N°1

Soit f la fonction définie par le tableau :

x_i	-3	-2	-1	0	1	2	3
$f(x_i)$	42	17	4	3	8	61	106

Calculer l'intégrale

$$I = \int_{-3}^{3} f(x)\, dx$$

- Par la méthode du trapèze généralisée
- Par la méthode de Simpson généralisée

Exercice N°2

Soit l'intégrale suivante : $I = \int_0^{0.02} \frac{1}{\sqrt{2x+1}} dx$

1- Déterminer le nombre de sous intervalles nécessaires pour obtenir une approximation à 10^{-7}prés de l'intégrale I par la méthode du trapèze généralisée.

2- Calculer alors *I*.

Exercice N°3

Soit l'équation différentielle $y' = \frac{y}{1+x^2}$ $avec$ $y(0) = 1$ et $x \in [0 \quad 0{,}4]$.

Résoudre cette équation avec un pas d'intégration $h = 0{,}2$ en utilisant :

- La méthode d'Euler
- La méthode d'Euler modifiée
- La méthode de Range Kutta d'ordre 4 (RK4)

Calculer la solution exacte de l'équation et comparer avec les approximations précédentes, quel est votre commentaire.

Corrigé de la fiche de TD N°4

Exercice N°1 :

- Méthode du trapèze

$$I_T = \frac{1}{2} \times [f(-3) + f(3) + 2 \times (f(-2) + f(-1) + f(0) + f(1) + f(2))] = 167$$

- Méthode de Simpson

$$I_S = \frac{1}{3} \times \left[f(-3) + f(3) + 4 \times \left(f(-2) + f(0) + f(2)\right) + 2 \times (f(-1) + f(1))\right] = 165{,}333$$

Exercice N°2 :

1- L'erreur d'intégration par la méthode du trapèze $E_T \leq M_2 \times \frac{(b-a)^3}{12n^2} \leq \varepsilon$

Alors $n \geq \sqrt{M_2 \times \frac{(b-a)^3}{12\varepsilon}}$; on trouve alors $n = 5 \Rightarrow h = 0{,}004$

2- L'intégrale du trapèze serait alors

$$I_T = \frac{0{,}004}{2} \times [f(0) + f(0{,}02) + 2 \times (f(0{,}004) + f(0{,}008) + f(0{,}012) + f(0{,}016))]$$
$$= 0.01980398$$

On calcule la valeur exacte de cette intégrale :

$$\int \frac{1}{\sqrt{2x+1}} dx = \sqrt{2x+1} + c$$

Alors l'intégrale définie est :

$$I = \int_0^{0.02} \frac{1}{\sqrt{2x+1}} dx = \left(\sqrt{2 \times 0{,}02 + 1} - \sqrt{2 \times 0 + 1}\right) = 0{,}01980390$$

Et l'on voit bien que $|I - I_T| \leq 10^{-7}$

Exercice N°3 :

- Méthode d'Euler : $y_{i+1} = y_i + hf(x_i, y_i)$
  $y_1 = y_0 + 0{,}2f(x_0, y_0) = 1{,}200000$
  $y_2 = y_1 + 0{,}2f(x_1, y_1) = 1{,}430769 = y(0{,}4)$

- Méthode d'Euler modifiée $y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2}[\,f(x_i, y_i) + f\left(x_{i+1}, y_i + hf(x_i, y_i)\right)]$
  $y_1 = y_0 + \frac{h}{2}[\,f(x_0, y_0) + f\left(x_1, y_0 + hf(x_0, y_0)\right)]$= 1,215384615384616
  $y_2 = y_1 + \frac{h}{2}[\,f(x_1, y_1) + f\left(x_2, y_1 + hf(x_1, y_1)\right)]$= 1,457172005713120

- Méthode de Range Kutta d'ordre 4
  - $x_0 = 0, \quad y_0 = 1$
    $k_1 = f(x_0, y_0) = 1$
    $$k_2 = f\left(x_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{h}{2} * k_1\right) = 1{,}089108910891089$$
    $$k_3 = f\left(x_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{h}{2} * k_2\right) = 1{,}097931575335752$$

$k_4 = f(x_0 + h, y_0 + hk_3) = 1{,}172679149103029$

$y_1 = y_0 + \frac{h}{6} * (k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_2) = 1{,}218225337385224$

- $x_1 = 0{,}2$, $y_1 = 1{,}218225337385224$

  $k_1 = f(x_1, y_1) = 1{,}171370516716561$

  $k_2 = f\left(x_1 + \frac{h}{2}, y_1 + \frac{h}{2} * k_1\right) = 1{,}225103109226495$

  $k_3 = f\left(x_1 + \frac{h}{2}, y_1 + \frac{h}{2} * k_2\right) = 1{,}230032704869608$

  $k_4 = f(x_1 + h, y_1 + hk_3) = 1{,}262268860654435$

  $y_2 = y_1 + \frac{h}{6} * (k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_2) = 1{,}463022370903997$

La solution exacte :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{1+x^2} \Rightarrow \frac{dy}{y} = \frac{dx}{1+x^2} \Rightarrow \int \frac{dy}{y} = \int \frac{dx}{1+x^2} \Rightarrow \log(y) = \arctan(x) + c$$

Donc $y = C \times e^{\arctan(x)}$

Pour déduire la solution générale de cette équation, on pose $C = C(t)$ et on remplace dans l'équation différentielle :

$$y' = C'e^{\arctan(x)} + C\frac{e^{\arctan(x)}}{1+x^2} = C\frac{e^{\arctan(x)}}{1+x^2} \Rightarrow C'e^{\arctan(x)} = 0 \Rightarrow C' = 0 \Rightarrow C = cste$$

Alors la condition initiale déterminera la valeur de C

$$y(0) = Ce^{\arctan(0)} = C = 1$$

Donc la solution de l'équation est $y(x) = e^{\arctan(x)} \Rightarrow y(0{,}4) = 1{,}463025244391611$

Et l'on voit bien que RK4 est de loin la méthode qui donne l'approximation la plus proche de la valeur exacte.