Module :Logique Combinatoire et Séquentielle

TD2 : Algèbre de Boole – Simplification des fonctions logiques (3 séances)

<u>Exercice 1</u>Simplification Algébrique

a. Montrer que :

- $\bar{a}\bar{c} + a\bar{c} + bc = (\bar{a} + a)\bar{c} + bc = \bar{c} + bc = (\bar{c} + b)(\bar{c} + c) = \boxed{b + \bar{c}}$

- $ax + b\bar{x} + ab = ax + b\bar{x} + ab(x + \bar{x})$
  $= ax + abx + b\bar{x} + ab\bar{x}$
  $= ax(1 + b) + b\bar{x}(1 + a) = \boxed{ax + b\bar{x}}$

- $(a + x)(b + \bar{x})(a + b) = (a + x)(b + \bar{x})(a + b + x\bar{x})$
  $= (a + x)(b + \bar{x})(a + b + x)(a + b + \bar{x})$
  $= (a + x)(1 + b)(b + \bar{x})(1 + a)$
  $= \boxed{(a + x)(b + \bar{x})}$

b. Simplifier les expressions logiques suivantes

- $(a + \bar{b}).\bar{a}b = a\bar{a}b + \bar{b}\bar{a}b = \boxed{0}$
- $a\bar{b}c + bc + a\bar{c} = (a\bar{b} + b)c + a\bar{c} = (a + b)(b + \bar{b})c + a\bar{c} = ac + bc + a\bar{c} = \boxed{a + bc}$
- $xy + \bar{y}z + xz + xyz = xyz + xy\bar{z} + x\bar{y}z + \bar{x}\bar{y}z + xyz + x\bar{y}z + xyz$
  $= xyz + xy\bar{z} + x\bar{y}z + \bar{x}\bar{y}z$
  $= \boxed{xy + \bar{y}z}$
- $(a.b.(c + \overline{b.d}) + \overline{ab.}).c.d = (ab(c + \bar{b} + \bar{d}) + \bar{a} + \bar{b})cd$
  $= (abc + ab\bar{b} + ab\bar{d} + \bar{a} + \bar{b})cd$
  $= (abcd + ab\bar{d}cd + \bar{a}cd + \bar{b}cd)$
  $= (ab + \bar{a} + \bar{b})cd$
  $= (b + \bar{a} + \bar{b})cd = \boxed{cd}$

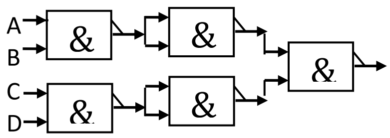
- $\bar{a}.\bar{b} + \overline{a + b + c + d} = \bar{a}.\bar{b} + \bar{a}\bar{b}\bar{c}\bar{d} = \bar{a}.\bar{b}(1 + \bar{c}\bar{d}) = \boxed{\bar{a}.\bar{b}}$

<u>Exercice 2</u>Représentation et matérialisation des fonctions logiques

a. Montrer que *NAND* et *NOR* sont des opérateurs complets. Puis donner le schéma logique du NAND à 4 entrées et du NOR à 4 entrées conçues àpartir des NAND et des NOR à 2 entrées.

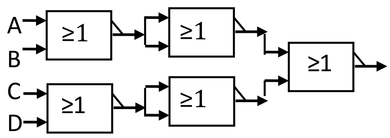
Pour cela on montre que la fonction ***NAND*** permet d'exprimer tous les opérateurs logiques de base.

- <u>Non :</u> $NAND(A,A) = \overline{A.A} = \bar{A}$
- <u>ET :</u> $NAND(NAND(A,B)) = \overline{\overline{A.B}} = A.B$
- <u>OU :</u> $NAND(NAND(A,A), NAND(B,B)) = \overline{\bar{A}.\bar{B}} = A + B$
- $NAND(A,B,C,D) = \overline{A.B.C.D} = \overline{\overline{\overline{A.B}}.\overline{\overline{C.D}}}$



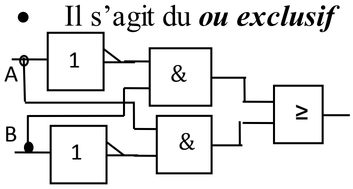
De même on montre que la fonction ***NOR*** permet d'exprimer tous les opérateurs logiques de base.

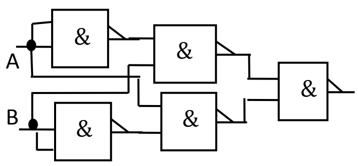
- <u>Non :</u> $NOR(A,A) = \overline{A + A} = \bar{A}$
- <u>ET :</u> $NOR(NOR(A,A), NOR(B,B)) = \overline{\bar{A} + \bar{B}} = A.B$
- <u>OU :</u> $NOR(NOR(A,B)) = \overline{\overline{A + B}} = A + B$
- $NOR(A,B,C,D) = \overline{A + B + C + D} = \overline{\overline{\overline{A + B}} + \overline{\overline{C + D}}}$



b. A partir du chronogramme ci-contre

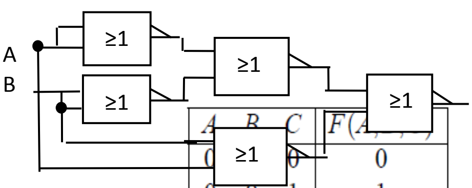
- $S = A.\bar{B} + \bar{A}.B = A \oplus B$
- Il s'agit du ***ou exclusif***





- $\bar{S} = \overline{A \oplus B} = \overline{A.\bar{B} + \bar{A}.B} = XNOR$: *fonction identité*

c. A partir de la table de vérité ci-contre



A	B	C	F(A, ,)
0	[illegible]	0	0
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	0

- Première forme canonique (Somme de produits) :

$$F(A,B,C) = \overline{A}\overline{B}C + \overline{A}B\overline{C} + A\overline{B}\overline{C} + A\overline{B}C + AB\overline{C}$$

Forme décimale: $\sum(1,2,4,5,6)$

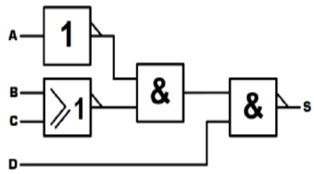
- deuxième forme canonique (produit de sommes) :

$$F(A,B,C) = (A+B+C)(A+\bar{B}+\bar{C}).(\bar{A}+\bar{B}+\bar{C}).$$

- $F(A,B,C) = \left(\overline{A}\overline{B}C + A\overline{B}C\right) + \left(A\overline{B}\overline{C} + AB\overline{C}\right) + \left(\overline{A}B\overline{C} + AB\overline{C}\right)$

$$\underline{= \bar{B}C + A\bar{C} + B\bar{C}}$$

d. A partir du logigramme ci-contre :



- « La sortie S vaut forcément ***1*** lorsque D vaut **0** quel que soit l'état des entrées »
- $S(A,B,C;D) = \overline{D.\bar{A}(\overline{B+C})} = \overline{D.\bar{A}.\bar{B}.\bar{C}}$
- table de vérité de S.

A	B	C	D	S
0	0	0	0	1
0	0	0	1	0
0	0	1	0	1
0	0	1	1	1
0	1	0	0	1
0	1	0	1	1
0	1	1	0	1
0	1	1	1	1
1	0	0	0	1
1	0	0	1	1
1	0	1	0	1
1	0	1	1	1
1	1	0	0	1
1	1	0	1	1
1	1	1	0	1
1	1	1	1	1

<u>Exercice 03</u>Simplification par les tables de Karnaugh $(\boldsymbol{T.K})$

A	B	C	S
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

a. Donner la table de Karnaugh qui correspond à la table de vérité ci-contre, puis utiliser la $(T.K)$ pour simplifier la fonction S

AB/C	00	01	11	10
0	0	1	1	1
1	1	0	1	1

$$S(A,B,C) = A + \bar{B}C + B\bar{C}$$

b. Pour chacune des fonctions logiques suivantes, établir la $(T.K)$, puis simplifier l'expression.

- $f(a,b,c) = a\bar{c} + a\bar{b} + abc + \bar{a}\bar{b}\bar{c}$
- $f(a,b,c,d) = \bar{a}\bar{b} + a\bar{b} + \bar{c}\bar{d} + c\bar{d}$
- $f(a,b,c,d) = \bar{a}b\bar{c} + \bar{a}\bar{c}d + \bar{a}\bar{b}\bar{d} + ac + bc\bar{d}$
- $f(a,b,c,d) = (a+b).(b+\bar{c}).(a+d)$

AB/C	00	01	11	10
0	1	0	1	1
1	0	0	1	1

$$f(a,b,c) = a\bar{c} + a\bar{b} + abc + \bar{a}\bar{b}\bar{c} = a + \bar{b}\bar{c}$$

ab cd	00	01	11	10

00	1	1	1	1
01	1	0	0	1
11	1	0	0	1
10	1	1	1	1

$$f(a,b,c,d) = \bar{a}\bar{b} + a\bar{b} + \bar{c}\bar{d} + c\bar{d} = \bar{b} + \bar{d}$$

ab cd	00	01	11	10
00	1	1	0	0
01	1	1	0	0
11	0	0	1	1
10	1	1	1	1

$$f(a,b,c,d) = \bar{a}b\bar{c} + \bar{a}\bar{c}d + \bar{a}\bar{b}\bar{d} + ac + bc\bar{d} = \bar{a}\bar{c} + ac + c\bar{d}$$

ab cd	00	01	11	10
00	0	0	1	1
01	0	1	1	1
11	0	1	1	0
10	0	0	1	0

$$f(a,b,c,d) = (a+b).(b+\bar{c}).(a+d) = ab + bd + a\bar{c}$$

c. $h(a,b,c,d,e) = \bar{a}\bar{b}\bar{e} + \bar{a}\bar{c}\bar{e} + \bar{a}bce + a\bar{c}\bar{e} + ace = \sum(0,2,4,6,8,10,13,15,16,18,21,23,24,26,29,31)$

abc de	000	001	011	010	110	111	101	100
00	1	1	0	1	1	0	0	1
01	0	0	1	0	0	1	1	0
11	0	0	1	0	0	1	1	0
10	1	1	0	1	1	0	0	1

$$h(a,b,c,d,e) = \bar{c}\bar{e} + ace + bce + \bar{a}\bar{b}\bar{e}$$

d. $f(a,b,c,d) = \sum(0,1,5,7,8,14,15) + \emptyset(2,10)$,

ab cd	00	01	11	10
00	1	0	0	1
01	1	1	0	0
11	0	1	1	0
10	X	0	1	X

Forme minimale disjonctive $f(a,b,c,d) = \bar{b}\bar{d} + \bar{a}\bar{c}d + bcd + ac\bar{d}$

Forme minimale conjonctive :

$$f(a,b,c,d) = (b+\bar{c})(\bar{b}+c+d)(\bar{a}+c+\bar{d})(a+\bar{c}+d)$$

Exercice 4 :

	v	w	x	y	z
A	x		x		
B	x			x	
C		x		x	
D			x		x
E	x				x

La porte sera ouverte si : $f = v.w.x.y.z = 1 avec\ v = A+B+E; w = C; x = A + D; y = B + C\ ; et\ z = D + E$

$$f(A,B,C,D,E) = (A+B+E)C(A+D)(B+C)(D+E) = \overline{\bar{A}\bar{B}\bar{E} + \bar{C} + \bar{A}\,\bar{D} + \bar{B}\bar{C} + \bar{D}\bar{E}}$$

ABC DE	000	001	011	010	110	111	101	100
00	0	0	0	0	0	0	0	0
01	0	0	0	0	0	1	1	0
11	0	1	1	0	0	1	1	0
10	0	0	1	0	0	1	1	0

$$f(A,B,C,D,E) = ACE + ACD + BCD + CDE$$

a. Les personnes qui peuvent ouvrir la porte :{ $\boldsymbol{ACE}$, $\boldsymbol{ACD}$, $\boldsymbol{BCD}$, $\boldsymbol{CDE}$}

b. Nombre minimal des personnes nécessaires pour ouvrir la porte : ***3***

c. La personne sans laquelle la porte ne peut etre ouverte : ***C***