Chap III : Interpolation Polynômiale

III-1 : Définition : Etant donnée une fonction $f(x)$ connue pour un certain nombre de points : $a \leq x_0 < x_1 \leq x_2 < x_3 < \dots < x_n \leq$ l'expression analytique de $f(x)$ n'étant pas connue, on se propose d'approximer cette fonction avec un polynôme $P_n(x)$ de degré $\leq n$ passant par les points x_i c-à-d que $\forall x_i : P_n(x_i) = f(x_i)$

Si on arrive à retrouver ce polynôme, on aurait alors réalisé une interpolation polynômiale.

On se pose alors la question de l'existance, puis, de l'unicité de ce polynôme ?.

Si $P_n(x)$ existe, alors $P_n(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \dots + a_{n-1} x + \dots$

En remplaçant x par les $\neq x_i$

$$\begin{cases} a_0 x_0^n + a_1 x_0^{n-1} + \dots + a_n = P_n(x_0) = y_0 \\ a_0 x_1^n + a_1 x_1^{n-1} + \dots + a_n = P_n(x_1) = y_1 \\ \vdots \\ a_0 x_n^n + a_1 x_n^{n-1} + \dots + a_n = P_n(x_n) = y_n \end{cases}$$

la resolution de ce système, s'il est bien sur cramerien.

la matrice du systèm est appelée matrice de Vander Monde

$$V = \begin{bmatrix} x_0^n & x_0^{n-1} & \dots & x_0 & 1 \\ x_1^n & x_1^{n-1} & \dots & x_1 & 1 \\ \vdots & & & \vdots & \vdots \\ x_n^n & x_n^{n-1} & \dots & x_n & 1 \end{bmatrix}$$

et le determinant de cette matrice est $\det V = \prod_{\substack{j=0 \\ j<i}}^{n} (x_i - x_j)$

comme les x_i sont differents 2 à 2, alors $(x_i - x_j) \neq 0$

donc $\det(V) \neq 0 \Rightarrow$ On a une seule solution,

le polynôme $P_n(x)$ existe et il est unique.

Important ! la recherche des coefficients a_i du polynôme ne passe pas par la resolution du système précédent parceque la matrice V est mal conditionnée : les puissances des x_i donne des differences enormes entre les éléments de la matrice.

On va donc présenter des méthodes alternatives simplifi[ant] le calcul de $P_n(x)$, ces méthodes ont toute pour principe le changement de base. On n'utilisera plus la base canonique $(1, x, x^2, \dots, x^n)$, mais d'autres bases.

II-1 Méthode de Lagrange.

La base de Lagrange dans l'espace vectoriel des polynômes de degré $\leq n$, est définie comme suit :

$$L_i(x_j) = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \quad \dots ① \\ 0 & \text{si } i \neq j \quad \dots ② \end{cases}$$

$② \Rightarrow L_i(x) = K \cdot (x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{i-1}) \cdot (x - x_{i+1}) \dots (x - x_n)$

car tout $x_j \neq x_i$ est une racine de $L_i(x) = 0$

$① \Rightarrow L_i(x_i) = K(x_i - x_0)(x_i - x_1) \dots (x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1}) \dots (x_i - x_n)$

$= 1 \Rightarrow K = \dfrac{1}{(x_i - x_0) \dots (x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1}) \dots (x_i - x_n)}$

Alors $\boxed{L_i(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{n} \dfrac{x - x_j}{x_i - x_j} \; : i = 0 \dots n}$ Ce sont les polynômes de Lagrange.

Ceci fait, quel est alors le polynôme d'interp $P_n(x)$

du fait que les $L_i(x_i) = 1$, on peut écrire

$$P_n(x) = y_0 L_0(x) + y_1 L_1(x) + \dots + y_n L_n(x) = \sum y_i$$

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i \, L_i(x)$$

Exple : Construire le polynôme $P_2(x)$ qui interpole la fonction $f(x) = \sin(\pi \cdot x)$ pour les 3 points $x_0 = 0$, $x_1 = \frac{1}{6}$ et $x_2 = \frac{1}{2}$.

Réponse : les ordonnées des points d'abscisse 0, $\frac{1}{6}$ et $\frac{1}{2}$ sont $y_0 = f(x_0) = 0$, $y_1 = f(x_1) = \frac{1}{2}$ et $y_2 = f(x_2) = 1$.

On calcule les polynômes de Lagrange

$* \; L_0(x) = \dfrac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} = \dfrac{(x - \frac{1}{6})(x - \frac{1}{2})}{-\frac{1}{6} \times -\frac{1}{2}} = 12x^2 - 8x + 1$

$* \; L_1(x) = \dfrac{(x - x_0)(x - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} = \dfrac{(x - 0)(x - \frac{1}{2})}{\frac{1}{6} \times -\frac{1}{3}} = -18x^2 + 9x$

* $L_2(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)} = \frac{(x-0)(x-\frac{1}{6})}{\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}} = 6x^2 - x.$

alors $P_2(x) = 0 \times L_0(x) + \frac{1}{2} \cdot L_1(x) + 1 \times L_2(x) = \underline{-3x^2 + \frac{7}{2}x}.$

III-3 Méthode de Newton

On appelle ainsi cette méth par rapport à la base de Newton

$$N = \begin{cases} 1 \\ x - x_0 \\ (x-x_0)(x-x_1) \\ (x-x_0)(x-x_1)(x-x_2) \\ \vdots \\ (x-x_0)\times(x-x_1), \dots, (x-x_{n-2})\times(x-x_{n-1}). \end{cases}$$

le polynôme d'interpolation $P_n(x)$ s'ecrirait alors

$P_n(x) = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)(x-x_1) + \dots + a_n(x-x_0)\cdots(x-x_{n-1})$

alors quelles sont les valeurs des a_i ?

avant de proceder au calcul de ces coefficients on va définir les <u>difference divisées</u> :

* la difference divisée d'ordre 0 de x_i : $f[x_i] = f(x_i) = y_i$
* la difference divisée d'ordre 1 : $f[x_i, x_{i+1}] = \frac{f[x_{i+1}] - f[x_i]}{x_{i+1} - x_i}$
* " " " 2 : ~~$f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}] = f[x_{i+1}, x_{i+2}] - f[x$~~

$$f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}] = \frac{f[x_{i+1}, x_{i+2}] - f[x_i, x_{i+1}]}{x_{i+2} - x_i}$$

$\vdots$

* la difference divisée d'ordre k de x_i :

$$f[x_i, x_{i+1}, \dots, x_{i+k}] = \frac{f[x_{i+1}, \dots, x_{i+k}] - f[x_i, \dots, x_{i+k-1}]}{x_{i+k} - x_i}$$

alors :

* $P_n(x_0) = a_0 = f[x_0]$
* $P_n(x_1) = a_0 + a_1(x_1 - x_0) = f[x_0] + a_1(x_1 - x_0) = f[x_1]$

$$a_1 = \frac{f[x_1] - f[x_0]}{x_1 - x_0} = f[x_0, x_1].$$

et ainsi de suite, on demontre que les coefficients

$$a_i = f[x_0, x_1, \dots, x_i].$$

Exple : On va recalculer le polynôme $P_2(x)$ interpolant la fonction $f(x) = \sin \pi x$ pour $x_0 = 0$, $x_1 = \frac{1}{6}$ et $x_2 = \frac{1}{2}$

Réponse : On calcul d'abord la pyramide de différence divisé

x_i	$f[x_i]$	$f[x_i,x_{i+1}]$	$f[x_0,x_1,x_2]$
0	$\boxed{0}$		
		$\frac{1/2-0}{1/6-0}=\boxed{3}$	
$1/6$	$1/2$		$\frac{3/2-3}{1/2-0}=\boxed{-3}$
		$\frac{1-1/2}{1/2-1/6}=3/2$	
$1/2$	1		

alors le polynôme d'interpolation $P_2(x)$ est

$$P_2(x)=0+3(x-0)-3(x-0)(x-\tfrac{1}{6})$$
$$=3x-3(x^2-\tfrac{1}{6}x)=-3x^2+\tfrac{7}{2}x.$$

On a retrouvé exactement le même polynôme car on a déjà montré que le polynôme est unique.

III-4 Cas des points équidistants :

Si les points de collocation (appui) sont repartis de manière homogène (la différence entre deux abcisses successives est constante), alors on pourra définir le polynôme de Newton en introduisant une autre entité mathématique appelée "différence finie"

les points sont équidistants $\Rightarrow \forall i : x_i - x_{i-1} = h = cste$

On définie les différences finies Δ :

* la différence finie d'ordre 0 de y_i : $\Delta^0 y_i = y_i = f(x_i)$
* la différence finie d'ordre 1 de y_i : $\Delta y_i = \Delta^0 y_{i+1} - \Delta^0 y_i$
* la différence finie d'ordre 2 de y_i : $\Delta^2 y_i = \Delta y_{i+1} - \Delta y_i$
* la différence finie d'ordre k de y_i : $\Delta^k y_i = \Delta^{k-1} y_{i+1} - \Delta^{k-1} y_i$

On peut établir aisement la relation entre les différences divisées et les différences finies :

* $f[x_i] = y_i = \Delta^0 y_i$
* $f[x_i,x_{i+1}] = \dfrac{f[x_{i+1}]-f[x_i]}{x_{i+1}-x_i} = \dfrac{\Delta^0 y_{i+1}-\Delta^0 y_i}{h} = \dfrac{\Delta y_i}{h}$
* $f[x_i,x_{i+1},x_{i+2}] = \dfrac{f[x_{i+1},x_{i+2}]-f[x_i,x_{i+1}]}{x_{i+2}-x_i} = \dfrac{\Delta y_{i+1}-\Delta y_i}{2h^2} = \dfrac{\Delta^2 y_i}{2h^2}.$

* $f[x_i,\dots,x_{i+3}] = \dfrac{f[x_{i+1},\dots,x_{i+3}] - f[x_i,\dots,x_{i+2}]}{x_{i+3} - x_i} = \dfrac{\Delta^2 y_{i+1}/2h^2 - \Delta^2 y_i/2h^2}{3h} = \dfrac{\Delta^3 y_i}{3!\,h^3}$

alors on peut établir que $\boxed{f[x_i,\dots,x_{i+k}] = \dfrac{\Delta^k y_i}{k!\,h^k}}$

Dans ces conditions, le polynôme de Newton devient :

$$P_n(x) = \Delta^0 y_0 + \frac{\Delta y_0}{h}(x-x_0) + \frac{\Delta^2 y_0}{2h^2}(x-x_0)(x-x_1) + \cdots + \frac{\Delta^n y_0}{n!\,h^n}(x-x_0)\cdots(x-x_{n-1})$$

Exple : Etant donné la fonction $f(x)$ definie selon le tableau

x_i	0	1	2
y_i	6	6	10

Determiner le polynôme d'interpolation de f en utilisant les differences divisées.

Reponse :

* On calcule la pyramide des differences divisées

$\Delta^0 y_i$	Δy_i	$\Delta^2 y_0$
$\boxed{6}$		
	$6-6=\boxed{0}$	
6		$4-0=\boxed{4}$
	$10-6=4$	
10		

la valeur de h (le pas d'interpolation) $h = 1$

* alors $P_2(x) = \Delta^0 y_0 + \dfrac{\Delta y_0}{1}(x-x_0) + \dfrac{\Delta^2 y_0}{2}(x-x_0)(x-x_1)$

$$= 6 + \frac{0}{1}(x) + \frac{4}{2}(x)(x-1) = 2x^2 - 2x + 6$$

III-5 : Erreur d'interpolation :

Il est clair que le polynôme d'interpolation n'est qu'une approximation de la fonction f, ce qui entraine l'existance d'une erreur $e(x) = P_n(x) - f(x)$

Théorème : On suppose que $f \in C^{n+1}([a\ b])$: c-à-d qu'elle est $(n+1)$ fois dérivable sur l'intervale $[a\ b]$, alors

$$\forall x \in [a\ b],\ \exists\ \xi \in [a\ b] \ /\ f(x) - P_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \cdot \prod_{i=0}^{n}(x-x_i)$$

ce théorème ne fait finalement qu'appel à une interpolation sur $n+2$ points : $x_0,\dots,x_n, x_{n+1}$ et ξ annule l'erreur.

Si $M_{n+1} = \max_{[a\ b]} |f^{(n+1)}(x)|$

alors $e(x) = P_n(x) - f(x) \leq \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} \cdot \prod_{i=0}^{n} (x - x_i)$

donc l'erreur d'interpolation E_i sera

$$\boxed{|E_i(x)| \leq \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} \cdot \left|\prod_{i=0}^{n} (x - x_i)\right|}$$

Exple : La fonction $f(x)$ définie par

x_i	100	121	144
y_i	10	11	12.

si l'on sait qu'en réalité cette fonction n'est autre que $f(x) = \sqrt{x}$, quelle est alors l'erreur commise lors de l'interpolation de la fonction à $x = 115$

Réponse : On calcule la dérivée d'ordre 3 de $f(x)$.

$f(x) = \sqrt{x} = x^{1/2} \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{2} x^{-1/2} \Rightarrow f''(x) = -\frac{1}{4} x^{-3/2}$

$\Rightarrow f'''(x) = \frac{3}{8} x^{-\frac{5}{2}} = \frac{3}{8} \cdot \frac{1}{\sqrt{x^5}} \Rightarrow M_3 = \frac{3}{8} \times \frac{1}{\sqrt{100^5}} = \frac{3}{8} \cdot 10^{-5}.$

donc $E_i \leq \frac{3/8 \cdot 10^{-5}}{3!} |(115-100)(115-121)(115-144)|$

$E_i \leq 1{,}63 \cdot 10^{-3}$

Vérifions maintenant que le calcul est juste !!

On calcule $P_2(115) = f[x_0] + f[x_0, x_1](115-100) + f[x_0, x_1, x_2](115-100)(115-1$

x_i	$f[x_i]$	$f[x_i, x_{i+1}]$	$f[x_0, x_1, x_2]$
100	10		
121	11	1/21	
144	12	1/23	$\frac{1/23 - 1/21}{44} = -9{,}41 \cdot 10^{-5}$

alors $P_2(115) = 10 + \frac{1}{21}(115-100) - 9{,}41 \cdot 10^{-5}(115-100)(115-121) = 10{,}722$

et $f(115) = \sqrt{115} = 10{,}72380$

$E_i = f(115) - P_2(115) = 1{,}05 \cdot 10^{-3} < 1{,}63 \cdot 10^{-3}$ ✓

II-6 Effet Runge : Runge Carl David est un mathématicien qui s'est intéressé de près à l'erreur d'interpolation aux bords du domaine d'interpolation.

On aurait tendance à croire que plus on augmente le nombre de points de collocation, plus l'interpolation est précise. Il s'avère que ce n'est pas toujours le cas. Un exemple traité par Runge est la fonction $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$, et il s'est apperçu que l'erreur aux bords du domaine est énorme !!

Plusieurs articles en parle sur le Net il suffit de chercher. Et l'on s'intéresse à comment minimiser l'erreur d'interpo ?

$$E_i \leq \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} \left| \prod_{0}^{n} (x-x_i) \right| .$$

dans l'expression de E_i, M_{n+1} et $(n+1)!$ sont constants donc la seule entité sur qui on peut agir c'est $\prod_{0}^{n}(x-x_i)$ et l'on essaye de trouver une manière de minimiser ce produit, ce qui justifier le paragraphe suivant.

III-7 : Les polynômes de Tchebychev

Dans le prolongement de ce qu'on vient de citer, il est clair que pour minimiser $\prod_{0}^{n}(x-x_i)$, on doit chercher une loi de distribution des x_i qui assure un produit $\prod_{i=0}^{n}(x-x_i)$ minimum. Pour ce faire, nous allons voir une base formée par les polynômes de Tchebychev et on avoir par la suite son utilité.

les polynome de Tchebychev sont définis par la relation trigonométrique : $T_n(x) = \cos(n . \text{Arccos}\, x)$

On comprend que le domaine de définition et $D_f = [-1 \;\; 1]$ à cause de l'arccos et que $\forall x \,/\, -1 \leq T_n(x) \leq 1$ à cause du cos !!

si $n=0 \Rightarrow T_0(x) = \cos(0 . \text{Arccos}\, x) = 1$

$n=1 \Rightarrow T_1(x) = \cos(\text{Arccos}\, x) = x$

$n=2 \Rightarrow T_2(x) = \cos(2\,\text{Arccos}\, x) = 2\cos^2(\text{Arccos}\, x) - 1$

ceci est du à ce que $\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$

donc $T_2(x) = 2x^2 - 1$

au fur et à mesure que n augmente, le calcul devient plus complexe. On essayera de trouver plus simple.

on sait que $T_{n+1}(x) = \cos((n+1)\operatorname{Arc}\cos x) = \cos(n\operatorname{Arc}\cos x + \operatorname{Arc}\cos x)$

$\Rightarrow T_{n+1}(x) = \cos(n\operatorname{Arc}\cos x).\cos(\operatorname{Arc}\cos x) - \sin(n\operatorname{Arc}\cos x).\sin(\operatorname{Arc}\cos x)$

de même $T_{n-1}(x) = \cos((n-1)\operatorname{Arc}\cos x) = \cos(n\operatorname{Arc}\cos x - \operatorname{Arc}\cos x)$

$\Rightarrow T_{n-1}(x) = \cos(n\operatorname{Arc}\cos x)\cos(\operatorname{Arc}\cos x) + \sin(n\operatorname{Arc}\cos x).\sin(\operatorname{Arc}\cos x)$

alors $T_{n+1}(x) + T_{n-1}(x) = 2\underbrace{\cos(n\operatorname{Arc}\cos x)}_{T_n(x)}.\underbrace{\cos(\operatorname{Arc}\cos x)}_{x}$

$$\Rightarrow \boxed{T_{n+1}(x) = 2x.T_n(x) - T_{n-1}(x)}$$

c'est la relation récurente qui donne les differents polynômes de Tchebycher.

Il se trouve que les solutions des equations $T_n(x) = 0$ minimise le produit $\prod_{0}^{n}(x - x_i)$.

Donc on recherche (n+1) valeur de x_i qui rendent l'erreur minimale, on va donc les calculer à partir de l'equation $T_{n+1}(x) = 0$

$T_{n+1}(x) = \cos((n+1)\operatorname{Arc}\cos x) = 0$

le cos s'annule pour un angle $= \frac{\pi}{2} + k\pi$; $k = 0, 1, \dots$

donc $(n+1)\operatorname{Arc}\cos x = \frac{\pi}{2} + k\pi = \frac{2k+1}{2}\pi$.

$\operatorname{Arc}\cos x = \frac{2k+1}{2n+2}\pi \Rightarrow \underline{x = \cos\left(\frac{2k+1}{2n+2}.\pi\right) \quad k = 0 \dots n}$

Une distribution selon cette expression minimise l'effet Runge. Beaucoup d'écrits en parlent sur le Net, il suffit de chercher b.b.