Chap V : Résolution Numérique des Equations Differentielles Ordinairs (EDO)

V-1 : Definition : Les equations differentielles ordinairs (appelées aussi Probleme de Cauchy) sont des équations differentielle du 1er Ordre avec une condition initiale soit :

$$\begin{cases} y' = f(y,x) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

Les méthods que l'on va discuter au cours de ce chapitre sont des méthods dites à "1 pas", parceque elles ne font intervenir que la valeur de la fonction au pas précèdent. Par opposition à ces méthodes, il existe des méthodes qui sont dits "multipas", donc elles font intervenir plusieurs pas de calculs précèdents pour evaluer la valeur actuelle de y.

Les méthodes sujettes de ce chapitre sont aussi des méthods à pas fixe : le pas d'intégration $h = cste$, et il est bon de savoir qu'il existe des méthodes à pas adaptatif.

V-2 Méthode d'Euler (progressive ou explicite)

Se basant sur le développement limité de y au voisinage de x_0 : $y(x) = y(x_0) + \frac{y'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{y''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \cdots$

la méth d'Euler consiste à prendre le D.L. au 1er ordre :

$$y(x) = y(x_0) + y'(x_0)\cdot(x-x_0)$$

pour $x = x_1 \Rightarrow y(x_1) = y_1 = y_0 + f(x_0,y_0)\cdot\underbrace{(x_1-x_0)}_{h}$

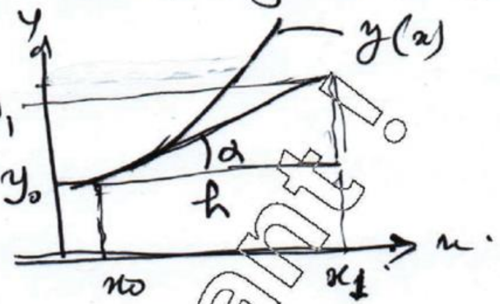
$$\Rightarrow y_1 = y_0 + h\cdot f(x_0,y_0)$$

il en va de même pour $y_2, y_3, \ldots$ et y_n

donc l'expression de $\boxed{y_{i+1} = y_i + h\cdot f(x_i,y_i)}$

$i = 0 \rightarrow n$.

géométriquement, cette méthode utilise la tangeante en x_0 :



$y_1 - y_0 = h \cdot tg\alpha$

or $tg\alpha = f(x_0, y_0) = y'(x_0)$

$y_1 - y_0 = h \cdot f(x_0, y_0)$

et $y_1 = y_0 + h \cdot f(x_0, y_0)$.

Exple : Soit l'équation différentielle : $y' = x^2 + \frac{y}{x}$

En prenant un pas d'intégration $h = 0{,}1$ avec $y_0 = y(1) = 1$

Calculer l'approximation de $y(1{,}2)$. Comparer avec la valeur exacte de l'intégrale.

Réponse : $x_0 = 1 \Rightarrow y_0 = 1$ et $h = 0{,}1$

donc le calcul de $y(1{,}2)$ est finalement celui de y_2.

parce que $y_1 = y(x_0 + h) = y(x_1) = y(1{,}1)$

et $y_2 = y(x_1 + h) = y(x_2) = y(1{,}2)$.

$y_1 = y_0 + h \cdot f(x_0, y_0) = 1 + 0{,}1\left(1^2 + \frac{1}{1}\right) = 1{,}2$.

$y_2 = y_1 + h \cdot f(x_1, y_1) = 1{,}2 + 0{,}1\left(1{,}1^2 + \frac{1{,}2}{1{,}1}\right) = 1{,}43009$

donc $y_2 = y(1{,}2) = 1{,}43009$.

La solution exacte de cette équation est $y(x) = \frac{x^3}{2} + \frac{x}{2}$

donc $y(1{,}2) = \frac{1{,}2^3}{2} + \frac{1{,}2}{2} = 1{,}464$

l'erreur commise alors est $E_2 = 1{,}464 - 1{,}43009 = 0{,}033$

C'est une erreur assez grande parce que cette méthode cumule les erreurs des pas de calculs précédents.

V-3 Méthode d'Euler Modifiée.

Dans cette méthode, on approxime la dérivée au milieu de x_i et x_{i+1} (soit $x_m = \frac{x_i + x_{i+1}}{2}$) par la moyenne des dérivées au début et à la fin de l'intervale (soit y'_i et y'_{i+1}). Donc :

$$\frac{dy}{dx}(x_i) + \frac{dy}{dx}(x_{i+1}) = 2 \cdot \frac{dy}{dx}(x_m)$$

alors on calcule $y_{i+1} = y_i + h \cdot \frac{dy}{dx}(x_m)$

alors : $\dfrac{dy}{dx}(x_m) = \dfrac{\frac{dy}{dx}(x_i) + \frac{dy}{dx}(x_{i+1})}{2} = \dfrac{f(x_i, y_i) + f(x_{i+1}, y_{i+1})}{2}$.

On est maintenant confronté au problème du calcul de $f(x_{i+1}, y_{i+1})$ car l'objectif c'est bien sur le calcul de y_{i+1} ??

On contourne ceci en prenant l'expression explicite de y_{i+1} à savoir $y_{i+1} = y_i + h \cdot f(x_i, y_i)$ (Formule d'Euler)

Alors : $$\boxed{y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2}\left[f(x_i, y_i) + f(x_i + h, y_i + h \cdot f(x_i, y_i))\right]}$$

C'est la méth d'Euler Modifiée.

donc $\left\{ \begin{array}{l} \text{pour } x = x_i : \\ k_1 = f(x_i, y_i) \\ k_2 = f(x_i + h, y_i + h \cdot k_1) \\ y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2}(k_1 + k_2) \end{array} \right.$

Exple : On reprend l'exemple du paragraphe précédent

* $x_0 = 1$, $y_0 = 1$

$k_1 = f(1, 1) = 1^2 + \frac{1}{1} = 2$.

$k_2 = f(1{,}1 ; 1 + 0{,}1 \times 2) = f(1{,}1 ; 1{,}2) = 1{,}1^2 + \frac{1{,}2}{1{,}1} = 2{,}3009$.

$y_1 = 1 + \frac{0{,}1}{2}(2 + 2{,}30090) = 1{,}21504$

* $x_1 = 1{,}1$, $y_1 = 1{,}21504$

$k_1 = f(1{,}1 ; 1{,}21504) = 2{,}31459$.

$k_2 = f(1{,}1 + 0{,}1 ; 1{,}21504 + 0{,}1 \times 2{,}31459) = 2{,}64543$

$y_2 = 1{,}21504 + \frac{0{,}1}{2}(2{,}31459 + 2{,}64543) = 1{,}46305$.

Cette valeur est beaucoup plus proche de la valeur exacte que celle du paragraphe précédent !!! ($E_2 < 0{,}001$)

V-4 : Méthode du point Milieu

Il existe une méth similaire à la méth d'Euler Modifiée dite : méthode du point milieu.

si $x_m = (x_i + x_{i+1})/2 = x_i + \frac{h}{2} = x_{i+1} - \frac{h}{2}$.

alors $\left\{ \begin{array}{l} y_i = y(x_i) = y(x_m - \frac{h}{2}) = y(x_m) + y'(x_m)(x_i - x_m) \\ y_{i+1} = y(x_{i+1}) = y(x_m + \frac{h}{2}) = y(x_m) + y'(x_m)(x_{i+1} - x_m) \end{array} \right.$

alors : $\begin{cases} y_i = y_m - \frac{h}{2} \cdot y'(x_m) \\ y_{i+1} = y_m + \frac{h}{2} \cdot y'(x_m) \end{cases}$

$$y_{i+1} - y_i = h \cdot y'(x_m)$$

Quel est alors $y'(x_m)$

$$y'(x_m) = f\left(x_i + \frac{h}{2}, y\left(x_i + \frac{h}{2}\right)\right) = f\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{h}{2} f(x_i, y_i)\right)$$

alors : $\underline{\left| y_{i+1} = y_i + h \cdot f\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{h}{2} \cdot f(x_i + y_i)\right)\right.}$

Cette méthode à la même précision que la méth d'Euler Modifiée. Les 2 Méth sont aussi appelées les méthodes de Runge Kutta d'Ordre 2 (RK2).

V-5 : Méthode de Taylor

C'est une méthode d'Ordre 2 car elle met en oeuvre le developpement en serie de Taylor à l'ordre 2, soit :

$$y_{i+1} = y(x_i + h) = y(x_i) + h \cdot y'(x_i) + h^2 \cdot \frac{y''(x_i)}{2}$$

$$y_{i+1} = y_i + h \cdot f(x_i, y_i) + \frac{h^2}{2} \frac{df}{dx}(x_i, y_i)$$

la seconde dérivée de f doit impliquer les dérivées partielles parceque f est une fonction de 2 variable.

la differentielle totale $df = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot dx + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot dy$.

donc $\frac{df}{dx} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot f$.

$$\Rightarrow y_{i+1} = y_i + h \cdot f(x_i, y_i) + \frac{h^2}{2}\left[\frac{\partial f}{\partial x}(x_i, y_i) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_i, y_i) \times f(x_i, y_i)\right]$$

c'est la méth de Taylor

V-6 : Méthode de Runge_kutta d'Ordre 4 (RK4)

C'est de loin la méth à 1 pas la plus utilisée pour resoud les EDO. L'erreur commise lors de l'approximation de l'integrale est proportionnelle à h^4 (d'où ordre 4). Le principe de cette méth utilise en 1er l'approximation d'Euler au debut du domaine (x_i), ensuite on corri

cette approximation une première fois au milieu de l'interv[alle]
on corrige ensuite une seconde fois la 1ère correction toujo[urs]
au milieu de l'interale, enfin, on approxime la valeur
de l'intégrale à la fin de l'intervale (x_{i+1}).

L'algorithme de RK4 :

$$
\begin{cases}
\text{Pour } x = x_i \\
* \; k_1 = f(x_i, y_i) \\
* \; k_2 = f\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{h}{2} \cdot k_1\right) \\
* \; k_3 = f\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{h}{2} \cdot k_2\right) \\
* \; k_4 = f(x_i + h, y_i + h \cdot k_3) \\
\text{alors } y_{i+1} = y_i + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)
\end{cases}
$$

Pour l'exemple traité ds les paragraphs précédents :

$* \; x = x_0 = 1$

$k_1 = 2$

$k_2 = 2,150119$

$k_3 = 2,157268$

$k_4 = 2,315206$

$y_1 = y_0 + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) = 1,215499$

$* \; x = x_1 = 1,1$

$k_1 = 2,314999$

$k_2 = 2,480108$

$k_3 = 2,487287$

$k_4 = 2,660190$

$y_2 = y_1 + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) = 1,463999$

On voit bien que l'erreur commise en y_2 est $< 10^{-6}$.
Très bonne aproximation !! n'est ce pas ?

Bonne lecture