

Chap IV: Intégration Numérique de Fonctions

IV-1: Principe: l'objectif de ce chapitre est l'approximation d'intégrales définies de fonctions. Il existe plusieurs approches celle qu'on va étudier ici, c'est l'approche par approximation polynomiale, ces méthodes sont dites "de quadrature". Le principe est donc d'approximer $\int_a^b f(x) dx$ par $\int_a^b P_n(x) dx$ où P_n est le polynôme qui interpole la fonction f sur $[a, b]$.

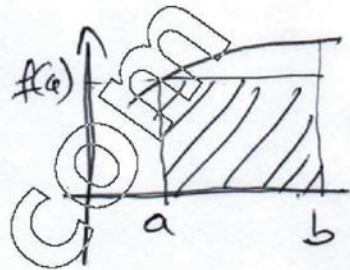
$$I = \int_a^b f(x) dx \approx \int_a^b P_n(x) dx$$

IV-2: Les méthodes du Rectangle

2-1 méth du rectangle Gauche:

$\int_a^b f(x) dx \approx$ surface du rectangle dont la hauteur = $f(a)$

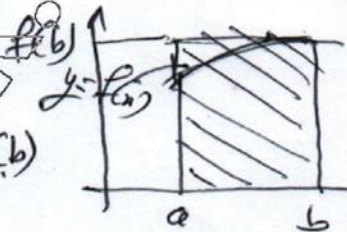
$$I_{RG} = (b-a) \cdot f(a)$$



2-2 méth du rectangle droit

$\int_a^b f(x) dx \approx$ surface du rectangle dont la hauteur = $f(b)$

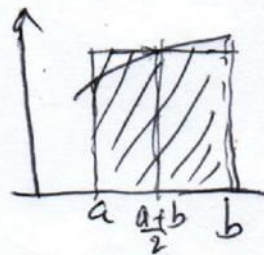
$$I_{RD} = (b-a) \cdot f(b)$$



2-3 méth du rectangle central

$\int_a^b f(x) dx \approx$ surface du rectangle dont la hauteur = $f(\frac{a+b}{2})$

$$I_{RC} = (b-a) \cdot f(\frac{a+b}{2})$$



Ces méthodes ne sont pas souvent utilisées à cause de l'importance de l'erreur d'approximation qu'elles entraînent.

IV-3 la méthode du trapèze

On approxime l'intégrale $\int_{x_0}^{x_1} f(x) dx$ par $\int_{x_0}^{x_1} P_1(x) dx$ où $P_1(x)$ est le polynôme d'interpolation de $f(x)$ sur les points x_0 et x_1 .

En utilisant la méthode de Lagrange:

$$L_0(x) = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1}$$

$$L_1(x) = \frac{x - x_0}{x_1 - x_0}$$

$$\Rightarrow P_1(x) = \frac{y_0}{x_1 - x_0} (x - x_1) + \frac{y_1}{x_1 - x_0} (x - x_0)$$

$$\int_{x_0}^{x_1} P_1(x) dx = \frac{y_0}{x_1 - x_0} \int_{x_0}^{x_1} (x - x_1) dx + \frac{y_1}{x_1 - x_0} \int_{x_0}^{x_1} (x - x_0) dx$$

$$= \frac{y_0}{x_1 - x_1} \left[\frac{(x - x_1)^2}{2} \right]_{x_0}^{x_1} + \frac{y_1}{x_1 - x_0} \left[\frac{(x - x_0)^2}{2} \right]_{x_0}^{x_1}$$

Si on note $x_1 - x_0 = h$: appelé "pas d'intégration"

$$\int_{x_0}^{x_1} P_1(x) dx = -\frac{y_0}{h} \left(\frac{0}{2} - \frac{h^2}{2} \right) + \frac{y_1}{h} \left(\frac{h^2}{2} - \frac{0}{2} \right) = \frac{h}{2} (y_0 + y_1)$$

Donc l'intégrale du trapèze est : $I = \frac{h}{2} (y_0 + y_1)$

Si on subdivise l'intervalle d'intégration $[a, b]$ en n sous intervalles alors on aura $(n+1)$ points distants de h .

$$h = \frac{b-a}{n}, \quad x_0 = a, \quad x_1 = x_0 + h, \dots, \quad x_n = b.$$

$$\Rightarrow I_1 = \int_{x_0}^{x_1} P_1(x) dx = \frac{h}{2} (y_0 + y_1)$$

$$I_2 = \int_{x_1}^{x_2} P_2(x) dx = \frac{h}{2} (y_1 + y_2)$$

$$\vdots$$

$$I_n = \int_{x_{n-1}}^{x_n} P_n(x) dx = \frac{h}{2} (y_{n-1} + y_n)$$

l'intégrale du trapèze Généralisée serait alors :

$$I = \frac{h}{2} \left[y_0 + y_n + 2 \sum_{i=1}^{n-1} y_i \right]$$

IV-4 La méthode de Simpson.

Pour cette méthode on interpole la fonction f sur 3 points x_0, x_1 et x_2 , le polynôme serait donc de degré 2. En utilisant la méthode de Lagrange : $P_2(x) = y_0 L_0(x) + y_1 L_1(x) + y_2 L_2(x)$
 x_0, x_1 et x_2 sont équidistants $\Rightarrow x_1 = x_0 + h, x_2 = x_1 + h = x_0 + 2h$
 alors :

$$L_0(x) = \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} = \frac{(x - x_1)(x - x_1 - h)}{h(-h)} = \frac{(x - x_1)^2 - h(x - x_1)}{-h^2}$$

$$L_1(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} = \frac{(x - x_0)(x - x_0 - 2h)}{h(-h)} = \frac{(x - x_0)^2 - 2h(x - x_0)}{-h^2}$$

$$L_2(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{2h \cdot h} = \frac{(x-x_0)(x-x_0-h)}{2h^2} = \frac{(x-x_0)^2 - h(x-x_0)}{2h^2}$$

$$\Rightarrow \int_{x_0}^{x_2} P_2(x) dx = \frac{y_0}{2h^2} \int_{x_0}^{x_2} ((x-x_1)^2 - h(x-x_1)) dx - \frac{y_1}{h^2} \int_{x_0}^{x_2} ((x-x_0)^2 - 2h(x-x_0)) dx$$

$$+ \frac{y_2}{2h^2} \int_{x_0}^{x_2} ((x-x_0)^2 - h(x-x_0)) dx$$

$$= \frac{y_0}{2h^2} \left[\frac{(x-x_1)^3}{3} - h \frac{(x-x_1)^2}{2} \right]_{x_0}^{x_2} - \frac{y_1}{h^2} \left[\frac{(x-x_0)^3}{3} - h(x-x_0)^2 \right]_{x_0}^{x_2}$$

$$+ \frac{y_2}{2h^2} \left[\frac{(x-x_0)^3}{3} - h(x-x_0)^2 \right]_{x_0}^{x_2}$$

$$= \frac{y_0}{2h^2} \left[\frac{h^3}{3} + \frac{h^3}{3} - h \left(\frac{h^2}{2} - \frac{h^2}{2} \right) \right] - \frac{y_1}{h^2} \left[\frac{8h^2}{3} - h \cdot 4h^2 \right]$$

$$+ \frac{y_2}{2h^2} \left[\frac{8h^3}{3} - h(4h^2) \right]$$

alors : $\int_{x_0}^{x_2} P_2(x) dx = \frac{h}{3} [y_0 + 4y_1 + y_2]$. c'est la formule de Simpson.

Maintenant si on subdivise $[a, b]$ en $2n$ points (le nombre de subdivisions doit être impérativement pair)

$$\Rightarrow I_1 = \frac{h}{3} [y_0 + 4y_1 + y_2]$$

$$I_2 = \frac{h}{3} [y_2 + 4y_3 + y_4]$$

$$\vdots$$

$$I_{n-1} = \frac{h}{3} [y_{2n-2} + 4y_{2n-1} + y_{2n}]$$

$$I_n = \frac{h}{3} [y_{2n-2} + 4y_{2n-1} + y_{2n}]$$

Alors I_S , intégrale de Simpson généralisée, qui est la somme des I_i $i=1 \rightarrow n$, sera :

$$I_S = \frac{h}{3} \left[y_0 + y_{2n} + 4 \sum_{i=1}^{n-1} y_{2i+1} + 2 \sum_{i=1}^{n-1} y_{2i} \right]$$

Exemple : Calculer les approximations par les méthodes du trapèze et de Simpson de l'intégrale $I = \int_1^{1.6} \ln(x) dx$ en prenant un pas d'intégration $h = 0,15$. Comparer les résultats du calcul avec la valeur exacte de I . Quelle est la meilleure approximation ?

* Méth du trapèze

$$I_T = \frac{h}{2} [f(1) + f(1.6) + 2(f(1.15) + f(1.3) + f(1.45))]]$$

$$I_T = \frac{0.15}{2} [\ln(1) + \ln(1.6) + 2(\ln(1.15) + \ln(1.3) + \ln(1.45))]$$

$$I_T = 0.151304$$

* Méth de Simpson

$$I_S = \frac{h}{3} [f(1) + f(1.6) + 4(f(1.15) + f(1.45)) + 2 f(1.3)]$$

$$I_S = \frac{0.15}{3} [\ln(1) + \ln(1.6) + 4(\ln(1.15) + \ln(1.45)) + 2 \ln(1.3)]$$

$$I_S = 0.152002$$

* la valeur exacte de I , en utilisant l'intégration par partie $\int \ln(x) dx = x \ln(x) - x + c$.

$$\Rightarrow I = \int_1^{1.6} \ln(x) dx = x \ln(x) - x \Big|_1^{1.6} = 1.6 \ln(1.6) - 1.6 + 1$$

$$I = 0.152005$$

On voit bien que la méthode de Simpson est plus exacte que la méthode du trapèze. Cela sous-entend que l'erreur d'intégration de Simpson est moins importante que celle du trapèze.

IV-5 Les erreurs d'intégration

Pour la méthode du trapèze, l'erreur d'intégration:

$$E_T \leq \frac{M_2}{12} (b-a)^3 \text{ où } M_2 = \max |f''(x)|_{[a,b]}$$

Pour la méthode de Simpson, l'erreur d'intégration:

$$E_S \leq \frac{M_4}{180 N^4} (b-a)^4 \text{ où } M_4 = \max |f^{(4)}(x)|_{[a,b]} \text{ et } N = 2n.$$

Exemple: Quel doit être le nombre de sous intervalles nécessaires pour que l'erreur d'intégration par la méthode du trapèze de $\int_1^2 \ln(x) dx$ soit $\leq 0,5 \cdot 10^{-4}$?

Réponse: $f(x) = \ln(x) \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{x} \Rightarrow f''(x) = -\frac{1}{x^2}$
 $\max |f''(x)|$ correspond au x minimum

donc $M_2 = \frac{1}{1} = 1$.

alors $E_T \leq \frac{1}{12n^2} M_2 (b-a)^3 \leq \varepsilon$ $\varepsilon = 0,5 \cdot 10^{-4}$

$\Rightarrow n^2 \geq \frac{M_2(b-a)^3}{12\varepsilon} \Rightarrow n \geq \sqrt{\frac{M_2(b-a)^3}{12\varepsilon}}$

$n \geq \sqrt{\frac{1 \cdot 0,2^3}{12 \times 0,5 \cdot 10^{-4}}} \Rightarrow n \geq \sqrt{\frac{80}{6}} \Rightarrow n \geq 3,65$

comme n est entier $\Rightarrow n = 4$.

IV - Méthodes de Newton-Côtes

Pour des degrés du polynôme d'interpolation ≥ 3 , les formules de Newton-Côtes donnent une approximation à l'intégrale

pour $n=3$: $I = \frac{3h}{8} (y_0 + 3y_1 + 3y_2 + y_4)$

$n=4$: $I = \frac{4h}{90} (7y_0 + 32y_1 + 12y_2 + 32y_3 + 7y_4)$

Il y a bien d'autres méthodes avec des approches quelques peu différentes très bien fournies sur le Net, entre autres vous pouvez rechercher :

- * la méthode de Gauss
- * la méthode de Romberg.
- * la méthode de Monte-Carlo

et bien d'autres