Chap I : Resolution des Equations non Lineaires

I-1 Objectif :

le but de ce chapitre est de resoudre toute equation $f(x)=0$ ou f est une fonction non lineaire de x. La solution recherchée n'est pas exacte mais se sera une approximation de la solution.
Le processus d'approximation consiste à générer une suite x_n tendant vers la solution x^* qd $n \to \infty$.
Les méthodes de calcul utilisent toute la consequence du théoreme de la valeur intermediaire.

+ Etant donnée une fonction $f(x)$ definie, continue et monotone sur $[a, b]$.
+ Si le signe de $f(a)$ est different de celui de $f(b)$ alors $\exists\, c \in]a, b[\,/\, f(c)=0$

I-2 Méthode de dichotomie (bipartition).

Le principe de cette méthode est de reduire la largeur du domaine de délimitation de la solution x^*.
Les divisions successive par 2 de la largeur du domaine $[a, b]$ reduiront celle-ci jusqu'à satisfaction de la condition d'arrêt.

L'algorithme est alors le suivant.

1° $c = \frac{a+b}{2}$

2° On calcule $f(c)$

alors si $f(c) \cdot f(a) < 0 \Rightarrow b = c$

sinon $\Rightarrow a = c$

On reprend les etapes 1° et 2° jusqu'à ce que $|c - a| \leq \varepsilon$ où ε serait la precision du calcul.

On remarque qu'après chaque itération, la largeur du domaine est divisée par 2 : soit $L_0 = |a-b|$

itération 1 : $L_1 = \frac{L_0}{2}$.

" 2 : $L_2 = \frac{L_1}{2} = \frac{L_0}{2^2}$.

" 3 : $L_3 = \frac{L_2}{2} = \frac{L_0}{2^3}$.

itération n : $L_n = \frac{L_{n-1}}{2} = \frac{L_0}{2^n}$.

Si l'itération n on a $L_n \leq \varepsilon \Rightarrow \frac{|a-b|}{2^n} \leq \varepsilon$

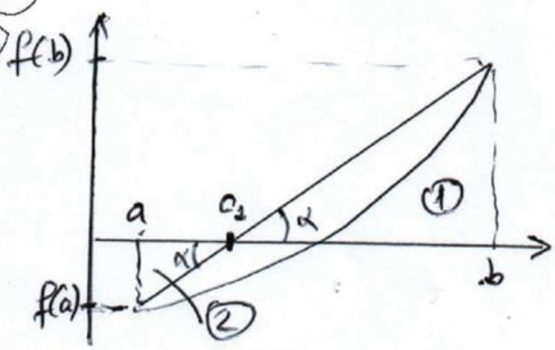
$$\Rightarrow \boxed{n \geqslant \frac{\ln\left(\frac{|a-b|}{\varepsilon}\right)}{\ln 2}}$$

Cela montre qu'on peut savoir au préalable le nombre d'itérations nécessaires pour atteindre une précision donnée.

I-3 Méthode de Regulafalsi (Fausse Position).

Cette méthode est similaire à la bipartition, sauf que le principe de subdivision du domaine $[a, b]$ est $\neq$

La valeur de l'approximation c_i est l'intersection de la corde tirée entre les points d'abscisse a et b avec l'axe des x.



Pour le triangle ① : $tg\alpha = \frac{f(b)}{b-c_1}$

Pour le triangle ② : $tg\alpha = \frac{-f(a)}{c_1 - a}$ $\Bigg\} \Rightarrow \frac{f(b)}{b-c_1} = \frac{-f(a)}{c_1-a} \Leftrightarrow \boxed{c_1 = \frac{a.f(b)-b.f(a)}{f(b)-f(a)}}$

et de la même manière que pour la bipartition :

Si $f(c_1) \cdot f(a) < 0 \Rightarrow b = c_1$

sinon $a = c_1$

et on reprend les 2 étapes

On arrête le calcul lorsque $|c_n - c_{n-1}| \leq \varepsilon$

si $g([a\ b]) \subset [a\ b]$: $\forall x \in [a\ b] \Rightarrow f(x) \in [a\ b]$

alors on dit que g est contractante si $\exists L \in \mathbb{R} / 0 \leq L < 1$

$\forall x, y \in [a\ b] \Rightarrow |g(x) - g(y)| \leq L \cdot |x - y|$.

en découle que $\left| \frac{g(x) - g(y)}{x - y} \right| \leq L < 1$

si on fait tendre $y \to x \Rightarrow \frac{g(x) - g(y)}{x - y} \to g'(x) \Rightarrow \underline{|g'(x)| < 1}$

Alors la condition de convergence de la méthode est que $\underline{|g'(x)| < 1}$

* La vitesse de convergence de cette méth dépend beaucoup de la forme de $g(x)$. Plus le nombre dérivé $|g'(x)|$ est proche de 0, plus la vitesse de convergence est grande. Il existe alors un accélérateur de convergence de cette méthode basée sur cette définition. L'algorithme de l'accélérateur est déduit comme suit :

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ avec $\lambda \neq -1$

$x = g(x) \Leftrightarrow \lambda x + x = \lambda x + g(x) \Rightarrow x = \frac{\lambda x + g(x)}{\lambda + 1} = G(x)$

Il est facile de montrer que $g(x)$ et $G(x)$ ont le même point fixe donc la solution de $x = G(x)$ est en même temps celle de $x = g(x)$.

Mais quelle est la valeur de λ ?

On calcule $G'(x) = \frac{\lambda + g'(x)}{\lambda + 1} = 0$ (idéalement)

$\Rightarrow \lambda = -g'(x)$: cette valeur permet la meilleure vitesse de convergence.

$\Rightarrow x = \frac{\lambda \cdot x + g(x)}{\lambda + 1}$ avec $\lambda = -g'(x)$

Alors l'algorithme des approx successive accéléré sera :

pour $x = x_i$

1- On calcule $\lambda = -g'(x_i)$

2- $x_{i+1} = \frac{\lambda x_i + g(x_i)}{\lambda + 1}$

On refait 1 et 2

jusqu'à satisfaction de la condition d'arrêt

I-4 Méthode de approximations successives (Point fixe)

* Définition : Etant donné une fonction $g(x)$, s'il existe un point d'absisse x^* tel que $g(x^*) = x^*$ alors on dit que x^* est le point fixe de g.

C'est cette definition qui le principe de la présente méth
Partant de l'equation $f(x)=0$, on réecrit cette équation sous la forme $x = g(x)$.
En prenant le x du côté droit de l'egalite comme la valeur anterieure de x et x de gauche comme la valeur actuelle de x / $x_n = g(x_{n-1})$., on génére une suite $\{x_i\}$ qui doit converger vers x^*.
Donc si la suite converge alors $x_i \to x^*$ si $i \to \infty$
La convergence n'est pas toujours assurée :

Dans le cas de la fonction $g_1(x)$ (a) on voit que le processus Converge vers le solution x^*, parcontre, dans le cas de la fonction $g_2(x)$ le processus diverge. Si on observe bi les 2 fonctions on remarque que la difference entre les 2 est que la fonction g_1 présente de tengente de pente < 1 et la fonction g_2 des tangente de pente > 1. Ce qui laisse entendre que la pente < 1 assure la convergence.
On retrouve la m conclusion en partant de la définition des fonctions contractantes :

I-5 Méthode de Newton-Raphson (La tangente)

En écrivant le developpement limite au voisinage de x_0 et à l'ordre 1 de $f(x)$ on a : $f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0)$

Si on suppose que x_1 est la solution de $f(x) = 0$

$\Rightarrow f(x_1) = f(x_0) + f'(x_0)(x_1 - x_0) = 0$

$$x_1 - x_0 = -\frac{f(x_0)}{f'(x_0)} \Leftrightarrow x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

ainsi pour la ième itération

$$x_i = x_{i-1} - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)}$$

Cet algorithme converge rapidement si $f'(x_i) \neq 0$ et que $\left|\left(x - \frac{f(x)}{f'(x)}\right)'\right| < 1$

parce que cette méth est une méth à app succe

Exemple de Calcul :

Soit à resoudre l'équation $f(x) = xe^x - 1 = 0$ qui satisfai au theorème de la valeur intermediaire ds $[0\ 1]$ avec une precision $\varepsilon \leq 10^{-4}$ par le ≠ts méthode :

1 Méth de bipartition : deja vue au 1er cours

On trouve $x = 0,567199$ à la $14^{ème}$ iteration

2. Méth de Regula-Falsi : vue au 1er cours.

On trouve $x = 0,56715$ à la $5^{ème}$ iteration

3- Méth des App Successive.

On reécrit $f(x) = 0$ sous la forme $x = e^{-x}$ car $|e^{-x}| < 1$ $[0\ 1]$

On arrive à $x = 0,567119$ à la $18^{ème}$ iteration

Meth accélérée :

On arrive à $x = 0,567143$ à la $4^{ème}$ iteration

4- Méth de Newton

On arrive à $x = 0,567143$ à la $4^{ème}$ iteration