

1. Série et transformée de fourrier Les séries de Fourier

1.1. Les séries de Fourier

Constituent un outil fondamental dans l'étude des fonctions périodiques. C'est à partir de ce concept que s'est développée la branche des mathématiques connue sous le nom d'analyse harmonique.

Les séries de Fourier se rencontrent dans la décomposition de signaux périodiques, dans l'étude des courants électriques, des ondes cérébrales, dans la synthèse sonore, le traitement d'images, etc.

Un signal périodique de fréquence f et de forme quelconque peut être obtenu en ajoutant à une sinusoïde de fréquence f (fondamentale), des sinusoïdes dont les fréquences sont des multiples entiers de f . Ces signaux ont des amplitudes et des positions de phase appropriées.

De même, on peut décomposer toute onde récurrente en une somme de sinusoïdes (fondamentale et harmoniques).

L'étude d'une fonction périodique par les séries de Fourier comprend deux volets :

- 1) l'analyse, qui consiste en la détermination de la suite de ses coefficients de Fourier (souvent représentés dans un diagramme spectral ou spectre) ;
- 2) la synthèse, qui permet de retrouver, en un certain sens, la fonction à l'aide de la suite de ses coefficients.

La transformation de Fourier est donc une extension, pour les fonctions non périodiques, du développement en série de Fourier des fonctions périodiques. La transformation de Fourier associe à une fonction intégrable, définie sur l'ensemble des nombres réels ou celui des nombres complexes, une fonction appelée transformée de Fourier dont la variable indépendante peut s'interpréter en physique comme la fréquence ou la pulsation.

La transformée de Fourier s'exprime comme "somme infinie" des fonctions trigonométriques de toutes fréquences. Une telle sommation se présente sous forme d'intégrale. Séries et transformation de Fourier constituent les deux outils de base de l'analyse harmonique.

Lorsqu'une fonction représente un phénomène physique, comme l'état du champ électromagnétique ou du champ acoustique en un point, on l'appelle signal et sa transformée de Fourier s'appelle son spectre.

On s'attache ici pour l'essentiel à l'étude du problème suivant :

Une fonction périodique $F(x)$ de Période T peut elle s'exprimer comme somme d'une série trigonométrique :

$$\sum_{n \geq 0} a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t)$$

avec

$$\omega = 2\pi/T$$

Etudié par Fourier au début du dix-neuvième siècle dans sa recherche de solutions de l'équation de la chaleur (équation de diffusion), ce problème conduit à une branche des mathématiques toujours vivantes.

1.2. Définition des séries de Fourier

Soit $f(t)$ une fonction définie sur un intervalle $] -L, +L[$ et déterminée à l'extérieur de l'intervalle par $f(t + 2L) = f(t)$ c'est-à-dire supposons $f(t)$ de période T .

la série de Fourier correspond à $f(x)$ est définie par :

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t)$$

ou les coefficients a_n et b_n sont appelés coefficients Fourier et valeur :

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{-L}^{+L} f(t) \cos(n\omega t) dt$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_{-L}^{+L} f(t) \sin(n\omega t) dt$$

et a_0 est la moyenne de $f(t)$

$$a_0 = \frac{2}{T} \int_{-L}^{+L} f(t) dt$$

1.3. Condition de Dirichlet pour la convergence ponctuelle de la série de Fourier

Théorème (conditions suffisantes de Dirichlet pour la convergence ponctuelle de la série) supposant que;

1. $f(t)$ est définie sur $] -L, +L[$ sauf peut être en un nombre fini de points,
2. $f(t)$ est périodique de période $2L$;
3. $f(t)$ et $f'(t)$ sont continues par morceaux dans $] -L, +L[$.

alors la série de Fourier converge vers :

- $f(t)$ si t est un point de continuité de f .
- $\frac{f(t+0) + f(t-0)}{2}$ si t est un point de discontinuité de f .

on peut alors écrire :

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t)$$

en tout point de continuité.

Si t est un point de discontinuité, le membre de gauche de l'équation précédente doit être remplacé par la valeur moyenne de f au point de discontinuité, c'est-à-dire :

$$\frac{f(t+0) + f(t-0)}{2} = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t)$$

Propriétés

Les coefficients sont indépendants de l'intervalle d'amplitude T sur lequel on calcule les intégrales.

- 1) si **f est paire** alors toutes les **b_n sont nuls**,

$$a_0 = 2 \times \frac{1}{T} \int_0^{+L} f(t) dt$$

et

$$a_n = 2 \times \frac{1}{T} \int_0^{+L} f(t) \cos(n\omega t) dt$$

- 2) si **f est impaire** alors toutes les **a_n sont nuls**,

$$b_n = 2 \times \frac{1}{T} \int_0^{+L} f(t) \sin(n\omega t) dt$$

3) Théorème de Parseval

$$\frac{1}{T} \int_0^{+L} f^2(t) dt = a_0^2 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n^2 + b_n^2)$$

4) Forme complexe de Fourier

Les coefficients complexes de Fourier sont les :

$$c_n = \frac{1}{T} \int_0^{+L} f(t) e^{-in\omega t} dt$$

ou $n \in \mathbb{Z}$

$$c_n = \frac{a_n - ib_n}{2}$$

valable pour $n \in \mathbb{Z}^*$

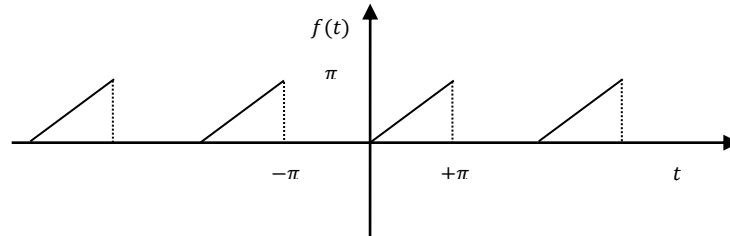
et $c_0 = a_0$

la série de Fourier s'écrit alors $\sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e^{in\omega t}$

Exemple

Soit la fonction 2π périodique définie comme suit : $f(t) = \begin{cases} 0 & -\pi < x \leq 0 \\ t & 0 < x \leq \pi \end{cases}$

1. Représenter graphiquement la fonction $f(t)$.



2. Calculer les coefficients de série de Fourier de la fonction f .

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f(t) dx = \frac{1}{\pi} \left[\int_{-\pi}^0 0 dt + \int_0^{+\pi} t dt \right] = \frac{1}{\pi} \left[\frac{1}{2} (t)^2 \right]_0^{+\pi} = \frac{\pi}{2}$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f(t) \cos(nt) dt$$

Une intégration par partie donne :

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{+\pi} t \cos(nt) dx = \frac{1}{\pi} \left[\frac{t}{n} \sin(nt) \right]_0^{+\pi} - \frac{1}{n\pi} \int_0^{+\pi} \sin(nt) dt$$

$$a_n = -\frac{1}{n\pi} \int_0^{+\pi} \sin(nt) dt = -\frac{1}{n\pi} \left[\frac{1}{n} \cos(nt) \right]_0^{+\pi} = \begin{cases} -\frac{2}{\pi n^2} & n \text{ paire} \\ 0 & n \text{ impaire} \end{cases}$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f(t) \sin(nt) dt$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \left[-\left(\frac{t}{n}\right) \cos(nt) \right]_0^{+\pi} + \frac{1}{n\pi} \int_0^{+\pi} \cos(nt) dt$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \left[-\left(\frac{t}{n}\right) \cos(nt) \right]_0^{+\pi} + \frac{1}{n\pi} \left[\frac{1}{n} \sin(nt) \right]_0^{+\pi} = \frac{(-1)^{n+1}}{n}$$

$$f(t) = \frac{\pi}{4} - \frac{2}{\pi} \left[\frac{\cos t}{1^2} + \frac{\cos 3t}{3^2} + \frac{\cos 5t}{5^2} + \dots \right] + \left[\frac{\sin t}{1} - \frac{\sin 2t}{2} + \frac{\sin 3t}{3} - \dots \right]$$

$$f(t) = \frac{\pi}{4} - \frac{2}{\pi} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\cos(2n+1)t}{(2n+1)^2} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1} \sin(n)t}{n}$$

2. Transformée de Fourier

2.1. Définition

Soit $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction localement intégrable et absolument intégrable sur \mathbb{R} .

On définit la transformée de Fourier de f , la fonction notée $\mathcal{F}(f)$ de $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$; et sa transformée inverse de $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}$. Quand f est une fonction définie sur \mathbb{R} et n'est pas périodique, alors la série de Fourier doit être remplacée par une transformation intégrale appelée transformée de Fourier :

Transformée de Fourier

$$\mathcal{F}(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt$$

Transformée inverse de Fourier

$$f(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{F}(f) e^{+i\omega t} d\omega$$

L'importance de la série et de la transformée de Fourier réside dans le fait que les nombres entiers n (dans le cas de la série) et la quantité réelles ω (dans le cas de l'intégrale), représentent les fréquences des ondes dont la superposition reproduit la fonction f .

Exemple 1

Soit la fonction f définie par : $f(t) = e^{-|t|}$

Trouver la transformée de Fourier $\mathcal{F}(f)$ de $f(t)$

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(f) &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|t|} e^{-ift} dt = \left[\int_{-\infty}^0 e^t e^{-ift} dt + \int_0^{+\infty} e^{-t} e^{-ift} dt \right] = \\ &= \left[\int_{-\infty}^0 e^{t-ift} dx + \int_0^{+\infty} e^{-t-ift} dx \right] = \left[\frac{1}{1+if} + \frac{1}{1-if} \right] = \frac{2}{1+f^2} \end{aligned}$$

Exemple 2

Soit la fonction f définie par : $f(t) = 1/2$

Trouver la transformée de Fourier $\mathcal{F}(f)$ de $f(t)$

$$\mathcal{F}(f) = \int_{-1/2}^{+1/2} \frac{1}{2} e^{-ift} dt =$$

$$\left[-\frac{1}{2i\alpha} e^{-ift} \right]_{-1/2}^{1/2} = -\frac{1}{2if} \left[e^{-i\frac{1}{2}f} - e^{+i\frac{1}{2}f} \right] = \left[\frac{\sin(f/2)}{f} \right]$$

2. Représentation des signaux

Pour l'étude de systèmes de communication, on peut distinguer plusieurs classes de signaux. Ces classes établissent les distinctions suivantes entre signaux, détaillées plus loin:

- 1) analogiques ou numériques,
- 2) périodiques ou apériodiques,
- 3) déterministes ou stochastiques,
- 4) d'énergie ou de puissance.

2.1. Signaux analogiques ou numériques

Un signal $x(t)$ analogique est une fonction continue pour tout temps t . Un signal numérique est un signal temporel discontinu; on le notera $x[n]$ où n est l'indice d'un élément pris dans l'ensemble d'instantanés $\{t_0, t_1, \dots\}$. On parle encore de signaux à temps discret.

2.2. Signaux périodiques ou apériodiques

Un signal $x(t)$ est périodique s'il satisfait la relation suivante

$$x(t) = x(t + T_0) \quad \forall t$$

où t est la variable de temps et T_0 une constante. La plus petite valeur T_0 pour laquelle cette relation est vérifiée est appelée période fondamentale de $x(t)$. Un intervalle de temps d'une durée T_0 couvre donc un cycle complet du signal $x(t)$. S'il n'existe pas de constante pour laquelle la relation 3.1 est respectée, on dit que le signal $x(t)$ est apériodique ou non-périodique.

2.3. Signaux déterministes ou stochastiques

Un signal déterministe a une évolution connue et prévisible, contrairement aux signaux aléatoires ou stochastiques. Si un signal source est en grande partie déterministe à l'émetteur, le bruit qui l'affecte durant la transmission est inconnu. Le tableau 1 reprend les caractéristiques des signaux à l'émetteur et au récepteur.

Tableau 1: Nature des signaux dans une chaîne de télécommunications.

	Émetteur	Récepteur
Signal utile	déterministe	aléatoire
Bruit et interférences	aléatoire	aléatoire

Au vu de la nature des signaux, l'analyse des systèmes de télécommunications nécessitera le recours à des outils stochastiques au moment d'établir les performances. Il en va de même pour l'utilisation de signaux numériques pour lesquels les performances s'exprimeront par des probabilités d'erreur durant la transmission.

2.4. Signaux d'énergie ou de puissance

Tout au long de la chaîne de télécommunications, on traite des signaux électriques caractérisés par une tension ou un courant. Soit une tension $v(t)$ qui, à travers une résistance R , produit un courant $i(t)$. La puissance instantanée dissipée dans cette résistance est définie par

$$p(t) = \frac{v(t)}{R}$$

ou encore

$$p(t) = R i(t)$$

Quelle qu'en soit l'expression, la puissance instantanée est une fonction quadratique du signal caractéristique. À travers une charge unitaire de 1 *Ohm*, noté $[\Omega]$, les expressions sont même égales si bien qu'en définitive, il est de coutume de normaliser l'expression pour une résistance de 1 $[\Omega]$. Pour un signal de tension ou de courant, on obtient alors

a) Puissance instantanée normalisée

$$p(t) = x(t)$$

b) Énergie

Sur base de cette convention, l'énergie totale du signal $x(t)$ est définie par

$$E = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-T}^{+T} |x(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt$$

Certains signaux possèdent une énergie infinie. On utilise alors la notion de puissance moyenne qui est la moyenne temporelle de l'énergie.

c) Puissance moyenne d'un signal

Il en découle une puissance moyenne du signal $x(t)$ s'exprimant :

$$P = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} |x(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt$$

Dans le cas d'un signal périodique de période T_0 , l'expression de la puissance moyenne devient :

$$P = \frac{1}{T_0} \int_t^{t+T_0} |x(t)|^2 dt$$

Les définitions d'énergie et de puissance amènent à distinguer deux types de signaux:

- les signaux à énergie finie, pour lesquels $0 < E < +\infty$. Un signal physiquement réalisable est à énergie finie.
- les signaux à puissance finie. Dans ce cas, la puissance moyenne est bornée, à savoir $0 < P < +\infty$.

Ces deux contraintes sont mutuellement exclusives. En particulier, un signal à énergie finie a une puissance moyenne nulle alors qu'un signal à puissance finie possède une énergie infinie.

Les signaux déterministes et apériodiques sont à énergie finie alors que les signaux périodiques ou aléatoires ont généralement une puissance finie non nulle. Signalons qu'il s'agit de modélisation et qu'en conséquence, certains signaux n'ont pas de réelle signification physique pour des temps infinis, ce qui n'empêche pas qu'ils puissent être d'une grande aide!

2.5 Décibel

Pour les calculs de puissance, on utilise fréquemment une unité basée sur le logarithme. Cette unité est le décibel, noté *dB*. L'introduction de la notion de décibel est destinée à pouvoir décrire un signal de puissance en termes de décades, car les niveaux de puissance tout au long d'une chaîne de transmission varient dans des proportions considérables; c'est donc un changement d'échelle.

Pour un signal d'énergie ou de puissance x , la relation entre unité décimale et décibel est la suivante :

$$x \leftrightarrow 10 \log_{10}(x)$$

L'usage des décibels peut aussi s'exprimer relativement à une puissance de référence. C'est ainsi qu'on définit le *dBW* et le *dBm* comme l'écart par rapport à, respectivement, 1 [W] et 1 [mW]. La puissance P vaut, en *dBm*,

$$p[dbm] = 10 \log_{10} \left[\frac{P[mW]}{1[mW]} \right]$$

Un calcul simple montre que 50 [W] équivaut à 17 [dBW] ou à 47 [dBm].

Pour le calcul de transmission radio, on parle d'intensité de champ électrique en [*dBμV/m*]. Or, le volt ne représente pas une mesure de puissance, contrairement à l'unité du volt au carré. En définitive, pour une tension U exprimée en [V], les décibels s'expriment par

$$10 \log_{10} \left[\frac{U}{1[V]} \right]^2 = 20 \log_{10} \left[\frac{U}{1[V]} \right]$$

En conclusion, pour des grandeurs dont le carré représente une puissance,

$$x \leftrightarrow 20 \log_{10}(x)$$

On notera la présence d'un facteur 20 au lieu de 10 comme pour les puissances.

Exemple. Le confort d'écoute en radiodiffusion FM stéréo est défini par un seuil inférieur valant 1 [mV/m]. En [dBμV/m], ce seuil s'exprime comme suit

$$20 \log_{10} \left[\frac{mV/m}{\mu V/m} \right] = 20 \log_{10} \left[\frac{1000 \mu V/m}{1 \mu V/m} \right] = 60 [dB\mu V/m]$$

3.6. Rapport signal à bruit

Le rapport de la puissance du signal utile à celle du bruit, notées respectivement P_s et P_N , permet souvent de qualifier la qualité de la transmission.

Rapport signal à bruit ou Signal to Noise Ratio (SNR)

Le rapport signal à bruit, exprimé en décibel, vaut le quotient de puissance suivant

$$\left(\frac{S}{N} \right) = 10 \log_{10} \left(\frac{P_s}{P_N} \right) [db]$$

Il s'agit d'un critère abondamment utilisé pour la description des performances d'un système.

Références

- 1) Introduction à la Transformée de Fourier et à ses Applications, Sylvain Lafontaine, Groupe de Recherche en Motilité Cellulaire, Université du Québec à Trois-Rivières, Juillet 1983.
- 2) Livre de mathématiques, Calcul différentiel et intégral - Nikolaï Piskounov.
- 3) <http://www.telecom.ulg.ac.be>

Les lignes de transmission

I. INTRODUCTION

Les lignes de transmission permettent le transfert des signaux électriques (informations).

Les distances à parcourir sont telles que quelle que soit la fréquence des signaux il faut tenir compte des phénomènes de propagation qui concourent à cette distorsion.

Les lignes de transmission les plus courantes sont les câbles coaxiaux, les lignes bifilaires les paires torsadées, ainsi que les "pistes" sur les cartes à électronique rapide.

Une ligne de transmission est caractérisée par son impédance caractéristique, sa constante d'affaiblissement qui précise les pertes dans la ligne, et la vitesse de propagation des signaux, qui dépend du diélectrique utilisé pour fabriquer la ligne.

A. Lignes bifilaires

a. Paires droite :

2 conducteurs filaires parallèles et maintenus à distance constante l'un de l'autre par un isolant. Pertes importantes. Grande sensibilité au bruit. Bande passante faible.

b. Paires torsadées :

2 conducteurs filaires isolés torsadés. Là aussi une atténuation importante. Moins sensible au bruit. Très utilisé pour le câblage téléphonique et informatique au niveau local.

c. Paires torsadées blindées :

C'est le même câble que la paire torsadée mais entourée d'une feuille conductrice. Meilleure immunité au bruit que la paire torsadée simple. Elles sont très utilisées pour le câblage des réseaux à 10 et 100 Mbits.

Le conducteur cylindrique extérieur sert de blindage. L'immunité au bruit est donc importante. Les pertes restent grandes et dépendent fortement de la qualité du diélectrique utilisé. La bande passante est importante. Ce type de ligne est utilisé dans le domaine du câblage vidéo, informatique, de l'électronique basse fréquence, mais aussi dans le domaine des hyperfréquences jusqu'à plusieurs dizaines de GigaHertz. Pour éviter une atténuation trop importante en hyperfréquence (par exemple à 40 GHz) on utilise des diélectriques spéciaux très onéreux. (plusieurs centaines d'euros le câble de 50 cm)...

Si la fréquence devient très grande ou si l'application nécessite le transport de très fortes puissances comme pour les radars, on ne peut plus utiliser de ligne bifilaire à cause des pertes trop importantes dans le diélectrique, dont l'usage est obligatoire car il maintient les conducteurs. On utilise alors des guides d'onde métalliques tels que ceux décrit dans la suite.

e. Circuits planaires

Dans le domaine des hautes fréquences au-delà de quelques 100 MHz, on utilise des lignes spéciales sur les circuits pour relier les "puces" ou les composants entre eux. Elles sont bons

marchés car elles utilisent la technologie des circuits imprimés. Les différentes géométries existantes sont présentées dans la suite. Les caractéristiques électriques des lignes dépendent des dimensions des métallisations et des caractéristiques des matériaux utilisés (métaux et diélectriques).

B. guides d'ondes

a. Guides d'ondes métalliques

Les guides d'ondes métalliques sont des tuyaux creux en général de section rectangulaire ou circulaire. Ceux-ci ne contiennent le plus souvent que l'air ambiant qui est un diélectrique qui dissipe très peu les ondes électromagnétiques. Cela explique l'intérêt qu'on leur porte dans les applications très hautes fréquences (>50 GHz) ou de fortes puissances (RADAR, Télécommunications par satellite...).

b. Guides d'ondes diélectriques

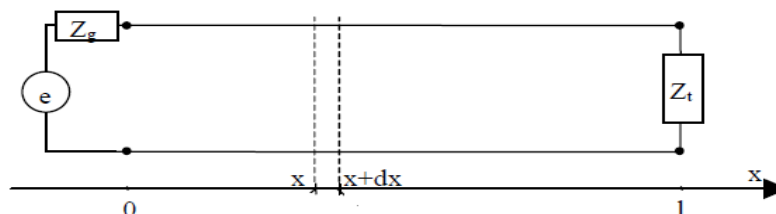
Les guides d'ondes diélectriques sont les fibres optiques. Elles ne peuvent pas propager de tension ou de courant. Elles ne propagent que des ondes électromagnétiques à des fréquences optiques ($f > 10^{15}$ Hz) qui correspondent aux infrarouges ou à la lumière visible. Leur premier avantage réside dans le fait que la lumière s'y propage quasiment sans perte, ce qui autorise des liaisons sans amplification sur des dizaines de kilomètres. Leur second avantage est leur très grande bande passante de plusieurs GHz. Il est par exemple possible de transmettre des milliers de communications téléphoniques simultanées sur une seule fibre. Les liaisons transatlantiques utilisent ces fibres depuis plus de 20 ans.

2. PROPAGATION SUR LES LIGNES DE TRANSMISSION

Nous allons dans ce paragraphe, étudier comment la tension peut se propager dans une ligne bifilaire. L'étude des modes de propagation dans les guides d'ondes métalliques et les fibres optiques ne sera pas faite ici. Comme hypothèse, on va considérer des lignes de transmission pour lesquelles la propagation s'effectue de manière homogène (les lignes de champ sont contenues dans un diélectrique homogène). On utilise des éléments idéaux pour modéliser la ligne.

3.1. Modélisation d'une ligne de transmission

Un modèle simple est décrit ci-dessous :



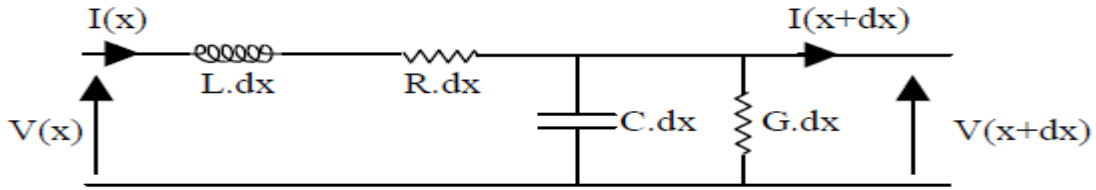


Figure.1. Modèle électrique d'un tronçon de ligne de transmission.

On analyse un petit tronçon $dZ = \Delta Z$ de la ligne.

Les paramètres du modèle (L , R , C et G) sont les paramètres primaires de la ligne et permettent d'exprimer la variation de tension et de courant apportée par le tronçon élémentaire.

Dans le modèle précédent, on définit les paramètres linéiques (L , C , R , G sont définis par unité de longueur) sont caractéristiques de la ligne :

R résistance en série [Ω/m], représente les pertes par effet joule dans les conducteurs
 L inductance en série [H/m], représente les effets magnétiques liés au passage du courant dans les conducteurs,

G conductance parallèle [S/m], représente les pertes du diélectrique.

C capacitance parallèle [F/m], modélise le condensateur composé des 2 conducteurs portés à des potentiels différents

Dans une ligne sans pertes, $R = G = 0$.

Nous avons deux modes d'étude :

A- Régime temporel quelconque

Nous avons vu dans le premier chapitre que, quand la longueur d'onde n'est pas grande devant la longueur des lignes, la tension et le courant varient le long de la ligne. on ne peut donc pas modéliser une ligne de transmission par une cellule unique (LC+ pertes) reliant le générateur à la charge. On va donc remplacer chaque élément de longueur dx par une telle cellule. On va donc remplacer chaque élément de longueur dx par une telle cellule. Cette longueur dx doit être petite devant la longueur d'onde pour que l'on puisse y considérer la tension et le courant uniforme.

On a

$$V(z, t) = Ldx \frac{\partial I(z, t)}{\partial t} + RdzI(z, t) + V(z + dz, t)$$

d'où :

$$\frac{V(z + dz, t) - V(z, t)}{dz} = Ldz \frac{\partial I(z, t)}{\partial t} + RdzI(z, t)$$

c'est à dire :

$$-\frac{\partial V}{\partial z} = L \frac{\partial I(z, t)}{\partial t} + R I(z, t)$$

et de même (au 1er ordre d'approximation) :

$$-\frac{\partial I}{\partial z} = C \frac{\partial V(z, t)}{\partial t} + GV(z, t)$$

en dérivant la relation (1) par rapport à z on obtient :

$$\frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = -L \frac{\partial^2 I(z, t)}{\partial z \partial t} - R \frac{\partial I(z, t)}{\partial z}$$

Équation des télégraphistes

d'où en utilisant la relation (2) :

$$\frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = LC \frac{\partial^2 V(z, t)}{\partial t^2} + (RC + LG) \frac{\partial V(z, t)}{\partial z} + RG V(z, t)$$

On démontre de la même manière que :

$$\frac{\partial^2 I}{\partial z^2} = LC \frac{\partial^2 I(z, t)}{\partial t^2} + (RC + LG) \frac{\partial I(z, t)}{\partial z} + RG I(z, t)$$

a. Cas de la ligne sans perte :

Dans le cas de ligne sans perte, $R=G=0$, ce qui donne (Équation de radioélectriciens):

$$\frac{\partial^2 I}{\partial z^2} = LC \frac{\partial^2 I(z, t)}{\partial t^2}$$

Cette équation est une équation de propagation dont la solution générale s'écrit :

$$V(z, t) = V^+(x - vt, 0) + V^-(x + vt, 0)$$

où $v = 1/\sqrt{LC}$ est la vitesse de propagation. V^+ est une onde de tension qui se propage vers les x croissants à la vitesse v . En effet, si on se déplace suivant l'axe des x croissants à la vitesse v , on voit $x - vt$ constant, et donc $V^+(x - vt)$ constant. De même V^- est une onde qui se propage vers les x décroissants à la vitesse v .

La forme de l'onde ne dépend que du générateur. Si le générateur produit une tension sinusoïdale, impulsionnelle ou autre, l'onde aura la même forme.

b. Cas de la ligne réelle

L'équation des télégraphistes admet également des ondes comme solutions générales. Leur forme dépend là aussi du générateur mais aussi des caractéristiques de la ligne. La forme de

ces ondes va évoluer au fur et à mesure de leur propagation. Elles vont subir une atténuation et une déformation pendant leur propagation.

B. Régime sinusoïdal

On peut procéder de 2 manières pour traiter ce cas particulier de régime temporel.

i) en utilisant le calcul précédent

La tension aux bornes du générateur

$$V(t) = v_0 \cos(\omega t + \varphi)$$

s'écrit en utilisant les notations complexes:

$$V(t) = V_0 e^{j\omega t}$$

et $V_0 = v_0 e^{j\varphi}$

et la tension sur la ligne s'écrit

$$V(x, t) = V(x) e^{j\omega t}$$

où $V(x)$ est l'amplitude complexe de la tension

Toute dérivée par rapport au temps d/dt se transforme en une multiplication par $j\omega$

L'équation des télégraphistes devient alors :

$$\frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = [-LC \omega^2 + (RC + LG)j\omega + RG] V(z)$$

ce qui s'écrit encore :

$$\begin{aligned} \frac{d^2 V(Z)}{dZ^2} - ZY V(Z) &= 0 \\ \frac{d^2 I(Z)}{dZ^2} - ZY I(Z) &= 0 \end{aligned}$$

$$Z = R + jL\omega \quad \text{et} \quad Y = G + jC\omega$$

C. Solutions générales en régime sinusoïdal

a. Cas général de la ligne avec pertes

On pose

$$\gamma^2 = ZY$$

L'amplitude complexe de la tension et du courant s'écrivent :

$$V(x) = V_1 e^{-\gamma x} + V_2 e^{\gamma x}$$

$$I(x) = I_1 e^{-\gamma x} + I_2 e^{\gamma x}$$

où V_1 , V_2 , I_1 et I_2 sont des constantes complexes qui dépendent des conditions aux limites c'est à dire du générateur et de la charge. Les constantes I_1 et I_2 sont reliées aux constantes V_1 et V_2 car le courant et la tension ne sont pas indépendants. Ils sont liés par les équations (3) et (4). En injectant l'expression de $V(x)$ dans l'équation (3) par exemple on trouve des relations entre les constantes V_1 , V_2 , I_1 et I_2 .

On trouve finalement les expressions suivantes que nous utiliserons partout dans la suite de ce cours :

$$V(x) = V_1 e^{-\gamma x} + V_2 e^{\gamma x}$$

$$I(x) = \frac{1}{Z_0} (V_1 e^{-\gamma x} - V_2 e^{\gamma x})$$

ou

$$\gamma = \sqrt{ZY}$$

$$Z_0 = \sqrt{\frac{Z}{Y}}$$

b. Interprétation physique

γ est complexe. On l'écrit sous la forme : $\gamma = \alpha + j\beta$ ou α et β sont réels. On a donc en réintroduisant le temps :

$$V(Z) = V_1 e^{-\gamma x} + V_2 e^{\gamma x} = V_1 e^{-\alpha x} e^{j(\omega t - \beta x)} + V_2 e^{\alpha x} e^{j(\omega t - \beta x)}$$

puis comme

$$v(x, t) = \text{Reel}[V(x, t)]$$

et

$$V_1 = v_1 e^{j\phi_1} \text{ et } V_2 = v_2 e^{j\phi_2}$$

$$V(x, t) = v_1 e^{-\alpha x} \cos(\omega t - \beta x + \phi_1) + v_2 e^{\alpha x} \cos(\omega t + \beta x + \phi_2)$$

où v_1 et v_2 sont 2 constantes réelles et de la même manière :

$$i(x, t) = i_1 e^{-\alpha x} \cos(\omega t - \beta x + \phi_1') - i_2 e^{\alpha x} \cos(\omega t + \beta x + \phi_2')$$

où i_1 et i_2 sont 2 constantes réelles.

La tension $v(x, t)$ (et le courant $i(x, t)$) est **la superposition de deux ondes**. La première est une onde qui se propage vers les x croissants alors que la seconde se propage vers les x décroissants, mais toutes deux s'atténuent au cours de leur propagation d'un facteur $e^{\mp \alpha x}$. La première s'éloignant du générateur sera logiquement appelée "*onde incidente*", alors que la seconde revenant vers le générateur sera appelée "*onde réfléchie*". γ est appelée la constante de propagation complexe, α est la constante d'atténuation et β est la constante de propagation.

Ces ondes se propagent avec une vitesse de phase V_ϕ :

$$V_\phi = \frac{\omega}{\beta}$$

Z_0 , quant à elle, est appelée **impédance caractéristique de la ligne**. Elle ne dépend que des caractéristiques électriques de la ligne. Elle est complexe dans le cas général d'une ligne avec pertes et varie avec la fréquence.

Remarque :

On peut remarquer que dans le cas où seule l'onde incidente se propage, c'est à dire dans le cas où V_2 est nulle, le rapport tension/courant vaut $V(x)/I(x)=Z_0$. Z_0 est donc l'impédance vue par l'onde incidente.

Si Z_0 est indépendante de la fréquence, le générateur, voit au moment de l'allumage une impédance égale à l'impédance caractéristique puisque seule l'onde incidente se propage sur la ligne, l'onde n'ayant pu atteindre la charge pour s'y réfléchir.

c. Cas particulier de la ligne sans perte

Dans le cas d'une ligne sans perte, $R = G = 0$. On a alors :

$$\gamma = \sqrt{XY} = \sqrt{jL\omega jC\omega} = j\omega\sqrt{LC}$$

donc la constante d'atténuation α est nulle: $\alpha = 0$ et la constante de propagation $\beta = \omega\sqrt{LC}$.

La tension (ou le courant) reste dans ce cas la superposition de deux ondes se propageant en sens inverse mais **sans atténuation**.

La relation de dispersion devient alors :

$$V_\phi = \frac{\omega}{\beta} = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

La vitesse de phase est dans ce cas indépendante de la fréquence (si L et C n'en dépendent pas). Les ondes se propagent alors sans distorsion.

De plus l'impédance caractéristique devient purement réelle :

$$Z_0 = \sqrt{\frac{Z}{Y}} = \sqrt{\frac{L}{C}}$$

d. Cas de la ligne avec faibles pertes

Dans le cas de la ligne possédant de faibles pertes, on a : $R \ll Lw$ et $G \ll Cw$.

d'où

$$\begin{aligned}\gamma^2 = ZY &= RG - LC w^2 + jw[RC + LG] = -LC w^2 + jw[RC + LG] \\ &= -LC \left[w^2 - \frac{j}{w} \left(\frac{R}{L} + \frac{G}{C} \right) \right]\end{aligned}$$

d'où

$$\gamma = jw\sqrt{LC} \sqrt{1 - \frac{j}{w} \left(\frac{R}{L} + \frac{G}{C} \right)} = jw\sqrt{LC} \left[1 - \frac{j}{2w} \left(\frac{R}{L} + \frac{G}{C} \right) \right] = \frac{\sqrt{LC}}{2} \left(\frac{R}{L} + \frac{G}{C} \right) + jw\sqrt{LC}$$

d'où

$$\alpha \approx \frac{1}{2w} \left(\frac{R}{L} + \frac{G}{C} \right)$$

et

$$\alpha = w\sqrt{LC}$$

On constate que la constante de propagation est identique à celle calculée dans le cas de la ligne sans perte. Comme dans le cas de la ligne sans perte, la vitesse de phase ne dépend pas de la fréquence :

$$V_\phi = \frac{w}{\beta} = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

e. Cas de la ligne sans distorsion

On a

$$\gamma^2 = RG + LCw^2 + jw(RC + LG)$$

et si

$$k = \frac{R}{L} = \frac{G}{C}$$

On a

$$\gamma = (k + jw)\sqrt{LC}$$

d'où

$$\begin{cases} \alpha = k\sqrt{LC} \\ \beta = w\sqrt{LC} \end{cases}$$

c'est à dire

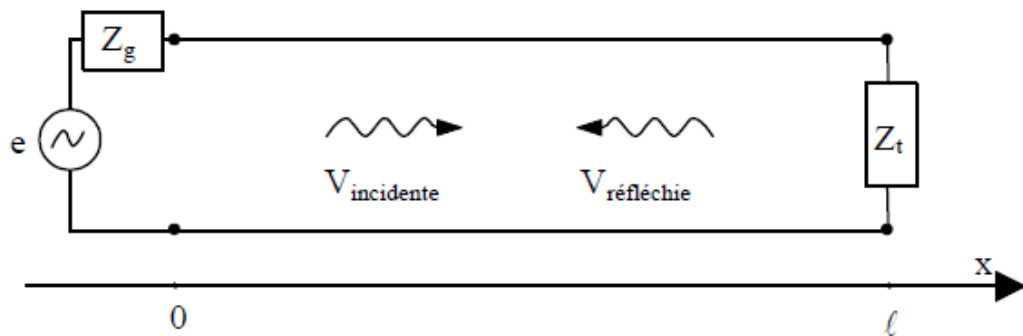
$$V_\phi = \frac{w}{\beta} = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

Pourquoi sans distorsion?

Dans ce cas particulier, malgré les pertes supposées non négligeables, α et V_ϕ sont indépendants de la fréquence. Il n'y a donc pas de déformation du signal pendant sa propagation.

III. COEFFICIENT DE REFLEXION ET IMPEDANCE LE LONG D'UNE LIGNE

1. Coefficient de réflexion



On rappelle l'expression des onde de tension et de courant qui se propagent sur la ligne :

$$V(x) = V_1 e^{-\gamma x} + V_2 e^{\gamma x}$$

$$I(x) = \frac{1}{Z_0} = V_1 e^{-\gamma x} - V_2 e^{\gamma x}$$

ou

$$\gamma = \sqrt{ZY}$$

et

$$Z_0 = \sqrt{\frac{Z}{Y}}$$

L'existence d'une onde réfléchi sur une ligne peut s'expliquer, soit par la présence sur la ligne d'un élément perturbateur tel que la charge disposée en bout de ligne ou par une discontinuité dans les caractéristiques de la ligne. Par exemple, une onde acoustique se propageant dans l'air se réfléchira sur un obstacle interposé sur sa trajectoire (échos sur les flancs d'une montagne) ou encore une onde lumineuse dans une fibre optique se réfléchira partiellement tout au long de sa propagation (rétro diffusion) à cause des micro-imperfections du milieu de propagation composant la fibre. Dans notre cas, nous supposons la ligne de transmission parfaite et n'étudierons que les réflexions causées par l'interposition d'une charge à l'extrémité de la ligne.

Afin de quantifier cette réflexion, on peut définir le coefficient de réflexion comme étant l'amplitude complexe de l'onde réfléchie rapportée à celle de l'onde incidente :

$$\Gamma = \frac{V_{réfléchie}}{V_{incidente}}$$

Ce coefficient de réflexion dépend bien sûr de la position sur la ligne.

$$\Gamma(z) = \frac{V_1 e^{-\gamma x}}{V_2 e^{\gamma x}}$$

c'est à dire

$$\Gamma(z) = \frac{V_1 e^{2\gamma x}}{V_2}$$

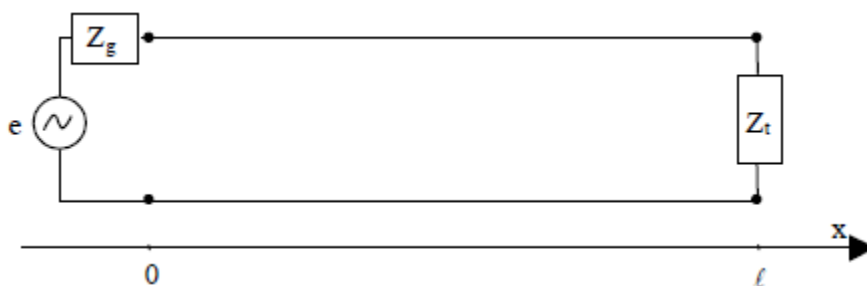
Le coefficient de réflexion est un nombre complexe. On le notera dans la suite :

$$\Gamma(x) = \rho(x)e^{j\theta(x)}$$

L'argument de $\Gamma(x)$ noté $\theta(x)$ est le déphasage de l'onde réfléchie par rapport à l'onde incidente, tandis que le module $\rho(x)$ représente la fraction de tension réfléchie.

2. Impédance sur la ligne

A. Définition



En bout de ligne, on sait relier la tension et le courant par l'impédance complexe.

$$Z_1 = \frac{V_1}{I_1}$$

V_1 et I_1 respectivement la tension et le courant sur la charge placée en bout de ligne, c'est-à-dire en $x = l$.

De la même façon, on peut définir l'impédance en un endroit quelconque de la ligne comme suit :

$$Z(x) = \frac{V(x)}{I(x)}$$

c'est-à-dire :

$$Z(x) = \frac{V_1 e^{-\gamma x} + V_2 e^{\gamma x}}{1/Z_0(V_1 e^{-\gamma x} - V_2 e^{\gamma x})}$$

On définit l'impédance réduite $z(x)$ de $Z(x)$ comme étant :

$$z(x) = \frac{Z(x)}{Z_0}$$

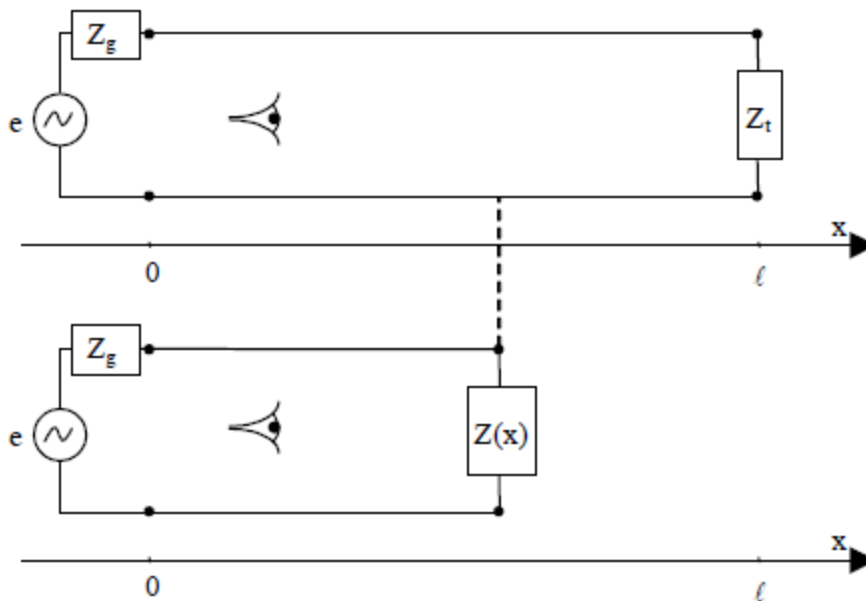
et donc :

$$Z(x) = \frac{V_1 e^{-\gamma x} + V_2 e^{\gamma x}}{(V_1 e^{-\gamma x} - V_2 e^{\gamma x})}$$

B. Interprétation

Du point de vue d'un observateur situé à gauche de l'abscisse x , si on remplace le tronçon de ligne situé à droite d'un plan d'abscisse x terminée par la charge z_t par l'impédance $Z(x)$ rien ne change. L'impédance $Z(x)$ est l'impédance équivalente de tout ce qui se trouve à droite de x . Cela est représenté sur la figure suivante.

On dit encore que $Z(x)$ est l'impédance ramenée en x de z_t le long de la ligne.



3. Relation entre l'impédance et le coefficient de réflexion

A. Cas général

On a vu que :

$$z(x) = \frac{V_1 e^{-\gamma x} + V_2 e^{\gamma x}}{(V_1 e^{-\gamma x} - V_2 e^{\gamma x})}$$

or on a vu que :

$$z(x) = \frac{I + \frac{V_2 e^{\gamma x}}{V_1 e^{-\gamma x}}}{I - \frac{V_2 e^{\gamma x}}{V_1 e^{-\gamma x}}}$$

$$\Gamma(x) = \frac{V_2 e^{2\gamma x}}{V_1}$$

d'où la relation entre $\Gamma(x)$ et $z(x)$:

$$z(x) = \frac{I + \Gamma(x)}{I - \Gamma(x)}$$

ou

$$\Gamma(x) = \frac{z(x) - I}{z(x) + I}$$

B. Relations en bout de ligne

En bout de ligne, en, la relation devient

$$\Gamma_t(x) = \frac{z_t - I}{z_t + I} = \frac{z_t - z_0}{z_t + z_0}$$

C. Changement de variable

Le coefficient de réflexion et l'impédance sur la ligne dépendent, bien sur des caractéristiques de la ligne, mais surtout de la charge placée en bout de ligne. Il est donc possible d'exprimer ces 2 grandeurs en fonction de la seule charge.

Ainsi, en un lieu quelconque de la ligne,

$$\Gamma(x) = \frac{V_2 e^{2\gamma x}}{V_1}$$

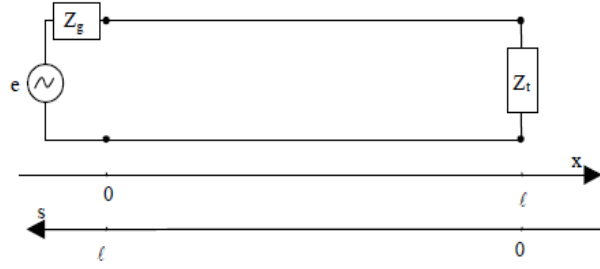
En appliquant cette relation en bout de ligne ($x = \ell$) on trouve :

$$\Gamma(\ell) = \frac{V_2 e^{2\gamma \ell}}{V_1} = \Gamma_t$$

d'où l'on peut tirer la valeur de $\frac{V_2}{V_1}$. On en déduit la relation :

$$\Gamma(x) = \Gamma_t e^{2\gamma(x-\ell)}$$

Cette relation n'est pas très pratique puisqu'elle dépend de la longueur ℓ de la ligne. Or seule la distance entre la charge et le point d'observation (x) est important. C'est la raison pour laquelle on est amené à changer de repère et d'adopter une variable qui a son origine sur la charge.



Sur la figure ci-dessus, on a défini une nouvelle échelle s dirigée vers le générateur et qui a son origine sur la charge. On a $s = \ell - x$, ce qui permet plus simplement d'écrire :

$$\Gamma(x) = \Gamma_t e^{-2\gamma s}$$

Dans ce repère, les ondes de tension et de courant s'écrivent alors :

$$V(x) = V_1 e^{-\gamma x} + V_2 e^{\gamma x}$$

$$\begin{aligned} V(x) &= V_1 e^{-\gamma x} + V_2 e^{\gamma x} = V_1 e^{-\gamma(\ell-s)} + V_2 e^{\gamma(\ell-s)} = V_1 e^{-\gamma\ell} e^{\gamma s} + V_2 e^{-\gamma\ell} e^{-\gamma s} \\ &= V_1' e^{\gamma s} + V_2' e^{-\gamma s} \end{aligned}$$

où V_1' et V_2' sont 2 constantes complexes (comme V_1 et V_l) à déterminer en fonction des conditions aux limites. Pour plus de facilité, que ce soit en coordonnées x ou s , nous noterons dans la suite de ce cours V_l la constante associée à l'onde incidente et V_r celle associée à l'onde réfléchie, ce qui donne :

$$V(s) = V_l e^{+\gamma s} + V_r e^{-\gamma s}$$

de la même manière :

$$I(s) = \frac{V_l e^{+\gamma s} + V_r e^{-\gamma s}}{Z_0}$$

On peut comme précédemment définir le coefficient de réflexion,

$$\Gamma(s) = \frac{V_r e^{-\gamma s}}{V_l e^{\gamma s}} = \frac{V_r}{V_l} e^{-2\gamma s}$$

l'impédance sur l'abscisse s quelconque :

$$Z(s) = \frac{V(s)}{I(s)}$$

et l'impédance réduite

$$z(s) = \frac{Z(s)}{Z_0}$$

la relation entre $\Gamma(s)$ et $z(s)$ reste :

$$z(x) = \frac{V_1 e^{\gamma s} + V_2 e^{-\gamma s}}{(V_1 e^{\gamma s} - V_2 e^{-\gamma s})}$$

or on a vu que :

$$z(x) = \frac{l + \frac{V_2 e^{-\gamma x}}{V_1 e^{\gamma x}}}{l - \frac{V_2 e^{-\gamma x}}{V_1 e^{\gamma x}}}$$

c'est-à-dire

$$z(s) = \frac{l + \Gamma(s)}{l - \Gamma(s)}$$

et

$$\Gamma(s) = \frac{z(s) - l}{z(s) + l}$$

D. Valeurs particulières de z_t

a. La ligne terminée par un court circuit

$$z_t = 0$$

d'ou

$$\Gamma_t = \frac{z_t - l}{z_t + l} = -l$$

or

$$\Gamma_t = \left. \frac{V_2 e^{-2\gamma s}}{V_l} \right|_{s=0} = \frac{V_2}{V_l}$$

d'ou

$$V_2 = -V_l$$

b. La ligne se termine par un circuit ouvert

$$z_t = \infty$$

d'ou

$$\Gamma_t = \frac{z_t - l}{z_t + l} \rightarrow l$$

or

$$\Gamma_t = \frac{V_2}{V_l}$$

d'ou

$$V_2 = V_l$$

c. La ligne se termine par l'impédance caractéristique

$$z_t = l$$

d'ou

$$\Gamma_t = \frac{z_t - l}{z_t + l} = 0$$

or

$$\Gamma_t = \frac{V_2}{V_l}$$

d'ou

$$V_2 = 0$$

Il n'y a donc aucune réflexion dans ce cas là, l'onde est totalement transmise dans la charge.

4. Le coefficient de réflexion le long de la ligne

On a

$$\Gamma(s) = \frac{V_2 e^{-2\gamma s}}{V_l}$$

ce qui, en l'appliquant sur la charge en $s = 0$, donne

$$\Gamma_t = \frac{V_2}{V_l}$$

D'où

$$\Gamma(s) = \Gamma_t e^{-2\gamma s}$$

Γ_t est un nombre complexe que l'on écrira par la suite $\Gamma_t = \rho_t e^{j\theta_t}$

ce qui donne

$$\Gamma(s) = \rho_t e^{-\alpha s} e^{j(\theta_t - 2\beta s)}$$

et sur une ligne sans perte ($\alpha = 0$)

$$\Gamma(s) = \rho_t e^{j(\theta_t - 2\beta s)}$$

Références

1. <http://www.telecom.ulg.ac.be>.
2. Thierry Ditchi , Lignes de transmission, université de Sorbonne PMC. <https://instru.lpem.espci.fr>

Modulation d'amplitude AM, fréquence FM et phase PM

1. Modulation d'une porteuse par l'information

Pour transmettre des informations (audio, vidéo, testes,...) sur des distances grandes, on applique des système de transmission qui sont basés sur la technique de modulation d'un signal porteur issu d'un oscillateur (appelé porteuse) par le signal de l'information en changeant l'un des paramètres de ce dernier : amplitude (dans ce cas on parle de modulation d'amplitude AM), fréquence ou phase (FM ou PM).

une antenne émettrice se chargera ensuite d'envoyer l'onde hertzienne par propagation à une distance proportionnelle à sa puissance d'alimentation.

Techniquement, il est difficile de transmettre un signal basse fréquence (B.F) à cause effectivement de cette longueur nécessaire à l'antenne.

Par exemple : Dans un système de transmission radiophonique FM, pour envoyer un signal de fréquence égale à 100 MHz on obtient une longueur d'onde¹ :

$$\lambda = \frac{c}{f} < \frac{299.792458}{100} = 3\text{m.}$$

la longueur de l'antenne serait de 1.25m. (antenne demi onde $\frac{\lambda}{2}$).

par contre, pour un signal *BF* de 10 KHz, on obtient une longueur d'onde : $\lambda = 29979.2458 \text{ m}$ soit une antenne de longueur de 15 Km, ce qui est impossible à réaliser.

une deuxième raison importante de transmettre en haute fréquence (*H.F*) c'est de translater le spectre d'un signal utile de basse fréquence vers des fréquences qui sont allouées à des canaux de transmission par voix hertziennes.

Au départ, le spectre du signal à transmettre se situe en *bande de base*, c'est-à-dire qu'il occupe des fréquences basses par rapport aux fréquences mises en jeu dans la transmission.

L'opération de modulation le transforme en un *signal à bande étroite* dont le spectre se situe à l'intérieur de la bande passante du canal. À l'arrivée, l'opération de démodulation le ramène en bande de base pour restituer le plus fidèlement possible le signal d'origine².

La caractéristique essentielle d'un canal de transmission est sa bande passante et le rôle de toute modulation est de transformer le signal de départ en un signal à bande étroite dont le spectre est justement contenu dans la bande du canal.

La *porteuse* (véhicule qui transporte le message contenu dans le canal de transmission) est une onde sinusoïdale du type :

$$A \cos(2\pi f_0 t + \varphi)$$

L'opération de modulation consiste à faire varier les caractéristiques de A ou φ de la porteuse au rythme du message à transmettre.

¹ Adel Bourass, transmission analogiques et numériques des signaux, TECHNOSUP.

² <http://claude-gimenes.fr>.

Le signal de départ, porteur de l'information, est appelé *signal modulant*. Le signal obtenu (après modulation) est appelé *signal modulé*.

Il est de la forme :

$$a(t) \cos(2\pi f_0 t + \varphi)$$

quand on a effectué **une modulation d'amplitude** (c'est l'amplitude de la porteuse qui varie et qui contient l'information).

Il est de la forme :

$$A \cos[2\pi f_0 t + \varphi(t)]$$

quand on a effectué **une modulation angulaire** (c'est la phase de la porteuse qui varie et qui contient l'information).

2. Choix d'un type de modulation

Le choix d'un type de modulation dépend d'un certain nombre de critères dont :

- la *largeur de bande* occupée par le signal transmis : dans de nombreux cas, on cherchera à la rendre aussi faible que possible de façon à permettre le multiplexage fréquentiel de nombreux signaux) ;
- le *rapport signal / bruit* après la démodulation qui permet d'estimer la qualité intrinsèque d'une technique de modulation.

3. MODULATION D'AMPLITUDE

3.1. type de modulation

Il existe quatre types de modulations d'amplitude courantes :

1. la modulation DBSP (*double bande sans porteuse*) utilisée pour constituer le multiplex stéréophonique ;
2. la modulation DBAP (*double bande avec porteuse*), dite MA (modulation d'amplitude), très répandue en radiodiffusion ondes courtes, moyennes ou longues ;
3. la modulation BLR (*bande latérale résiduelle*) utilisée en téléphonie (multiplex) et en radiocommunications militaires ;
4. la modulation BLU (*bande latérale unique*) employée pour la transmission du signal vidéo en télévision.

3.2. Modulation par un signal sinusoïdal

Pour simplifier l'étude de modulation, on considère que le signal utile modulant est un signal sinusoïdal.

Le signal modulant : $S(t) = S \cos(\Omega t)$

La porteuse $e_0(t) = E \cos(\omega_0 t)$ modulée par $S(t)$ s'écrit alors :

$$e(t) = [\{E + kS \cos(\Omega t)\} \cos(\omega_0 t)] = E[\{1 + kS/E \cos(\Omega t)\} \cos(\omega_0 t)]$$

$$e(t) = E[1 + m \cos(\Omega t)] \cos(\omega_0 t)$$

Avec $m = kS/E$ appelé indice de modulation.

L'indice de modulation est inférieure à 1. si $m > 1$ on parle de la surmodulation. cette situation apportera une distorsion au signal.

3.2.1. spectre du signal modulé en AM

Le spectre de signal modulé en AM sera déduit de la fonction suivante :

$$e(t) = E[1 + m \cos(\Omega t)] \cos(\omega_0 t)$$

$$e(t) = E[\cos(\omega_0 t) + m \cos(\Omega t) \cos(\omega_0 t)]$$

$$e(t) = E[\cos(\omega_0 t) + m/2 \cos((\omega_0 + \Omega)t) + m/2 \cos((\omega_0 - \Omega)t)]$$

On remarque que le signal modulé en amplitude est la somme de trois signaux de fréquence (3 composantes) : f_0 , $f_0 + F$ et $f_0 - F$.

Le spectre est formé de 3 raies et présente l'allure suivante :

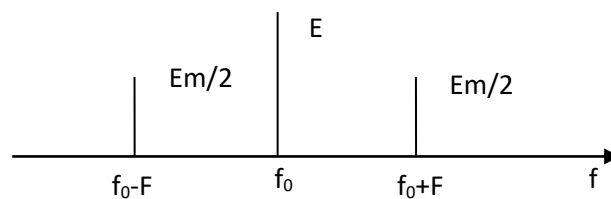


Figure 1. Spectre d'un signal AM.

Dans la pratique, le signal $s(t)$ n'est pas sinusoïdal mais quelconque et possède un spectre qui s'étale entre 0 et une valeur maximal F_{\max} .

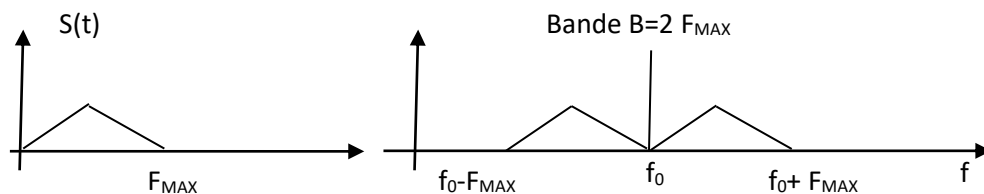


Figure 2. Spectre d'un signal modulant quelconque.

3.2.2. Puissance transportée par un signal AM

La puissance transportée par un signal AM est mesurée aux bornes d'une impédance Z qui peut être scelle de l'antenne émettrice.

$$e(t) = E[\cos(\omega_0 t) + m/2 \cos((\omega_0 + \Omega)t) + m/2 \cos((\omega_0 - \Omega)t)]$$

$$P_T = P_P + 2 P_L = E^2/2Z + (m/2)^2/2Z + (m/2)^2/2Z = E^2/2Z \left[1 + m^2/2 \right]$$

$$= P_P \left[1 + m^2/2 \right]$$

avec P_T : puissance total, P_P : puissance de la porteuse et P_L : puissance de la bande latérale.

Remarque : Si l'onde à transmettre est constituée d'un spectre composé par un certain nombre de raies, alors :

$$s(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} S_n \cos (\Omega_n t + \varphi_n)$$

la puissance émise par le signal modulé sera :

$$P_T = P_P \left[1 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} m_n^2 \right]$$

$$\text{et } m_n = \frac{1}{N} \sqrt{\sum_{i=1}^{+\infty} m_i^2}$$

3.2.3. Modulation AM sans porteuse

A. Modulation avec deux bande latérales AM-DSB

On réalise la modulation d'amplitude AM uniquement avec deux bande latérales et sans porteuse (porteuse supprimée) en effectuant la multiplication de la porteuse par le signal modulant.

On obtient alors :

$$e(t) = E[S(t)\cos(w_0 t)]$$

Dans le cas le plus simple ou le signal modulant est sinusoïdal, on obtient:

$$e(t) = ES[\cos (\Omega t)\cos(w_0 t)]$$

$$e(t) = E[S/2 \cos((w_0 + \Omega)t) + S/2 \cos((w_0 - \Omega)t)]$$

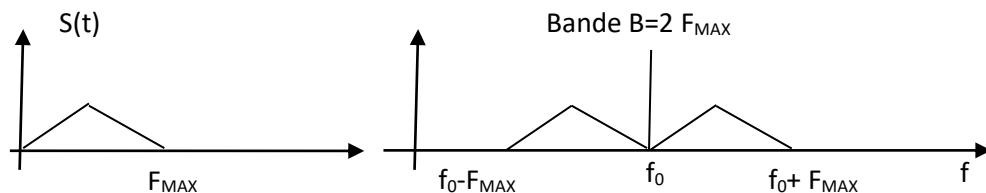


Figure 3. Spectre d'un signal modulé en AM-DSB.

B) Modulation à bande latérale unique AM-SSB

On utilise par exemple la méthode par décalage de phase. Le montage de la figure suivante représente un modulateur AM à bande latérale unique. on peut choisir la bande latérale supérieure ou inférieure.

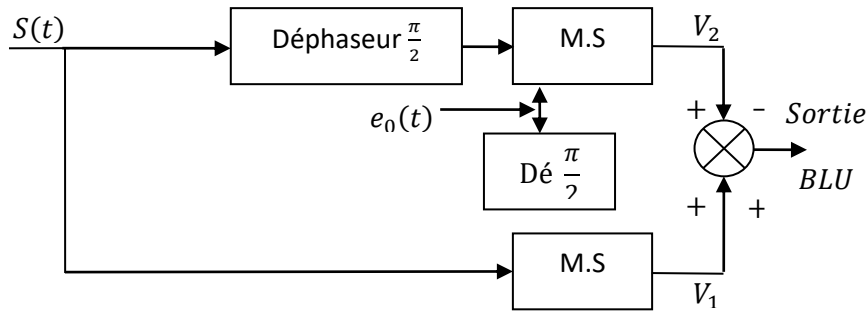


Figure 4. La modulation AM-DSB.

(M.S : Modulateur symétrique.)

La tension de sortie du modulateur V1 :

$$e(t) = ES[\cos(\Omega t)\cos(w_0 t)] = \frac{1}{2}SE [\cos((w_0 + \Omega)t) + \cos((w_0 - \Omega)t)]$$

La tension de sortie du modulateur V2 :

$$e(t) = ES[\sin(\Omega t)\sin(w_0 t)] = \frac{1}{2}SE [\cos((w_0 - \Omega)t) - \cos((w_0 + \Omega)t)]$$

Si on fait la somme V1+V2 on obtient le signal AM-LSB :

$$v_s(t) = SE [\cos((w_0 - \Omega)t)]$$

Si on fait la soustraction V1-V2 on obtient le signal AM-LSB :

$$v_s(t) = SE [\cos((w_0 + \Omega)t)]$$

Le spectre d'un signal BLU est constitué par l'une des deux bandes latérales du signal AM classique :

$$v_s(t) = SE [\cos((w_0 + \Omega)t)]$$

4. Démodulation d'un signal AM

L'antenne d'un récepteur est soumise à toutes à toutes sortes d'ondes. L'étage de sélection permet de choisir le canal voulu. Il est constitué essentiellement d'un oscillateur local à fréquence variable et d'un mélangeur. Après sélection de la fréquence désirée, on réalise une pré-amplification du signal RF ainsi qu'un contrôle automatique du gain (CAG) afin de maintenir l'amplitude du signal à niveau acceptable permettant son démodulation. ensuite toute fréquence captée est ramenée à une fréquence intermédiaire (FI) afin de pouvoir utiliser

un seul étage démodulateur pour toute la bande de fréquences susceptible d'être captée par le récepteur.

4.1. Démodulation synchrone

Dans une démodulation synchrone, on multiplie, dans un circuit multiplieur analogique (MC1596) ; le signal capté modulé en AM par un signal sinusoïdal issu d'un oscillateur local qui doit être en phase (synchrone).

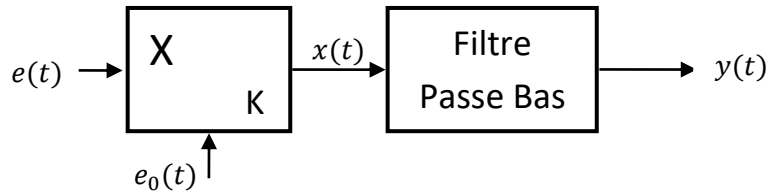


Figure 5. Principe du démodulateur synchrone (Multiplication et filtrage).

On obtient à la sortie du multiplieur de gain k le signal $x(t)$.

$$e(t) = E[1 + m \cos(\Omega t)] \cos(\omega_0 t)$$

$$e(t) = E_0 [\cos(\omega_0 t + \varphi)]$$

$$x(t) = kE_0 E[1 + m \cos(\Omega t)] \cos(\omega_0 t + \varphi)$$

$$x(t) = kE_0 E[1 + m \cos(\Omega t)] \cos(2\omega_0 t + \varphi) \cos(\varphi)$$

$$x(t) = \frac{kE_0 E}{2} \cos(\varphi) + \frac{kE_0 E}{2} m \cos(\Omega t) \cos(\varphi) + \frac{kE_0 E}{2} \cos(2\omega_0 t + \varphi) \\ + \frac{kE_0 E}{4} m \cos(2\omega_0 t + \varphi + \Omega t) + \frac{kE_0 E}{4} m \cos(2\omega_0 t + \varphi - \Omega t)$$

Par la suite le filtre passe bas élimine les caractéristiques de fréquences $(2f_0)$, $(2f_0 + F)$ et $(2f_0 - F)$.

le signal à la sortie sera alors :

$$x(t) = \frac{kE_0 E}{2} \cos(\varphi) + \frac{kE_0 E}{2} m \cos(\Omega t) \cos(\varphi)$$

Après l'élimination de la composante continue, on obtient le signal

$$x(t) = \frac{kE_0 E}{2} m \cos(\Omega t) \cos(\varphi)$$

qui est proportionnel au signal modulant $S(t)$.

5. Modulation angulaire

Le signal de l'information $s(t)$ à transmettre module la fréquence instantanée de la porteuse.

Le signal transmis s'écrit d'une façon générale sous la forme:

$$e(t) = E(t) \cos \theta(t)$$

en modulation angulaire, l'angle $\theta(t)$ peut être écrit sous la forme :

$$\theta(t) = w_0 t + \varphi(t)$$

$\theta(t)$ est une fonction linéaire du temps, et w est la dérivée de l'argument θ :

$$w(t) = \frac{d\theta(t)}{dt} = w_0 + \frac{d\varphi(t)}{dt}$$

Cette pulsation est susceptible de varier autour de f_0 ; par l'intermédiaire du terme $\frac{d\varphi(t)}{dt}$ qui dépend du signal à transmettre $s(t)$. On distingue deux dispositifs de modulation : modulation de phase et modulation de fréquence.

5.1. Modulation de phase

la phase $\varphi(t)$ est directement proportionnelle au signal modulant $s(t)$.

On a $s(t) = S \cos \Omega t = S \cos(2\pi F)t$.

$\varphi(t)$ contient l'information, donc c'est la variation de la phase qui transportera le signal utile $s(t)$.

$$\varphi(t) = \varphi_0 + K_p S \cos \Omega t$$

avec φ_0 : déphasage initial et K_p : coefficient du modulateur de phase.

pour simplifier, on considère que $\varphi_0 = 0$.

dans l'expression de l'argument, on trouve alors :

$$\theta(t) = w_0 t + K_p S \cos \Omega t$$

l'expression de la porteuse modulée en phase sera alors :

$$e(t) = E(t) \cos \theta(t) = E \cos(w_0 t + \varphi(t)) = E \cos(w_0 t + K_p S \cos \Omega t)$$

avec $m_p = K_p S$, indice de modulation de phase.

5.2. Modulation de fréquence

dans ce cas il faut que la fréquence de la porteuse varie au rythme de la modulation, on a donc :

$$f = f_0 + K_f s(t) = f_0 + K_f S \cos \Omega t$$

par suite, la pulsation devient :

$$w(t) = w_0 + 2\pi K_p S \cos \Omega t$$

pour connaître les variations de la fréquence de la porteuse dues à cette modulation, on a :

$$w(t) = \frac{d\theta}{dt} \Rightarrow \theta(t) = \int_0^t w(t) dt = \int_0^t [w_0 + 2\pi K_p S \cos \Omega t] dt = w_0 t + \frac{K_p S}{F} \sin \Omega t.$$

avec

$$\Delta f = K_p S$$

l'équation de la porteuse modulée en fréquence modulée en fréquence sera alors :

$$e(t) = E \cos \theta(t) = E \cos \left[w_0 t + \frac{K_p S}{F} \sin \Omega t \right]$$

$$e(t) = E \cos [w_0 t + m_f \sin \Omega t]$$

l'indice de modulation en fréquence :

$$m_f = \frac{K_p S}{F} = \frac{\Delta f}{F}$$

L'allure d'un signal modulé en fréquence sera comme suit :

Figure 5. la porteuse FM avec un signal modulant sinusoïdal.

5.3. Spectre d'un signal modulé en fréquence : coefficients de Bessel.

le spectre en fréquence d'un signal modulé en FM est étudié pour deux cas :

indice de modulation m_f faible (< 0.8)

indice de modulation m_f élevé : utilisation de coefficients de Bessel..

a) Cas ou m_f est faible

$$e(t) = E \cos [w_0 t + m_f \sin \Omega t]$$

$$e(t) = E \cos(w_0 t) \cos(m_f \sin \Omega t) - E \sin(w_0 t) \sin(m_f \sin \Omega t)$$

on a alors :

$$\cos(m_f \sin \Omega t) \approx 1$$

$$\sin(m_f \sin \Omega t) \approx m_f \sin \Omega t$$

d'ou

$$e(t) = E \cos(w_0 t) - E m_f \sin(w_0 t) \sin \Omega t$$

$$e(t) = E \cos(w_0 t) - \frac{E m_f}{2} \cos(w_0 - \Omega)t + \frac{E m_f}{2} \cos(w_0 + \Omega)t$$

on a alors l'allure suivante :

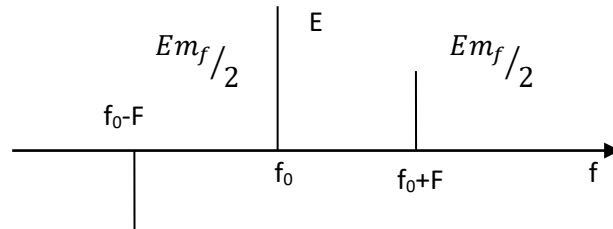


Figure 6. Spectre en fréquence pour m_f faible.

La modulation de fréquence à indice de modulation faible ressemble à une modulation d'amplitude.

En AM on a en effet :

$$e(t) = E \cos(w_0 t) + \frac{E m_f}{2} \cos(w_0 - \Omega)t + \frac{E m_f}{2} \cos(w_0 + \Omega)t$$

b) Cas où m_f est élevé

Dans ce cas, on ne peut plus faire les approximations précédentes et se limiter au premier terme du développement en $\cos(m_f \sin \Omega t)$ et $\sin(m_f \sin \Omega t)$.

On doit utiliser un développement des fonctions exponentielles à partir des fonctions de Bessel:

$$e(t) = E \cos[w_0 t + m_f \sin \Omega t]$$

Cette expression se développe à l'aide des fonctions de Bessel:

$$e(t) = E \cos[w_0 t + m_f \sin \Omega t]$$

Calcul du spectre du signal modulé en fréquence (FM)

On pose : $m_f = \beta$

$$e(t) = E \cos(2\pi f_0 t + \beta \sin(2\pi F t))$$

$$e(t) = E \cos(w_0 t + \beta \sin(\Omega t))$$

$$e(t) = E \operatorname{Re}(e^{j(w_0 t + \beta \sin(\Omega t))})$$

$$e(t) = E \operatorname{Re}(e^{j\omega_0 t} \cdot e^{j\beta \sin(\Omega t)})$$

On s'intéresse d'abord au : $y = e^{j\beta \sin(\Omega t)}$

On pose : $\theta(t) = \Omega t$

$$\sin \theta = \frac{e^{j\theta} + e^{-j\theta}}{2j} \quad \dots \quad j \cdot \sin \theta = \frac{e^{j\theta}}{2} + \frac{e^{-j\theta}}{2}$$

$$y = e^{j\beta \sin(\Omega t)} = e^{j\beta \sin \theta(t)} = e^{\beta \frac{e^{j\theta}}{2}} \cdot e^{-\beta \frac{e^{-j\theta}}{2}}$$

Nous avons : $e^x = \sum_0^{+\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots \dots \dots$

$$y = \sum_{n \geq 0} \left(\frac{\beta}{2}\right)^n \frac{e^{jn\theta}}{n!} \cdot \sum_{n \geq 0} \left(\frac{\beta}{2}\right)^n \frac{e^{-jn\theta}}{n!}$$

$$y = \left[1 + \frac{\beta}{2} e^{j\theta} + \frac{\beta^2}{4 \cdot 2!} e^{j2\theta} + \frac{\beta^3}{8 \cdot 3!} e^{j3\theta} \dots \right] \cdot \left[1 - \frac{\beta}{2} e^{-j\theta} + \frac{\beta^2}{4 \cdot 2!} e^{-j2\theta} - \frac{\beta^3}{8 \cdot 3!} e^{-j3\theta} \dots \right]$$

$$y = \underbrace{\left[1 - \frac{\beta^n}{4} + \frac{\beta^n}{2^4 (2!)^2} - \dots \right]}_{J_0(\beta)} e^0 + \underbrace{\left[\frac{\beta}{2} - \frac{\beta^3}{2^3 2!} + \frac{\beta^5}{2^5 2! 3!} - \dots \right]}_{J_1(\beta)} e^{j\theta} + \dots$$

$$+ \underbrace{\left[-\frac{\beta}{2} + \frac{\beta^3}{2^3 2!} - \frac{\beta^5}{2^5 2! 3!} + \dots \right]}_{J_3(\beta)} e^{j\theta}$$

Fonctions de Bessel et propriétés

Les termes $J_n(\beta)$ sont les fonctions de Bessel de 1^{ère} espèce d'ordre n et ils sont obtenus à partir de l'expression suivante :

$$J_n(\beta) = \sum_{k \geq 0} \frac{(-1)^k}{k!} \frac{\left(\frac{\beta}{2}\right)^{n+2k}}{(n+k)!}$$

Les propriétés importantes des fonctions de Bessel sont les suivantes :

1. $J_{-n}(\beta) = (-1)^n J_n(\beta)$
2. Pour des faibles valeurs de β □ nous avons :

$$J_0(\beta) \cong 1$$

$$J_1(\beta) \cong \frac{\beta}{2}$$

$$J_n(\beta) \cong 0 \text{ pour } n > 2$$
3. $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} J_n^2(\beta) = 1$

D'après ce qui vient d'être dit, on peut écrire l'identité de Bessel :

$$y = \sum_{n \geq 0} \left(\frac{\beta}{2}\right)^n \frac{e^{jn\theta}}{n!} \cdot \sum_{n \geq 0} \left(\frac{\beta}{2}\right)^n \frac{e^{-jn\theta}}{n!}$$

$$y = e^{j\beta \sin(\Omega t)} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} J_n(\beta) e^{jn\Omega t}$$

Revenons à l'expression $s(t)$. Elle s'écrit :

$$e(t) = E \operatorname{Re}(e^{jw_0 t} \cdot e^{j\beta \sin(\Omega t)}) = E \operatorname{Re}(e^{jw_0 t}) \operatorname{Re}(e^{j\beta \sin(\Omega t)})$$

$$e(t) = E \operatorname{Re}(e^{jw_0 t} \cdot e^{j\beta \sin(\Omega t)}) = E \operatorname{Re}(e^{jw_0 t}) \operatorname{Re}\left(\sum_{n=-\infty}^{+\infty} J_n(\beta) e^{jn\Omega t}\right)$$

$$e(t) = E \left[\begin{array}{l} J_0(\beta) \cos(w_0 t) \\ + J_1(\beta) [\cos(w_0 - \Omega)t + \cos(w_0 + \Omega)t] \\ + J_2(\beta) [\cos(w_0 - 2\Omega)t + \cos(w_0 + 2\Omega)t] \\ + J_3(\beta) [\cos(w_0 - 3\Omega)t + \cos(w_0 + 3\Omega)t] \\ + \\ \dots \end{array} \right]$$

On obtient un spectre de raies symétrique par rapport à f_0 et avec un écart de F entre chaque raie comme on peut le voir sur la Figure 1. On a : $|J_n(\beta)| = |J_{-n}(\beta)|$

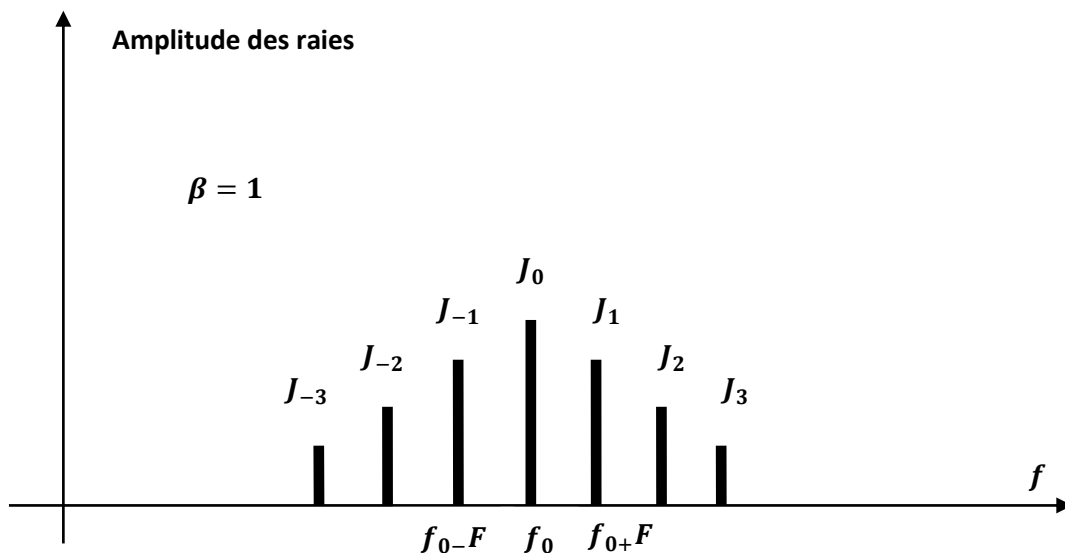


Figure 7. spectre d'un signal modulé en fréquence avec une fréquence porteuse f_0 et une fréquence modulante F .

Fonctions de Bessel de 1^{ère} espèce

La Figure 8 montre l'allure des fonctions de Bessel de 1ère espèce en fonction de l'indice de modulation β . L'amplitude des raies ne décroît pas nécessairement avec l'ordre. Quand $\beta > \beta_n$, $J_n(\beta) > J_{-n}(\beta)$ et on utilise cette propriété pour limiter l'étendue du spectre.

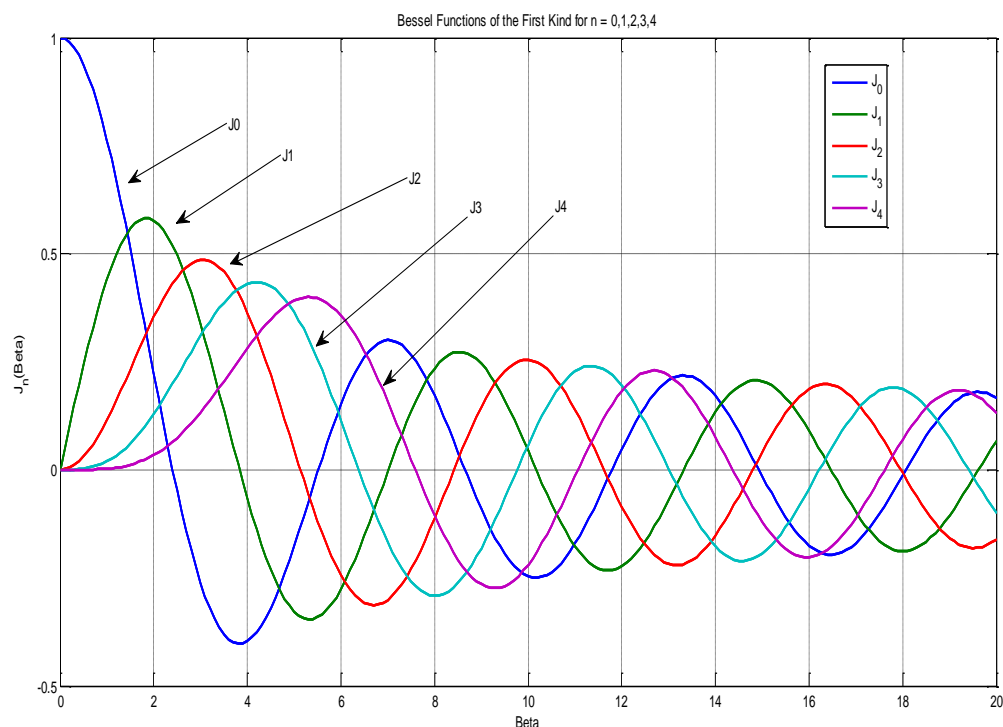


Figure 8. fonctions de Bessel de 1ère espèce.

β	$J_0(\beta)$	$J_1(\beta)$	$J_2(\beta)$	$J_3(\beta)$	$J_4(\beta)$	$J_5(\beta)$	$J_6(\beta)$	$J_7(\beta)$	$J_8(\beta)$	$J_9(\beta)$	$J_{10}(\beta)$	$J_{11}(\beta)$
0	1	0										
0.2	0.99	0.099	0.005	0.0002								
0.25	0.98	0.12										
0.4	0.9604	0.196	0.0157	0.0013								
0.6	0.912	0.2867	0.0437	0.0044								
0.8	0.8463	0.3688	0.0758	0.0102	0.001							
1	0.7652	0.4401	0.1149	0.0195	0.0025							
1.2	0.6711	0.4983	0.1593	0.0329	0.005							
1.4	0.5669	0.5419	0.207	0.0505	0.009							
1.6	0.4554	0.5699	0.2570	0.0725	0.01439							
2	0.2239	0.5767	0.3528	0.1289	0.034							
2.4	0.0025	0.5202	0.4311	0.1981	0.0643							
2.8	-0.261	0.3391	0.4783	0.2728	0.1067							
3	-0.2601	0.3391	0.4861	0.3091	0.132	0.043	0.0114					
4	-0.3971	-0.066	0.3641	0.4302	0.2811	0.1321	0.0491	0.0152	0.004			
5	-0.1776	-0.3276	0.0466	0.3648	0.3912	0.2611	0.131	0.0534	0.0184	0.0055		
6	0.1506	-0.2767	-0.2429	0.1148	0.3576	0.3621	0.2458	0.1296	0.0565	0.0212	0.0069	
7	0.3001	-0.0047	-0.3014	-0.1676	0.1578	0.3479	0.3392	0.2336	0.128	0.0589	0.0235	0.0083

Tableau 1. coefficient de Bessel de 1ère espèce