Chapitre II : Transformée de Fourier

1- Définition

C'est une généralisation de la décomposition en série de Fourier aux signaux déterministes. Elle permet d'obtenir les composantes spectrales (fréquentielles) du signal.
Soit $x(t)$ un signal déterministe, sa transformée de Fourier est une fonction, généralement complexe, de la variable f et définie par :

$$TF[x(t)] = X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-j2\pi ft}dt$$

Ainsi :

$$X(f) = |X(f)|e^{j\varphi(f)}$$

On appelle $|X(f)|$ et $\varphi(f)$ respectivement spectres d'amplitude et de phase de $x(t)$.

Si la transformée de Fourier d'un signal existe, la transformée de Fourier inverse est donnée par :

$$TF^{-1}[X(f)] = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f)e^{j2\pi ft}df$$

2- Propriétés

$x(t)$	$X(f)$
$x_1(t)$	$X_1(f)$
$x_2(t)$	$X_2(f)$
$a\,x_1(t) + b\,x_2(t)$	$a\,X_1(f) + b\,X_2(f)$
$x(t-t_0)$	$e^{-j2\pi ft_0}X(f)$
$e^{j2\pi f_0 t}x(t)$	$X(f-f_0)$
$x(at)$	$\frac{1}{\lvert a\rvert}X\left(\frac{f}{a}\right)$
$x^*(t)$	$X^*(-f)$
$x(-t)$	$X(-f)$
$\frac{d}{dt}x(t)$	$j2\pi f\,X(f)$
$x(t)$ **réel**	$\begin{cases} X(-f) = X^*(f) \\ \lvert X(-f)\rvert = \lvert X(f)\rvert \\ Arg\,X(-f) = -Arg\,X(f) \end{cases}$

3- Transformées de Fourier usuelles

$$TF[\delta(t)] = 1$$

$$TF[1] = \delta(f)$$

$$TF[A\cos(2\pi f_0 t)] = \frac{A}{2}\big(\delta(f - f_0) + \delta(f + f_0)\big)$$

$$TF[A\sin(2\pi f_0 t)] = \frac{A}{j2}\big(\delta(f - f_0) - \delta(f + f_0)\big)$$

$$TF[sgn(t)] = \frac{1}{j2\pi f}$$

$$TF[u(t)] = \frac{1}{j2\pi f} + \frac{1}{2}\delta(f)$$

4- Transformées de Fourier des signaux à énergie infinie

Soit $x(t)$ un signal à énergie infinie, $x(t)$ peut être écrit sous la forme :

$$x(t) = \overline{x}(t) + x_0(t)$$

Où $\overline{x}(t)$ est la moyenne de $x(t)$

Donc

$$X(f) = \frac{1}{j2\pi f} TF[x_0(t)] + \overline{x}(t)\delta(f)$$

5- Exemple

Soit $x(t)$ un signal, tel que :

$$x(t) = \cos(200\pi t) + \cos(400\pi t) + \cos(800\pi t)$$

On sait que :

$$TF[A\cos(2\pi f_0 t)] = \frac{A}{2}\big(\delta(f - f_0) + \delta(f + f_0)\big)$$

Ainsi la transformée de Fourier de $x(t)$ est :

$$X(f) = \frac{1}{2}\big(\delta(f - 100) + \delta(f + 100)\big) + \big(\delta(f - 200) + \delta(f + 200)\big) + \frac{1}{2}\big(\delta(f - 400) + \delta(f + 400)\big)$$

Et le spectre d'amplitude :