Méthodes Numériques

Fiche de TD N°3 : Interpolation de fonctions

Exercice N°1 :

Déterminer le polynôme d'interpolation, de degré inférieur ou égal à 3, de la fonction passant par les points définis dans le tableau qui suit, par la méthode de Lagrange.

x_i	-1	2	4	5
$f(x_i)$	-2	43	213	376

Exercice N°2 :

Etant donnée une fonction définie sous la forme discrète suivante :

x_i	0	1	3	4
$f(x_i)$	1	1	2,5	3,4

Calculer $P_3(2{,}8)$ qui est l'approximation de $f(2{,}8)$ en utilisant la méthode de Newton pour les différences divisées.

Exercice N°3 :

Soit f une fonction définie de façon discrète sur l'intervalle $[0\ \ 6]$ selon la table :

x_i	0	2	4	6
$f(x_i)$	0,5	-2,5972	2,8953	-1,1878

a- En utilisant les différences finies, calculer la valeur du polynôme d'interpolation $P_3(x)$ pour $x = 3$ et $x = 5$

b- Sachant que la fonction f est égale à :

$$f(x) = 3\sin(2x) + \frac{1}{2}\cos(2x)$$

Calculer l'erreur d'interpolation que l'on commet en $x = 3$ et en $x = 5$. Les résultats sont-ils cohérents ?

Exercice N°4 :

Démontrer les relations suivantes :

- $\sum_{i=0}^{n} L_i(x) = 1$
- $\sum_{i=0}^{n} x_i^k L_i(x) = x^k$ et ce $\forall k \in N$

Où les $L_i(x)$ sont les polynômes de Lagrange

NB : remarquez que la fonction de la première démonstration est autre un cas particulier de la seconde, cela peut vous amener à facilement démonter les deux égalités.

Exercice N°5 :

Soit le polynôme $P_3(x) = x^3 + x^2$, avec $-2 \leq x \leq 4$, écrire alors le développement de ce polynôme en fonction des polynômes de Tchebychev.

Corrigé de la fiche de TD N°3

Exercice 1

Les polynômes de Lagrange :

$$L_0(x) = \frac{(x-2)(x-4)(x-5)}{-3 \times -5 \times -6} = -\frac{1}{90}(x^3 - 11x^2 + 38x - 40)$$

$$L_1(x) = \frac{(x+1)(x-4)(x-5)}{3 \times -2 \times -3} = \frac{1}{18}(x^3 - 8x^2 + 11x + 20)$$

$$L_2(x) = \frac{(x+1)(x-2)(x-5)}{5 \times 2 \times -1} = -\frac{1}{10}(x^3 - 6x^2 + 3x + 10)$$

$$L_3(x) = \frac{(x+1)(x-2)(x-4)}{6 \times 3 \times 1} = \frac{1}{18}(x^3 - 5x^2 + 2x + 8)$$

Alors le polynôme d'interpolation sera :

$$2\,L_0(x) + 43L_1(x) + 213L_2(x) + 376L_3(x)$$

$$P_3(x) = 2x^3 + 4x^2 + 5x + 1$$

Exercice 2

La pyramide des différences finies progressives :

0	1			
		0		
1	1		0,25	
		0,75		-0,05
3	2,5		0,05	
		0,9		
4	3,4			

On peut déterminer alors le polynôme d'interpolation :

$$P_3(x) = -0{,}05x^3 + 0{,}45x^2 - 0{,}4x + 1$$

Ou tout simplement calculer :

$$\begin{aligned} P_3(2{,}8) &= 1 + 0 \times (2{,}8-0) + 0{,}25 \times (2{,}8-0)(2{,}8-1) - 0{,}05 \times (2{,}8-0)(2{,}8-1)(2{,}8-3) \\ &= 2{,}3104 \end{aligned}$$

Exercice N°3

La pyramide des différences finies de la fonction est :

0,5			
	-3,0972		
-2,5972		8,5897	
	5,4925		-18,1653
2,8953		-9,5756	
	-4,0131		
-1,1878			

Pour x =3, $P_3(x)$ est :

$$P_3(3) = 0{,}5 - \frac{3{,}0972}{2} \times (3-0) + \frac{8{,}5897}{2 \times 4} \times (3-0)(3-2) - \frac{18{,}1653}{6 \times 8} \times (3-0)(3-2)(3-4)$$
$$= 0{,}2107$$

Pour x =5, $P_3(x)$ est :

$$P_3(5) = 0{,}5 - \frac{3{,}0972}{2} \times (5-0) + \frac{8{,}5897}{2 \times 4} \times (5-0)(5-2) - \frac{18{,}1653}{6 \times 8} \times (5-0)(5-2)(5-4)$$
$$= 3{,}1862$$

Alors que

$f(3) = 3\sin(6) + \frac{1}{2}\cos(6) = -0{,}3582$ et que $f(5) = 3\sin(10) + \frac{1}{2}\cos(10) = -2{,}0516$

L'écart est évidemment très grand mais il est prévisible si on calcule l'erreur d'interpolation :

$$E_n \leq \frac{M_4}{4!} \times |(x-0)(x-2)(x-4)(x-6)|$$

Où $M_4 = Max|f^{IV}(x)|\ \ dans\ [0 \quad 6]$

On calcule la quatrième dérivée : $f^{IV}(x) = 48\sin(2x) + 8\cos(2x)$

Le maximum de cette dérivée est lorsque $f^{V}(x) = 0$

Alors $96\cos(2x) - 16\sin(2x) = 0 \Rightarrow tang(2x) = 6 \ \ \Rightarrow 2x = 1{,}4056$

Donc $M_4 = Max|f^{IV}(x)|\ = 48\sin(1{,}4056) + 8\cos(1{,}4056) = 48{,}6621$

L'erreur d'interpolation sera :

Pour x = 3 :

$$E_n \leq \frac{48{,}6621}{4!} \times |(3-0)(3-2)(3-4)(3-6)| = 18{,}2483$$

Pour x = 5 :

$$E_n \leq \frac{48{,}6621}{4!} \times |(5-0)(5-2)(5-4)(5-6)| = 30{,}4138$$

Exercice N°4:

Pour montrer que $\sum_{i=0}^{n} L_i(x) = 1$, il suffit d'interpoler la fonction $f(x) = 1$
Alors pour tout x_i, $y_i = f(x_i) = 1$, donc $P_n(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i L_i(x) = \sum_{i=0}^{n} L_i(x) = f(x) = 1$

Pour montrer que $\sum_{i=0}^{n} x_i^k L_i(x) = x^k$, il suffit d'interpoler la fonction $f(x) = x^k$
Pour tout x_i, $y_i = f(x_i) = x_i^k$, donc $P_n(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i L_i(x) = \sum_{i=0}^{n} x_i^k L_i(x) = f(x) = x^k$

Exercice N°5:

D'abord on ramène x à l'intervalle des polynômes de Tchebychev :
$-2 \le x \le 4$ alors $-2-1 \le x-1 \le 4-1$ ce qui donne : $-1 \le \frac{x-1}{3} \le 1$
Donc $t = \frac{x-1}{3}$ alors $x = 3t+1$
Alors : $x^3 + x^2 = (3t+1)^3 + (3t+1)^2 = 27t^3 + 36t^2 + 15t + 2$
D'autre part, les polynômes de Tchebychev obéissent à la récurrence :
$T_{n+1}(t) = 2tT_n(t) - T_{n-1}(t)$
Ce qui donne :
$T_0(t) = 1$
$T_1(t) = t$
$T_2(t) = 2t^2 - 1$
$T_3(t) = 4t^3 - 3t$
De là :

$$t^2 = \frac{T_2(t) + T_0(t)}{2}$$

$$t^3 = \frac{T_3(t) + 3T_1(t)}{4}$$

Et on remplace dans l'expression de $x^3 + x^3$

$$\begin{aligned} x^3 + x^2 &= 27 \times \frac{T_3(t) + 3T_1(t)}{4} + 36 \times \frac{T_2(t) + T_0(t)}{2} + 15T_1(t) + 2T_0(t) \\ &= \frac{27}{4} T_3(t) + 18T_2(t) + \frac{141}{4} T_1(t) + 20T_0(t) \end{aligned}$$