Chapitre II : Décomposition en série de Fourier

1- Théorème de Fourier

Sous certaines conditions de dérivation et de continuité, tout signal à temps continu $x(t)$ périodique de période T peut s'écrire sous la forme d'une somme de signaux sinusoïdaux.

Il existe trois formes.

2- 1ère forme de série de Fourrier

C'est une forme trigonométrique qui s'exprime en sinus et cosinus, soit :

$$x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n cos(2\pi n f_0 t) + b_n sin(2\pi n f_0 t) \quad , \; f_0 = \frac{1}{T}$$

$\frac{a_0}{2}$ est la composante continue (la moyenne du signal)

f_0 est la fréquence fondamentale.

Les fréquences qui sont des multiples de $f_0$sont les harmoniques.

Les coefficients a_0, a_n et b_n sont calculés par :

$$a_0 = \frac{1}{T}\int_0^T x(t)dt$$

$$a_n = \frac{2}{T}\int_0^T x(t)cos(2\pi n f_0 t)dt$$

$$b_n = \frac{2}{T}\int_0^T x(t)sin(2\pi n f_0 t)dt$$

Propriétés :

Si $x(t)$ est un signal paire : $b_n = 0$

Si $x(t)$ est un signal impaire : $a_n = 0$

3- 2ème forme de série de Fourrier

C'est une forme trigonométrique qui s'exprime en cosinus, soit :

$$x(t) = A_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} A_n cos(2\pi n f_0 t + \varphi_n) \quad , \; f_0 = \frac{1}{T}$$

avec :

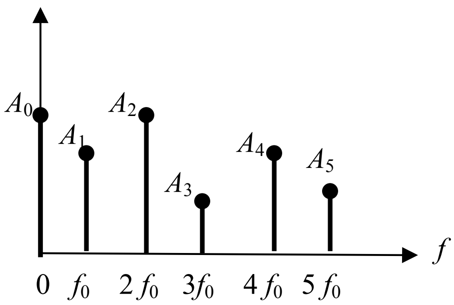
$$A_0 = \frac{a_0}{2}$$

$$A_n = \sqrt{(a_n^2 + b_n^2)}$$

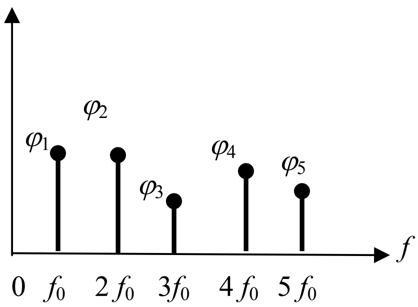
$$\varphi_{n=arctg\left(\frac{-b_n}{a_n}\right)}$$

Spectre unilatéral

Il s'agit de représenter l'amplitude et la phase de chaque fréquence :



Spectre d'amplitude



spectre de phase

3- 3ème forme de série de Fourrier

Il s'agie de la forme complexe, soit :

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n e^{j2\pi n f_0 t}$$

où

$$C_n = \frac{1}{T}\int_0^T x(t)e^{-j2\pi n f_0 t}dt$$

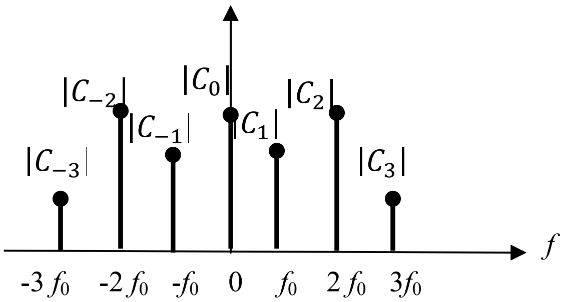
Ces coefficients sont généralement complexes et peuvent s'écrire sous forme exponentielle complexe :

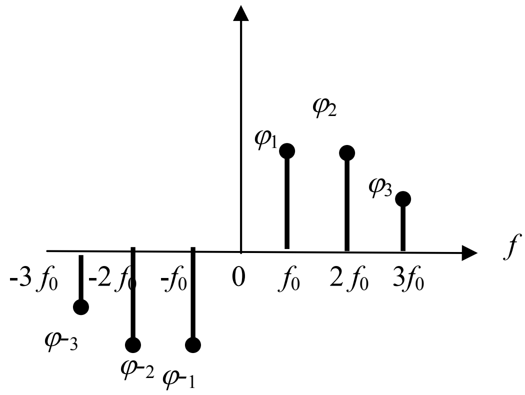
$$C_n = |C_n|e^{jarg(C_n)}$$

Par conséquent :

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |C_n|e^{j(2\pi n f_0 t + arg(C_n))}$$

Spectre bilatéral





Spectre d'amplitude

spectre de phase

Propriétés

Le spectre d'amplitude bilatéral est toujours pair
• Le spectre de phase bilatéral est toujours impair
• Les 2 spectres ne comportent des composantes qu'aux multiples entiers de la fréquence du signal, on parle de spectres de raies

4-**Identité de Parseval**

• Signaux périodiques : signaux à énergie infinie mais à puissance moyenne finie
• L'identité de Parseval montre l'égalité du calcul de la puissance moyenne d'un signal périodique de période T à partir de sa représentation dans le domaine temporel ou fréquentiel :

$$P = \frac{1}{T}\int_0^T |x(t)|^2 dt = \sum_{-\infty}^{+\infty} |C_n|^2$$