Chap II: Résolution des systèmes d'équations

II-1 Introduction: d'ordinaire on utilise la méth de Cramer (méth des determinants) pour résoudre des systèmes d'Eq. Liné
Le problème majeur de cette méth est qu'elle implique le calcul de déterminants. Observez ceci:

pour calculer le determinant d'1 Matrice d'ordre n, on calcule n . determinants de matrices d'ordre $n-1$.

$$\det(A_n) = n.\det(A_{n-1}) = n.((n-1)\det(A_{n-2})) = n(n-1)(n-2)\det(A$$

$$\ldots \Rightarrow \det(A_n) \simeq n.(n-1)(n-2)\times\cdots\times 3\times 2 = n!$$

pour $n = 10$, le temps de calcul $= 4\,\mu s$.
$n = 15$: " $= 1{,}3\,s$
$n = 20$: " $=$ 1 mois
$n = 25$: " $=$ 492 000 ans
$n = 28$: " $= 9{,}6.10^9$ ans > Age de l'Univers

Alors, l'objectif de ce chapitre est d'introduire des méthodes plus rapides. Et ce, en faisant des combinaisons lineaires entre les lignes de la matrice afin de la transformer en une matrice triangulaire ou diagonale.

* si on a le système $A.x = b$ avec A : mat triangulaire inférieure :

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & & \vdots \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \cdots & 0 \\ a_{n1} & \cdots & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

alors on démontre que :

$$(1) \quad x_i = \frac{b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j}{a_{ii}} \quad i = 1, \ldots, n$$

* si A est une matr triangulaire supérieure :

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_2 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \Rightarrow x_i = \frac{b_i - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}.x_j}{a_{ii}} \quad i = n, \ldots, 1 \quad (2)$$

* Si A est une matrice diagonale.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & & \vdots \\ \vdots & & a_{33} & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \Rightarrow \boxed{x_i = b_i / a_{ii} \quad i = 1, \dots, n}$$

II-1 Méthode de Gauss.

Cet algorithme transforme la matrice A en une matrice tri Supe[rieure]

le système

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

Pour simplifier la programmation de cette méth. on rajoute le vecteur de donnée b à la matrice A. On construit ainsi une matrice A augmentée de n lignes et (n+1) colonnes.

Pour triangulariser cette matrice on procedera par étape (n-1 étapes) exactement, chacune des étapes va transformer les éléments sous diagonaux de la colonne correspondant au numéro de l'étape en cours en 0.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1,n+1} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2,n+1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{n,n+1} \end{pmatrix}$$

Etape 1 : On va procéder au combinaisons suivantes se basant toutes sur la 1ère ligne qui reste inchangé[e]

$$\left.\begin{aligned} \text{ligne } 2 &= \text{ligne } 2 - \frac{a_{21}}{a_{11}} \text{ ligne } 1 \\ \text{ligne } 3 &= \text{ligne } 3 - \frac{a_{31}}{a_{11}} \text{ ligne } 1 \\ &\vdots \\ \text{ligne } i &= \text{ligne } i - \frac{a_{i1}}{a_{11}} \text{ ligne } 1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1,n+1} \\ 0 & a'_{22} & a'_{23} & \cdots & a'_{2,n+1} \\ 0 & a'_{32} & a'_{33} & \cdots & a'_{3,n+1} \\ \vdots & & & & \\ 0 & a'_{n2} & a'_{n3} & \cdots & a'_{n,n+1} \end{pmatrix}$$

$i = 2 \rightarrow n$

Etape 2 : On va faire apparaitre des 0 à l'endroit des éléments sous diagonaux de la colonne 2.

$$\left.\begin{aligned} \text{ligne } 3 &= \text{ligne } 3 - \frac{a_{32}}{a_{22}} \text{ ligne } 2 \\ \text{ligne } 4 &= \text{ligne } 4 - \frac{a_{42}}{a_{22}} \text{ ligne } 2 \\ &\vdots \\ \text{ligne } i &= \text{ligne } i - \frac{a_{i2}}{a_{22}} \text{ ligne } 2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1,n+1} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2,n+1} \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & a_{3,n+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \\ 0 & 0 & a_{n3} & \cdots & a_{n,n+1} \end{pmatrix}$$

$i = 3 \rightarrow n$

Etape p :

$$\left.\begin{array}{l} \text{lingne}(p+1) = \text{ligne}(p+1) - \dfrac{a_{p+1,p}}{a_{pp}}.\text{ligne}(p) \\ \vdots \\ \text{ligne } i = \text{ligne } i - \dfrac{a_{ip}}{a_{pp}}.\text{ligne } p \\ i = p+1 \longrightarrow n \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{1p} & a_{1n} \\ 0 & 0 & & \\ & & a_{pp} & a_{pn} \\ & & 0 & a_{p+1,p+1} \\ & & \vdots & \end{pmatrix}$$

alors l'algorithme de cette méth est :

$$\left\{\begin{array}{l} \text{pour } p = 1 \longrightarrow n-1 \\ \quad \text{pour } i = p+1 \longrightarrow n \\ \quad\quad \text{pour } j = p \longrightarrow n+1 \\ \quad\quad\quad a_{ij} = a_{ij} - \dfrac{a_{ip}.a_{pj}}{a_{pp}} \end{array}\right.$$

Là, on aurait transformé A en une matrice triangulaire supérieure et l'extraction des solutions se fait avec l'algorithme ② de la page 1.

<u>Important</u> : Un problème risque de se poser lorsqu'on rencontre un élément de la digonale $a_{ii} = 0$. La division par a_{ii} n'est plus possible, alors, on va permuter entre la ligne i et une autre ligne j possedant l'élement $a_{ji} \neq 0$ et le problème est résolu.

<u>Exple</u> : résoudre avec la méth de Gauss le système :

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 2 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 11 \end{pmatrix}$$

la matrice Augmentée est : $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 6 & 11 \end{pmatrix}$

<u>Et1</u> : $\left.\begin{array}{l} l_2 = l_2 - 2.l_1 \\ l_3 = l_3 - 3\,l_1 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & -4 & -6 & 2 \\ 0 & -7 & -3 & 11 \end{pmatrix}$

<u>Et2</u> : $l_3 = l_3 - \frac{7}{4}.l_2 \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & -4 & -6 & 2 \\ 0 & 0 & \frac{15}{2} & \frac{15}{2} \end{pmatrix}$

donc on a le système $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 0 & -4 & -6 \\ 0 & 0 & \frac{15}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ \frac{15}{2} \end{pmatrix}$

$x_3 = \dfrac{15/2}{15/2} = 1$

$-4x_2 - 6 \times 1 = 2 \Rightarrow x_2 = -2 \quad \Rightarrow x = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

$x_1 + 3(-2) + 3(1) = 0 \Rightarrow x_1 = 3$

II_3 Méthode de Gauss_Jordan

la méth consiste à transformer la matrice du système A. en une matrice diagonale unitaire donc en la matrice identité $I = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}$. Cette transformation n'est en réalité que la multiplication par la matrice inverse

on a $\quad Ax = b \Rightarrow \underbrace{A^{-1}.A}_{I}.x = A^{-1}.b \Rightarrow x = A^{-1}.b$

donc la transformation de A en I entraine celle de b en x

La méthode de Jordan se réalise en n étapes, chacune va transformer la colonne correspondant au numéro de l'étape en la colonne de I correspondant au même num

$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} & a_{1,n+1} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} & a_{2,n+1} \\ \vdots & & & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & & a_{n,n+1} \end{pmatrix}$ chaque étape se effectue en 2 sous étapes.

Etape 1 : * Normalisation : on normalise la ligne 1

ligne 1 = ligne 1 / a_{11}

$\begin{pmatrix} 1 & a_{12}/a_{11} & a_{13}/a_{11} & \cdots & a_{1n}/a_{11} & a_{1,n+1}/a_{11} \\ a_{21} & \cdots & & & & \\ \vdots & & & & & \end{pmatrix}$

* Réduction : on réduit les ligne 2 → n

ligne 2 = ligne 2 − a_{21} · ligne 1

ligne 3 = ligne 3 − a_{31} · ligne 1

ligne i = ligne i − a_{i1} · ligne 1

$i = 2 \to n$.

$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & a'_{12} & a'_{13} & \cdots & a'_{1n+1} \\ 0 & a'_{22} & a'_{23} & \cdots & a'_{2n+1} \\ \vdots & \vdots & & & \\ 0 & a'_{n2} & a'_{n3} & \cdots & a'_{nn+1} \end{pmatrix}$

Etape 2 : * Normalisation de ligne 2 : ligne2 = ligne2 / a_{22}.

$$\begin{pmatrix} 1 & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1,n+1} \\ 0 & 1 & a'_{23} & \dots & a'_{2,n+1} \\ 0 & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3,n+1} \\ \vdots & \vdots & & & \\ 0 & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{n,n+1} \end{pmatrix}.$$

* Reduction de toutes lignes sauf la deuxième

ligne 1 = ligne 1 − a_{12} · ligne 2
ligne 3 = ligne 3 − a_{32} · ligne 2
ligne i = ligne i − a_{i2} · ligne 2
$i = 1 \to n$; $i \neq 2$.

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & a_{13} & \text{—} & a_{1,n+1} \\ 0 & 1 & a_{23} & \text{—} & a_{2,n+1} \\ \vdots & 0 & a_{33} & \text{—} & a_{3,n+1} \\ & \vdots & \vdots & & \\ 0 & 0 & a_{n3} & \text{—} & a_{n,n+1} \end{pmatrix}$$

Etape p : * Normalisation de ligne p : ligne p = ligne p / a_{pp}

* Reduction de toutes les lignes sauf la ligne p

ligne i = ligne i − a_{ip} · ligne p
$i = 1 \to n$, $i \neq p$.

Lorsque les n étapes seront effectuées, alors on aura

$$A = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & \dots & 0 & x_1 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & x_2 \\ \vdots & & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & x_n \end{array}\right)$$

solution du système.

Algorithme de Gauss Jordan :

```
pour p = 1 -> n
    pour j = p -> n+1
        apj = apj / app
    pour i = 1 -> n, i ≠ p
        pour j = p -> n+1
            aij = aij - aip . apj
```

Exple : On résoud le m̂ problème avec la méth de Jordan

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 6 & 11 \end{pmatrix}$$

<u>Et1</u> : * Nor : $l_1 = l_1 / 1$ * Réd : $l_2 = l_2 - 2 \cdot l_1$, $l_3 = l_3 - 3 l_1$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 6 & 11 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & -4 & -6 & 2 \\ 0 & -7 & -3 & 11 \end{pmatrix}$$

<u>Et2</u> : * Nor : $l_2 = l_2 / (-4)$ * Réd : $l_1 = l_1 - 3 l_2$, $l_3 = l_3 + 7 l_1$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 3/2 & -1/2 \\ 0 & -7 & -3 & 11 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3/2 & 3/2 \\ 0 & 1 & 3/2 & -1/2 \\ 0 & 0 & 15/2 & 15/2 \end{pmatrix}$$

<u>Et3</u> : * Nor : $l_3 = l_3 / (15/2)$ * Réd : $l_1 = l_1 - 0 . l_3$, $l_2 = l_2 - \frac{3}{2}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -3/2 & 3/2 \\ 0 & 1 & 3/2 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \boxed{3} \\ 0 & 1 & 0 & \boxed{-2} \\ 0 & 0 & 1 & \boxed{1} \end{pmatrix} \quad \underline{x}.$$

* Inversion <u>matricielle avec la méth de Jordan</u>.

Il est possible d'inverser une matrice avec l'algorithme de Jordan, le principe est le suivant :

On construit une matrice à partir de la concaténation de A et I : $[A \,\vdots\, I]$ c'est une matrice $(n \times 2n)$

On a vu que : $A \xrightarrow{GJ} I$; cela ne se fait que si on multiplie $A \times A^{-1} = I$; et si on étend la même transformation à I, càd, on multiplie $I \times A^{-1} = A^{-1}$

Donc

$$[A \,!\, I] \times A^{-1} \Rightarrow [A \cdot A^{-1} \,!\, I \cdot A^{-1}]$$

$$\Rightarrow [I \mid A^{-1}]$$

On verra donc apparaître à la place de I, la matrice inverse A^{-1}.

L'algorithme reste le même, il n'y a que les valeurs finales des boucles qui changent.

```
pour p = 1 → n
    pour j = p → 2n
        apj = apj / app
    pour i = 1 → n , i ≠ p
        pour j = p → 2n
            aij = aij - aip . apj
```

Algorithme d'inversion matricielle.

II4-Méthode de Cholesky :

c'est une méthode qui ne s'applique que si la matrice du système est définie positive.

Définition : une matrice est définie positive si :

- la matrice est symétrique : $A = A^t$
- $\forall x \in \mathbb{R}^n : x^t . A . x \geq 0$

Si A est définie positive, alors, selon Cholesky

$\exists$ L matrice triangulaire inférieure / $A = L . L^T$.

$$\begin{pmatrix} l_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ l_{21} & l_{22} & & \vdots \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} & \\ \vdots & & & \\ l_{n1} & l_{n2} & l_{n3} \cdots & l_{nn} \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} l_{11} & l_{21} & l_{31} \cdots & l_{n1} \\ 0 & l_{22} & l_{32} \cdots & l_{n2} \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & l_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots \\ a_{21} & a_{22} & \cdots \\ \vdots & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots \end{pmatrix}$$

le but est donc de calculer les éléments de L.

ensuite $A . x = b \Leftrightarrow L . \underbrace{L^T . x}_{y} = b \Leftrightarrow \begin{cases} L . y = b \\ \text{puis} \\ L^T . x = y \end{cases}$

donc on résoud le problème en 2 parties

Étape 1 : * ligne 1 x colonne 1 $= l_{11}^2 = a_{11} \Rightarrow l_{11} = \sqrt{a_{11}}$

* ligne i x colonne 1 $= l_{i1} . l_{11} = a_{i1} \Rightarrow l_{i1} = \dfrac{a_{i1}}{l_{11}}$
  $i = 2 \to n$

Étape 2 : * ligne 2 x Colonne 2 $= l_{21}^2 + l_{22}^2 = a_{22} \Rightarrow l_{22} = \sqrt{a_{22} - l_{21}^2}$

* ligne i x Colonne 2 $= l_{i1} . l_{21} + l_{i2} l_{22} = a_{i2}$
  $\Rightarrow l_{i2} = \dfrac{a_{i2} - l_{i1} \times l_{21}}{l_{22}}$
  $i = 3 \to n$

Étape p : * ligne p x Colonne p $\Rightarrow l_{pp} = \sqrt{a_{pp} - \sum_{j=1}^{p-1} l_{pj}^2}$

* ligne i x Colonne p $\Rightarrow l_{ip} = \dfrac{a_{ip} - \sum_{j=1}^{p-1} l_{ij} . l_{pj}}{l_{pp}}$
  $i = p+1 \to n$

l'algorithme d'extraction de éléments de L est :

$$
\begin{cases}
\text{pour } p = 1 \longrightarrow n \\
\quad l_{pp} = \sqrt{a_{pp} - \sum_{j=1}^{p-1} l_{pj}} \\
\quad \text{pour } i = p+1 \longrightarrow n \\
\quad\quad l_{ip} = \dfrac{a_{ip} - \sum_{j=1}^{p-1} l_{ij}\, l_{pj}}{l_{pp}}
\end{cases}
$$

Ensuite on résoud le double système $\begin{cases} Ly = b \\ L^T.x = y. \end{cases}$

$Ly = b$ avec l'algorithme ① du paragraphe 1

et $L^T x = y$ avec l'algorithme ② du paragraphe 1

Exemple : soit le système $\begin{pmatrix} 6 & -2 & 2 \\ -2 & 5 & 0 \\ 2 & 0 & 7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 23 \\ 16 \end{pmatrix}$

* Montrer que la matrice du système est définie positive
* Résoudre le système avec la méth de Cholesky.

Réponse : * la matrice est symétrique

* $x^t.A.x = (x_1, x_2, x_3).\begin{pmatrix} 6 & -2 & 2 \\ -2 & 5 & 0 \\ 2 & 0 & 7 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} =$

$= (x_1, x_2, x_3).\begin{pmatrix} 6x_1 - 2x_2 + 2x_3 \\ -2x_1 + 5x_2 \\ 2x_1 + 7x_3 \end{pmatrix}$

$= 6x_1^2 - 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 2x_1x_2 + 5x_2^2 + 2x_1x_3 + 7x_3^2$

$= (4x_1^2 - 4x_1x_2 + x_2^2) + (x_1^2 + 4x_1x_3 + 4x_3^2) + x_1^2 + 4x_2^2 + 3x_3^2$

$= (2x_1 - x_2)^2 + (x_1 + 2x_3)^2 + x_1^2 + 4x_2^2 + 3x_3^2 > 0$

Donc A est définie positive.

Calculons maintenant L.

$$
\begin{pmatrix} l_{11} & & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} l_{11} & l_{21} & l_{31} \\ 0 & l_{22} & l_{32} \\ 0 & 0 & l_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & -2 & 2 \\ -2 & 5 & 0 \\ 2 & 0 & 7 \end{pmatrix}
$$

Et : $l_1 \times c_1 \Rightarrow l_{11}^2 = 6 \Rightarrow l_{11} = \sqrt{6}$

$l_2 \times c_1 \Rightarrow l_{11}\, l_{21} = -2 \Rightarrow l_{21} = -2/\sqrt{6}$

$l_3 \times c_1 \Rightarrow l_{31}.l_{11} = 2 \Rightarrow l_{31} = 2/\sqrt{6}$

Et2 : $l_2 \times c_2 \Rightarrow l_{21}^2 + l_{22}^2 = a_{22} \Rightarrow l_{22} = \sqrt{5 - \frac{4}{6}} = \sqrt{\frac{13}{3}}$

$l_3 \times c_2 \Rightarrow l_{31} \cdot l_{21} + l_{32} \cdot l_{22} = a_{32} \Rightarrow l_{32} = \frac{0 + 4/6}{\sqrt{13/3}} = \frac{2}{3} \times \sqrt{\frac{3}{13}} = \frac{2}{\sqrt{39}}$

Et3 : $l_3 \times c_3 \Rightarrow l_{31}^2 + l_{32}^2 + l_{33}^2 = a_{33}$

$\Rightarrow l_{33} = \sqrt{7 - \frac{4}{6} - \frac{4}{39}} = \sqrt{\frac{81}{13}} = 9/\sqrt{13}$

donc $L = \begin{pmatrix} \sqrt{6} & 0 & 0 \\ -2/\sqrt{6} & \sqrt{13/3} & 0 \\ 2/\sqrt{6} & 2/\sqrt{39} & 9/\sqrt{13} \end{pmatrix}$.

On résoud $L \cdot y = b \Rightarrow \begin{pmatrix} \sqrt{6} & 0 & 0 \\ -2/\sqrt{6} & \sqrt{13/3} & 0 \\ 2/\sqrt{6} & 2/\sqrt{39} & 9/\sqrt{13} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 23 \\ 16 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow y_1 = 0 \ , \ y_2 = 23\sqrt{3/13} \ , \ y_3 = 18/\sqrt{13}$

ensuite $L^T \cdot x = y \Rightarrow \begin{pmatrix} \sqrt{6} & -2/\sqrt{6} & 2/\sqrt{6} \\ 0 & \sqrt{13/3} & 2/\sqrt{39} \\ 0 & 0 & 9/\sqrt{13} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 23\sqrt{3/13} \\ 18/\sqrt{13} \end{pmatrix}$

$\Rightarrow x_3 = 2 \ , \ x_2 = 5$ et $x_1 = 1$

II-5 : Autres Méthodes :

Il existe bien sûr d'autres méthodes qu'il serait bon d'étudier entre autres la factorisation LU pour des matrices quelconques. Aussi la méthode de Thomas pour les systèmes à matrice tridiagonale.

Il existe aussi des méthodes dites indirectes, ce sont des méthodes qui ne cherchent pas les valeurs exactes des solutions, mais plutôt des approximations de ces solutions. C'est une approche interssante parce qu'elles nous economise du temps de calcul. Parmis ces méthodes, essayer de voir les méthodes de Jacobi, de Gauss-Seidel et des approximations successives..