Méthodes Numériques

Fiche de TD N°2 : Résolution des systèmes d'équations linéaires

Exercice N° 1:

Résoudre le système suivant en utilisant la méthode de Gauss :

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 2 \\ -4x_1 - x_2 + 3x_3 = 0 \\ 4x_1 + x_2 - 2x_3 = 1 \end{cases}$$

Déduire des calculs précédents la valeur du déterminant de la matrice du système.

Exercice N°2 :

Utiliser la méthode de Gauss-Jordan pour inverser la matrice suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & 5 \\ 3 & 7 & 3 \end{pmatrix}$$

Déduire la solution du système $Ax = \begin{pmatrix} 5 \\ 9 \\ 6 \end{pmatrix}$

Déterminer la valeur du déterminant de A.

Exercice N° 3:

Soit A une matrice carrée symétrique d'ordre 4 telle que :

$$\forall x \in R^4 : x^T A\, x = x_1^2 + x_2^2 + (x_3 + x_4)^2 + x_4^2 \quad \text{où} \quad x^T = (x_1, x_2, x_3, x_4)$$

1- Déterminer la matrice A
2- On prend $b^T = (1, 1, 2, 3)$. Résoudre le système $A\,x = b$ avec la méthode de Cholesky

Corrigé de la fiche de TD N°2

Exercice N°1 :

La matrice augmentée du système est :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 2 \\ -4 & -1 & 3 & 0 \\ 4 & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Etape 1 :

Les combinaisons linéaires entre les lignes seront :

$ligne2 = ligne2 + 2 \times ligne1$
$ligne3 = ligne3 - 2 \times ligne1$

Alors on aura $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 5 & 4 \\ 0 & -1 & -4 & -3 \end{pmatrix}$

Etape 2 :

Il ne reste plus qu'a faire apparaître 0 dans la $2^{ème}$ position de la ligne 3.
$ligne3 = ligne3 + ligne2$

Alors on aura $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

Extraction des solutions :

On commence bien sûr par l'inconnue avec l'indice le plus élevé :

$$x_3 = \frac{1}{1} = 1$$
$$x_2 = \frac{4 - 5 \times (1)}{1} = -1$$
$$x_1 = \frac{2 - (-1) - 1}{2} = 1$$

Le déterminant de la matrice du système est le même que celui de la matrice triangulaire.
Le déterminant d'une matrice triangulaire est le produit des éléments diagonaux : det $= \prod_1^n a_{ii}$
Donc le déterminant de la matrice $= 2 \times 1 \times 1 = 2$

Exercice N°2 :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 5 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 7 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Etape 1 :

On normalise la ligne 1
$ligne1 = ligne1 \div 2$

On réduit les lignes 2 et 3
$ligne2 = ligne2 - 4 \times ligne1$
$ligne3 = ligne3 - 3 \times ligne1$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 3/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 5 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 7 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 3/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 11/2 & -3/2 & -3/2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Le pivot de la ligne 2 est nul, on permute donc les lignes 2 et 3

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 3/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 11/2 & -3/2 & -3/2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Etape 2 :

On normalise la ligne 2
$ligne2 = ligne2 \div 11/2$

On réduit la ligne 1
$ligne1 = ligne1 - 1/2 \times ligne2$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 3/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3/11 & -3/11 & 0 & 2/11 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 18/11 & 7/11 & 0 & -1/11 \\ 0 & 1 & -3/11 & -3/11 & 0 & 2/11 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Etape 3 :

On normalise la ligne 3
$ligne1 = ligne1 \div (-1)$

On réduit les lignes 1 et 2
$ligne1 = ligne1 - 18/11 \times ligne3$
$ligne2 = ligne2 + \ 3/11 \times ligne3$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 18/11 & 7/11 & 0 & -1/11 \\ 0 & 1 & -3/11 & -3/11 & 0 & 2/11 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -29/11 & 18/11 & -1/11 \\ 0 & 1 & 0 & 3/11 & -3/11 & 2/11 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

La matrice inverse est donc :

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -29/11 & 18/11 & -1/11 \\ 3/11 & -3/11 & 2/11 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

La solution du système $Ax = \begin{pmatrix} 5 \\ 9 \\ 6 \end{pmatrix}$

$$x = A^{-1} \times \begin{pmatrix} 5 \\ 9 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -29/11 & 18/11 & -1/11 \\ 3/11 & -3/11 & 2/11 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 5 \\ 9 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Pour le déterminant, on le déduit en multipliant les différents quotients des étapes de normalisation, ce produit sera ensuite multiplié par $(-1)^P$ où p est le nombre de permutations entre lignes.
Donc $\det(A) = (-1)^1 \times 2 \times {}^{11}/_{2} \times (-1) = 11$

Exercice N°3

$$x^T A\, x = x_1^2 + x_2^2 + (x_3 + x_4)^2 + x_4^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2x_4^2 + 2x_3x_4$$

Le produit $x^T A\, x$ donne l'expression :

$$x^T A\, x = a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 + a_{44}x_4^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + 2a_{14}x_1x_4 + 2a_{23}x_2x_3 + 2a_{24}x_2x_4 + 2a_{34}x_3x_4$$

On déduit alors que :

$$a_{11} = 1, \quad a_{22} = 1, \quad a_{33} = 1, \quad a_{44} = 2, \quad a_{34} = 1, \quad a_{12} = a_{13} = a_{14} = a_{23} = a_{24} = 0$$

Alors la matrice est

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Calcul des éléments de la matrice L

Etape 1 :

$$L_{11} = \sqrt{a_{11}} = 1$$

$$L_{i1} = \frac{a_{i1}}{L_{11}} = 0 \qquad\qquad i = 2 \;,\; 3 \;,\; 4$$

Etape 2 :

$$L_{22} = \sqrt{a_{22} - L_{21}^2} = 1$$

$$L_{i2} = \frac{a_{i2} - L_{21} \times L_{i1}}{L_{22}} = 0 \qquad\qquad i = 3 \;,\; 4$$

Etape 3 :

$$L_{33} = \sqrt{a_{33} - (L_{31}^2 + L_{32}^2)} = 1$$

$$L_{43} = \frac{a_{43} - (L_{31} \times L_{41} + L_{32} \times L_{42})}{L_{33}} = 1$$

Etape 4 :

$$L_{44} = \sqrt{a_{44} - (L_{41}^2 + L_{42}^2 + L_{43}^2)} = 1$$

La matrice L est donc

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Résolution du système $L \times y = b$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad \text{alors} \begin{cases} y_1 = 1 \\ y_2 = 1 \\ y_3 = 2 \\ y_4 = 3 - 2 = 1 \end{cases}$$

Résolution du système $L^T \times x = y$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \text{alors} \begin{cases} x_4 = 1 \\ x_3 = 2 - 1 = 1 \\ y_3 = 1 \\ y_4 = 1 \end{cases}$$

La solution du système est donc $x = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$