1. Série et transformée de fourrier Les séries de Fourier

1.1. Les séries de Fourier

Constituent un outil fondamental dans l'étude des fonctions périodiques. C'est à partir de ce concept que s'est développée la branche des mathématiques connue sous le nom d'analyse harmonique.

Les séries de Fourier se rencontrent dans la décomposition de signaux périodiques, dans l'étude des courants électriques, des ondes cérébrales, dans la synthèse sonore, le traitement d'images, etc.

Un signal périodique de fréquence f et de forme quelconque peut être obtenu en ajoutant à une sinusoïde de fréquence f (fondamentale), des sinusoïdes dont les fréquences sont des multiples entiers de f. Ces signaux ont des amplitudes et des positions de phase appropriées.

De même, on peut décomposer toute onde récurrente en une somme de sinusoïdes (fondamentale et harmoniques).

L'étude d'une fonction périodique par les séries de Fourier comprend deux volets :

1) l'analyse, qui consiste en la détermination de la suite de ses coefficients de Fourier (souvent représentés dans un diagramme spectral ou spectre) ;

2) la synthèse, qui permet de retrouver, en un certain sens, la fonction à l'aide de la suite de ses coefficients.

La transformation de Fourier est donc une extension, pour les fonctions non périodiques, du développement en série de Fourier des fonctions périodiques. La transformation de Fourier associe à une fonction intégrable, définie sur l'ensemble des nombres réels ou celui des nombres complexes, une fonction appelée transformée de Fourier dont la variable indépendante peut s'interpréter en physique comme la fréquence ou la pulsation.

La transformée de Fourier s'exprime comme "somme infinie" des fonctions trigonométriques de toutes fréquences. Une telle sommation se présente sous forme d'intégrale. Séries et transformation de Fourier constituent les deux outils de base de l'analyse harmonique.

Lorsqu'une fonction représente un phénomène physique, comme l'état du champ électromagnétique ou du champ acoustique en un point, on l'appelle signal et sa transformée de Fourier s'appelle son spectre.

On s'attache ici pour l'essentiel à l'étude du problème suivant :

Une fonction périodique F(x) de Période T peut elle s'exprimer comme somme d'une série trigonométrique :

$$\sum_{n\geq 0} a_n \, cos(nwt) + b_n \sin(nwt)$$

avec

$$w = 2\pi/T$$

Etudié par Fourier au début du dix-neuvième siècle dans sa recherche de solutions de l'équation de la chaleur (équation de diffusion), ce problème conduit à une branche des mathématiques toujours vivantes.

1.2. Définition des séries de Fourier

Soit $f(t)$ une fonction définie sur un intervalle $]-L,+L[$ et déterminée à l'extérieur de l'intervalle par $f(t+2L) = f(t)$ c'est-à-dire supposons $f(t)$ de période T.

la série de Fourrier correspond a $f(x)$ est définie par :

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n cos(nwt) + b_n \sin(nwt)$$

ou les coefficients a_n et b_n sont appelles coefficients Fourrier et valeur :

$$a_n = \frac{2}{T}\int_{-L}^{+L} f(t)cos(nwt)dt$$

$$b_n = \frac{2}{T}\int_{-L}^{+L} f(t)sin(nwt)dt$$

et a_0 est la moyenne de $f(t)$

$$a_0 = \frac{2}{T}\int_{-L}^{+L} f(t)dt$$

1.3. Condition de Dirichlet pour la convergence ponctuelle de la série de Fourier

Théorème (conditions suffisantes de Dirichlet pour la convergence ponctuelle de la série) supposant que;

1. $f(t)$ est définie sur $]-L,+L[$ sauf peut être en un nombre fini de points,
2. $f(t)$ est périodique de période $2L$;
3. $f(t)$ et $f'(t)$ sont continues par morceaux dans $]-L,+L[$.

alors la série de Fourier converge vers :

- $f(t)$ si t est un point de continuité de f.
- $\frac{f(t+0)+f(x-0)}{2}$ si t est un point de discounté de f.

on peut alors écrire :

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n cos(nwt) + b_n \sin(nwt)$$

en tout point de continuité.

Si t est un point de discontinuité, le membre de gauche de l'équation précédente doit être remplacé par la valeur moyenne de f au point de discontinuité, c'est-à-dire :

$$\frac{f(t+0)+f(x-0)}{2}=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{+\infty}a_n cos(nwt)+b_n \sin(nwt)$$

Propriétés

Les coefficients sont indépendante de l'intervalle d'amplitude T sur lequel on calcule les intégrales.

1) si $\boldsymbol{f}$ **est paire** alors toutes les $\boldsymbol{b_n}$ **sont nuls**,

$$a_0=2\times\frac{2}{T}\int_0^{+L}f(t)dt$$

et

$$a_n=2\times\frac{2}{T}\int_0^{+L}f(t)cos(nwt)dt$$

2) si $\boldsymbol{f}$ **est impaire** alors toutes les $\boldsymbol{a_n}$ **sont nuls**,

$$b_n=2\times\frac{2}{T}\int_0^{+L}f(t)sin(nwt)dt$$

3) **Théorème de Parseval**

$$\frac{1}{T}\int_0^{+L}f^2(t)dt=a_0^2+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}(a_0^2+b_0^2)$$

4) **Forme complexe de Fourier**

Les coefficients complexes de Fourier sont les :

$$c_n=\frac{1}{T}\int_0^{+L}f(t)e^{-inwt}dt$$

ou $n\in\mathbb{Z}$

$$c_n=\frac{a_n-ib_n}{2}$$

valable pour $n\in\mathbb{Z}^*$

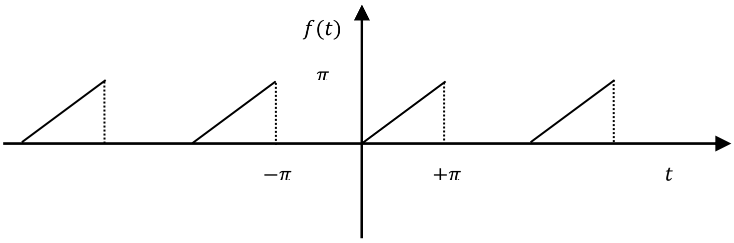
et $c_0=a_0$

la série de fourrier s'écrit alors $\sum_{n\in\mathbb{Z}}f(t)e^{inwt}$

Exemple

Soit la fonction 2π périodique définie comme suit : $f(t) = \begin{cases} 0 & -\pi < x \leq 0 \\ t & 0 < x \leq \pi \end{cases}$

1. Représenter graphiquement la fonction $f(t)$.



2. Calculer les coefficients de série de Fourier de la fonction *f*.

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(t)dx = \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0} 0\ dt + \int_{0}^{+\pi} t\ dt\right] = \frac{1}{\pi}\left[\frac{1}{2}(t)^2\right]_0^{+\pi} = \frac{\pi}{2}$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(t)\ cos(nt)\ dt$$

Une intégration par partie donne :

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{+\pi} t\ cos(nt)\ dx = \frac{1}{\pi}\left[\frac{t}{n}\ \sin(nt)\right]_0^{+\pi} - \frac{1}{n\pi}\int_0^{+\pi} \sin(nt)\ dt$$

$$a_n = -\frac{1}{n\pi}\int_0^{+\pi} \sin(nt)\ dt = -\frac{1}{n\pi}\left[\frac{1}{n}\ \cos(nt)\right]_0^{+\pi} = \begin{cases} -\dfrac{2}{\pi n^2} & n\ paire \\ 0 & n\ impaire \end{cases}$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(t)\ sin(nt)\ dt$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\left[-\left(\frac{t}{n}\right)\ \cos(nt)\right]_0^{+\pi} + \frac{1}{n\pi}\int_0^{+\pi} \cos(nt)\ dt$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\left[-\left(\frac{t}{n}\right)\ \cos(nt)\right]_0^{+\pi} + \frac{1}{n\pi}\left[\frac{1}{n}\ \sin(nt)\right]_0^{+\pi} = \frac{(-1)^{n+1}}{n}$$

$$f(t) = \frac{\pi}{4} - \frac{2}{\pi}\left[\frac{cost}{1^2} + \frac{cos3t}{3^2} + \frac{cos5t}{5^2} + \cdots\right] + \left[\frac{sint}{1} - \frac{sin2t}{2} + \frac{sin3t}{3} - \cdots\right]$$

$$f(t) = \frac{\pi}{4} - \frac{2}{\pi}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{cox(2n+1)t}{(2n+1)^2} + \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}sin(n)t}{n}$$

2. Transformée de Fourier

2.1. Définition

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction localement intégrable et absolument intégrable sur R.

On définit la transformée de Fourier de f, la fonction notée $\mathcal{F}(f)$ de $\mathbb{R} \to \mathbb{C}$; et sa transformée inverse de $\mathbb{C} \to \mathbb{R}$. Quand f est une fonction définie sur $\mathbb{R}$ et n'est pas périodique, alors la série de Fourier doit être remplacée par une transformation intégrale appelée transformée de Fourier :

Transformée de Fourier

$$\boldsymbol{\mathcal{F}(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, e^{-iwt} dt}$$

Transformée inverse de Fourier

$$\boldsymbol{f(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{F}(f)\, e^{+iwt} df}$$

L'importance de la série et de la transformée de Fourier réside dans le fait que les nombres entiers n (dans le cas de la série) et la quantité réelles w (dans le cas de l'intégrale), représentent les fréquences des ondes dont la superposition reproduit la fonction f .

Exemple 1

Soit la fonction f définie par : $f(t) = e^{-|t|}$

Trouver la transformée de Fourier $\mathcal{F}(f)$ de $f(t)$

$$\mathcal{F}(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|t|} e^{-ift} dt = \left[\int_{-\infty}^{0} e^{t} e^{-ift} dt + \int_{0}^{+\infty} e^{-t} e^{-ift} dt \right] =$$

$$\left[\int_{-\infty}^{0} e^{t-ift} dx + \int_{0}^{+\infty} e^{-t-ift} dx \right] = \left[\frac{1}{1+if} + \frac{1}{1-if} \right] = \frac{2}{1+f^2}$$

Exemple 2

Soit la fonction f définie par : $f(t) = 1/2$

Trouver la transformée de Fourier $\mathcal{F}(f)$ de $f(t)$

$$\mathcal{F}(f) = \int_{-1/2}^{+1/2} \frac{1}{2} e^{-ift} dt =$$

$$\left[-\frac{1}{2i\alpha}e^{-ift}\right]_{-1/2}^{1/2} = -\frac{1}{2if}\left[e^{-i\frac{1}{2}f} - e^{+if\frac{1}{2}}\right] = \left[\frac{sin(f/2)}{f}\right]$$

2. Représentation des signaux

Pour l'étude de systèmes de communication, on peut distinguer plusieurs classes de signaux. Ces classes établissent les distinctions suivantes entre signaux, détaillées plus loin:

1) analogiques ou numériques,
2) périodiques ou apériodiques,
3) déterministes ou stochastiques,
4) d'énergie ou de puissance.

2.1. Signaux analogiques ou numériques

Un signal $x(t)$ analogique est une fonction continue pour tout temps t. Un signal numérique est un signal temporel discontinu; on le notera $x[n]$ où n est l'indice d'un élément pris dans l'ensemble d'instants $\{t_0, t_1, \ldots\}$. On parle encore de signaux à temps discret.

2.2. Signaux périodiques ou apériodiques

Un signal $x(t)$ est périodique s'il satisfait la relation suivante

$$x(t) = x(t + T_0) \quad \forall t$$

où t est la variable de temps et T_0 une constante. La plus petite valeur T_0 pour laquelle cette relation est vérifiée est appelée période fondamentale de $x(t)$. Un intervalle de temps d'une durée T_0 couvre donc un cycle complet du signal $x(t)$. S'il n'existe pas de constante pour laquelle la relation 3.1 est respectée, on dit que le signal $x(t)$ est apériodique ou non-périodique.

2.3. Signaux déterministes ou stochastiques

Un signal déterministe a une évolution connue et prévisible, contrairement aux signaux aléatoires ou stochastiques. Si un signal source est en grande partie déterministe à l'émetteur, le bruit qui l'affecte durant la transmission est inconnu. Le tableau 1 reprend les caractéristiques des signaux à l'émetteur et au récepteur.

Tableau 1: Nature des signaux dans une chaîne de télécommunications.

	Émetteur	Récepteur
Signal utile	déterministe	aléatoire
Bruit et interférences	aléatoire	aléatoire

Au vu de la nature des signaux, l'analyse des systèmes de télécommunications nécessitera le recours à des outils stochastiques au moment d'établir les performances. Il en va de même pour l'utilisation de signaux numériques pour lesquels les performances s'exprimeront par des probabilités d'erreur durant la transmission.

2.4. <u>Signaux d'énergie ou de puissance</u>

Tout au long de la chaîne de télécommunications, on traite des signaux électriques caractérisés par une tension ou un courant. Soit une tension $v(t)$ qui, à travers une résistance R, produit un courant $i(t)$. La puissance instantanée dissipée dans cette résistance est définie par

$$p(t) = \frac{v(t)}{R}$$

ou encore

$$p(t) = R\, i(t)$$

Quelle qu'en soit l'expression, la puissance instantanée est une fonction quadratique du signal caractéristique. À travers une charge unitaire de 1 *Ohm*, noté $[\Omega]$, les expressions sont même égales si bien qu'en définitive, il est de coutume de normaliser l'expression pour une résistance de $1[\Omega]$. Pour un signal de tension ou de courant, on obtient alors

a) <u>Puissance instantanée normalisée</u>

$$p(t) = x(t)$$

b) <u>Énergie</u>

Sur base de cette convention, l'énergie totale du signal x(t) est définie par

$$E = \lim_{T\to\infty} \int_{-T}^{+T} |x(t)|^2\, dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2\, dt$$

Certains signaux possède une énergie infinie. On utilise alors la notion de puissance moyenne qui est la moyenne temporelle de l'énergie.

c) <u>Puissance moyenne d'un signal</u>

Il en découle une puissance moyenne du signal x(t) s'exprimant :

$$P = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} |x(t)|^2\, dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2\, dt$$

Dans le cas d'un signal périodique de période T_0, l'expression de la puissance moyenne devient :

$$P = \frac{1}{T_0} \int_{t}^{t+T_0} |x(t)|^2 \, dt$$

Les définitions d'énergie et de puissance amènent à distinguer deux types de signaux:

- les signaux à énergie finie, pour lesquels $0 < E < +\infty$. Un signal physiquement réalisable est à énergie finie.
- les signaux à puissance finie. Dans ce cas, la puissance moyenne est bornée, à savoir $0 < P < +\infty$.

Ces deux contraintes sont mutuellement exclusives. En particulier, un signal à énergie finie a une puissance moyenne nulle alors qu'un signal à puissance finie possède une énergie infinie.

Les signaux déterministes et apériodiques sont à énergie finie alors que les signaux périodiques ou aléatoires ont généralement une puissance finie non nulle. Signalons qu'il s'agit de modélisation et qu'en conséquence, certains signaux n'ont pas de réelle signification physique pour des temps infinis, ce qui n'empêche pas qu'ils puissent être d'une grande aide!

2.5 <u>Décibel</u>

Pour les calculs de puissance, on utilise fréquemment une unité basée sur le logarithme. Cette unité est le décibel, noté dB. L'introduction de la notion de décibel est destinée à pouvoir décrire un signal de puissance en termes de décades, car les niveaux de puissance tout au long d'une chaîne de transmission varient dans des proportions considérables; c'est donc un changement d'échelle.

Pour un signal d'énergie ou de puissance x, la relation entre unité décimale et décibel est la suivante :

$$x \leftrightarrow 10 \log_{10}(x)$$

L'usage des décibels peut aussi s'exprimer relativement à une puissance de référence. C'est ainsi qu'on définit le dBW et le dBm comme l'écart par rapport à, respectivement, 1 $[W]$ et 1 $[mW]$. La puissance P vaut, en dBm,

$$p[dbm] = 10 \log_{10} \left[\frac{P[mW]}{1[mW]} \right]$$

Un calcul simple montre que 50 $[W]$ équivaut à 17 $[dBW]$ ou à 47 $[dBm]$.

Pour le calcul de transmission radio, on parle d'intensité de champ électrique en $[dB\mu V/m]$. Or, le volt ne représente pas une mesure de puissance, contrairement à l'unité du volt au carré. En définitive, pour une tension U exprimée en $[V]$, les décibels s'expriment par

$$10\log_{10}\left[\frac{U}{1[V]}\right]^2 = 20\log_{10}\left[\frac{U}{1[V]}\right]$$

En conclusion, pour des grandeurs dont le carré représente une puissance,

$$x \leftrightarrow 20\log_{10}(x)$$

On notera la présence d'un facteur 20 au lieu de 10 comme pour les puissances.

Exemple. Le confort d'écoute en radiodiffusion FM stéréo est défini par un seuil inférieur valant 1 $[mV/m]$. En $[dB\mu V/m]$, ce seuil s'exprime comme suit

$$20\log_{10}\left[\frac{mV/m}{\mu V/m}\right] = 20\log_{10}\left[\frac{1000\mu V/m}{1\mu V/m}\right] = 60[\, db\mu V/m]$$

3.6. <u>Rapport signal à bruit</u>

Le rapport de la puissance du signal utile à celle du bruit, notées respectivement P_s et P_N, permet souvent de qualifier la qualité de la transmission.

<u>Rapport signal à bruit ou Signal to Noise Ratio (SNR)</u>

Le rapport signal à bruit, exprimé en décibel, vaut le quotient de puissance suivant

$$\left(\frac{S}{N}\right) = 10\log_{10}\left(\frac{P_s}{P_N}\right)[db]$$

Il s'agit d'un critère abondamment utilisé pour la description des performances d'un système.

Références

1) Introduction à la Transformée de Fourier et à ses Applications, Sylvain Lafontaine, Groupe de Recherche en Motilité Cellulaire, Université du Québec à Trois-Rivières, Juillet 1983.
2) Livre de mathématiques, Calcul différentiel et intégral - Nikolaï Piskounov.
3) http://www.telecom.ulg.ac.be