

Estas son las notas de las propiedades, def. y cositas que me parecen importantes y por ahí no me acuerde.

Procesos de Markov:

Def (Matriz de Markov / Estocástica):

- $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$
- $a_{ij} \geq 0 \quad \forall i, j$
- $\sum_{i=1}^n a_{ij} = 1 \quad \forall j = 1, \dots, n$ (la sum de cada columna es 1)

Def (Proceso de Markov):

$v^{(k)} \rightarrow$ Estado del sistema en el estado k

$A \rightarrow$ Matriz de transición.

Proposición (De matriz de Markov):

① 1 es a-val

② Si λ es a-val $\Rightarrow |\lambda| \leq 1$

③ Si $\lambda \neq 1$ es a-val y x el a-vec asociado $\Rightarrow \sum_{i=1}^n x_i = 0$

Def (Vector de probabilidades):

$$\begin{aligned} x_i &\geq 0 \\ \sum_{i=1}^n x_i &= 1 \end{aligned}$$

Def (Estados de equilibrio): Siempre existe v (estado de equilibrio) tal que:

• $Av = v$ (asociado al a-val 1)

• $v_i \geq 0 \quad \forall i$

• $\sum_{i=1}^n v_i = 1$

\rightarrow Tiene sentido, sería como los porcentajes q' le quedan a cada grupo.

Propiedades:

• Existe al menos un estado de equilibrio

• $\text{mga}(1) = \text{mda}(1)$

• No toda matriz de Markov es diagonalizable

Recordatorio: \rightarrow autoespacio asociado a λ
 $\text{mga}(\lambda) = \dim(E_\lambda)$
 $\text{mda}(\lambda) = \text{multiplicidad de } \lambda \text{ como raíz de } \chi_A(\lambda) = 0.$

Def (Estado Límite): Es el estado $v^{(\infty)}$ cuando existe $\lim_{k \rightarrow \infty} v^{(k)} = v^{(\infty)}$.
 $\rightarrow v^{(\infty)} = A^{(\infty)} v^{(0)}$

Proposición: Si A es diagonalizable y -1 no es a-val $\Rightarrow \exists v^{(\infty)}$ para todo $v^{(0)}$ inicial.

Propiedades:

• Si A y B son de Markov $\Rightarrow AB$ también es de Markov $\Rightarrow A^n$ es de Markov

• Si -1 no es a-val $\Rightarrow \exists A^\infty$ (Ojo! No vale la vuelta, puede haber A^∞ con -1 de a-val)

• Si -1 no es a-val y 1 tiene multiplicidad 1 $\Rightarrow A^\infty = \begin{pmatrix} w/w & \dots & w/w \end{pmatrix}$ con $w \in E_{\lambda=1}$

• $\text{Tr}(M) = \text{Suma de } a\text{-val}$ si M es de Markov

• Sea A de Markov, diagonalizable y sea $B = \{v_1, \dots, v_n\}$

Sea $v^{(n)} = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n$ \star^1

$v^{(K)} = A^K v^{(n)} = \alpha_1 A^K v_1 + \dots + \alpha_n A^K v_n$ \star^2

$v^{(K)} = \alpha_1 \lambda_1^K v_1 + \dots + \alpha_n \lambda_n^K v_n$

Se que $|\lambda_i| \leq 1$:

$$\lambda_i = \begin{cases} 1 & \rightarrow \lambda_i^K = 1 \xrightarrow{K \rightarrow \infty} 1 \\ -1 & \rightarrow \text{Puede no existir límite} \star^1 \\ |\lambda_i| < 1 & \rightarrow \lambda_i^K \xrightarrow{K \rightarrow \infty} 0 \end{cases}$$

$\rightarrow \star^1$ depende de si en \star^1 hay $\alpha_i = 0$ multiplicando por los que sean $\lambda_i = -1$, se anula el término, por lo cual no afecta el resultado del límite.

Otras propiedades (si hay repetidas no me hago cargo $!!$):

• Si A es de Markov y $v = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \Rightarrow Av = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ satisface q' $\sum_{i=1}^n x_i = \sum_{i=1}^n y_i$

• Si A es de Markov y v es un vector de probabilidad $\Rightarrow Av$ es un vector de probabilidad. (Sale de q' $\sum_{i=1}^n x_i = 1 \Rightarrow \sum_{i=1}^n (Av)_i$ y q' si las coord de v son no negativas \Rightarrow las de Av también).

Def (A^∞): Se define $A^\infty = \lim_{K \rightarrow \infty} A^K$. Si A es diagonalizable $A = CDC^{-1}$ donde D es diagonal q' tiene los $a\text{-val}$ de A en esta.

Si A es de Markov:

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} \text{ con } |\lambda_i| \leq 1.$$

Además,

$$A^K = C \begin{pmatrix} \lambda_1^K & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n^K \end{pmatrix} C^{-1}$$

Schur

Def (Teorema de Schur): Dada $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ con $a\text{-val}$ $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ (no necesariamente distintas) existen matrices U (unitarias) y T (triangular sup.):

$$A = U \underbrace{T U^*}_{= U^{-1}} \text{ con } t_{ii} = \lambda_i \rightarrow \text{En la diagonal de } T \text{ están los } a\text{-val de } A.$$

$\rightarrow A$ es unitariamente semejante a una matriz triangular superior.

Def (Matrices Semejantes): Dadas $A, B \in \mathbb{K}^{n \times n}$ se dice que A y B son semejantes si existe C invertible tal q' $A = CBC^{-1}$. Notar equivalencia $\Leftrightarrow B = C^{-1}AC$

$\star A$ es diagonalizable sii A es semejante a una matriz diagonal.

Def (Matrices $A \sim U B$ unitariamente semejantes): Dadas $A, B \in \mathbb{K}^{n \times n}$ se dice q' son unitariamente semejantes si existe $U \in \mathbb{K}^{n \times n}$ unitaria:

$$A = U B U^* \quad (U^* = \overline{U^t})$$

★ Recordatorio: U es unitaria es lo mismo a decir:

- Las filas de U son una BON de \mathbb{K}^n
- Las columnas de U son una BON de \mathbb{K}^n
- $U U^* = U^* U = I$ (o sea, $U^* = U^{-1}$)
- $\|Ux\|_2 = \|x\|_2 \quad \forall x \in \mathbb{K}^n$

Propiedades: Sea $A, B, U \in \mathbb{K}^{n \times n}$ y U es unitaria

- Si: $A \sim B \Rightarrow \chi_A(\lambda) = \chi_B(\lambda)$ y por lo tanto los α -val de A y B son los mismos.
- Si: $A \sim B \Rightarrow \text{tr}(A) = \text{tr}(B)$
- $\|U\|_2 = 1$
- Si U es ortogonal $\Rightarrow U^{-1} = U^*$ es ortogonal
- $\text{cond}_2(U) = 1$
- $\det(U^*) = \overline{\det(U)}$
- $|\det(U)| = 1$
- Si λ es α -val de $U \Rightarrow |\lambda| = 1$
- Si U y $V \in \mathbb{K}^{n \times n}$ son unitarias $\Rightarrow UV$ es unitaria
- \sim_U es una relación de equivalencia

Def (matriz hermitiana): Sea $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$, es hermitiana (o simétrica a los reales) si: $A = A^*$

Corolario: Si A es hermitiana entonces $A \sim_U D$ con D diagonal. O sea, toda matriz hermitiana se diagonaliza, sus α -val son reales y se puede elegir una base de α -vec q' sean una BON.

Lema: Sea $A \in \mathbb{K}^{n \times n} \Rightarrow \langle Ax, y \rangle = \langle x, A^* y \rangle, \forall x, y \in \mathbb{K}^n$. Si A es hermitiana, se tiene $\langle Ax, y \rangle = \langle x, Ay \rangle \quad \forall x, y \in \mathbb{K}^n$ ($\langle \cdot, \cdot \rangle$ es el producto escalar).

Lema: Si A es hermitiana, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ son α -val \neq , entonces cualquier par de α -vec v, w asociadas a λ, μ respectivamente son ortogonales

Algoritmo para calcular U y D para A hermitiana: Dado A hermitiana calcular U unitaria con $A = U D U^*$, D diagonal y real.

o sea hasta la muerte.

- 1- Calculamos los α -val $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ (son reales, $k \leq n$, contamos solo los distintos)
- 2- Calculamos $E_{\lambda_i} = \text{Nu}(A - \lambda_i I)$ los autoespacios con $i=1, \dots, k$.

Como A es diagonalizable en \mathbb{K} , debe ser $\dim(E_{\lambda_i}) = \text{multiplicidad de } \lambda_i \text{ en } \chi_A(\lambda)$.

Además sabemos q' si $v_i \in E_{\lambda_i}, v_j \in E_{\lambda_j}$ con $\lambda_i \neq \lambda_j \Rightarrow v_i \perp v_j$.

3- En cada E_{λ_i} con $\dim \geq 2$ hacemos un proceso de G-S para quedarnos con una base ortonormal de E_{λ_i} . Si $\dim = 1$ solo normalizamos.

Si B_i = base de λ -vec. q' sean una BON para cada $E_{\lambda_i} \Rightarrow$

$$B = B_1 \cup B_2 \cup \dots \cup B_K.$$

es un BON q' sirve para las columnas de U.

4- D son los λ -val en la diagonal.

Recordar: Si A es hermitiana:

$$\|A\|_2 = \max_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|_2}{\|x\|_2}$$

$$\text{obs: } \max_{i=1, \dots, n} |\lambda_i|^2 = \left(\max_{i=1, \dots, n} |\lambda_i| \right)^2 = \lambda_{\max}^2$$

Si $M \in \mathbb{K}^{m \times n}$, entonces $\|M\|_2 = \sigma_1 = \max_{\|x\|_2=1} \|Mx\|_2$

Si M es invertible, $\text{cond}_2(A) = \frac{\sigma_1}{\sigma_n}$

$$\|A^{-1}\|_2 = \frac{1}{\sigma_n}$$

con σ_n el menor valor singular.

Def (radio espectral): Dado $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$, se define radio espectral de A ($\rho(A)$) al mayor de los módulos de los λ -val de A. Es decir,

$$\rho(A) = \max\{|\lambda_1|, \dots, |\lambda_n|\}$$

$$= \max_{i=1, \dots, n} |\lambda_i| = \lambda_{\max}$$

obs: A es hermitiana $\Rightarrow \|A\|_2 = \lambda_{\max} = \rho(A)$.

obs: Si $A \in \mathbb{K}^{n \times n} \Rightarrow A^*A$ es hermitiana y semidefinida positiva. Recordar para SVD

Construyendo U y T para Schur paso a paso: Sea λ_1 el λ -val de A con w_1 de λ -vec, construyo una base ortonormal q' contenga a w_1 (y a todas las λ -vec)

1- Armo una base $\{w_1, z_2, \dots, z_n\}$ de \mathbb{K}^n .

2- Ortogonalizo + normalizo con G-S: $\{w_1'', w_2'', \dots, w_n''\}$

Con los vectores de la BON hago una matriz unitaria poniendolos en columnas. (U_1)

3- Hago $U_1^* A U_1$ y me queda: $\begin{pmatrix} \lambda_1 & * & \dots & * \\ 0 & & & \\ \vdots & & A_1 & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$ (es unitariamente semejante a A).
 A_1 tiene los λ -val $\lambda_2, \dots, \lambda_n$.

4- Repetir el proceso con A_1

$$V_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & U_2 & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$$

$$V_2^* (U_1^* A U_1) V_2 = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & & * \\ 0 & \lambda_2 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & & & A_3 \end{pmatrix}$$

5- Obtenga como resultado: $\underbrace{V_{n-1}^* \dots V_1^* U_1^*}_{V^*} A \underbrace{U_1 V_1 \dots V_{n-1}}_V = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & * \\ & \lambda_2 & \\ & & \ddots \\ 0 & & & \lambda_n \end{pmatrix} = T$

Algoritmo de Gram-Schmidt:

$$\underbrace{\{v_1, \dots, v_n\}}_{\text{Base inicial}} \xrightarrow{\text{G-S}} \underbrace{\{u_1, \dots, u_n\}}_{\text{Base Final.}} \text{ con } u_i \cdot u_j = 0 \quad \forall i \neq j$$

- Agarra a v_1 como u_1
- $u_i = v_i - \sum_{j=1, \dots, i-1} \frac{u_j^* \cdot v_i}{\|u_j\|^2} u_j$
- $\{u_1, \dots, u_n\}$ es una BOG (base ortogonal)
- $\left\{ \frac{u_1}{\|u_1\|_2}, \dots, \frac{u_n}{\|u_n\|_2} \right\}$ es una BON (base ortonormal).

SVD

: Singular Value Decomposition / Descomposici3n de valores singulares.

Def (SVD): Sea $A \in \mathbb{K}^{m \times n}$. Existen $U \in \mathbb{K}^{m \times m}$ unitaria, $\Sigma \in \mathbb{R}^{m \times n}$ diagonal, $V \in \mathbb{K}^{n \times n}$ unitaria tal q' $A = U \Sigma V^*$

$$\Sigma: \begin{pmatrix} \sigma_1 & & \\ & \sigma_2 & \\ & & \ddots \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} \sigma_i \rightarrow \text{valor singular} \\ \sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq 0 \end{array}$$

↳ Es importante ordenar

$$U: \begin{pmatrix} | & & | \\ u_1 & \dots & u_n \\ | & & | \end{pmatrix}$$

$$V: \begin{pmatrix} | & & | \\ v_1 & \dots & v_n \\ | & & | \end{pmatrix}$$

obs: $A^* A v_i = \lambda_i v_i$ $\rightarrow v_i$ a-vec de $A^* A$ con $\lambda_i = \sigma_i^2$ a-val (los σ_i siempre son reales no negativos)

Propiedades

- ① $A^* A v_i = \lambda_i v_i$
- ② $A A^* u_i = \lambda_i u_i$
- ③ $A v_i = \sigma_i u_i$
- ④ $A^* u_i = \sigma_i v_i$

Algunos datos que surgen:

$A^* A$ es hermitiana \Rightarrow Es unitariamente diagonalizable $\Rightarrow \exists$ BON de a-vec $\{v_1, \dots, v_n\}$

$$A^* A v_i = \lambda_i v_i$$

Veamos q' $\lambda_i \geq 0$

$$\underbrace{(v_i^* A^*)}_{(A v_i)^*} (A v_i) = \lambda_i v_i^* v_i = \lambda_i \underbrace{\|v_i\|_2^2}_{\geq 0} \Rightarrow \lambda_i \geq 0$$

$$\underbrace{(A v_i)^*}_{0 \leq \|A v_i\|^2}$$

como $\lambda_i \geq 0 \Rightarrow$ define $\underline{\sigma_i = \sqrt{\lambda_i}}$. ($\sigma_i^2 = \lambda_i$)

↳ a-valores.

Con ③ digo que:

$$Av_i = \sigma_i u_i \Rightarrow u_i = \frac{Av_i}{\sigma_i} \quad \text{para } \sigma_i \neq 0 \quad i=1, \dots, r$$

$$\left. \begin{array}{l} a) u_i \perp u_j \text{ para } i \neq j \\ b) \|u_i\|_2 = 1 \end{array} \right\} \{u_1, \dots, u_r\} \text{ es ortonormal.}$$

Con ④ veo que:

$$u_i = \frac{Av_i}{\sigma_i} \Rightarrow Au_i = \frac{A^* Av_i}{\sigma_i} = \frac{\overset{\sigma_i^2}{\lambda_i} v_i}{\sigma_i} = \sigma_i \underbrace{v_i}_{\text{2-vectores.}}$$

Paso a paso armado $U \Sigma V^*$ de $A \in \mathbb{K}^{m \times n}$

- Para la Σ primero averiguo los valores singulares, ¿Cómo? Buscando los λ -val de A^*A y $\sqrt{\lambda_i} = \sigma_i$.
- $\Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_1 & & \\ & \sigma_2 & \\ & & \ddots \end{pmatrix}$ con $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq 0$

- Para V^* calculo V como la base de λ -vec de A^*A (es hermitiana, así q' forma una base y luego la normalizo).

BON = $\left\{ \frac{x_1}{\|x_1\|_2}, \dots, \frac{x_n}{\|x_n\|_2} \right\}$ con x_1, \dots, x_n λ -vec (ver q' si dos λ -vec son de 1 λ -val hay que aplicar G-S para ortogonalizar. (Aplicar traspuesta y conjugado después)).

- Por último para saber U aplica que:

$$u_i = \frac{Av_i}{\sigma_i} \quad \text{para } \sigma_i \neq 0 \quad \text{y luego completo con vectores ortonormales al resto (son los últimos } n-k \text{ vectores, si } k \text{ son la cant. de vectores con } \lambda\text{-val asociados } \neq 0).$$

- Lista! Tienes tu $U \Sigma V^*$

¿Cómo calcular la mejor aproximación de A ?

Sea $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, de rango r , con valores singulares no nulos $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_r$.

La matriz de aproximación de rango s es tal q' pongo de σ_i hasta σ_s en Σ y el resto de la SVD queda igual.

Def (pseudoinversa): Dada $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$ y su SVD $A = U \Sigma V^*$, entonces definimos su pseudoinversa

$$A^\dagger = V \Sigma^\dagger U^*$$

$$\Sigma^\dagger = \begin{pmatrix} 1/\sigma_1 & \dots & 1/\sigma_s & 0 \end{pmatrix}$$

A^\dagger es una generalización de la inversa. Cumple algunas propiedades capadas

$$\left\{ \begin{array}{l} AA^\dagger A = A \\ A^\dagger A A^\dagger = A^\dagger \end{array} \right. \quad A^\dagger \text{ es única}$$

Interpolación

Def (L_{nK}):

$$L_{nK} = \prod_{i=0, i \neq K}^n \frac{(x - x_i)}{(x_K - x_i)}$$

- $L_{nK}(x)$ es polinomio de grado n .
- $L_{nK}(x_i) = 0 \quad \forall i = 0, \dots, n, i \neq K$
- $L_{nK}(x_K) = 1$

Def (polinomio interpolante):



$$P(x) = \sum_{K=0}^n y_K L_{nK}(x) \quad \text{polinomio de grado } \leq n$$

$$P(x_i) = y_i \quad \forall i = 0, \dots, n$$

$P(x)$ es polinomio interpolante

Def (Error): Sea $f(x) \in C^{n+1}[a, b]$, $(x_i, f(x_i))$, $x_i \in [a, b]$ para $i = 0, \dots, n$ ★

(consideramos $P(x)$ el polinomio interpolante de grado $\leq n$ y $\bar{x} \in [a, b]$). Existe $E(\bar{x})$ tal q':

$$f(\bar{x}) = P(\bar{x}) + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (\bar{x} - x_0)(\bar{x} - x_1) \dots (\bar{x} - x_n)$$

★ Con lo mejor, espero que esta no se te re p'q' no la entendí :)

Def (unicidad): Dadas (x_i, y_i) para $i = 0, \dots, n$ el polinomio interpolante de grado $\leq n$ es único.

★ Deja el resto de la traja por si re pinto entenderla mejor, por lo que cuando interpolación no se usa p'q' busca un polinomio preciso q' pase por todas las p'tas (y gradualmente esto no es una buena aproximación).

Encontré la def. de la práctica:

Suponer q' nos dan $n+1$ puntos $(x_i, y_i) \neq$ entre sí y queramos un polinomio de grado $\leq n$ que pase por todas ellas.

$$P(x) = c_0 + c_1 x + \dots + c_n x^n$$

Queremos hallar c_0, \dots, c_n tal q' el polinomio interpale.

$$\begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 1 & x_{n+1} & x_{n+1}^2 & \dots & x_{n+1}^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_0 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_{n+1} \end{pmatrix}$$

Matriz de Vandermonde
de x_1, \dots, x_{n+1}
 $V \in \mathbb{R}^{(n+1) \times (n+1)}$

V es inversible siempre q' x_1, \dots, x_{n+1} son distintos $\rightarrow \det(V) = \prod_{1 \leq i < j \leq n+1} (x_j - x_i)$ por inducción.

Cuadrados Mínimos

Def (Cuadrados mínimos): $Ax = b$, $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $x \in \mathbb{R}^n$, $b \in \mathbb{R}^m$ $m \gg n$

Sirve para encontrar $\hat{x} = \arg \min \{ \|Ax\|_2^2 \}$ El error sea mínima.

$$\|Ax\|_2^2 = \sum_{i=1}^m (Ax)_i^2 = \sum_{i=1}^m (y_i - f(x_i))^2$$

$$\nabla f(x) = 2AA^T x - 2A^T b = 0$$

gradiente (da el mínimo)

\hat{x} = sol. del sis. lineal

$$A^T A x = A^T b$$

Ec. normales

obs: El problema de cuadrados mínimos siempre tiene solución ya q' $b' \in \text{Im}(A)$

Prop: La sol. es única si las columnas de A son LI

Prop: Si $x^* \in \mathbb{R}^n$ es sol. y $r = b - Ax^*$ entonces

$$A^T r = 0$$

$$A^T A x^* = A^T b$$

} Ecuaciones normales.

Métodos Iterativos

