

2^{do} parcial del 2^{do} cuatrimestre de 2023

Ej 2:

Ejercicio 2. Hallar la función de la forma $z = \sqrt{\beta_0 x + \beta_1} - y + 2w$ que mejor aproxima en el sentido de cuadrados mínimos a los siguientes datos:

x	1	2	3	4
y	1	3	4	7
z	4	8	19	1
w	1	2	9	1

Ojo! No es una función lineal.

Queremos estimar β_0 y β_1 .

① Me Fija q' la función sea lineal (las incógnitas a averiguar) (los datos pueden ser los q' querrán)

$$z + y - 2w = \sqrt{\beta_0 x + \beta_1}$$

eleva al cuadrado para que quede lineal

$$(z + y - 2w)^2 = (\sqrt{\beta_0 x + \beta_1})^2$$

(ojo que no queden módulos ni cosas no lineales desp. de aplicar algo a ambas partes de la ecuación)

$$(z + y - 2w)^2 = \beta_0 x + \beta_1$$

ψ = Observación de ψ .

$$\psi = \beta_0 x + \beta_1$$

x	1	2	3	4
y	1	3	4	7
z	4	8	19	1
w	1	2	9	1

$$\psi = 9 \ 49 \ 25 \ 36$$

$$\psi_i = (z_i + y_i - 2w_i)^2$$

$$\psi_1 = (4 + 1 - 2 \cdot 1)^2 = 3^2 = 9$$

$$\psi_2 = (8 + 3 - 2 \cdot 2)^2 = 7^2 = 49$$

$$\psi_3 = (19 + 4 - 2 \cdot 9)^2 = 5^2 = 25$$

$$\psi_4 = (1 + 7 - 2 \cdot 1)^2 = 6^2 = 36$$

② La función que mejor aproxima en el sentido de mín. cuadrados

La función q' minimiza una determinada función de costo dada por β_0 y β_1 :

$$C(\beta_0, \beta_1) = \sum_{i=1}^4 [\psi_i - (\beta_0 x_i + \beta_1)]^2$$

Para cada registro/observación lo q' se hace es q' a cada una le resta nuestra predicción y lo eleva al cuadrado para q' quede positivo. (No usamos el l.i. p'q' no es derivable)

★ Si no pudieran calcular el mínimo al que llegaste luego de encontrar los β_0 y β_1 :

Sería reemplazar el β_0 y β_1 en las datos y ver que dé la mínima posible la sumatoria

$$\min C(\beta_0, \beta_1) \quad \text{sii} \quad \min_{\beta \in \mathbb{R}^2} \|A\beta - \psi\|_2^2$$

$$\text{sii} \quad A^t A \beta = A^t \psi$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \\ 1 & 4 \\ 1 & 7 \end{pmatrix} \quad \beta = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_0 \end{pmatrix}$$

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \\ \psi_4 \end{pmatrix}$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 9 \\ 49 \\ 25 \\ 36 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 4 & 10 \\ 10 & 30 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 119 \\ 326 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 4 & 10 & 119 \\ 10 & 30 & 326 \end{array} \right) \xrightarrow{4F_2 - 10F_1} \left(\begin{array}{cc|c} 4 & 10 & 119 \\ 0 & 20 & 114 \end{array} \right)$$

$$20\beta_0 = 114$$

$$\beta_0 = 5.7/10$$