$2^{do}$ parcial del $2^{do}$ cuatrimestre de 2023

Ej 2:

**Ejercicio 2.** Hallar la función de la forma $z = \sqrt{\beta_0 x + \beta_1} - y + 2w$ que mejor aproxima en el sentido de cuadrados mínimos a los siguientes datos:

| $x$ | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|
| $y$ | 1 | 3 | 4 | 7 |
| $z$ | 4 | 8 | 19 | 1 |
| $w$ | 1 | 2 | 9 | 1 |

Ojo! No es una función lineal.

Queremos estimar $\beta_0$ y $\beta_1$

① Me fijo q' la función sea lineal (las incógnitas a averiguar) (los datos pueden hacer lo q' quieran)

$z + y - 2w = \sqrt{\beta_0 x + \beta_1}$

elevo al cuadrado para que quede lineal (ojo que no queden módulos ni cosas no lineales desp. de aplicar algo a ambas lados de la ecuación)

$(z + y - 2w)^2 = (\sqrt{\beta_0 x + \beta_1})^2$

$\underbrace{(z + y - 2w)^2}_{\psi} = \beta_0 x + \beta_1$

$\psi$ = Observación de $\psi$.

$\psi = \beta_0 x + \beta_1$

| $x$ | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|
| $y$ | 1 | 3 | 4 | 7 |
| $z$ | 4 | 8 | 19 | 1 |
| $w$ | 1 | 2 | 9 | 1 |
| $\psi$ | 9 | 49 | 25 | 36 |

$\psi_i = (z_i + y_i - 2w_i)^2$

$\psi_1 = (4 + 1 - 2.1)^2 = 3^2 = 9$

$\psi_2 = (8 + 3 - 2.2)^2 = 7^2 = 49$

$\psi_3 = (19 + 4 - 2.9)^2 = 5^2 = 25$

$\psi_4 = (1 + 7 - 2.1)^2 = 6^2 = 36$

② La función que mejor aproxima en el sentido de mín. cuadrados

↳ Función q' minimiza una determinada función de costo dado por $\beta_0$ y $\beta_1$:

$$C(\beta_0, \beta_1) = \sum_{i=1}^{4} [\psi_i - (\beta_0 x_i + \beta_1)]^2$$

→ Para cada registro/observación lo q' se hace es q' a cada una le resta nuestra predicción y la elevo al cuadrado para q' quede positivo. (No usamos el $|\cdot|$ pq' no es derivable)

☆ Si me pidieron calcular el mínimo al que llegaste luego de encontrar los $\beta_0$ y $\beta_1$:

Sería reemplazar el $\beta_0$ y $\beta_1$ con los datos y ver que dé lo mínimo posible la sumatoria

$\min C(\beta_0, \beta_1)$ sii $\min_{\beta \in \mathbb{R}^2} \|A\beta - \psi\|_2^2$

sii $A^t A \beta = A^t \psi$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & | \\ 1 & x \\ | & | \end{pmatrix} \quad \beta = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_0 \end{pmatrix}$$

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \\ \psi_4 \end{pmatrix}$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 9 \\ 49 \\ 25 \\ 36 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 4 & 10 \\ 10 & 30 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 119 \\ 326 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 4 & 10 & 119 \\ 10 & 30 & 326 \end{array}\right) \xrightarrow{4F_2 - 10F_1} \left(\begin{array}{cc|c} 4 & 10 & 119 \\ 0 & 20 & 114 \end{array}\right)$$

$$20\beta_0 = 114$$
$$\beta_0 = 57/10$$

$$4\beta_1 + 10\beta_0 = 119$$
$$4\beta_1 + 57 = 119$$
$$4\beta_1 = 62$$
$$\beta_1 = 31/2$$

$$\Rightarrow z = \sqrt{57/10\, x + 31/2} - y + 2w$$ → Función q' mejor aproxima