Estas son las notas de las propiedades, def. y cositas que me parezcan importantes y por ahí no me acuerde.

Procesos de Markov:

Def (Matriz de Markov/Estocástica):

- $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$
- $a_{ij} \geq 0 \quad \forall i,j$
- $\sum_{i=1}^{n} a_{ij} = 1 \quad \forall j=1,\dots,n$ (la sum de cada columna es 1)

Def (Proceso de Markov):

$v^{(k)} \Rightarrow$ Estado del sistema en el estado k

$A \Rightarrow$ Matriz de transición.

Def (Vector de probabilidad): $x_i \geq 0$, $\sum_{i=1}^{n} x_i = 0$

Proposición (De matriz de Markov):

1. 1 es a-val
2. Si λ es a-val $\Rightarrow |\lambda| \leq 1$
3. Si $\lambda \neq 1$ es a-val y x el a-vec asociado $\Rightarrow \sum_{i=1}^{n} x_i = 0$

Def (Estados de equilibrio): Siempre existe v (estado de equilibrio) tal que:

- $Av = v$ (asociado al a-val 1)
- $v_i \geq 0 \quad \forall i$
- $\sum_{i=1}^{n} v_i = 1$ $\Rightarrow$ Tiene sentido, sería como los porcentajes q' le quedan a cada grupo.

Propiedades:

- Existe al menos un estado de equilibrio
- $mg_A(1) = ma_A(1)$ $\Rightarrow$ Recordatorio: $mg_A(\lambda) = \dim(E_\lambda)$ (autoespacio asociado a λ), $ma_A(\lambda)$ = multiplicidad de λ como raíz de $\chi_A(\lambda)=0$.
- No toda matriz de Markov es diagonalizable

Def (Estado Límite): Es el estado $v^{(\infty)}$ $\Rightarrow v^{(\infty)} = A^{(\infty)} v^{(0)}$ cuando existe $\lim_{k\to\infty} v^{(k)} = v^{(\infty)}$.

Proposición: Si A es diagonalizable y -1 no es a-val $\Rightarrow \exists v^{(\infty)}$ para todo $v^{(0)}$ inicial.

Propiedades:

- Si A y B son de Markov $\Rightarrow$ AB también es de Markov $\Rightarrow A^k$ es de Markov
- Si -1 no es a-val $\Rightarrow \exists A^\infty$ (Ojo! No vale la vuelta, puede haber A^∞ con -1 de a-val)
- Si -1 no es a-val y 1 tiene multiplicidad 1 $\Rightarrow A^\infty = (w|w|\dots|w)$ con $w \in E_{\lambda=1}$

- $Tr(M) =$ Suma de a-val si M es de Markov

- Sea A de Markov, diagonalizable y sea $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$

  Sea $v^{(0)} = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n$ $*^1$

  $v^{(k)} = A^k v^{(0)} = \alpha_1 A^k v_1 + \dots + \alpha_n A^k v_n$ $*^2$

  $v^{(k)} = \alpha_1 \lambda_1^k v_1 + \dots + \alpha_n \lambda_n^k v_n$

  Sé que $|\lambda| \leq 1$:

$$\lambda_i = \begin{cases} 1 & \to \lambda_i^k = 1 \xrightarrow[k \to \infty]{} 1 \\ -1 & \to \text{Puede no existir límite } *^1 \\ |\lambda_i| < 1 & \to \lambda_i^k \xrightarrow[k \to \infty]{} 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow *^1$ depende de si en $*^1$ hay $\alpha_i = 0$ multiplicando por los que sean $\lambda_i = -1$, se anula el término, por lo cual no afecta el resultado del límite).

Otras propiedades (si hay repetidas no me hago cargo ^^):

- Si A es de Markov y $v = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \Rightarrow Av = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ satisface q' $\sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} y_i$

- Si A es de Markov y v es un vector de probabilidad $\Rightarrow Av$ es un vector de probabilidad. (Sale de q' $\sum_{i=1}^{n} x_i = 1 \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} (Av)_i$ y q' si las coord de v son no negativas $\Rightarrow$ las de Av tampoco).

Def (A^∞): Se define $A^\infty = \lim_{k \to +\infty} A^k$. Si A es diagonalizable $A = CDC^{-1}$ donde D es diagonal q' tiene los a-val de A en esta.

Si A es de Markov:

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} \text{ con } |\lambda_i| \leq 1.$$

Además,

$$A^k = C \begin{pmatrix} \lambda_1^k & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n^k \end{pmatrix} C^{-1}$$

Schur

Def (Teorema de Schur): Dada $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ con a-val $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ (no necesariamente distintos) existen matrices U (unitarias) y T (triangular sup.):

$$A = U T \underbrace{U^*}_{= U^{-1}} \quad \text{con } t_{ii} = \lambda_i \to \text{En la diagonal de } T \text{ están los a-val de } A.$$

$\to A$ es unitariamente semejante a una matriz triangular superior.

Def (Matrices Semejantes $A \sim B$): Dados $A, B \in \mathbb{K}^{n \times n}$ se dice que A y B son semejantes si existe C inversible tal q' $A = CBC^{-1}$. Notar equivalencia a $B = C^{-1}AC$

☆ A es diagonalizable sii A es semejante a una matriz diagonal.

Def (Matrices unitariamente semejantes) $A \sim_U B$: Dadas $A, B \in \mathbb{K}^{n\times n}$ se dice q' son unitariamente semejantes si existe $U \in \mathbb{K}^{n\times n}$ unitaria :

$$A = UBU^* \qquad \left(U^* = \overline{U^t}\right)$$

★ **Recordatorio:** U es unitaria es lo mismo a decir:

- Las filas de U son una BON de $\mathbb{K}^n$
- Las columnas de U son una BON de $\mathbb{K}^n$
- $UU^* = U^*U = I$ (o sea, $U^* = U^{-1}$)
- $\|Ux\|_2 = \|x\|_2 \quad \forall x \in \mathbb{K}^n$

Propiedades: Sea $A, B, U \in \mathbb{K}^{n\times n}$ y U es unitaria

- Si $A \sim B \Rightarrow \chi_A(\lambda) = \chi_B(\lambda)$ y por lo tanto los a-val de A y B son los mismos.
- Si $A \sim B \Rightarrow tr(A) = tr(B)$
- $\|U\|_2 = 1$
- Si U es ortogonal $\Rightarrow U^{-1} = U^*$ es ortogonal
- $cond_2(U) = 1$
- $\det(U^*) = \overline{\det(U)}$
- $|\det(U)| = 1$
- Si λ es a-val de $U \Rightarrow |\lambda| = 1$
- Si U y $V \in \mathbb{K}^{n\times n}$ son unitarias $\Rightarrow UV$ es unitaria
- $\sim_U$ es una relación de equivalencia

Def (matriz hermitiana): Sea $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$, es hermitiana (o simétrica en los reales) si $A = A^*$

Corolario: Si A es hermitiana entonces $A \sim_U D$ con D diagonal. O sea, toda matriz hermitiana se diagonaliza, sus a-val son reales y se puede elegir una base de a-vec q' sean una BON.

Lema: Sea $A \in \mathbb{K}^{n\times n} \Rightarrow \langle Ax, y\rangle = \langle x, A^*y\rangle$, $\forall x, y \in \mathbb{K}^n$. Si A es hermitiana, se tiene $\langle Ax, y\rangle = \langle x, Ay\rangle \quad \forall x, y \in \mathbb{K}^n$ ($\langle \cdot, \cdot \rangle$ es el producto escalar).

Lema: Si A es hermitiana, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ son a-val $\neq$, entonces cualquier par de a-vec v, w asociados a λ, μ respectivamente son ortogonales

Algoritmo para calcular U y D para A hermitiana: Dado A hermitiana calcular U unitaria con $A = UDU^*$, D diagonal y real.

1- Calculamos los a-val $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ (son reales, $k \leq n$, contamos solo los distintos)
   Real hasta la muerte.

2- Calculamos $E_{\lambda_i} = Nu(A - \lambda_i I)$ los autoespacios con $i = 1, \dots, k$.
   o a-vec

Como A es diagonalizable en $\mathbb{K}$, debe ser $\dim(E_{\lambda_i})$ = multiplicidad de λ_i en $\chi_A(\lambda)$.

Además sabemos q' si $v_i \in E_{\lambda_i}$, $v_j \in E_{\lambda_j}$ con $\lambda_i \neq \lambda_j \Rightarrow v_i \perp v_j$.

3- En cada E_{λ_i} con $\dim \geq 2$ hacemos un proceso de G-S para quedarnos con una base ortonormal de E_{λ_i}. Si $\dim = 1$ solo normalizamos.

Si B_i = base de a-vec. q' sean una BON para cada $E_{\lambda_i} \Rightarrow$

$$\mathcal{B} = B_1 \cup B_2 \cup \dots \cup B_K .$$

es un BON q' sirve para las columnas de $\underline{U}$.

4- $\underline{D}$ son los a-val en la diagonal.

Recordar: Si A es hermitiana:

$$\|A\|_2 = \max_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|_2}{\|x\|_2}$$

obs: $\max_{i=1,\dots,n} |\lambda_i|^2 = \left(\max_{i=1,\dots,n} |\lambda_i|\right)^2 = \lambda_{\max}^2$

Def (radio espectral): Dada $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$, se define radio espectral de A ($\rho(A)$) al mayor de los módulos de los a-val de A. Es decir,

$$\rho(A) = \max\{|\lambda_1|, \dots, |\lambda_n|\}$$
$$= \max_{i=1,\dots,n} |\lambda_i| = \lambda_{\max}$$

obs: A es hermitiana $\Rightarrow \|A\|_2 = \lambda_{\max} = \rho(A)$.

obs: Si $A \in \mathbb{K}^{n\times n} \Rightarrow A^*A$ es hermitiana y semidefinida positiva. $\rightarrow$ Recordar para SVD

Construyendo U y T para Schur paso a paso: Sea λ_1 el a-val de A con w_1 de a-vec, construyo una base ortonormal q' contenga a w_1 (y a todos los a-vec)

1- Armo una base $\{w_1, z_2, \dots, z_n\}$ de $\mathbb{K}^n$.

2- Ortogonalizo + normalizo con G-S: $\{w_1^{(1)}, w_2^{(1)}, \dots, w_n^{(1)}\}$

Con los vectores de la BON hago una matriz unitaria poniendolos en columnas. (U_1)

3- Hago $U_1^* A U_1$ y me queda: $\left(\begin{array}{c|c} \lambda_1 & * \cdots * \\ \hline 0 & \\ \vdots & A_1 \\ 0 & \end{array}\right)$ (es unitariamente semejante a A).

A_1 tiene los a-val $\lambda_2, \dots, \lambda_n$.

4- Repetir el proceso con A_1

$$V_2 = \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \cdots 0 \\ \hline 0 & \\ \vdots & U_2 \\ 0 & \end{array}\right)$$

$$V_2^*(U_1^* A U_1)V_2 = \left(\begin{array}{c|c} \begin{matrix}\lambda_1 & a \\ 0 & \lambda_2\end{matrix} & * \\ \hline 0 & A_3 \end{array}\right)$$

5- Obtengo como resultado: $\underbrace{V_{n-1}^* \cdots V_1^* U_1^*}_{V^*} A \underbrace{U_1 V_1 \cdots V_{n-1}}_{V} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & * \\ & \lambda_2 & \\ 0 & \ddots & \lambda_n \end{pmatrix} = T$

Algoritmo de Gram - Schmidt:

$$\underbrace{\{v_1, \dots, v_n\}}_{\text{Base inicial}} \xrightarrow{G-S} \underbrace{\{u_1, \dots, u_n\}}_{\text{Base final.}} \quad \text{con } u_i u_j = 0 \ \forall i \neq j$$

- Agarra a v_1 como u_1
- $u_i = v_i - \sum_{j=1,\dots,i-1} \frac{u_j^t \cdot v_i}{\|u_j\|^2} u_j$
- $\{u_1, \dots, u_n\}$ es una BOG (base ortogonal)
- $\left\{\frac{u_1}{\|u_1\|_2}, \dots, \frac{u_n}{\|u_n\|_2}\right\}$ es una BON (base ortonormal).

SVD: Sigular Value Decomposition / Descomposición de valores singulares.

Def (SVD): Sea $A = \mathbb{K}^{m\times n}$. Existen $U \in \mathbb{K}^{m\times m}$ unitaria, $\Sigma \in \mathbb{R}^{m\times n}$ diagonal, $V \in \mathbb{K}^{n\times n}$ unitaria tal q' $A = U\Sigma V^*$

$$\Sigma: \begin{pmatrix} \sigma_1 & & \\ & \sigma_2 & \\ & & \ddots \end{pmatrix}$$

$\sigma_i \to$ valor singular

$\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq 0$

↳ Es importante el orden

$$U: \left(u_1 \middle| \dots \middle| u_m \right)$$

$$V: \left(v_1 \middle| \dots \middle| v_n \right)$$

Obs: $A^*Av_i = \lambda_i v_i \longrightarrow v_i$ a-vec de A^*A con $\lambda_i = \sigma_i^2$ a-val (las σ_i siempre son reales no negativas)

Propiedades

① $A^*A v_i = \lambda_i v_i$

② $AA^* u_i = \lambda_i u_i$

③ $A v_i = \sigma_i u_i$

④ $A^* u_i = \sigma_i v_i$

Algunos datos que surgen:

A^*A es hermitiana $\Rightarrow$ Es unitariamente diagonalizable $\Rightarrow \exists$ BON de a-vec $\{v_1, \dots, v_n\}$

$A^*A v_i = \lambda_i v_i$

Veamos q' $\lambda_i \geq 0$

$$\underbrace{(v_i^* A^*)(A v_i)}_{\substack{(Av_i)^* \\ 0 \leq \|Av_i\|_2^2}} = \lambda_i v_i^* v_i = \lambda_i \underbrace{\|v_i\|_2^2}_{>0} \Rightarrow \lambda_i \geq 0$$

como $\lambda_i \geq 0 \Rightarrow$ defino $\underbrace{\sigma_i = \sqrt{\lambda_i}}_{\text{a-valores.}}$. $(\sigma_i^2 = \lambda_i)$

Con 3 digo que:

$$Av_i = \sigma_i u_i \Rightarrow u_i = \frac{Av_i}{\sigma_i} \quad \text{para} \quad \sigma_i \neq 0 \quad i, \dots, r$$

a) $u_i \perp u_j$ para $i \neq j$
b) $\|u_i\|_2 = 1$

$\{u_1, \dots, u_r\}$ es ortonormal.

Con 4 veo que:

$$u_i = \frac{Av_i}{\sigma_i} \Rightarrow Au_i = \frac{A^*Av_i}{\sigma_i} = \frac{\overset{\sigma_i^2}{\lambda_i} v_i}{\sigma_i} = \sigma_i v_i$$

a-vectores.

Paso a paso armado $U\Sigma V^*$ de $A \in \mathbb{K}^{m\times n}$

- Para la Σ primero averiguo los valores singulares, ¿Cómo? Buscando los a-val de A^*A y $\sqrt{\lambda_i} = \sigma_i$.
- $\Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_1 & & \\ & \sigma_2 & \\ & & \ddots \end{pmatrix}$ con $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq 0$
- Para V^* calculo V como la base de a-vec de A^*A (es hermitiana, así q' forma una base y luego la normalizo.

  $BON = \{\frac{x_1}{\|x_1\|_2}, \dots, \frac{x_n}{\|x_n\|_2}\}$ con $x_1, \dots, x_n$ a-vec (ver q' si dos a-vec son de 1 a-val hay que aplicar G-S para ortogonalizar. (Aplicar traspuesta y conjugado después).
- Por último para saber U aplico que:

  $u_i = \frac{Av_i}{\sigma_i}$ para $\sigma_i \neq 0$ y luego completo con vectores ortonormales al resto (son los últimos n-k vectores, si k son la cant. de vectores con a-val asociados $\neq 0$).
- Listo! Tenes tu $U\Sigma V^*$