Puede q' hayan cambios visuales a lo largo de las resoluciones, es pq' encontré como usar mejor la tableta !!

AL - Práctico 5

Ej 1, 2, 3 hechos en la carpeta...

Ej 4:

Ejercicio 4. Dada $\boldsymbol{A} \in K^{n\times n}$ hermitiana y $S \subset K^n$ un subespacio invariante por $\boldsymbol{A}$, es decir $\boldsymbol{Av} \in S$ para todo $\boldsymbol{v} \in S$. Probar que $S^{\perp}$ es invariante por $\boldsymbol{A}$.

$A = A^*$ $\quad S \subseteq \mathbb{K}^n$ $\quad \forall v.\ Av \in S$

Antes q' nada, ¿qué mierda era $S^\perp$?

$S^\perp = \{v : w \in S \Rightarrow v^* w = 0\}$

Entonces, qvq

$\forall v, w.\ v \in S$ y $w \in S^\perp \Rightarrow v^* A w = 0$

*' Como A es hermitiana $(A = A^*)$

$v(Aw) = (Av)w$

Luego,

$v^*(Aw) = 0$ sii

*' $\underbrace{(Av)}_{\in S}\underbrace{w}_{\in S^\perp} = 0$

$\Rightarrow$ Sé que esto es verdad por la def. de $S^\perp$.

✓

Ej 5:

Ejercicio 5. Probar que $\boldsymbol{A} \in K^{n\times n}$ es hermitiana y definida positiva si y solo si $\boldsymbol{A}$ es unitariamente semejante a una matriz diagonal real positiva con elementos de la diagonal positivos.

Repaso de algunas definiciones:

A es hermitiana sii $A = A^*$

A es def. positiva sii $x^t A x > 0 \ \forall x \in \mathbb{R}^n, x \neq 0$

A es unitariamente semejante a B sii $\exists U . U \in \mathbb{K}^{n\times n}$ unitaria y $A = UDU^*$

$\Rightarrow$) A hermitiana y def positiva $\Rightarrow$ A es unitariamente semejante a una matriz diagonal real positiva.

Teo. espectral: $A = UDU^*$ con U unitaria

• Toda matriz hermitiana es unitaria y diagonalizable

Luego, por el anterior teorema puedo ver q' es unitariamente semejante a una matriz diagonal.

Además, como A es def. positiva sé que todos los a-val de A son >0, por lo cual sé que la diagonal de la matriz diagonal de la diagonalización tiene todos sus valores positivos.

$\Leftarrow$) A es unitariamente semejante a una diagonal real positiva $\Rightarrow$ A es hermitiana y def. positiva.

Queda bastante trivial creo(?. Onda medio q' es q' A tiene la rep. $A = UDU^*$ entonces diagonalizable es y los a-val son positivos, pq' tiene la diagonal de la diagonalización con valores positivos. :)

Ej 6:

Ejercicio 6. Sea $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 4 & \alpha+2 & 2 \\ \alpha^2 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

(a) Hallar los valores de $\alpha \in \mathbb{R}$ para que $\boldsymbol{A}$ sea simétrica y $\lambda = 0$ sea autovalor de $\boldsymbol{A}$.

(b) Para el valor de α hallado en (a), diagonalizar ortonormalmente la matriz $\boldsymbol{A}$.

a) A simétrica $\Rightarrow A = A^t$

Entonces, $\alpha^2 = \alpha + 2$ sii $\alpha^2 - \alpha - 2 = 0$ $\xrightarrow{\text{Bhaskara}}$ $\dfrac{1 \pm \sqrt{1-4.1.-2}}{2.1} = \dfrac{1\pm\sqrt{9}}{2} = \dfrac{1\pm 3}{2}$ $\dfrac{4}{2} = \boxed{2}$, $\dfrac{-2}{2} = \boxed{-1}$

Ahora veo si para alguno de los $\alpha \in \{-1, 2\}$ tiene a-val

$\alpha = -1$:

$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 1 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ $\qquad Av = \lambda v$ sii $(A - \lambda I)v = 0$ con $v \neq 0$

$\begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 1 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[2F_3 - F_1]{4F_2 - F_1} \begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 0 & 15 & 6 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}$ } No son LD $\Rightarrow$ no existe $v \neq 0$ $\Rightarrow \lambda = 0$ no es a-val $\Rightarrow \underline{\alpha \neq -1}$ γ

$\alpha = 2$:

$A = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 2 \\ 4 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 4 & 4 & 2 \\ 4 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[2F_3 - F_1]{F_2 - F_1} \begin{pmatrix} 4 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$ $4x + 4y + 2z = 0$, $2z = -4x - 4y$, $\underline{z = -2x - 2y}$ $\Rightarrow$ a-vec $= \langle (1, 0, -2), (0, 1, -2) \rangle$

$\alpha = 2$ permite q' $\lambda = 0$ sea a-vec. γ

b) Diagonalizar ortonormalmente A.

Busco si A tiene otros a-val:

$\det\begin{pmatrix} 4-\lambda & 4 & 2 \\ 4 & 4-\lambda & 2 \\ 2 & 2 & 1-\lambda \end{pmatrix} = (4-\lambda)(-1)^{1+1}.\det\begin{pmatrix} 4-\lambda & 2 \\ 2 & 1-\lambda \end{pmatrix} + 4.(-1)^{2+1}.\det\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1-\lambda \end{pmatrix} + 2.(-1)^{3+1}.\det\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 4-\lambda & 2 \end{pmatrix}$

$= (4-\lambda)((4-\lambda)(1-\lambda) - 4) - 4(4(1-\lambda) - 4) + 2.(8 - 2(4-\lambda))$

$= (4-\lambda)(\lambda^2 - 5\lambda \cancel{+4} \cancel{-4}) - 4(\cancel{4} - 4\lambda \cancel{-4}) + 2.(\cancel{8} \cancel{-8} + 2\lambda)$

$= (4-\lambda)\lambda(\lambda - 5) + 16\lambda + 4\lambda$

$$= \lambda((4-\lambda)(\lambda-5)+20)$$
$$= \lambda(-\lambda^2+9\lambda-\cancel{20}+\cancel{20})$$
$$= \lambda^2(-\lambda+9)$$
$$= -\lambda^2(\lambda-9)$$

$\lambda = 9$:

$$\begin{pmatrix} -5 & 4 & 2 \\ 4 & -5 & 2 \\ 2 & 2 & -8 \end{pmatrix} \xrightarrow[5F_3+2F_1]{5F_2+4F_1} \begin{pmatrix} -5 & 4 & 2 \\ 0 & -9 & 18 \\ 0 & 18 & -36 \end{pmatrix} \xrightarrow[F_3+2F_2]{} \begin{pmatrix} -5 & 4 & 2 \\ 0 & -9 & 18 \\ \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} \end{pmatrix}$$

$-9y+18z=0$

$18z = 9y$

$\boxed{2z = y}$

$-5x+4y+2z=0$

$-5x+4.2z+2z=0$

$10z = 5x$

$\boxed{2z = x}$

$\Rightarrow$ a-vec asociado $= \langle(2,2,1)\rangle$

(Me acabo de enterar q' toda matriz hermética es diagonalizable ortogonalmente)

Luego, tengo una base de autovectores : $\{(1,0,-2),(0,1,-2),(2,2,1)\}$

Para diagonalizar ortonormalmente $(U^*\Delta U)$ primero necesito una base ortonormal de los a-vec. (tip: Puedo usar el q' A es simétrica para ver q' los a-vec asociados al 0 son $\perp$ a los asociados al 9)

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$u_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} - \frac{(1,0,-2)\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}}{\|(1,0,-2)\|_2^2}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} - 4/5 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4/5 \\ 1 \\ -2/5 \end{pmatrix}$$

$u_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$ ya sé q' es ortogonal a los otros 2 (por prop. de las matrices hermitianas)

Normalizo:

$$\frac{u_1}{\|u_1\|_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\|(1,0,-2)\|_2} = 1/\sqrt{5} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\frac{u_2}{\|u_2\|_2} = \begin{pmatrix} -4/5 \\ 1 \\ -2/5 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\|(-4/5,1,-2/5)\|_2} = \frac{\sqrt{5}}{3}\begin{pmatrix} -4/5 \\ 1 \\ -2/5 \end{pmatrix}$$

$$\frac{u_3}{\|u_3\|_2} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\|(2,2,1)\|_2} = 1/3 \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$BON = \{1/\sqrt{5}(1,0,-2), \sqrt{5}/3(-4/5,1,-2/5), 1/3(2,2,1)\}$

$\Rightarrow U$ es:

$$\begin{pmatrix} 1/\sqrt{5} & \frac{4\sqrt{5}}{15} & 2/3 \\ 0 & \sqrt{5}/3 & 2/3 \\ -2/\sqrt{5} & -2/\sqrt{5} & 1/3 \end{pmatrix}$$

⇒ D es (poner los a-val ordenados (correspondiendo cada a-vec en las cols de U)):

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$$

U^*DU es:

$$\begin{pmatrix} 1/\sqrt{5} & 0 & -2/\sqrt{5} \\ \frac{4\sqrt{5}}{15} & \sqrt{5}/3 & -2/5 \\ 2/3 & 2/3 & 1/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/\sqrt{5} & \frac{4\sqrt{5}}{15} & 2/3 \\ 0 & \sqrt{5}/3 & 2/3 \\ -2/\sqrt{5} & -2/3 & 1/3 \end{pmatrix}$$

Ej 7:

Ejercicio 7. Considerar la matriz:

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$$

(a) Calcular una descomposición en valores singulares de $\boldsymbol{A}$.

1

(b) Dibujar el círculo unitario en $\mathbb{R}^2$ y la elipse $\{\boldsymbol{Ax} : \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2, \|\boldsymbol{x}\|_2 = 1\}$, señalando los valores singulares y los vectores singulares a izquierda y a derecha.

(c) Calcular $\|\boldsymbol{A}\|_2$ y $\text{cond}_2(\boldsymbol{A})$.

(d) Calcular $\boldsymbol{A}^{-1}$ usando la descomposición hallada.

a) Calcular la SVD:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$$

$$A^*A = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 25 & 15 \\ 15 & 25 \end{pmatrix}$$ → es efectivamente simétrica

Busco a-val de A^*A:

$$\det \begin{pmatrix} 25-\lambda & 15 \\ 15 & 25-\lambda \end{pmatrix} = (25-\lambda)^2 - 15^2 = \lambda^2 - 50\lambda + 25^2 - 15^2 = \lambda^2 - 50\lambda + 400$$

$$\frac{50 \pm \sqrt{2500 - 4 \cdot 1 \cdot 400}}{2 \cdot 1} = \frac{50 \pm 30}{2} \begin{cases} \lambda_1 = \frac{80}{2} = 40 \\ \lambda_2 = \frac{20}{2} = 10 \end{cases}$$

$\underline{\lambda = 40}$:

$$\begin{pmatrix} -15 & 15 \\ \cancel{15} & \cancel{-15} \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} -15x + 15y = 0 \\ y = x \end{matrix} \quad \Big\} \langle (1,1) \rangle$$

$\underline{\lambda = 10}$:

$$\begin{pmatrix} 15 & 15 \\ \cancel{15} & \cancel{15} \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} 15x + 15y = 0 \\ x = -y \end{matrix} \quad \Big\} \langle (-1,1) \rangle$$

Los valores singulares son: $\{ \underbrace{\overset{\sigma_1}{2\sqrt{10}}}_{= \sqrt{40}}, \overset{\sigma_2}{\sqrt{10}} \}$

$$\Sigma = \sqrt{10} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$ mayor en módulo.

Con los a-vec de A^*A los normalizo y obtengo una BON (pues los a-vec de a-val distintos son ortogonales ya en una hermitiana)

$$\frac{v_1}{\|v_1\|_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\|(1,1)\|_2} = \underline{\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}} \qquad \frac{v_2}{\|v_2\|_2} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \frac{1}{\|(-1,1)\|_2} = \underline{\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}}$$

$$\underline{BON} = \{ 1/\sqrt{2}\,(1,1) ; 1/\sqrt{2}\,(-1,1) \}$$

bon asesino tiene un bandón bien latino

Ahora, ¿qué hago con esto? Son nuestras columnas de la V.

$$V = 1/\sqrt{2} \begin{pmatrix} \underbrace{\begin{matrix} 1 \\ 1 \end{matrix}}_{v_1} & \underbrace{\begin{matrix} 1 \\ -1 \end{matrix}}_{v_2} \end{pmatrix} \qquad V^* = 1/\sqrt{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

¿Cómo obtengo la U?

$$u_i = \frac{Av_i}{\sigma_i} \quad \text{con } \sigma_i \neq 0 \Rightarrow \{u_1, u_2\} = \left\{ \frac{Av_1}{\sigma_1} ; \frac{Av_2}{\sigma_2} \right\}$$

$$\frac{Av_1}{\sigma_1} = \frac{1}{2\sqrt{10}} \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{4\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \end{pmatrix} = 1/\sqrt{5} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\frac{Av_2}{\sigma_2} = \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix} = 1/\sqrt{5} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Tengo mis cols de la U!

$$U = 1/\sqrt{5} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

Escribo $\underline{U \Sigma V^*}$:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1/\sqrt{5} & 2/\sqrt{5} \\ 2/\sqrt{5} & -1/\sqrt{5} \end{pmatrix}}_{U} \underbrace{\begin{pmatrix} 2\sqrt{10} & 0 \\ 0 & \sqrt{10} \end{pmatrix}}_{\Sigma} \underbrace{\begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \end{pmatrix}}_{V^*} = A$$

(se puede corroborar haciendo la cuenta).

b) Rezo porque no tengo que graficar.

c) $\|A\|_2 = \max_{\|x\|_2 = 1} \|Ax\|_2 = \sigma_1$ (por teorema de la teórica)

$$\sigma_1 = 2\sqrt{10}$$

$$cond_2(A) = \|A\|_2 \underbrace{\|A^{-1}\|}_{= \frac{1}{\sigma_n}} = 2\sqrt{10} \cdot \frac{1}{\sqrt{10}} = 2$$

d) $A^{-1} = (U \Sigma V^*)^{-1} = (\Sigma V^*)^{-1} U^* = V \Sigma^{-1} U^*$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/2\sqrt{10} & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{10} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/\sqrt{5} & 2/\sqrt{5} \\ 2/\sqrt{5} & -1/\sqrt{5} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{10}} \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{10} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/2 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = 1/10 \begin{pmatrix} 5/2 & 0 \\ -3/2 & 2 \end{pmatrix}$$

Aclaración: No pensar q' esta es la SVD de A^{-1} pq' los σ_i no están de mayor a menor.

Ej 8:

Ejercicio 8. Determinar una descomposición en valores singulares de las siguientes matrices:

$$(a)\begin{pmatrix}1 & -2 & 2\\ -1 & 2 & -2\end{pmatrix}\quad (b)\begin{pmatrix}7 & 1\\ 0 & 0\\ 5 & 5\end{pmatrix}$$

a) Busco a-val y a-vec de A^*A:

Dimensiones que debo obtener

$\underbrace{2\times 3}_{} = (2\times 2)(2\times 3)(3\times 3)$

Lo si lo hago traspuesto, me debería dar lo mismo y desp hacerle la traspuesta

$$\begin{pmatrix}1 & -2 & 2\\ -1 & 2 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -1\\ -2 & 2\\ 2 & -2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}9 & -9\\ -9 & 9\end{pmatrix}$$

$$\det\begin{pmatrix}9-\lambda & -9\\ -9 & 9-\lambda\end{pmatrix} = (9-\lambda)^2 - 9^2 = \lambda^2 - 18\lambda + \cancel{9^2} - \cancel{9^2} = \lambda(\lambda-18) < \begin{matrix}\lambda=0\\ \lambda=18\end{matrix}$$

Valores singulares $= \{\overset{\sigma_1}{3\sqrt{2}}, \overset{\sigma_2}{0}\}$

$$\Sigma^t = \begin{pmatrix}3\sqrt{2} & 0\\ 0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix} \qquad \Sigma = \begin{pmatrix}3\sqrt{2} & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix} \qquad A^t = (U\Sigma V^t)^t = V(U\Sigma)^t = V\Sigma^t U^t$$

Luego, busco los a-vec:

$\underline{\lambda = 18}$: $\begin{pmatrix}-9 & -9\\ \cancel{-9} & \cancel{-9}\end{pmatrix}$ $\quad x = -y \quad \} \ \langle(-1,1)\rangle$

$\underline{\lambda = 0}$: $\begin{pmatrix}9 & -9\\ \cancel{-9} & \cancel{9}\end{pmatrix}$ $\quad x = y \quad \} \ \langle(1,1)\rangle$

Son $\perp$ pues A^*A es hermitiana, queda normalizarlos y tener una BON

$$BON = \{1/\sqrt{2}(-1,1), 1/\sqrt{2}(1,1)\}$$

$$V = 1/\sqrt{2}\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2}\\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2}\end{pmatrix} = V^*$$

Por último,

$$u_1 = \frac{Av_1}{\sigma} = \begin{pmatrix}1 & -1\\ -2 & 2\\ 2 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1/\sqrt{2}\\ 1/\sqrt{2}\end{pmatrix}\cdot\frac{1}{3\sqrt{2}} = \begin{pmatrix}1 & -1\\ -2 & 2\\ 2 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1/6\\ 1/6\end{pmatrix} = 1/6\begin{pmatrix}1\\ 4\\ -4\end{pmatrix}$$

Luego, como u_1 es el único a-vec. asociado a un nro $\neq 0$ completo la base con 2 ortogonales:

$x + 4y - 4z = 0$ $\longrightarrow$ Se ve clarito q' tengo el $(0,1,1)$ de acá

$u_2 = (0,1,1)$

$$\begin{pmatrix}1 & 4 & -4\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix} = (8,-1,1) = u_3$$

Ahora normalizo $\qquad \overbrace{4^2+4^2}^{32}+1$

$$\frac{u_1}{\|u_1\|_2} = \begin{pmatrix}1\\ 4\\ -4\end{pmatrix}\cdot\frac{1}{\sqrt{33}} \qquad \frac{u_2}{\|u_2\|_2} = \begin{pmatrix}0\\ 1\\ 1\end{pmatrix}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}} \qquad \frac{u_3}{\|u_3\|_2} = \begin{pmatrix}8\\ -1\\ 1\end{pmatrix}\cdot\frac{1}{\sqrt{66}}$$

$$U^t = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{33} & 0 & 8/\sqrt{66} \\ 4/\sqrt{33} & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{66} \\ -4/\sqrt{33} & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{66} \end{pmatrix} \qquad U = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{33} & 4/\sqrt{33} & -4/\sqrt{33} \\ 0 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 8/\sqrt{66} & -1/\sqrt{66} & 1/\sqrt{66} \end{pmatrix}$$

$$A = (A^t)^t = \left((U \Sigma V^*)^t \right)^t = \left(V \Sigma^* U^t \right)^t =$$

$$\begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3\sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/\sqrt{33} & 4/\sqrt{33} & -4/\sqrt{33} \\ 0 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 8/\sqrt{66} & -1/\sqrt{66} & 1/\sqrt{66} \end{pmatrix}$$

Por ahí le pifié algún nro pero creería q' la forma está bien

b) Similar procedimiento (salteado)