Estas son las notas de las propiedades, def. y cositas que me parezcan importantes y por ahí no me acuerde.

Procesos de Markov:

Def (Matriz de Markov/Estocástica):

- $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$
- $a_{ij} \geq 0 \quad \forall i,j$
- $\sum_{i=1}^{n} a_{ij} = 1 \quad \forall j = 1, \dots, n$ (la sum de cada columna es 1)

Def (Proceso de Markov):

$v^{(k)} \Rightarrow$ Estado del sistema en el estado k

$A \Rightarrow$ Matriz de transición.

Def (Vector de probabilidad): $x_i \geq 0$, $\sum_{i=1}^{n} x_i = 0$

Proposición (De matriz de Markov):

1. 1 es a-val
2. Si λ es a-val $\Rightarrow |\lambda| \leq 1$
3. Si $\lambda \neq 1$ es a-val y x el a-vec asociado $\Rightarrow \sum_{i=1}^{n} x_i = 0$

Def (Estados de equilibrio): <u>Siempre</u> <u>existe</u> v (estado de equilibrio) tal que:

- $Av = v$ (asociado al a-val 1)
- $v_i \geq 0 \quad \forall i$
- $\sum_{i=1}^{n} v_i = 1$ $\Rightarrow$ Tiene sentido, sería como los porcentajes q' le quedan a cada grupo.

Propiedades:

- Existe al menos un estado de equilibrio
- $mg_A(1) = ma_A(1)$ $\Rightarrow$ Recordatorio: $mg_A(\lambda) = \dim(E_\lambda)$ (autoespacio asociado a λ); $ma_A(\lambda)$ = multiplicidad de λ como raíz de $\chi_A(\lambda) = 0$.
- <u>No</u> toda matriz de Markov es diagonalizable

Def (Estado Límite): Es el estado $v^{(\infty)}$ $\Rightarrow v^{(\infty)} = A^{(\infty)} v^{(0)}$ cuando existe $\lim_{k \to \infty} v^{(k)} = v^{(\infty)}$.

Proposición: Si A es diagonalizable y -1 no es a-val $\Rightarrow \exists v^{(\infty)}$ para todo $v^{(0)}$ inicial.

Propiedades:

- Si A y B son de Markov $\Rightarrow AB$ también es de Markov $\Rightarrow A^k$ es de Markov
- Si -1 no es a-val $\Rightarrow \exists A^\infty$ (¡Ojo! No vale la vuelta, puede haber A^∞ con -1 de a-val)
- Si -1 no es a-val y 1 tiene multiplicidad 1 $\Rightarrow A^\infty = \left(w \,|\, w \,|\, \dots \,|\, w \right)$ con $w \in E_{\lambda=1}$

- $Tr(M) =$ Suma de a-val si M es de Markov

- Sea A de Markov, diagonalizable y sea $\mathcal{B} = \{v_1, \ldots, v_n\}$

  Sea $v^{(0)} = \alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_n v_n$ $*^1$

  $v^{(k)} = A^k v^{(0)} = \alpha_1 A^k v_1 + \ldots + \alpha_n A^k v_n$ $*^2$

  $v^{(k)} = \alpha_1 \lambda_1^k v_1 + \ldots + \alpha_n \lambda_n^k v_n$

  Sé que $|\lambda| \leq 1$:

$$\lambda_i = \begin{cases} 1 & \to \lambda_i^k = 1 \xrightarrow[k \to \infty]{} 1 \\ -1 & \to \text{Puede no existir límite } *^1 \\ |\lambda_i| < 1 & \to \lambda_i^k \xrightarrow[k \to \infty]{} 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow *^1$ depende de si en $*^1$ hay $\alpha_i = 0$ multiplicando por los que sean $\lambda_i = -1$, se anula el término, por lo cual no afecta el resultado del límite).

Otras propiedades (si hay repetidas no me hago cargo ^^):

- Si A es de Markov y $v = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \Rightarrow Av = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ satisface q' $\sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} y_i$

- Si A es de Markov y v es un vector de probabilidad $\Rightarrow Av$ es un vector de probabilidad. (Sale de q' $\sum_{i=1}^{n} x_i = 1 \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} (Av)_i$ y q' si las coord de v son no negativas $\Rightarrow$ Las de Av tampoco).

Def (A^∞): Se define $A^\infty = \lim_{k \to +\infty} A^k$. Si A es diagonalizable $A = CDC^{-1}$ donde D es diagonal q' tiene los a-val de A en esta.

Si A es de Markov:

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} \text{ con } |\lambda_i| \leq 1.$$

Además,

$$A^k = C \begin{pmatrix} \lambda_1^k & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n^k \end{pmatrix} C^{-1}$$

Schur

Def (Teorema de Schur): Dada $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ con a-val $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ (no necesariamente distintos) existen matrices U (unitarias) y T (triangular sup.):

$$A = UT\underbrace{U^*}_{= U^{-1}} \quad \text{con } t_{ii} = \lambda_i \to \text{En la diagonal de } T \text{ están los a-val de } A.$$

$\to A$ es unitariamente semejante a una matriz triangular superior.

Def (Matrices Semejantes, $A \sim B$): Dadas $A, B \in \mathbb{K}^{n \times n}$ se dice que A y B son semejantes si: existe C inversible tal q' $A = CBC^{-1}$. Notar equivalencia a $B = C^{-1}AC$

☆ A es diagonalizable sii A es semejante a una matriz diagonal.

Def (Matrices unitariamente semejantes): Dadas $A, B \in \mathbb{K}^{n\times n}$ se dice q' son unitariamente semejantes ($A \sim_U B$) si existe $U \in \mathbb{K}^{n\times n}$ unitaria :

$$A = UBU^* \qquad (U^* = \overline{U^t})$$

★ **Recordatorio:** U es unitaria es lo mismo a decir:

- Las filas de U son una BON de $\mathbb{K}^n$
- Las columnas de U son una BON de $\mathbb{K}^n$
- $UU^* = U^*U = I$ (o sea, $U^* = U^{-1}$)
- $\|Ux\|_2 = \|x\|_2 \quad \forall x \in \mathbb{K}^n$

Propiedades: Sea $A, B, U \in \mathbb{K}^{n\times n}$ y U es unitaria

- Si $A \sim B \Rightarrow \chi_A(\lambda) = \chi_B(\lambda)$ y por lo tanto los a-val de A y B son los mismos.
- Si $A \sim B \Rightarrow tr(A) = tr(B)$
- $\|U\|_2 = 1$
- Si U es ortogonal $\Rightarrow U^{-1} = U^*$ es ortogonal
- $cond_2(U) = 1$
- $\det(U^*) = \overline{\det(U)}$
- $|\det(U)| = 1$
- Si λ es a-val de $U \Rightarrow |\lambda| = 1$
- Si U y $V \in \mathbb{K}^{n\times n}$ son unitarias $\Rightarrow UV$ es unitaria
- $\sim_U$ es una relación de equivalencia

Def (matriz hermitiana): Sea $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$, es hermitiana (o simétrica en los reales) si $A = A^*$

Corolario: Si A es hermitiana entonces $A \sim_U D$ con D diagonal. O sea, toda matriz hermitiana se diagonaliza, sus a-val son reales y se puede elegir una base de a-vec q' sean una BON.

Lema: Sea $A \in \mathbb{K}^{n\times n} \Rightarrow \langle Ax, y\rangle = \langle x, A^*y\rangle, \ \forall x, y \in \mathbb{K}^n$. Si A es hermitiana, se tiene $\langle Ax, y\rangle = \langle x, Ay\rangle \ \forall x, y \in \mathbb{K}^n$ ($\langle \cdot, \cdot \rangle$ es el producto escalar).

Lema: Si A es <u>hermitiana</u>, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ son a-val $\neq$, entonces cualquier par de a-vec v, w asociados a λ, μ respectivamente son <u>ortogonales</u>

Algoritmo para calcular U y D para A hermitiana: Dado A hermitiana calcular U unitaria con $A = UDU^*$, D diagonal y real.

Real hasta la muerte.

1- Calculamos los a-val $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ (son reales, $k \leq n$, contamos solo los distintos)

2- Calculamos $E_{\lambda_i} = Nu(A - \lambda_i I)$ los autoespacios con $i = 1, \dots, k$. (o a-vec)

Como A es diagonalizable en $\mathbb{K}$, debe ser $\dim(E_{\lambda_i})$ = multiplicidad de λ_i en $\chi_A(\lambda)$.

Además sabemos q' si $v_i \in E_{\lambda_i}$, $v_j \in E_{\lambda_j}$ con $\lambda_i \neq \lambda_j \Rightarrow v_i \perp v_j$.

3- En cada E_{λ_i} con $\dim \geq 2$ hacemos un proceso de G-S para quedarnos con una base ortonormal de E_{λ_i}. Si $\dim = 1$ solo normalizamos.

Si B_i = base de a-vec. q' sean una BON para cada $E_{\lambda_i} \Rightarrow$

$$\mathcal{B} = B_1 \cup B_2 \cup \dots \cup B_K.$$

es un BON q' sirve para las columnas de $\underline{U}$.

4- $\underline{D}$ son los a-val en la diagonal.

Recordar: Si A es hermitiana:

$$\|A\|_2 = \max_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|_2}{\|x\|_2}$$

Si $M \in \mathbb{K}^{m \times n}$, entonces $\|A\|_2 = \sigma_1 = \max_{\|x\|=1} \|Ax\|_2$

Si M es inversible, $cond_2(A) = \frac{\sigma_1}{\sigma_n}$, $\|A^{-1}\|_2 = \frac{1}{\sigma_n}$

Con σ_n el menor valor singular.

obs: $\max_{i=1,\dots,n} |\lambda_i|^2 = \left(\max_{i=1,\dots,n} |\lambda_i|\right)^2 = \lambda_{\max}^2$

Def (radio espectral): Dada $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$, se define radio espectral de A ($\rho(A)$) al mayor de los módulos de los a-val de A. Es decir,

$$\rho(A) = \max\{|\lambda_1|, \dots, |\lambda_n|\}$$
$$= \max_{i=1,\dots,n} |\lambda_i| = \lambda_{\max}$$

obs: A es hermitiana $\Rightarrow \|A\|_2 = \lambda_{\max} = \rho(A)$.

obs: Si $A \in \mathbb{K}^{n \times n} \Rightarrow A^*A$ es hermitiana y semidefinida positiva. → Recordar para SVD

Construyendo U y T para Schur paso a paso: Sea λ_1 el a-val de A con w_1 de a-vec, construyo una base ortonormal q' contenga a w_1 (y a todos los a-vec)

1- Armo una base $\{w_1, z_2, \dots, z_n\}$ de $\mathbb{K}^n$.

2- Ortogonalizo + normalizo con G-S: $\{w_1^{(1)}, w_2^{(1)}, \dots, w_n^{(1)}\}$

Con los vectores de la BON hago una matriz unitaria poniéndolos en columnas. (U_1)

3- Hago $U_1^* A U_1$ y me queda: $\left(\begin{array}{c|ccc} \lambda_1 & * & \cdots & * \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & A_1 & \\ 0 & & & \end{array}\right)$ (es unitariamente semejante a A).

A_1 tiene los a-val $\lambda_2, \dots, \lambda_n$.

4- Repetir el proceso con A_1

$$V_2 = \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & U_2 & \\ 0 & & & \end{array}\right)$$

$$V_2^*(U_1^* A U_1) V_2 = \left(\begin{array}{cc|c} \lambda_1 & a & * \\ 0 & \lambda_2 & \\ \hline 0 & & A_3 \end{array}\right)$$

5- Obtengo como resultado: $\underbrace{V_{n-1}^* \dots V_1^* U_1^*}_{V^*} A \underbrace{U_1 V_1 \dots V_{n-1}}_{V} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & * \\ & \lambda_2 & \\ 0 & & \ddots \; \lambda_n \end{pmatrix} = T$

Algoritmo de Gram-Schmidt:

$$\underbrace{\{v_1, \dots, v_n\}}_{\text{Base inicial}} \xrightarrow{G-S} \underbrace{\{u_1, \dots, u_n\}}_{\text{Base final.}} \quad \text{con } u_i u_j = 0 \ \forall i \neq j$$

- Agarra a v_1 como u_1
- $u_i = v_i - \sum_{j=1,\dots,i-1} \frac{u_j^t \cdot v_i}{\|u_j\|^2} u_j$
- $\{u_1, \dots, u_n\}$ es una BOG (base ortogonal)
- $\left\{\frac{u_1}{\|u_1\|_2}, \dots, \frac{u_n}{\|u_n\|_2}\right\}$ es una BON (base ortonormal).

SVD: Sigular Value Decomposition / Descomposición de valores singulares.

Def (SVD): Sea $A = \mathbb{K}^{m\times n}$. Existen $U \in \mathbb{K}^{m\times m}$ unitaria, $\Sigma \in \mathbb{R}^{m\times n}$ diagonal, $V \in \mathbb{K}^{n\times n}$ unitaria tal q' $A = U\Sigma V^*$

$\Sigma: \begin{pmatrix} \sigma_1 & & \\ & \sigma_2 & \\ & & \ddots \end{pmatrix}$ $\quad \sigma_i \to$ valor singular

$\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq 0$

↳ Es importante el orden

$U: \begin{pmatrix} u_1 & | & \dots & | & u_m \end{pmatrix}$

$V: \begin{pmatrix} v_1 & | & \dots & | & v_n \end{pmatrix}$

Obs: $A^*Av_i = \lambda_i v_i \longrightarrow v_i$ a-vec de A^*A con $\lambda_i = \sigma_i^2$ a-val (las σ_i siempre son reales no negativas)

Propiedades

1. $A^*A v_i = \lambda_i v_i$
2. $AA^* u_i = \lambda_i u_i$
3. $A v_i = \sigma_i u_i$
4. $A^* u_i = \sigma_i v_i$

Algunos datos que surgen:

A^*A es hermitiana $\Rightarrow$ Es unitariamente diagonalizable $\Rightarrow \exists$ BON de a-vec $\{v_1, \dots, v_n\}$

$A^*A v_i = \lambda_i v_i$

Veamos q' $\lambda_i \geq 0$

$$\underbrace{(v_i^* A^*)(A v_i)}_{\substack{(Av_i)^* \\ 0 \leq \|Av_i\|_2^2}} = \lambda_i v_i^* v_i = \lambda_i \underbrace{\|v_i\|_2^2}_{>0} \Rightarrow \lambda_i \geq 0$$

como $\lambda_i \geq 0 \Rightarrow$ defino $\underbrace{\sigma_i = \sqrt{\lambda_i}}_{\text{a-valores.}}$. $(\sigma_i^2 = \lambda_i)$

Con ③ digo que:

$$Av_i = \sigma_i u_i \Rightarrow u_i = \frac{Av_i}{\sigma_i} \quad \text{para} \quad \sigma_i \neq 0 \quad i, \dots, r$$

a) $u_i \perp u_j$ para $i \neq j$
b) $\|u_i\|_2 = 1$

$\}$ $\{u_1, \dots, u_r\}$ es ortonormal.

Con ④ veo que:

$$u_i = \frac{Av_i}{\sigma_i} \Rightarrow Au_i = \frac{A^*Av_i}{\sigma_i} = \frac{\overset{\sigma_i^2}{\lambda_i} v_i}{\sigma_i} = \sigma_i v_i$$

a-vectores.

Paso a paso armado $U\Sigma V^*$ de $A \in \mathbb{K}^{m\times n}$

- Para la Σ primero averiguo los valores singulares, ¿Cómo? Buscando los a-val de A^*A y $\sqrt{\lambda_i} = \sigma_i$.
- $\Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_1 & & \\ & \sigma_2 & \\ & & \ddots \end{pmatrix}$ con $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq 0$
- Para V^* calculo V como la base de a-vec de A^*A (es hermitiana, así q' forma una base y luego la normalizo.

  $BON = \left\{\frac{x_1}{\|x_1\|_2}, \dots, \frac{x_n}{\|x_n\|_2}\right\}$ con $x_1, \dots, x_n$ a-vec (ver q' si dos a-vec son de 1 a-val hay que aplicar G-S para ortogonalizar. (Aplicar traspuesta y conjugado después).
- Por último para saber U aplica que:

  $u_i = \frac{Av_i}{\sigma_i}$ para $\sigma_i \neq 0$ y luego completo con vectores ortonormales al resto (son los últimos $n-k$ vectores, si k son la cant. de vectores con a-val asociados $\neq 0$).
- Listo! Tenes tu $U\Sigma V^*$

¿Cómo calcular la mejor aproximación de A?

Sea $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, de rango r, con valores singulares no nulos $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_r$.

La matriz de aproximación de rango s es tal q' pongo de σ_1 hasta σ_s en Σ y el resto de la SVD queda igual.

Def (pseudoinversa): Dada $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$ y su SVD $A = U\Sigma V^*$, entonces definimos su pseudoinversa

$$A^\dagger = V\Sigma^\dagger U^* \qquad \Sigma^\dagger = \left(\begin{matrix} 1/\sigma_1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1/\sigma_s \\ & & & 0 \end{matrix}\right) 0$$

$A^\dagger$ es una generalización de la inversa. Cumple algunas propiedades copadas

$$\begin{cases} AA^\dagger A = A \\ A^\dagger A A^\dagger = A^\dagger \end{cases} \qquad A^\dagger \text{ es única}$$

Interpolación

Def (L_{nk}):
$$L_{nk} = \prod_{i=0, i\neq k}^{n} \frac{(x - x_i)}{(x_k - x_i)}$$

- $L_{nk}(x)$ es polinomio de grado n.
- $L_{nk}(x_i) = 0 \quad \forall i = 0, \dots, n \quad , i \neq k$
- $L_{nk}(x_k) = 1$

Def (polinomio interpolante): ☆
$$P(x) = \sum_{k=0}^{n} y_k L_{nk}(x)$$ polinomio de grado $\leq n$

$P(x_i) = y_i \quad \forall i = 0, \dots, n$

$P(x)$ es polinomio interpolante

Def (Error): Sea $f(x) \in C^{n+1}[a,b]$, $(x_i, f(x_i))$, $x_i \in [a,b]$ para $i = 0, \dots, n$. ☆
Consideramos $P(x)$ el polinomio interpolante de grado $\leq n$ y $\bar{x} \in [a,b]$. Existe $\varepsilon(\bar{x})$ tal q':
$$f(\bar{x}) = P(\bar{x}) + \frac{f^{n+1}(\varepsilon(\bar{x}))}{(n+1)!} (\bar{x} - x_0)(\bar{x} - x_1) \cdots (\bar{x} - x_n)$$

☆ Con la mejor, espero que esto no se tome pq' no la entendí ^^

Def (Unicidad): Dadas (x_i, y_i) para $i = 0, \dots, n$ el polinomio interpolante de grado $\leq n$ es único.

☆ Dejo el resto de la hoja por si me pinta entenderla mejor, por lo que entiendo interpolación no se usa pq' busca un polinomio preciso tq' pase por todas las ptos (y gralmente esto no es una buena aproximación).

Encontré la def. de la práctica:

Suponer q' nos dan $n+1$ puntos (x_i, y_i) $\neq$ entre sí y queremos un polinomio de grado $\leq n$ que pase por todos ellos.

$$P(x) = c_0 + c_1 x + \dots + c_n x^n$$

Queremos hallar $c_0, \dots, c_n$ tal q' el polinomio interpole.

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 1 & x_{n+1} & x_{n+1}^2 & \cdots & x_{n+1}^n \end{pmatrix}}_{\text{Matriz de Vandermonde de } x_1, \dots, x_{n+1}. \; V \in \mathbb{R}^{(n+1)\times(n+1)}} \begin{pmatrix} c_0 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_{n+1} \end{pmatrix}$$

V es inversible siempre q' $x_1, \dots, x_{n+1}$ son distintos $\rightarrow \det(V) = \prod_{1 \leq i < j \leq n+1} (x_j - x_i)$ por inducción.

Cuadradas Mínimas

Def (cuadrados mínimos): $Ax = b$, $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $x \in \mathbb{R}^n$, $b \in \mathbb{R}^m$ $m >> n$

Sirve para encontrar $\hat{x} = \text{argmin}\{\underbrace{\|Ax\|_2^2}_{= \sum_{i=1}^{m} (Ax)_i^2 = \sum_{i=1}^{m} (y_i - f(x_i))^2}\}$ → El error sea mínimo.

$$\nabla f(x) = 2AA^t x - 2A^t b = 0$$

→ gradiente (da el mínimo)

$\hat{x}$ = sol. del sis. lineal $A^t A x = A^t b$ → Ec. normales

obs: El problema de cuadrados mínimos siempre tiene solución ya q' $b' \in Im(A)$

Prop: La sol. es única sii las columnas de A son LI

Prop: Si $x^* \in \mathbb{R}^n$ es sol. y $r = b - Ax^*$ entonces

$$\left.\begin{array}{l} A^t r = 0 \\ A^t A x^* = A^t b \end{array}\right\} \text{Ecuaciones normales.}$$

Si me piden hallar la función de la forma $\varphi(\beta_0, \dots, \beta_n)$ que mejor aproxime en el sentido de cuadrados mínimos unos datos de Z lo que voy a hacer es lo siguiente

① Me fijo que la función sea lineal, sobre las incógnitas a averiguar $(\beta_0, \dots, \beta_n)$ los datos pueden hacer cualquier caso. (Si no la convierto, y me queda φ'.)

② de $\varphi'(\beta_0, \dots, \beta_n)$ la cual es una igualdad despejo los términos con β_i de un lado y a los datos los pongo del otro como φ.

③ Luego calculo

$$\min\{C(\beta_0, \dots, \beta_n)\} = \min\{\sum_{i=1}^{n} [\varphi_i - (\beta_0 . f(x) + \dots + \beta_n . f^n(x))]^2\}$$

(n: cant. de casos de observación)

$$= \underline{A^t A \beta = A^t \varphi}$$

$$A = \begin{pmatrix} | & & | \\ f^1(x) & \Big| \dots \Big| & f^n(x) \\ | & & | \end{pmatrix} \qquad \beta = \begin{pmatrix} \beta_0 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix} \qquad \varphi = \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \vdots \\ \varphi_n \end{pmatrix}$$

→ Con esto obtengo $(\beta_0, \dots, \beta_n)$ para q' sea mínimo el resultado.

④ Por último para obtener la función q' mejor aproxima reemplazo en φ los $(\beta_0, \dots, \beta_n)$.

Métodos Iterativos

$$X^{(0)} \to X^{(1)} \to \cdots \to X^{*}$$

Itero desde un "algo" inicial, hasta llegar a una sol. de $Ax=b$

Sea $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $b \in \mathbb{R}$ y el sistema $Ax=b$

$A = D + L + U$ con $D, L, U \in \mathbb{R}^{n\times n}$

D = Diagonal de A

L = Triangular inferior de A con diagonal de 0's

U = Triangular superior de A con diagonal de 0's

Jacobi: $(a_{ii} \neq 0)$ (D inversible)

$*'$ $(D + (L+U))x = b$

$Dx + (L+U)x = b$

$Dx = -(L+U)x + b$

$$x = -\underbrace{D^{-1}(L+U)}_{T_j}x + \underbrace{D^{-1}b}_{c_j}$$

Iteración de Jacobi:

$$x^{(k+1)} = -D^{-1}(L+U)x^{(k)} + D^{-1}b$$

para $x^{(0)}$ inicial y $k = 0, 1, 2, \ldots$

Gauss-Seidel:

$*'$ $((D+L) + U)x = b$

$(D+L)x + Ux = b$

$(D+L)x = -Ux + b$

$$x = \underbrace{-(D+L)^{-1}U}_{T_{G-S}}x + \underbrace{(D+L)^{-1}b}_{c_{G-S}}$$

Iteración de G-S:

$$x^{(k+1)} = -(D+L)^{-1}Ux^{(k)} + (D+L)^{-1}b$$

con $k = 0, 1, \ldots$

★ En mi opinión es más fácil recordar $*'$ y de ahí despejar siempre lo más a la izquierda

Los esquemas tienen la pinta: $x^{(k+1)} = Tx^{(k)} + c$

$Ax = b$ sii $x = Tx + c$

$$\left.\begin{array}{l} Ax = b \\ A = M + N \end{array}\right\} \text{sii } Mx = Nx + b$$

sii $x = \underbrace{-M^{-1}N}_{T}x + \underbrace{M^{-1}b}_{c} = F(x)$ Punto fijo

M puede ser D ó $D+L$ y N puede ser $L+U$ ó U.

Las soluciones a $Ax = b$ son los puntos fijos de $F(x) = Tx + c$

$$\begin{cases} x^{(0)} \\ x^{(n+1)} = F(x^{(n)}) = Tx^{(n)} + c \end{cases}$$

Teorema: $\{x^{(n)}\}_n$ converge sii $\rho(T) = \max\limits_{\lambda \text{ a-val de } T} |\lambda| < 1$ sii $\lim\limits_{k \to +\infty} T^k = 0$

Además si $x^{(n)} \longrightarrow x^*$, entonces x^* es sol., i.e. $Ax^* = b$, $F(x^*) = x^*$

Otro método (Richardson):

$M = \omega I$ ($\omega \neq 0$) $\rightsquigarrow$ $N = A - \omega I$

$$x^{(n+1)} = -\omega^{-1}(A - \omega I)\, x^{(n)} + \omega^{-1} b$$

Propiedades:

- A es estrictamente diagonal dominante (EDD), i.e. $|a_{ii}| > \sum\limits_{j \neq i} |a_{ij}|$, entonces Jacobi y G-S convergen.
- A es simétrica y def. positiva (SDP) $\Rightarrow$ G-S converge (Jacobi puede o no converger)
- A es tridiagonal $\Rightarrow$ $\rho(T_{G\text{-}S}) = \rho(T_J)^2$
- $T = -M^{-1}N$ $\Rightarrow$ λ es a-val de T sii $\det(\lambda M + N) = 0$

Fin ^^.