

Estas son las notas de las propiedades, def. y cositas que me parecen importantes y por ahí no me acuerde.

Procesos de Markov:

Def (Matriz de Markov / Estocástica):

- $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$
- $a_{ij} \geq 0 \quad \forall i, j$
- $\sum_{i=1}^n a_{ij} = 1 \quad \forall j = 1, \dots, n$ (la sum de cada columna es 1)

Def (Proceso de Markov):

$v^{(k)} \rightarrow$ Estado del sistema en el estado k

$A \rightarrow$ Matriz de transición.

Proposición (De matriz de Markov):

- 1 1 es λ -val
- 2 Si λ es λ -val $\Rightarrow |\lambda| \leq 1$
- 3 Si $\lambda \neq 1$ es λ -val y x el λ -vec asociado $\Rightarrow \sum_{i=1}^n x_i = 0$

Def (Vector de probabilidades):
 $x_i \geq 0$
 $\sum_{i=1}^n x_i = 1$

Def (Estados de equilibrio): Siempre existe v (estado de equilibrio) tal que:

- $Av = v$ (asociado al λ -val 1)
- $v_i \geq 0 \quad \forall i$
- $\sum_{i=1}^n v_i = 1$ → Tiene sentido, sería como los porcentajes q' le quedan a cada grupo.

Propiedades:

- Existe al menos un estado de equilibrio
- $m_A(1) = m_{A^T}(1)$
- No toda matriz de Markov es diagonalizable

Recordatorio:
 $m_A(\lambda) = \dim(E_\lambda)$
 $m_{A^T}(\lambda) =$ multiplicidad de λ como raíz de $\chi_A(\lambda) = 0$.
↑ autoespacio asociado a λ

Def (Estado Límite): Es el estado $v^{(0)}$ cuando existe $\lim_{k \rightarrow \infty} v^{(k)} = v^{(0)}$.
→ $v^{(0)} = A^{(0)} v^{(0)}$

Proposición: Si A es diagonalizable y -1 no es λ -val $\Rightarrow \exists v^{(0)}$ para todo $v^{(0)}$ inicial.

Propiedades:

- Si A y B son de Markov $\Rightarrow AB$ también es de Markov $\Rightarrow A^k$ es de Markov
- Si -1 no es λ -val $\Rightarrow \exists A^\infty$ (Ojo! No vale la vuelta, puede haber A^∞ con -1 de λ -val)
- Si -1 no es λ -val y 1 tiene multiplicidad 1 $\Rightarrow A^\infty = \begin{pmatrix} w & w & \dots & w \end{pmatrix}$ con $w \in E_{\lambda=1}$

• $\text{Tr}(M) = \text{Suma de } a\text{-val}$ si M es de Markov

• Sea A de Markov, diagonalizable y sea $B = \{v_1, \dots, v_n\}$

Sea $v^{(n)} = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n$ \ast^1

$v^{(K)} = A^K v^{(n)} = \alpha_1 A^K v_1 + \dots + \alpha_n A^K v_n$ \ast^2

$v^{(K)} = \alpha_1 \lambda_1^K v_1 + \dots + \alpha_n \lambda_n^K v_n$

Se que $|\lambda_i| \leq 1$:

$$\lambda_i = \begin{cases} 1 & \rightarrow \lambda_i^K = 1 \xrightarrow{K \rightarrow \infty} 1 \\ -1 & \rightarrow \text{Puede no existir límite} \ast^1 \\ |\lambda_i| < 1 & \rightarrow \lambda_i^K \xrightarrow{K \rightarrow \infty} 0 \end{cases}$$

$\rightarrow \ast^1$ depende de si en \ast^1 hay $\alpha_i = 0$ multiplicando por los que sean $\lambda_i = -1$, se anula el término, por lo cual no afecta el resultado del límite.

Otras propiedades (si hay repetidas no me hago cargo λ_i):

• Si A es de Markov y $v = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \Rightarrow Av = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ satisface q' $\sum_{i=1}^n x_i = \sum_{i=1}^n y_i$

• Si A es de Markov y v es un vector de probabilidad $\Rightarrow Av$ es un vector de probabilidad. (Sale de q' $\sum_{i=1}^n x_i = 1 \Rightarrow \sum_{i=1}^n (Av)_i$ y q' si las coord de v son no negativos \Rightarrow las de Av también).

Def (A^∞): Se define $A^\infty = \lim_{K \rightarrow \infty} A^K$. Si A es diagonalizable $A = CDC^{-1}$ donde D es diagonal q' tiene los $a\text{-val}$ de A en esta.

Si A es de Markov:

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} \text{ con } |\lambda_i| \leq 1.$$

Además,

$$A^K = C \begin{pmatrix} \lambda_1^K & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n^K \end{pmatrix} C^{-1}$$

Schur

Def (Teorema de Schur): Dada $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ con $a\text{-val}$ $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ (no necesariamente distintas) existen matrices U (unitarias) y T (triangular sup.):

$$A = U T U^* \quad \text{con } t_{ii} = \lambda_i \rightarrow \text{En la diagonal de } T \text{ están los } a\text{-val de } A.$$

$\underbrace{U U^*}_{= I}$

$\rightarrow A$ es unitariamente semejante a una matriz triangular superior.

Def (Matrices Semejantes): Dadas $A, B \in \mathbb{K}^{n \times n}$ se dice que A y B son semejantes si existe C invertible tal q' $A = C B C^{-1}$. Notar equivalencia $\Leftrightarrow B = C^{-1} A C$

★ A es diagonalizable sii A es semejante a una matriz diagonal.

Def (Matrices $A \sim U B$ unitariamente semejantes): Dadas $A, B \in \mathbb{K}^{n \times n}$ se dice q' son unitariamente semejantes si existe $U \in \mathbb{K}^{n \times n}$ unitaria:

$$A = U B U^* \quad (U^* = \overline{U^t})$$

★ Recordatorio: U es unitaria es lo mismo a decir:

- Las filas de U son una BON de \mathbb{K}^n
- Las columnas de U son una BON de \mathbb{K}^n
- $U U^* = U^* U = I$ (o sea, $U^* = U^{-1}$)
- $\|Ux\|_2 = \|x\|_2 \quad \forall x \in \mathbb{K}^n$

Propiedades: Sea $A, B, U \in \mathbb{K}^{n \times n}$ y U es unitaria

- Si: $A \sim B \Rightarrow \chi_A(\lambda) = \chi_B(\lambda)$ y por lo tanto los α -val de A y B son los mismos.
- Si: $A \sim B \Rightarrow \text{tr}(A) = \text{tr}(B)$
- $\|U\|_2 = 1$
- Si U es ortogonal $\Rightarrow U^{-1} = U^*$ es ortogonal
- $\text{cond}_2(U) = 1$
- $\det(U^*) = \overline{\det(U)}$
- $|\det(U)| = 1$
- Si λ es α -val de $U \Rightarrow |\lambda| = 1$
- Si U y $V \in \mathbb{K}^{n \times n}$ son unitarias $\Rightarrow UV$ es unitaria
- \sim_U es una relación de equivalencia

Def (matriz hermitiana): Sea $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$, es hermitiana (o simétrica a los reales) si: $A = A^*$

Corolario: Si A es hermitiana entonces $A \sim_U D$ con D diagonal. O sea, toda matriz hermitiana se diagonaliza, sus α -val son reales y se puede elegir una base de α -vec q' sean una BON.

Lema: Sea $A \in \mathbb{K}^{n \times n} \Rightarrow \langle Ax, y \rangle = \langle x, A^* y \rangle, \forall x, y \in \mathbb{K}^n$. Si A es hermitiana, se tiene $\langle Ax, y \rangle = \langle x, Ay \rangle \quad \forall x, y \in \mathbb{K}^n$ ($\langle \cdot, \cdot \rangle$ es el producto escalar).

Lema: Si A es hermitiana, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ son α -val \neq , entonces cualquier par de α -vec v, w asociadas a λ, μ respectivamente son ortogonales

Algoritmo para calcular U y D para A hermitiana: Dado A hermitiana calcular U unitaria con $A = U D U^*$, D diagonal y real.

o sea hasta la muerte.

- 1- Calculamos los α -val $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ (son reales, $k \leq n$, contamos solo los distintos)
- 2- Calculamos $E_{\lambda_i} = N_{\alpha\text{-vec}}(A - \lambda_i I)$ los autospacios con $i=1, \dots, k$.

Como A es diagonalizable en \mathbb{K} , debe ser $\dim(E_{\lambda_i}) = \text{multiplicidad de } \lambda_i \text{ en } \chi_A(\lambda)$.

Además sabemos q' si $v_i \in E_{\lambda_i}, v_j \in E_{\lambda_j}$ con $\lambda_i \neq \lambda_j \Rightarrow v_i \perp v_j$.

3- En cada E_{λ_i} con $\dim \geq 2$ hacemos un proceso de G-S para quedarnos con una base ortonormal de E_{λ_i} . Si $\dim = 1$ solo normalizamos.

Si B_i = base de λ -vec. q' sean una BON para cada $E_{\lambda_i} \Rightarrow$

$$B = B_1 \cup B_2 \cup \dots \cup B_K.$$

es un BON q' sirve para las columnas de U.

4- D son los λ -val en la diagonal.

Recordar: Si A es hermitiana:

$$\|A\|_2 = \max_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|_2}{\|x\|_2}$$

$$\text{obs: } \max_{i=1, \dots, n} |\lambda_i|^2 = \left(\max_{i=1, \dots, n} |\lambda_i| \right)^2 = \lambda_{\max}^2$$

Def (radio espectral): Dado $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$, se define radio espectral de A ($\rho(A)$) al mayor de los módulos de los λ -val de A. Es decir,

$$\begin{aligned} \rho(A) &= \max \{ |\lambda_1|, \dots, |\lambda_n| \} \\ &= \max_{i=1, \dots, n} |\lambda_i| = \lambda_{\max} \end{aligned}$$

obs: A es hermitiana $\Rightarrow \|A\|_2 = \lambda_{\max} = \rho(A)$.

obs: Si $A \in \mathbb{K}^{n \times n} \Rightarrow A^*A$ es hermitiana y semidefinida positiva. Recordar para SVD

Construyendo U y T para Schur paso a paso: Sea λ_1 el λ -val de A con w_1 de λ -vec, construyo una base ortonormal q' contenga a w_1 (y a todas las λ -vec)

1- Armo una base $\{w_1, z_2, \dots, z_n\}$ de \mathbb{K}^n .

2- Ortogonalizo + normalizo con G-S: $\{w_1'', w_2'', \dots, w_n''\}$

Con los vectores de la BON hago una matriz unitaria poniendolos en columnas. (U₁)

3- Hago $U_1^* A U_1$ y me queda: $\begin{pmatrix} \lambda_1 & * & \dots & * \\ 0 & & & \\ \vdots & & A_1 & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$ (es unitariamente semejante a A).
 A_1 tiene los λ -val $\lambda_2, \dots, \lambda_n$.

4- Repetir el proceso con A_1

$$V_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & U_2 & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$$

$$V_2^* (U_1^* A U_1) V_2 = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & & * \\ 0 & \lambda_2 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & & & A_3 \end{pmatrix}$$

5- Obtenga como resultado: $\underbrace{V_{n-1}^* \dots V_1^* U_1^*}_{V^*} A \underbrace{U_1 V_1 \dots V_{n-1}}_V = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & * \\ & \lambda_2 & \\ & & \ddots \\ 0 & & & \lambda_n \end{pmatrix} = T$

Algoritmo de Gram-Schmidt:

$$\underbrace{\{v_1, \dots, v_n\}}_{\text{Base inicial}} \xrightarrow{\text{G-S}} \underbrace{\{u_1, \dots, u_n\}}_{\text{Base Final.}} \text{ con } u_i \cdot u_j = 0 \quad \forall i \neq j$$

- Agarra a v_1 como u_1
- $u_i = v_i - \sum_{j=1, \dots, i-1} \frac{u_j^t \cdot v_i}{\|u_j\|^2} u_j$
- $\{u_1, \dots, u_n\}$ es una BOG (base ortogonal)
- $\left\{ \frac{u_1}{\|u_1\|_2}, \dots, \frac{u_n}{\|u_n\|_2} \right\}$ es una BON (base ortonormal).