2do parcial del 2do cuatrimestre de 2023

Ej 2:

Ejercicio 2. Hallar la función de la forma $z = \sqrt{\beta_0 x + \beta_1} - y + 2w$ que mejor aproxima en el sentido de cuadrados mínimos a los siguientes datos:

x	1	2	3	4
y	1	3	4	7
z	4	8	19	1
w	1	2	9	1

Ojo! No es una función lineal.

Queremos estimar β_0 y β_1

① Me fijo q' la función sea lineal (las incógnitas a averiguar) (los datos pueden hacer lo q' quieran)

$z + y - 2w = \sqrt{\beta_0 x + \beta_1}$

elevo al cuadrado para que quede lineal (ojo que no queden módulos ni cosas no lineales desp. de aplicar algo a ambos lados de la ecuación)

$(z+y-2w)^2 = \left(\sqrt{\beta_0 x + \beta_1}\right)^2$

$\underbrace{(z+y-2w)^2}_{\psi} = \beta_0 x + \beta_1$

ψ = Observación de ψ.

$\psi = \beta_0 X + \beta_1$

$\psi_i = (z_i + y_i - 2w_i)^2$

$\psi_1 = (4+1-2.1)^2 = 3^2 = 9$

$\psi_2 = (8+3-2.2)^2 = 7^2 = 49$

$\psi_3 = (19+4-2.9)^2 = 5^2 = 25$

$\psi_4 = (1+7-2.1)^2 = 6^2 = 36$

x	1	2	3	4
y	1	3	4	7
z	4	8	19	1
w	1	2	9	1
ψ	9	49	25	36

② La función que mejor aproxima en el sentido de mín. cuadrados

↳ Función q' minimiza una determinada función de costo dada por β_0 y β_1:

$$C(\beta_0, \beta_1) = \sum_{i=1}^{4} \left[\psi_i - (\beta_0 X_i + \beta_1)\right]^2$$

→ Para cada registro/observación lo q' se hace es q' a cada una le resta nuestra predicción y la elevo al cuadrado para q' quede positivo. (No usamos el $|\cdot|$ pq' no es derivable)

★ Si te pidieron calcular el mínimo al que llegaste luego de encontrar los β_0 y β_1:

Sería reemplazar el β_0 y β_1 con los datos y ver que dé lo mínimo posible la sumatoria

$\min C(\beta_0, \beta_1)$ sii $\min\limits_{\beta \in \mathbb{R}^2} \|A\beta - \psi\|_2^2$

sii $A^t A \beta = A^t \psi$

$A = \begin{pmatrix} | & | \\ 1 & x \\ | & | \end{pmatrix}$ $\quad \beta = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_0 \end{pmatrix}$

$\psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \\ \psi_4 \end{pmatrix}$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}}_{} \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 9 \\ 49 \\ 25 \\ 36 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 4 & 10 \\ 10 & 30 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 119 \\ 326 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 4 & 10 & 119 \\ 10 & 30 & 326 \end{array}\right) \xrightarrow{4F_2 - 10F_1} \left(\begin{array}{cc|c} 4 & 10 & 119 \\ 0 & 20 & 114 \end{array}\right)$$

$$20\beta_0 = 114 \qquad\qquad 4\beta_1 + 10\beta_0 = 119$$

$$\underline{\beta_0 = 57/10} \qquad\qquad 4\beta_1 + 57 = 119$$

$$4\beta_1 = 62$$

$$\underline{\beta_1 = 31/2}$$

$$\Rightarrow z = \sqrt{57/10\ x + 31/2} - y + 2w$$ → Función q' mejor aproxima

Ej 1:

Ejercicio 1. [Segundo cuatrimestre de 2023] Supongamos que los resultados de las elecciones presidenciales del próximo 22 de octubre dependen únicamente de los votos de las primarias del 13 de agosto. Consideremos los tres candidatos más votados, denominados L, T y G.

Los encuestadores nos dicen que

- Para los votantes de L:
  - 80% mantiene su voto a L
  - Ninguno cambiará su voto a G
- Para los votantes de T:
  - El porcentaje de gente que cambia su voto a G y el porcentaje de gente que cambia su voto a L es el mismo.
  - El porcentaje de gente que cambia su voto es el mismo porcentaje de gente que cambia su voto para los votantes de L.
- Para los votantes de G:
  - 40% mantiene su voto a G
  - El resto se divide equitativamente entre L y T

(a) Construir la matriz de transición $\boldsymbol{A}$ del proceso.

(b) Si el 13 de agosto la cantidad de votos para cada uno de los candidatos fue

- L: 30%
- T: 34%
- G: 36%

determinar el porcentaje esperado para cada candidato en las elecciones del 22 de octubre.

(c) Asumiendo que el proceso seguirá a largo plazo para proximas elecciones (considerando como una unidad de tiempo el tiempo entre una elección y la siguiente), decidir si existe un estado límite para los datos iniciales dados, y calcular, si existe, $\boldsymbol{A}^{\infty}$.

a)
$$\begin{array}{c} \\ L \\ T \\ G \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} L & T & G \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}1 & 0{,}3 \\ 0{,}2 & 0{,}8 & 0{,}3 \\ 0 & 0{,}1 & 0{,}4 \end{pmatrix} \end{array} = A$$

la coord. ij representa la probabilidad de pasar a votar del candidato n° i al candidato n° j

b) Esto sería usar la matriz de probabilidad con el vector $\begin{pmatrix} 0{,}30 \\ 0{,}34 \\ 0{,}36 \end{pmatrix}$ de probabilidad y ver como cambian los %.

$$\begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}1 & 0{,}3 \\ 0{,}2 & 0{,}8 & 0{,}3 \\ 0 & 0{,}1 & 0{,}4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0{,}30 \\ 0{,}34 \\ 0{,}36 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}382 \\ 0{,}44 \\ 0{,}178 \end{pmatrix}$$

c) Estado Límite $= \lim_{k \to \infty} A^k x^{(0)} = x^*$ → Depende de $x^{(0)}$ (puede o no existir dependiendo de $x^{(0)}$)

Analizamos los a-val de A.

$$\det\begin{pmatrix} \lambda-0{,}8 & -0{,}1 & -0{,}3 \\ -0{,}2 & \lambda-0{,}8 & -0{,}3 \\ 0 & -0{,}1 & \lambda-0{,}4 \end{pmatrix} = \ldots \quad \begin{cases} \lambda_1 = 1 \\ \lambda_2 = \dfrac{5+2\sqrt{2}}{10} \\ \lambda_3 = \dfrac{5-2\sqrt{2}}{10} \end{cases}$$

como $|\lambda_2| < 1$ y $|\lambda_3| < 1$

$\Rightarrow$ El único a-val de módulo 1 es el λ_1 que tiene valor 1

Busco el a-vec asociado a λ_1:

$$\begin{pmatrix} 0{,}2 & -0{,}1 & -0{,}3 \\ -0{,}2 & 0{,}2 & -0{,}3 \\ 0 & -0{,}1 & 0{,}6 \end{pmatrix} \xrightarrow[F_2+F_1]{} \begin{pmatrix} 0{,}2 & 0{,}1 & 0{,}3 \\ 0 & 0{,}1 & -0{,}6 \\ 0 & -0{,}1 & 0{,}6 \end{pmatrix} \xrightarrow[F_3+F_2]{} \begin{pmatrix} 0{,}2 & 0{,}1 & 0{,}3 \\ 0 & 0{,}1 & -0{,}6 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A^\infty = \left(v_1 \,\middle|\, \ldots \,\middle|\, v_1 \right)$$