Puede q' hayan cambios visuales a lo largo de las resoluciones, es pq' encontré como usar mejor la tableta !!

AL - Práctico 5

Ej 1, 2, 3 hechos en la carpeta...

Ej 4:

Ejercicio 4. Dada $\boldsymbol{A} \in K^{n\times n}$ hermitiana y $S \subset K^n$ un subespacio invariante por $\boldsymbol{A}$, es decir $\boldsymbol{A}\boldsymbol{v} \in S$ para todo $\boldsymbol{v} \in S$. Probar que $S^{\perp}$ es invariante por $\boldsymbol{A}$.

$A = A^*$ $\quad S \subset \mathbb{K}^n$ $\quad \forall v.\ Av \in S$

Antes q' nada, ¿qué mierda era $S^\perp$?

$S^\perp = \{v : w \in S \Rightarrow v^* w = 0\}$

Entonces, qvq

$\forall v, w.\ v \in S$ y $w \in S^\perp \Rightarrow v^* A w = 0$

*' Como A es hermitiana $(A = A^*)$

$v(Aw) = (Av)w$

Luego,

$v^*(Aw) = 0$ sii

*' $\underbrace{(Av)}_{\in S}\underbrace{w}_{\in S^\perp} = 0$

$\Rightarrow$ Sé que esto es verdad por la def. de $S^\perp$.

Ej 5:

Ejercicio 5. Probar que $\boldsymbol{A} \in K^{n\times n}$ es hermitiana y definida positiva si y solo si $\boldsymbol{A}$ es unitariamente semejante a una matriz diagonal real positiva con elementos de la diagonal positivos.

Repaso de algunas definiciones:

A es hermitiana sii $A = A^*$
A es def. positiva sii $x^t A x > 0 \ \forall x \in \mathbb{R}^n, x \neq 0$
A es unitariamente semejante a B sii $\exists U . U \in \mathbb{K}^{n\times n}$ unitaria y $A = UDU^*$

$\Rightarrow$) A hermitiana y def positiva $\Rightarrow$ A es unitariamente semejante a una matriz diagonal real positiva.

Teo. espectral: $A = UDU^*$ con U unitaria
• Toda matriz hermitiana es unitaria y diagonalizable
Luego, por el anterior teorema puedo ver q' es unitariamente semejante a una matriz diagonal.

Además, como A es def. positiva sé que todos los a-val de A son >0, por lo cual sé que la diagonal de la matiz diagonal de la diagonalización tiene todos sus valores positivos.

$\Leftarrow$) A es unitariamente semejante a una diagonal real positiva $\Rightarrow$ A es hermitiana y def. positiva.

Queda bastante trivial creo(? . O nada medio q' es q' A tiene la rep. $A = UDU^*$ entonces diagonalizable es y los a-val son positivos, pq' tiene la diagonal de la diagonalización con valores positivos. :)

Ej 6:

Ejercicio 6. Sea $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 4 & \alpha+2 & 2 \\ \alpha^2 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

(a) Hallar los valores de $\alpha \in \mathbb{R}$ para que $\boldsymbol{A}$ sea simétrica y $\lambda = 0$ sea autovalor de $\boldsymbol{A}$.

(b) Para el valor de α hallado en (a), diagonalizar ortonormalmente la matriz $\boldsymbol{A}$.

a) A simétrica $\Rightarrow A = A^t$

Entonces, $\alpha^2 = \alpha + 2$ sii $\alpha^2 - \alpha - 2 = 0 \xrightarrow{\text{Bhaskara}}$ $\dfrac{1 \pm \sqrt{1 - 4.1.-2}}{2.1} = \dfrac{1 \pm \sqrt{9}}{2} = \dfrac{1 \pm 3}{2}$ $\begin{cases} \frac{4}{2} = \boxed{2} \\ \frac{-2}{2} = \boxed{-1} \end{cases}$

Ahora veo si para alguno de los $\alpha \in \{-1, 2\}$ tiene a-val

$\alpha = -1$:

$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 1 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ $\qquad Av = \lambda v$ si $(A - \lambda I)v = 0$ con $v \neq 0$

$\begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 1 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[2F_3 - F_1]{4F_2 - F_1} \begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 0 & 15 & 6 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}$ } No son LD $\Rightarrow$ no existe $v \neq 0$ $\Rightarrow \lambda = 0$ no es a-val $\Rightarrow \underline{\alpha \neq -1}$ ✓

$\alpha = 2$:

$A = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 2 \\ 4 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 4 & 4 & 2 \\ 4 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[2F_3 - F_1]{F_2 - F_1} \begin{pmatrix} 4 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$ $\begin{aligned} 4x + 4y + 2z &= 0 \\ 2z &= -4x - 4y \\ z &= -2x - 2y \end{aligned}$ $\Rightarrow$ a-vec $= \langle (1, 0, -2), (0, 1, -2) \rangle$

$\alpha = 2$ permite q' $\lambda = 0$ sea a-vec. ✓

b) Diagonalizar ortonormalmente A.

Busco si A tiene otros a-val:

$\det\begin{pmatrix} 4-\lambda & 4 & 2 \\ 4 & 4-\lambda & 2 \\ 2 & 2 & 1-\lambda \end{pmatrix} = (4-\lambda)(-1)^{1+1} . \det\begin{pmatrix} 4-\lambda & 2 \\ 2 & 1-\lambda \end{pmatrix} + 4.(-1)^{2+1} . \det\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1-\lambda \end{pmatrix} + 2.(-1)^{3+1} . \det\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 4-\lambda & 2 \end{pmatrix}$

$= (4-\lambda)((4-\lambda)(1-\lambda) - 4) - 4(4(1-\lambda) - 4) + 2.(8 - 2(4-\lambda))$

$= (4-\lambda)(\lambda^2 - 5\lambda \cancel{+4} \cancel{-4}) - 4(\cancel{4} - 4\lambda \cancel{-4}) + 2.(\cancel{8} \cancel{-8} + 2\lambda)$

$= (4-\lambda)\lambda(\lambda - 5) + 16\lambda + 4\lambda$

$$= \lambda\left((4-\lambda)(\lambda-5)+20\right)$$
$$= \lambda\left(-\lambda^2+9\lambda-\cancel{20}+\cancel{20}\right)$$
$$= \lambda^2(-\lambda+9)$$
$$= -\lambda^2(\lambda-9)$$

$\lambda = 9$:

$$\begin{pmatrix} -5 & 4 & 2 \\ 4 & -5 & 2 \\ 2 & 2 & -8 \end{pmatrix} \xrightarrow[5F_3+2F_1]{5F_2+4F_1} \begin{pmatrix} -5 & 4 & 2 \\ 0 & -9 & 18 \\ 0 & 18 & -36 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_3+2F_2} \begin{pmatrix} -5 & 4 & 2 \\ 0 & -9 & 18 \\ \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} \end{pmatrix}$$

$$-9y+18z=0 \qquad\qquad -5x+4y+2z=0$$
$$18z=9y \qquad\qquad -5x+4\cdot 2z+2z=0$$
$$\boxed{2z=y} \qquad\qquad 10z=5x$$
$$\boxed{2z=x}$$

$\Rightarrow$ a-vec asociado $= \langle(2,2,1)\rangle$

(Me acaba de enterar q' toda matriz hermética es diagonalizable ortogonalmente)

Luego, tengo una base de autovectores: $\{(1,0,-2),(0,1,-2),(2,2,1)\}$

Para diagonalizar ortonormalmente $(U^*\Delta U)$ primero necesito una base ortonormal de los a-vec. (tip: Puedo usar el q' A es simétrica para ver q' los a-vec asociados al 0 son $\perp$ a los asociados al 9)

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$u_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} - \frac{(1,0,-2)\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}}{\|(1,0,-2)\|_2^2}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} - 4/5\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4/5 \\ 1 \\ -2/5 \end{pmatrix}$$

$$u_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$ $\Rightarrow$ ya sé q' es ortogonal a las otras 2 (por prop. de las matrices hermitianas)

Normaliza:

$$\frac{u_1}{\|u_1\|_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}\cdot\frac{1}{\|(1,0,-2)\|_2} = 1/\sqrt{5}\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\frac{u_2}{\|u_2\|_2} = \begin{pmatrix} -4/5 \\ 1 \\ -2/5 \end{pmatrix}\cdot\frac{1}{\|(-4/5,1,-2/5)\|_2} = \frac{\sqrt{5}}{3}\begin{pmatrix} -4/5 \\ 1 \\ -2/5 \end{pmatrix}$$

$$\frac{u_3}{\|u_3\|_2} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}\cdot\frac{1}{\|(2,2,1)\|_2} = 1/3\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{BON} = \{1/\sqrt{5}(1,0,-2),\ \sqrt{5}/3(-4/5,1,-2/5),\ 1/3(2,2,1)\}$$

$\Rightarrow U$ es:

$$\begin{pmatrix} 1/\sqrt{5} & \frac{4\sqrt{5}}{15} & 2/3 \\ 0 & \sqrt{5}/3 & 2/3 \\ -2/\sqrt{5} & -2/3 & 1/3 \end{pmatrix}$$

⇒ D es (poner los a-val ordenados (correspondiendo cada a-vec en las cols de U):

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$$

U^*DU es:

$$\begin{pmatrix} 1/\sqrt{5} & 0 & -2/\sqrt{5} \\ \frac{4\sqrt{5}}{15} & \sqrt{5}/3 & -2/5 \\ 2/3 & 2/3 & 1/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/\sqrt{5} & \frac{4\sqrt{5}}{15} & 2/3 \\ 0 & \sqrt{5}/3 & 2/3 \\ -2/\sqrt{5} & -2/3 & 1/3 \end{pmatrix}$$

Ej 7:

Ejercicio 7. Considerar la matriz:

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$$

(a) Calcular una descomposición en valores singulares de $\boldsymbol{A}$.

(b) Dibujar el círculo unitario en $\mathbb{R}^2$ y la elipse $\{\boldsymbol{Ax} : \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2, \|\boldsymbol{x}\|_2 = 1\}$, señalando los valores singulares y los vectores singulares a izquierda y a derecha.

(c) Calcular $\|\boldsymbol{A}\|_2$ y $\mathrm{cond}_2(\boldsymbol{A})$.

(d) Calcular $\boldsymbol{A}^{-1}$ usando la descomposición hallada.

a) Calcular la SVD:

$$\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$$