Diseño de Bases Relacionales

Normalización - Dependencias Funcionales -3FN

Andrea Manna

DEPARTAMENTO DE COMPUTACION

2025

Enunciado

Enunciado

Dados el esquema relacional

$$R(A, B, C, D, E, F, G, H)$$

y el conjunto de dependencias funcionales:

$$F = \{AB \rightarrow HG, B \rightarrow D, BD \rightarrow C, E \rightarrow GC, F \rightarrow DBE, H \rightarrow G\}$$

Se pide:

1. Hallar las claves e indicar en qué FN se encuentra R.
2. Hallar una cobertura minimal para el conjunto de dependencias dado.
3. Hallar una descomposición de R en 3FN que sea SPI y SPDF.

Resolución

Repaso de la definición

Definición: Clave

Dado R esquema relacional con atributos $A_1A_2\cdots A_n$ y dependencias funcionales F, y un subconjunto X de $A_1A_2\cdots A_n$, decimos que X es una **clave** de R si:

1. $X \rightarrow A_1A_2\cdots A_n$ está en F^+
2. Para ningún subconjunto propio $Y \subseteq X$, $Y \rightarrow A_1A_2\cdots A_n$ está en F^+

Resumiendo:

X es clave si determina funcionalmente a todos los atributos de R y, además, es minimal (es decir, si saco cualquier atributo de X, ya no es más una clave).

Buscando la clave

$$F = \left\{ \begin{array}{rcl} AB & \rightarrow & HG, \\ B & \rightarrow & D, \\ BD & \rightarrow & C, \\ E & \rightarrow & GC, \\ F & \rightarrow & DBE, \\ H & \rightarrow & G \end{array} \right\}$$

Buscando la clave

$$F = \left\{ \begin{array}{rcl} AB & \rightarrow & HG, \\ B & \rightarrow & D, \\ BD & \rightarrow & C, \\ E & \rightarrow & GC, \\ F & \rightarrow & DBE, \\ H & \rightarrow & G \end{array} \right\}$$

Observación :

- A y F no están del lado derecho de ninguna **DF**.
- Es decir, ningún subconjunto de atributos determina funcionalmente a A y F.
- Por lo tanto, necesariamente ambos atributos tienen que formar parte de toda clave.

Clausura de un atributo

Definición: Clausura de un atributo

La clausura de X respecto de un conjunto de dependencias funcionales F es el conjunto de atributos A tales que $X \rightarrow A$ se puede deducir de F mediante los axiomas de Armstrong.

Usando la clausura de atributos

- Calculemos $(AF)^+$ y veamos qué atributos determina.

$$F = \left\{ \begin{array}{rcl} AB & \rightarrow & HG, \\ B & \rightarrow & D, \\ BD & \rightarrow & C, \\ E & \rightarrow & GC, \\ F & \rightarrow & DBE, \\ H & \rightarrow & G \end{array} \right\}$$

Usando la clausura de atributos

- Calculemos $(AF)^+$ y veamos qué atributos determina.

$$X^{(0)} = \{A, F\}$$

$$F = \left\{ \begin{array}{rcl} AB & \rightarrow & HG, \\ B & \rightarrow & D, \\ BD & \rightarrow & C, \\ E & \rightarrow & GC, \\ F & \rightarrow & DBE, \\ H & \rightarrow & G \end{array} \right\}$$

Usando la clausura de atributos

- Calculemos $(AF)^+$ y veamos qué atributos determina.

$$X^{(0)} = \{A, F\}$$

$$X^{(1)} = X^{(0)} \cup \{D, B, E\} = \{A, B, D, E, F\}$$

$$F = \left\{ \begin{array}{rcl} AB & \rightarrow & HG, \\ B & \rightarrow & D, \\ BD & \rightarrow & C, \\ E & \rightarrow & GC, \\ F & \rightarrow & DBE, \\ H & \rightarrow & G \end{array} \right\}$$

Usando la clausura de atributos

- Calculemos $(AF)^+$ y veamos qué atributos determina.

$$X^{(0)} = \{A, F\}$$

$$X^{(1)} = X^{(0)} \cup \{D, B, E\} = \{A, B, D, E, F\}$$

$$X^{(2)} = X^{(1)} \cup \{H, G\} \cup \{C\} \cup \{G, C\}$$

$$F = \left\{ \begin{array}{rcl} AB & \rightarrow & HG, \\ B & \rightarrow & D, \\ BD & \rightarrow & C, \\ E & \rightarrow & GC, \\ F & \rightarrow & DBE, \\ H & \rightarrow & G \end{array} \right\}$$

Usando la clausura de atributos

- Calculemos $(AF)^+$ y veamos qué atributos determina.

$$X^{(0)} = \{A, F\}$$

$$X^{(1)} = X^{(0)} \cup \{D, B, E\} = \{A, B, D, E, F\}$$

$$X^{(2)} = X^{(1)} \cup \{H, G\} \cup \{C\} \cup \{G, C\}$$

$$X^{(2)} = \{A, B, C, D, E, F, G, H\}$$

$$F = \left\{ \begin{array}{rcl} AB & \rightarrow & HG, \\ B & \rightarrow & D, \\ BD & \rightarrow & C, \\ E & \rightarrow & GC, \\ F & \rightarrow & DBE, \\ H & \rightarrow & G \end{array} \right\}$$

- Por lo tanto, AF es <u>superclave</u>.
- ¿AF es <u>minimal</u> ?

Usando la clausura de atributos

- Calculemos $(AF)^+$ y veamos qué atributos determina.

$$X^{(0)} = \{A, F\}$$

$$X^{(1)} = X^{(0)} \cup \{D, B, E\} = \{A, B, D, E, F\}$$

$$X^{(2)} = X^{(1)} \cup \{H, G\} \cup \{C\} \cup \{G, C\}$$

$$X^{(2)} = \{A, B, C, D, E, F, G, H\}$$

$$F = \left\{ \begin{array}{rcl} AB & \rightarrow & HG, \\ B & \rightarrow & D, \\ BD & \rightarrow & C, \\ E & \rightarrow & GC, \\ F & \rightarrow & DBE, \\ H & \rightarrow & G \end{array} \right\}$$

- Por lo tanto, AF es <u>superclave</u>.

- ¿AF es <u>minimal</u> ? <u>Sí</u> (**¿Por qué?**), entonces es <u>clave</u>.

Seguimos buscando

¿Existen otras claves?

Seguimos buscando

¿Existen otras claves?

- Supongamos que existe K' tal que K' es clave y $K' \neq \{A, F\}$.
- Por la observación anterior, $\{A, F\} \subseteq K'$.
- Como $K' \neq \{A, F\} \Rightarrow \exists Y \subseteq R, Y \neq \emptyset$ tal que $K' = \{A, F\} \cup Y$.
- Pero esto conduce a un absurdo, pues si K' tiene otro atributo además de A y F, no cumple la condición de minimalidad, ya que $\exists Z \subsetneq K'$ tal que Z determina a todos los atributos de R (en este caso $Z = \{A, F\}$).
- Luego, AF es la única clave.

Indicar en qué **FN** se encuentra R

Definición: 1FN

Un esquema de relación R está en **1FN** si no tiene atributos multivaluados.

Definición: 2FN

Un esquema de relación R está en **2FN** si todo atributo no primo A de R es totalmente dependiente de todas las claves de R.

Definición: Atributo Primo

Un atributo A de un esquema relacional R se dice primo si A pertenece a alguna de las claves de R. Si A no pertenece a ninguna clave de R, A se dice no primo.

Definición: Totalmente Dependiente

$X \rightarrow Y$ es una dependencia funcional es total si no existe $Z \subsetneq X$ tal que $Z \rightarrow Y$.

Indicar en qué **FN** se encuentra R

$$R(A, B, C, D, E, F, G, H)$$

$$F = \{AB \to HG, B \to D, BD \to C, E \to GC, F \to DBE, H \to G\}$$

Clave: AF

¿Está en 1FN?

Indicar en qué **FN** se encuentra R

$$R(A, B, C, D, E, F, G, H)$$

$$F = \{AB \to HG, B \to D, BD \to C, E \to GC, F \to DBE, H \to G\}$$

Clave: AF

¿Está en 1FN?

- Sí, R está en **1FN** pues no hay atributos multivaluados.

¿Está en 2FN?

Indicar en qué **FN** se encuentra *R*

$$R(A, B, C, D, E, F, G, H)$$

$$F = \{AB \rightarrow HG, B \rightarrow D, BD \rightarrow C, E \rightarrow GC, F \rightarrow DBE, H \rightarrow G\}$$

Clave: AF

¿Está en 1FN?

- Sí, R está en **1FN** pues no hay atributos multivaluados.

¿Está en 2FN?

- No. B es un atributo no primo y $F \rightarrow B$.

  Es decir, existe un atributo no primo de R que no está totalmente determinado por la (única) clave de R.

Definicón cobertura minimal

Decimos que un conjunto de dependencias F es <u>minimal</u> si:

1. Cada lado derecho de una dependencia de F tiene un solo atributo.
2. Para ninguna $X \to A \in F$ y subconjunto $Z \subsetneq X$, es $F - \{X \to A\} \cup \{Z \to A\}$ equivalente a F.
3. Para ninguna $X \to A \in F$, $F - \{X \to A\}$ es equivalente a F.

$Z \subsetneq X$ significa Z ***está incluido pero no es igual*** a X

Resumiendo:

1. El punto <u>2</u> dice que ningún atributo del lado izquierdo de una DF es redundante.
2. El punto <u>3</u> dice que ninguna DF de F es redundante.

Paso 1:

Todo lado derecho debe tener un sólo atributo (aplicamos la regla de descomposición):

$$F = \left\{ \begin{array}{rcl} AB & \rightarrow & HG, \\ B & \rightarrow & D, \\ BD & \rightarrow & C, \\ E & \rightarrow & GC, \\ F & \rightarrow & DBE, \\ H & \rightarrow & G \end{array} \right\} \longrightarrow$$

Paso 1:

Todo lado derecho debe tener un sólo atributo (aplicamos la regla de descomposición):

$$F = \left\{ \begin{array}{rcl} AB & \rightarrow & HG, \\ B & \rightarrow & D, \\ BD & \rightarrow & C, \\ E & \rightarrow & GC, \\ F & \rightarrow & DBE, \\ H & \rightarrow & G \end{array} \right\} \longrightarrow F_1 = \left\{ \begin{array}{rcl} AB & \rightarrow & G, \\ AB & \rightarrow & H, \\ B & \rightarrow & D, \\ BD & \rightarrow & C, \\ E & \rightarrow & C, \\ E & \rightarrow & G, \\ F & \rightarrow & B, \\ F & \rightarrow & D, \\ F & \rightarrow & E, \\ H & \rightarrow & G \end{array} \right\}$$

Paso 2:

Todo lado izquierdo no debe tener atributos redundantes

Hay que analizar:

$$\begin{aligned} AB &\rightarrow G \\ AB &\rightarrow H \\ BD &\rightarrow C \end{aligned}$$

Hacemos la clausura de cada uno de los atributos determinantes

$A^+ = \{A\}$

$B^+ = \{B, C, D\}$

$D^+ = \{D\}$

Paso 2:

Todo lado izquierdo no debe tener atributos redundantes

Hay que analizar:

$$\begin{aligned} AB &\rightarrow G \\ AB &\rightarrow H \\ BD &\rightarrow C \end{aligned}$$

Hacemos la clausura de cada uno de los atributos determinantes

$A^+ = \{A\}$
$B^+ = \{B, C, D\}$
$D^+ = \{D\}$

- $\boldsymbol{AB \rightarrow G}$:
- $\boldsymbol{AB \rightarrow H}$:
- $\boldsymbol{BD \rightarrow C}$:

Paso 2:

Todo lado izquierdo no debe tener atributos redundantes

Hay que analizar:

$$\begin{aligned} AB &\to G \\ AB &\to H \\ BD &\to C \end{aligned}$$

Hacemos la clausura de cada uno de los atributos determinantes

$A^+ = \{A\}$

$B^+ = \{B, C, D\}$

$D^+ = \{D\}$

- $\boldsymbol{AB \to G}$: Ni $A \to G$ ni $B \to G$. No hay redundancia.
- $\boldsymbol{AB \to H}$:
- $\boldsymbol{BD \to C}$:

Paso 2:

Todo lado izquierdo no debe tener atributos redundantes

Hay que analizar:

$$\begin{aligned} AB &\rightarrow G \\ AB &\rightarrow H \\ BD &\rightarrow C \end{aligned}$$

Hacemos la clausura de cada uno de los atributos determinantes

$A^+ = \{A\}$
$B^+ = \{B, C, D\}$
$D^+ = \{D\}$

- $\boldsymbol{AB \rightarrow G}$: Ni $A \rightarrow G$ ni $B \rightarrow G$. No hay redundancia.
- $\boldsymbol{AB \rightarrow H}$: Ni $A \rightarrow H$ ni $B \rightarrow H$. No hay redundancia.
- $\boldsymbol{BD \rightarrow C}$:

Paso 2:

Todo lado izquierdo no debe tener atributos redundantes

Hay que analizar:

$$\begin{aligned} AB &\rightarrow G \\ AB &\rightarrow H \\ BD &\rightarrow C \end{aligned}$$

Hacemos la clausura de cada uno de los atributos determinantes

$A^+ = \{A\}$

$B^+ = \{B, C, D\}$

$D^+ = \{D\}$

- $\boldsymbol{AB \rightarrow G}$: Ni $A \rightarrow G$ ni $B \rightarrow G$. No hay redundancia.
- $\boldsymbol{AB \rightarrow H}$: Ni $A \rightarrow H$ ni $B \rightarrow H$. No hay redundancia.
- $\boldsymbol{BD \rightarrow C}$: $C \notin D^+ = \{D\}$ por lo tanto B no es redundante, pero cómo $C \in B^+ = \{B, C, D\}$ tenemos que D es redundante: reemplazamos $BD \rightarrow C$ por $B \rightarrow C$

Paso 2:

$$F_1 = \left\{ \begin{array}{rcl} AB & \rightarrow & G, \\ AB & \rightarrow & H, \\ B & \rightarrow & D, \\ \color{red}{BD} & \color{red}{\rightarrow} & \color{red}{C,} \\ E & \rightarrow & C, \\ E & \rightarrow & G, \\ F & \rightarrow & B, \\ F & \rightarrow & D, \\ F & \rightarrow & E, \\ H & \rightarrow & G \end{array} \right\} \longrightarrow \quad F_2 = \left\{ \begin{array}{rcl} AB & \rightarrow & G, \\ AB & \rightarrow & H, \\ B & \rightarrow & D, \\ \color{green}{B} & \color{green}{\rightarrow} & \color{green}{C,} \\ E & \rightarrow & C, \\ E & \rightarrow & G, \\ F & \rightarrow & B, \\ F & \rightarrow & D, \\ F & \rightarrow & E, \\ H & \rightarrow & G \end{array} \right\}$$

Paso 3

No debe haber dependencias redundantes

Primero, veamos cuándo una dependencia es redundante.

- $X \rightarrow A$ es redudante para un conjunto de dependencias F si se puede deducir de $F - \{X \rightarrow A\}$.
- Además, sabemos que $X \rightarrow A$ se puede deducir de F si $A \in X^{+}$.
- Por lo tanto, si $A \in X^{+}$ (respecto de $F - \{X \rightarrow A\}$) entonces $X \rightarrow A$ es redundante.

Paso 3

- Tomemos $H \to G$, es redundante?
  - Veamos si $G \in H^+$ respecto de $F_2 - \{H \to G\}$.

$$F_2 = \left\{ \begin{array}{rcl} AB & \to & G, \\ AB & \to & H, \\ B & \to & D, \\ B & \to & C, \\ E & \to & C, \\ E & \to & G, \\ F & \to & B, \\ F & \to & D, \\ F & \to & E, \\ H & \to & G \end{array} \right\}$$

Paso 3

- Tomemos $H \to G$, es redundante?
  - Veamos si $G \in H^+$ respecto de $F_2 - \{H \to G\}$.
  - Tenemos que $G \notin H^+ = \{H\}$.
  - Luego, $H \to G$ no es redundante.

$$F_2 = \left\{ \begin{array}{rcl} AB & \to & G, \\ AB & \to & H, \\ B & \to & D, \\ B & \to & C, \\ E & \to & C, \\ E & \to & G, \\ F & \to & B, \\ F & \to & D, \\ F & \to & E, \\ H & \to & G \end{array} \right\}$$

Paso 3

- Tomemos $H \to G$, es redundante?
  - Veamos si $G \in H^+$ respecto de $F_2 - \{H \to G\}$.
  - Tenemos que $G \notin H^+ = \{H\}$.
  - Luego, $H \to G$ no es redundante.
- Tomemos $F \to D$, es redundante?
  - Veamos si $D \in F^+$ respecto de $F_2 - \{F \to D\}$.

$$F_2 = \left\{ \begin{array}{rcl} AB & \to & G, \\ AB & \to & H, \\ B & \to & D, \\ B & \to & C, \\ E & \to & C, \\ E & \to & G, \\ F & \to & B, \\ F & \to & D, \\ F & \to & E, \\ H & \to & G \end{array} \right\}$$

Paso 3

- Tomemos $H \to G$, es redundante?
  - Veamos si $G \in H^+$ respecto de $F_2 - \{H \to G\}$.
  - Tenemos que $G \notin H^+ = \{H\}$.
  - Luego, $H \to G$ no es redundante.
- Tomemos $F \to D$, es redundante?
  - Veamos si $D \in F^+$ respecto de $F_2 - \{F \to D\}$.
  - Tenemos que $D \in F^+ = \{B, C, D, E, F, G\}$.
  - Luego, $F \to D$ sí es redundante.
  - Por lo tanto, la removemos de F_2.

$$F_2 = \left\{ \begin{array}{rcl} AB & \to & G, \\ AB & \to & H, \\ B & \to & D, \\ B & \to & C, \\ E & \to & C, \\ E & \to & G, \\ F & \to & B, \\ F & \to & D, \\ F & \to & E, \\ H & \to & G \end{array} \right\}$$

Paso 3

$$F_2 = \left\{ \begin{array}{rcl} AB & \rightarrow & G, \\ AB & \rightarrow & H, \\ B & \rightarrow & D, \\ B & \rightarrow & C, \\ E & \rightarrow & C, \\ E & \rightarrow & G, \\ F & \rightarrow & B, \\ F & \rightarrow & D, \\ F & \rightarrow & E, \\ H & \rightarrow & G \end{array} \right\} \longrightarrow F_3 = \left\{ \begin{array}{rcl} AB & \rightarrow & G, \\ AB & \rightarrow & H, \\ B & \rightarrow & D, \\ B & \rightarrow & C, \\ E & \rightarrow & C, \\ E & \rightarrow & G, \\ F & \rightarrow & B, \\ F & \rightarrow & E, \\ H & \rightarrow & G \end{array} \right\}$$

Removemos $F \rightarrow D$

Paso 3

- Ahora tomemos $AB \rightarrow G$, es redundante?

$$F_3 = \left\{ \begin{array}{rcl} AB & \rightarrow & G, \\ AB & \rightarrow & H, \\ B & \rightarrow & D, \\ B & \rightarrow & C, \\ E & \rightarrow & C, \\ E & \rightarrow & G, \\ F & \rightarrow & B, \\ F & \rightarrow & E, \\ H & \rightarrow & G \end{array} \right\}$$

Paso 3

- Ahora tomemos $AB \to G$, es redundante?
  - Veamos si $G \in (AB)^+$ respecto de $F_3 - \{AB \to G\}$.
  - Tenemos que $G \in (AB)^+ = \{A, B, C, D, G, H\}$.
  - Luego, $AB \to G$ sí es redundante.
  - Por lo tanto, la removemos de F_3.

$$F_3 = \left\{ \begin{array}{rcl} AB & \to & G, \\ AB & \to & H, \\ B & \to & D, \\ B & \to & C, \\ E & \to & C, \\ E & \to & G, \\ F & \to & B, \\ F & \to & E, \\ H & \to & G \end{array} \right\}$$

Paso 3

$$F_3 = \left\{ \begin{array}{rcl} AB & \rightarrow & G, \\ AB & \rightarrow & H, \\ B & \rightarrow & D, \\ B & \rightarrow & C, \\ E & \rightarrow & C, \\ E & \rightarrow & G, \\ F & \rightarrow & B, \\ F & \rightarrow & E, \\ H & \rightarrow & G \end{array} \right\} \xrightarrow[\text{Removemos } AB \rightarrow G]{} F_4 = \left\{ \begin{array}{rcl} AB & \rightarrow & H, \\ B & \rightarrow & D, \\ B & \rightarrow & C, \\ E & \rightarrow & C, \\ E & \rightarrow & G, \\ F & \rightarrow & B, \\ F & \rightarrow & E, \\ H & \rightarrow & G \end{array} \right\}$$

Si continuamos con este proceso, podemos ver que ya no quedan dependencias funcionales redundantes.

- ¿Cómo sabemos que ya terminamos? Es decir, ¿cómo sabemos que F_4 es la cobertura minimal de F?
- Porque F_4 cumple con las 3 condiciones de cobertura minimal (siempre hay que volver a chequearlas por si se produjo algún cambio).
- Por lo tanto, $F_4 = F_M$

Repaso 3FN

Definición: 3FN

Una relación está en **3FN** si siempre que se mantenga $X \rightarrow A$ en R y A no está en X, entonces X es una superclave para R o A es primo.

¿Cómo hacemos lo que nos piden?

- Descomponemos R en **3FN** aplicando el algoritmo para que sea SPI y SPDF.
- Dado F_M un conjunto de dependencias funcionales que es la cobertura minimal de F hacemos:
  1. Se crea un subesquema XA para cada dependencia $X \rightarrow A$ en F_M.
  2. Unificar los que provienen de DFs que tienen igual lado izquierdo, o sea creamos los subesquemas $XA_1A_2 \cdots A_n$, donde $X \rightarrow A_1, \cdots, X \rightarrow A_n$ están en F_M.
  3. Si ninguno de los esquemas resultantes contiene una clave se agrega uno con los atributos de alguna clave
  4. Eliminar esquemas redundantes: Si alguno de los esquemas resultantes esta contenido totalmente en otro, eliminarlo

Descomposición inicial

- En el ítem 2 calculamos la cobertura minimal de F.

$$F_M = \left\{ \begin{array}{rcl} AB & \to & H, \\ B & \to & C, \\ B & \to & D, \\ E & \to & C, \\ E & \to & G, \\ F & \to & B, \\ F & \to & E, \\ H & \to & G \end{array} \right\}$$

- Aplicando el primer paso tenemos:

$$R_1(ABH), R_2(BC), R_3(BD), R_4(EC), R_5(EG),$$

$$R_6(FB), R_7(FE), R_8(HG)$$

Aplicamos el algoritmo

$$R_1(ABH), R_2(BC), R_3(BD), R_4(EC), R_5(EG),$$
$$R_6(FB), R_7(FE), R_8(HG)$$

- Unificamos los que provienen de DF que tienen igual lado izquierdo
- Por lo tanto, la descomposición quedaría:

$$R_1(ABH), R_2(BCD), R_3(ECG), R_4(FBE), R_5(HG)$$

- Como ninguna relación de la descomposición tiene la clave de la relación original agregamos $R_6(AF)$

Resultado final

- La siguiente descomposición de R está en 3FN y es SPI y SPDF:

$$R_1(\underline{AB}H), R_2(\underline{B}CD), R_3(\underline{E}CG), R_4(\underline{F}BE), R_5(\underline{H}G), R_6(\underline{AF})$$