Teoremas, Proposiciones y Corolarios

Bander

Julio 2025

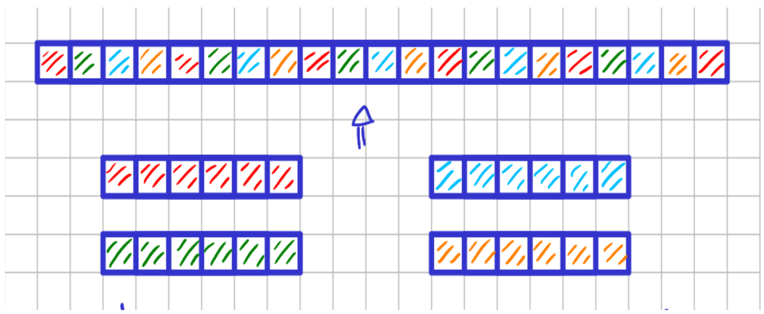
Este es un resumen de los teoremas en mis palabras y con sobreexplicación seguramente para así yo lo entiendo. No pretendo reemplazar la documentación oficial, si no que es para tener una explicación para mi yo del futuro.

Proposición 1: *Sea $f : \{0,1\}^* \rightarrow \{0,1\}^*$, sea T una función construible en tiempo y sea Γ un alfabeto. Si f es computable en tiempo $T(n)$ por una máquina $M = (\Gamma, Q, \delta)$, entonces f es computable en tiempo $O(log|\Gamma| \cdot T(n))$ por una máquina $M' = (\Sigma, Q', \delta')$ donde $\Sigma = \{0, 1, \triangleright, \square\}$ es el alfabeto estándar.*

Demostración:
$|\Gamma|$ es la cantidad de estados que hay originalmente, para codificar cada estado de Q en Q' se usa el alfabeto Σ (binario), por lo cual conlleva $log_2|\Gamma|$ bits por estado (por convencion usamos que $log_2|\Gamma| = log|\Gamma|$ bits). [1]
Eso se traslada a δ' también, por lo cual, lo que antes llevaba un símbolo perteneciente a Γ ahora lleva $log_2|\Gamma|$ símbolos de Σ (pej.: $A = 1010$).

Proposición 2: *Sea $f : \{0,1\}^* \rightarrow \{0,1\}^*$ y sea T una función construible en tiempo. Si f es computable en tiempo $T(n)$ por una máquina estándar de $k \geq 3$ cintas (entrada, salida y $k-2$ cintas de trabajo), entonces f es computable en tiempo $O(T(n)^2)$ por una máquina de cinta única.*

Demostración:
Puedo alternar los símbolos de las k cintas en la cinta única y usar símbolos característicos para indicar dónde está la cabeza de cada cinta.
En la posición i está el caracter $\lceil \frac{i}{k} \rceil$ de la cinta i mod k.



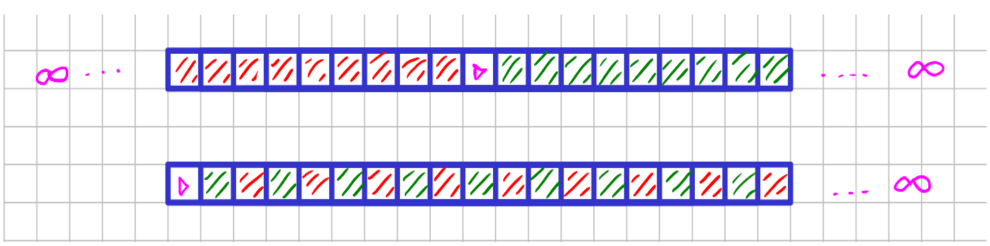
Queda en $O(T(n)^2)$ debido a que por cada paso de δ debo primero ubicar cada cabeza para ver que accionar y después modificar cada cabeza como lo indique δ. O sea, por cada paso recorro toda la cinta 2 veces.

Proposición 3: *Sea $f : \{0,1\}^* \rightarrow \{0,1\}^*$ y sea T una función construible en tiempo. Si f es computable en tiempo $T(n)$ por una máquina estándar, entonces hay una máquina oblivious que computa f en tiempo $O(T(n)^2)$.*

Demostración:
La máquina obliviousse mueve un patrón fijo en cada paso (barre toda la cinta) y cambia la cinta según los cambios que se piden. Es muy similar a la proposición 2.

Proposición 4:
Sea $f : \{0,1\}^* \rightarrow \{0,1\}^*$ y T una función construible en tiempo. Si f es computable por una máquina con cintas bi-infnitas en tiempo $T(n)$, entonces f es computable por una máquina estándar en tiempo $O(T(n))$

Demostración:
Se puede doblar la cinta bi-infinita de manera que rebota en el símbolo $\triangleright$ para ver ambos infinitos.



[1] La base no importa en la notación big O para los logarítmos ya que difieren entre si por una constante multiplicativa debido a cómo se puede cambiar la base de un logarítmo ($log_b n = \frac{log_k n}{log_k b}$)

Teorema 1: *[Turing 1936] halt no es computable.*

Recordatorio:

$$halt(x) = \begin{cases} 1 & \text{si la máquina con entrada } x \text{ termina } (M_x(x)) \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$$

Demostración:
Sale por diagonalización. Tengo que:

	M_1	M_2	M_3	$\cdots$
1	$M_1(1)$			
2		$M_2(2)$		
3			$M_3(3)$	
$\vdots$				$\ddots$

Defino entonces M tal que $M(x)$ termina sii $halt(x) = 0$.
$M(\langle M \rangle)$ termina $\iff$ $halt(\langle M \rangle) = 0$ $\iff$ $M(\langle M \rangle)$ no termina. Absurdo!

Teorema 2: *Existe una máquina U que computa la función $u(\langle i, x \rangle) = M_i(x)$. Más aún, si M_i con entrada x termina en t pasos, entonces U con entrada $\langle i, x \rangle$ termina en $c \cdot t \cdot log(t)$ pasos, donde c depende solo de i.*

Demostración:
Pone en cada cinta de trabajo la simulación de la máquina estándar de M. O sea, en

- #1: La entrada x.
- #2: Cinta de trbajo de M.
- #3: Estado de M.

Si $\#3 = [q_f]$ termina la ejecución M.
Por cada paso de M busco δ en la entrada de la máquina U.

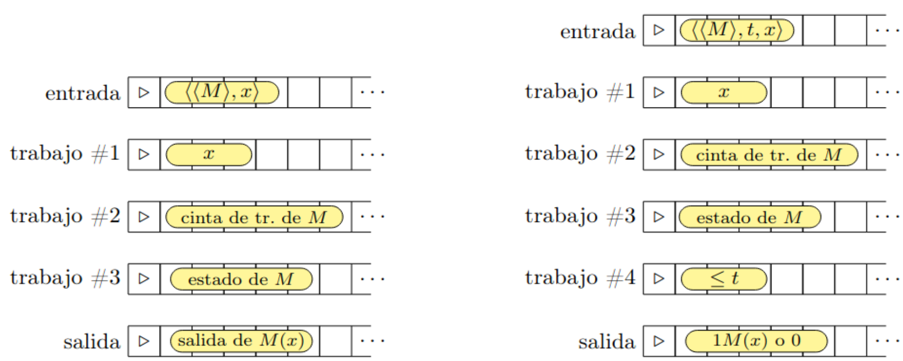


Figura 12: Izquierda: la simulación que hace U (con 3 cintas de trabajo) de M (con una única cinta de trabajo) y entrada x. Derecha: la simulación que hace $\tilde{U}$ (con 4 cintas de trabajo) de M (con una única cinta de trabajo), entrada x hasta el tiempo t.

Teorema 3: *Existe una máquina $\widetilde{U}$ que computa la función $\widetilde{u}(\langle i, t, x \rangle)$ en tiempo $c \cdot t \cdot log(t)$, donde c depende solo de i.*

Demostración:
Es muy similar al teorema 2 pero con una cinta más de trabajo para llevar registro de i (cantidad de pasos en la simulación).

Teorema 4: $\mathsf{P} \subseteq \mathsf{NP}$

Demostración:
Sea $\mathcal{L} \in \mathsf{P}$. $\mathcal{L}(M)$, con M una máq. det. que corre en tiempo polinomial.
Tomás el polinomio p de la definición como $p(|x|) = 0$. Defino M' det. y que corre en tiempo poly. y el certificado $c = \varepsilon$ (donde ε es la cadena vacía), entonces tengo que M' con entrada $\langle x, c \rangle$ copia el comportamiento de M con entrada x.

$$\begin{gathered} x \in \mathcal{L} \iff M(x) = 1 \\ \iff M'(\langle x, c \rangle) = 1 \\ \iff \exists c . c \in \{0,1\}^0 \text{ tal que } M'(\langle x, c \rangle) \text{ (Definición de } \mathsf{NP}) \end{gathered}$$

Teorema 5: $\mathsf{NP} = \bigcup_{c \in \mathbb{N}} \mathsf{NDTime}$