Práctica 2: P, NP y reducciones

Compilado: 16 de abril de 2025

1. Probar que los siguientes lenguajes están en P.
   a) COPRIME $= \{\langle a, b\rangle : (a : b) = 1$, es decir, a y b son coprimos$\}$
   b) POWER $= \{\langle a, e, b\rangle : a^e = b\}$
   c) TREE $= \{\langle G\rangle : G$ es un grafo conexo sin ciclos$\}$
   d) $\mathcal{L}$ donde $|\mathcal{L}| < \infty$ (es decir, probar que todo lenguaje finito está en P).

2. Probar que la clase P está cerrada por unión, intersección y complemento.

3. Probar que los siguientes lenguajes están en NP.
   a) HAMPATH $= \{\langle G, s, t\rangle : G$ es un grafo con dos nodos s y t tales que hay un camino hamiltoniando de s a $t\}$:
   b) k-CLIQUE$= \{\langle G\rangle : G$ es un grafo con subgrafo completo de tamaño mayor o igual a $k\}$
   c) CLIQUE$= \{\langle G, k\rangle : G$ es un grafo con subgrafo completo de tamaño mayor o igual a $k\}$
   d) k-COLORING $= \{\langle G\rangle : G$ es un grafo que se puede particionar en k conjuntos indepenientes$\}$
   e) ISOMORPHISM $= \{\langle G, H\rangle : G$ y H son dos grafos isomorfos$\}$
   f) SUBGRAPH ISOMORPHISM$= \{\langle G, H\rangle : G$ es un grafo y H es isomorfo a un subgrafo inducido de $G\}$
   g) $\neg$SAT $= \{\langle \phi\rangle : \neg\phi$ es satisfacible$\}$

4. Probar que los siguientes problemas están en coNP.
   a) PRIME$= \{n : n \in \mathbb{N}$ es primo$\}$
   b) GIRTH$= \{\langle G, k\rangle : G$ es un grafo tal que todos sus ciclos simples tienen k o menos vértices$\}$
   c) TAUTOLOGY$= \{\langle \phi\rangle : \phi$ es tautología$\}$

5. Considerar los siguientes lenguajes:
   - PATH $= \{\langle G, s, t, k\rangle : G$ es un digrafo con dos nodos s y t tales que hay un recorrido de longitud menor o igual a k de s a $t\}$:
   - EVEN PATH$= \{\langle G, s, t, k\rangle : G$ es un digrafo con dos nodos s y t tales que hay un recorrido de longitud par y menor o igual a k de s a $t\}$

   Dado un digrafo G, definimos G' como el digrafo que tiene dos copias (v, p) y (v, i) de cada vértice $v \in V(G)$ donde $(v, x) \to (w, y)$ es una arista de G' si y solo si $v \to w \in E(G)$ y $x \neq y$.

   a) Demostrar que $\langle G, s, t, k\rangle \in$ EVEN-PATH $\iff \langle G', (s, p), (t, p), k\rangle \in$ PATH.
   b) Mostrar que la reducción de EVEN-PATH a PATH implicada por el punto anterior es polinomial.

6. Considerar los siguientes lenguajes:

- 2-PARTITION $= \{\langle X \rangle : X$ es un subconjunto finito de los números naturales con $\text{mín}_{x \in X}(x) > 2$ que se puede particionar en dos conjuntos X_1, X_2 tales que $X_1 \cap X_2 = \emptyset$, $X_1 \cup X_2 = X$ y $\sum_{x \in X_1} x = \sum_{x \in X_2} x\}$
- 3-PARTITION$= \{\langle X, t \rangle$: X es un subconjunto finito de los números naturales tal que $\sum_{x \in X} x = \frac{|X|t}{3}$, $\text{máx}_{x \in X}\, x < \lfloor t/2 \rfloor$ y X se puede particionar en $\frac{|X|}{3}$ triplas donde cada una suma $t\}$
- RECTANGLE PACKING$= \{\langle R, r_1, \ldots, r_k \rangle$: R es un rectángulo que se puede cubrir completamente y sin superposición usando los rectángulos $r_1, \ldots, r_k$ con traslaciones y/o rotaciones$\}$[1]

a) Dada una instancia $\langle X \rangle$ de 2-PARTITION, se define la instancia $\langle R, r_1, \ldots, r_{|X|} \rangle$ de RECTANGLE PACKING donde R tiene base $\sum_{x \in X} x/2$ y altura 2, y r_i es un rectángulo de base x_i y altura 1, para cada $1 \leq i \leq |X|$. Demostrar que $\langle X \rangle \in$ 2-PARTITION $\iff$ $\langle R, r_1, \ldots, r_{|X|} \rangle \in$ RECTANGLE PACKING.

b) Dada una instancia $\langle X, t \rangle$ de 3-PARTITION, se define la instancia $\langle R, r_1, \ldots, r_{|X|} \rangle$ de RECTANGLE PACKING donde R tiene base $\frac{|X|}{3}$ y altura $t + |X|$ y r_i es un rectángulo de base 1 y altura $\frac{|X|}{3} + x_i$, para cada $1 \leq i \leq |X|$. Demostrar que $\langle X, t \rangle \in$ 3-PARTITION $\iff$ $\langle R, r_1, \ldots, r_{|X|} \rangle \in$ RECTANGLE PACKING.

c) Mostrar que las reducciones implicadas por los puntos anteriores son polinomiales en función de los tamaños de las entradas.

7. Explicar por qué la identidad no es una reducción polinomial de un lenguaje Π a Π^c. Concluir que las nociones de NP y coNP son altamente sensibles a la "etiqueta" de la respuesta.

8. Considerar el siguiente lenguaje:

   - CONNECTED $= \{\langle G, s, t \rangle$: G es un digrafo y s y t dos nodos de G tales que hay un recorrido de s a $t\}$

   Para un digrafo G, sea H el digrafo que tiene un vértice (S, v) para cada $S \subseteq V(G)$ y cada $v \in V(G)$, donde $(S, v) \to (R, w)$ es una arista de H si y solo si $w \notin S$, $R = S \cup \{w\}$ y $v \to w$ es una arista de G.

   a) Demostrar que $\langle G, s, t \rangle \in$ HAMPATH $\iff$ $\langle H, (\{s\}, s), (V(G), t) \rangle \in$ CONNECTED.

   b) Mostrar que la reducción de HAMPATH a CONNECTED implicada por el punto anterior **no** es polinomial.

9. Sea $\mathcal{L} \in$ RECURSIVE.[2] Probar que $\mathcal{L} \leq_p$ HALTING.

10. Probar que $\mathsf{NP} \subseteq$ RECURSIVE. Concluir que HALTING $\notin \mathsf{NP}$.

[1] Un rectángulo en este contexto se representa con dos números naturales indicando su ancho y alto.
[2] RECURSIVE es el conjunto de problemas decidibles, o bien *recursivos*.