Práctica 7: Oráculos

Compilado: 26 de mayo de 2025

1. Probar que para todo oráculo $\mathcal{A}$ se tiene $\mathsf{P}^{\mathcal{A}} \subseteq \mathsf{NP}^{\mathcal{A}} \subseteq \mathsf{E}^{\mathcal{A}}$.
2. Considerar el siguiente prolema:
   - LEX-SAT-BIT $= \{\langle \varphi, i \rangle : \varphi$ es una fórmula satisfacible y la menor asignación que la satisface (donde menor se define usando el orden lexicográfico) fija la variable i en $1\}$

   Probar LEX-SAT-BIT $\in \mathsf{P}^{\mathsf{NP}}$. Argumentar por qué el problema no debería estar en NP.
3. Probar que $\mathsf{NP} \cup \mathsf{coNP} \subseteq \mathsf{P}^{\mathsf{NP}}$.
4. Probar que $\mathsf{P}^{\mathsf{NP}} \subseteq \Sigma_2^p \cap \Pi_2^p$. Generalizar a $\mathsf{P}^{\Sigma_i^p} \subseteq \Sigma_{i+1}^p \cap \Pi_{i+1}^p$ para todo $i \in \mathbb{N}$.
5. Probar que $\mathsf{NP}^{\mathsf{NP}} = \Sigma_2^p$. Generalizar esto para caracterizar todos los pisos de la jerarquía polinomial en función de oráculos.
6. Probar que existen lenguajes $\mathcal{A}, \mathcal{B} \in \mathsf{EXP}$ tales que $\mathsf{P}^{\mathcal{A}} = \mathsf{NP}^{\mathcal{A}}$ y $\mathsf{P}^{\mathcal{B}} \subsetneq \mathsf{NP}^{\mathcal{B}}$. **Ayuda**: Para $\mathcal{B}$, considerar la siguiente idea: proponer un lenguaje $\mathcal{B}$ tal que el problema

   $$U_B = \{1^n : \exists x \in \{0,1\}^n \text{ tal que } x \in B\} \tag{1}$$

   no se pueda resolver en $\mathsf{P}^{\mathcal{B}}$. Armar $\mathcal{B}$ diagonalizando todas las máquinas polinomiales.
7. Probar que existen lenguajes $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ tales que $\mathsf{NP}^{\mathcal{A}} = \mathsf{coNP}^{\mathcal{A}}$ y $\mathsf{NP}^{\mathcal{B}} \neq \mathsf{coNP}^{\mathcal{B}}$. **Ayuda**: usar las ideas del ejercicio anterior.
8. Probar que $\mathsf{PSPACE}^{\mathsf{PSPACE}} = \mathsf{PSPACE}$.
9. Encontrar una clase C tal que $C^C \neq C$.
10. Probar que $\mathsf{NP}^{\mathsf{NP} \cap \mathsf{coNP}} = \mathsf{NP}$.
11. Dada una clase $\mathcal{C}$, se define $\texttt{low}(\mathcal{C}) = \{\Pi \subseteq \Sigma^\star : \mathcal{C}^\Pi = \mathcal{C}\}$. Probar que $\texttt{low}(\mathsf{NP}) = \mathsf{NP} \cap \mathsf{coNP}$.