

Práctica 5: Complejidad espacial

Compilado: 18 de febrero de 2025

PSPACE

1. Probar que los siguientes lenguajes están en PSPACE.
 - a) CLIQUE.
 - b) $\text{FORMULA_MAS_CHICA} = \{\langle \phi, k \rangle : \phi \text{ es una fórmula booleana proposicional, y no existe una fórmula } \phi' \text{ tal que } \phi \equiv \phi' \text{ y } |\phi'| \leq k\}$.
 - c) $\text{TA-TE-TI}^1 = \{\langle T, k \rangle : T \text{ es una matriz de con entradas de valor 0, 1 y 2 tal que el jugador 1 tiene una estrategia ganadora.}\}^2$
2. Probar que PSPACE está cerrado por complemento.
3. Probar que $\text{NP} \subseteq \text{PSPACE}$.
4. Considerar el siguiente juego: dado un grafo G , dos jugadores toman turnos para mover una piedra. Inicialmente la piedra está en un nodo v , y el jugador 1 debe elegir un nodo $w \in N(v)$ a donde mover la piedra. Luego, el jugador 2 hace lo mismo: elige un vecino $z \in N(w)$ y mueve la piedra hacia ahí. El juego termina cuando un jugador solo puede mover la piedra a nodos que ya fueron antes visitados. En ese caso, el jugador que está obligado a mover la piedra a una posición ya visitada pierde. A este juego lo llamamos Generalized Geography, o bien GG.
Probar que el lenguaje $\text{GEO} = \{\langle G, v \rangle : G \text{ es un grafo con un nodo } v, \text{ y el jugador 1 tiene una estrategia ganadora jugando GG sobre el grafo } G \text{ empezando el juego en } v\}$ es PSPACE-completo.
5. Probar un teorema de jerarquía espacial análogo al temporal. Más formalmente, probar que si f, g son funciones space-constructible que satisfacen $f(n) = o(g(n))$ entonces $\text{SPACE}(f(n)) \subsetneq \text{SPACE}(g(n))$.
6. Probar que $\text{P} \neq \text{SPACE}(n)$. AYUDA: observar que ambas clases tienen propiedades de clausura distintas.
7. **GG a fondo** Probar que la siguiente variante de GEO es PSPACE-completa.
 - GEO-EJES: como GEO, pero un jugador pierde cuando repite un eje (es decir, es válido moverse a un nodo ya visitado siempre y cuando para hacer esto no se use un eje ya visitado).

Probar que, en cambio, la siguientes variante está en P.

- GEO-REPITE: GEO, pero se pueden repetir nodos sin problema. Es decir, un jugador pierde únicamente si se queda en un nodo sin ejes salientes.

¹En este TATETI generalizado gana el jugador que logra ocupar k casilleros consecutivos (esto puede ser en horizontal, en vertical o en diagonal). Hay dos jugadores (1 y 2), y el tablero se representa con una matriz donde 0 indica un casillero libre, 1 un casillero ocupado por el jugador 1 y 2 un casillero ocupado por el jugador 2.

²Un jugador A tiene una estrategia ganadora en un juego determinístico contra otro jugador B si existe una jugada de A tal que sin importar qué juegue B el jugador A tiene otra jugada tal que sin importar qué juegue B ..., y así hasta que A gana.

L y NL

8. Probar que la relación \leq_L es transitiva.
9. Sea \mathcal{L} el lenguaje de todas las expresiones con paréntesis bien formadas. Es decir, $()$, $((()))$, $((())()) \in \mathcal{L}$, pero $(((),))$, $()(\notin \mathcal{L}$. Probar que $\mathcal{L} \in \text{L}$.
10. Probar que 2-COLOREO está en NL.
11. Probar que los siguientes problemas son NL-completos.
 - $\text{SCC} = \{\langle G \rangle : G \text{ es un grafo fuertemente conexo}\}$
 - $\text{NFA-NO-VACIO} = \{\langle A \rangle : A \text{ es un autómata no determinístico que reconoce un lenguaje no vacío.}\}$
12. Probar que 2-SAT $\in \text{NL}$.
13. Probar que $\text{NL} \subseteq \text{P}$.