Clase 3

Santiago Cifuentes

April 23, 2025

1. **Propiedades** Decidir cuáles son ciertas.

   a) Si $\Pi_1 \leq_p \Pi_2$ y $\Pi_2 \in \mathsf{P}$, entonces $\Pi_1 \in \mathsf{P}$.
   b) Si $\Pi_1 \leq_p \Pi_2$ y $\Pi_2 \in \mathsf{NP}$, entonces $\Pi_1 \in \mathsf{NP}$.
   c) Si $\Pi_1 \leq_p \Pi_2$ y $\Pi_1 \in \mathsf{NP}$, entonces $\Pi_2 \in \mathsf{NP}$.
   d) Si $\mathsf{P} = \mathsf{NP}$ entonces $\mathsf{P} = \mathsf{NP}$-hard.
   e) Si $\mathsf{P} = \mathsf{NP}$ entonces todos los problemas de P son NP-completos.
   f) Si coNP-hard $\cap$ NP-hard $\neq \emptyset$, entonces $\mathsf{NP} = \mathsf{coNP}$.

2. **SAT y amigos** Considerar los siguientes problemas:

   - $\text{SAT}^2 = \{\langle\varphi\rangle : \varphi$ tiene dos asignaciones satisfactorias$\}$
   - k-NAE-SAT $= \{\langle\varphi\rangle : \varphi$ es k-CNF y tiene una asignación tal que toda cláusula tiene un término verdadero y uno falso$\}$

   a) Probar que SAT^2 es NP-completo.
   b) Probar que k-NAE-SAT está en NP para todo k.
   c) Probar que 3-SAT $\leq_p$ 4-NAE-SAT.
   d) Probar que 4-NAE-SAT $\leq_p$ 3-NAE-SAT.
   e) Generalizar el inciso c) y concluir que k-SAT y k-NAE-SAT es NP-completo para todo $k \geq 3$.
   f) (**Opcional**) Probar que para $k \leq 2$ ambos problemas están en P.

3. **Coloreo** Considerar el sigiente problema:

   - COLOREO $= \{\langle G, k\rangle$: los nodos de G se pueden particionar en k conjuntos $C_1, \ldots, C_k$ disjuntos tales que C_i es independiente para todo $i\}$

   En particular, definimos toda una familia de subproblemas de la siguiente forma

   - k-COLOREO $= \{\langle G\rangle : \langle G, k\rangle \in$ COLOREO$\}$.

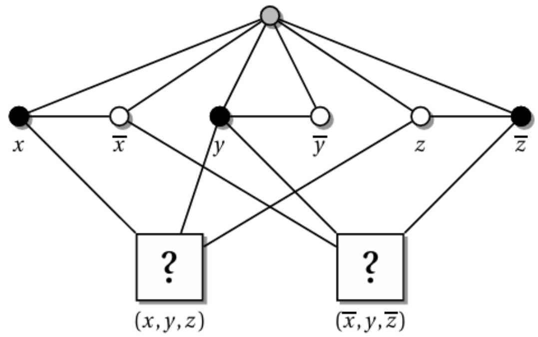

Figure 1: Idea para probar que 3-COLOREO es hard.

Probar que

a) $k -$ COLOREO $\leq_p$ COLOREO para todo k.

b) Probar que COLOREO $\in \mathsf{NP}$. Concluir que $k -$ COLOREO $\in \mathsf{NP}$ para todo k usando a).

c) Probar que k-COLOREO $\leq_p$ $k+1-$ COLOREO. Concluir que k-COLOREO $\leq_p$ $q -$ COLOREO para cualquier $q \geq k$.

d) Probar que 1-COLOREO y 2-COLOREO están en P.

e) **Difícil** Probar que 3-COLOREO es NP-hard. Concluir que k-COLOREO es NP-completo para todo $k \geq 3$, y en particular que COLOREO también es NP-completo. **Ayuda**: Usar que NAE-SAT es NP-completo. En la reducción considerar el esquema de la Figura 1.

Resolución de los que no fueron hechos en clase

2) d) Tenemos que plantear una reducción polinomial de 4-NAE-SAT a 3-NAE-SAT. Para esto, proponemos la siguiente transformación: dada una instancia φ de 3-NAE-SAT con n variables $x_1, \ldots, x_n$ y m cláusulas $c_1, \ldots, c_m$ construimos una nueva fórmula ψ con $n+m$ variables $x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m$ y $2m$ cláusulas. Estas $2m$ cláusulas se obtienen generando dos cláusulas por cada una de φ: cada cláusula $c_j = (l_1^j \vee l_2^j \vee l_3^j \vee l_4^j)$ (donde cada l_k^j denota un literal) se transforma usando la siguiente regla

$$c_j = (l_1^j \vee l_2^j \vee l_3^j \vee l_4^j) \mapsto (l_1^j \vee l_2^j \vee y_j) \wedge (l_3^j \vee l_4^j \vee \neg y_j)$$

Esta reducción es polinomial. Probemos que

$$\varphi \in \text{4-NAE-SAT} \iff f(\varphi) = \psi \in \text{3-NAE-SAT}$$

$\rightarrow$) Sea $v : X = \{x_1, \dots, x_n\} \rightarrow \{0,1\}$ una valuación de φ que hace que cada cláusula tenga un 1 y un 0. Definimos una valuación para ψ de la siguiente forma

$$v'(z) = \begin{cases} v(x_i) & z = x_i \\ 1 & z = y_j \text{ y } (v(l_1^j) = v(l_1^j) = 0 \vee v(l_3^j) = v(l_4^j) = 1) \\ 0 & \text{caso contrario} \end{cases}$$

Estamos mandando y_j a 1 si en la cláusula c_j los literales l_1^j y l_2^j son 0, o bien si l_3^j y l_4^j son 1. Probemos que con esta asignación toda cláusula de ψ tiene un 0 y un 1. Hay dos tipos de cláusulas: las de la forma $(l_1^j \vee l_2^j \vee y_j)$ para algún j y por otro lado las de la forma $(l_3^j \vee l_4^j \vee \neg y_j)$. Para las primeras, notemos que si $v'(l_1^j) = v'(l_2^j) = 0$, entonces $v'(y_j) = 1$, y entonces la cláusula está satisfecha. Por otro lado, si $v'(l_3^j) = v'(l_4^j) = 1$ entonces $v'(y_j) = 1$ y o bien $v'(l_1^j) = 0$ o $v'(l_2^j) = 0$, y la cláusula también está satisfecha[1]. Por último, si no pasa ninguno de estos dos casos o bien $v'(l_1^j) \neq v'(l_2^j)$ y la cláusula se satisface, o $v'(l_1^j) = v'(l_2^j) = 1$ y $v'(y_j) = 0$, y la clausula también se satisface. Usando razonamientos análogos se ve que las cláusulas del segundo tipo también están satisfechas.

Con esto probamos la ida, dado que construimos una asignación que hace que cada cláusula de ψ tenga un 1 y un 0.

$\leftarrow$) Para la vuelta, supongamos que v es una valuación de las variables $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m$ que satisface $f(\varphi) = \psi$ en el sentido de nae-sat. Decimos que $v|_X$ es una valuación que satisface a φ: esto vale porque si $v'(l_1^j) = v'(l_2^j) = v'(l_3^j) = v'(l_4^j)$ para algún j, entonces una de las cláusulas $l_1^j \vee l_2^j \vee y_j$ o $l_3^j \vee l_4^k \vee \neg y_j$ no está satisfecha por v. Luego, vale que $\varphi \in$ 4-NAE-SAT.

e) Queremos mostrar una estrategia general para reducir instancia de $k+1$-SAT o $k+1$-NAE-SAT a k-SAT o k-NAE-SAT, respectivamente.

Para eso, generalizamos el truco del ejercicio anterior, mapeando cada cláusula de la siguiente forma:

$$c_j = \bigvee_{a=1}^{k+1} l_a^j \mapsto (\bigvee_{a=1}^{k-1} l_a^j \vee y_j) \wedge (\bigvee_{a=3}^{k+1} l_a^j \vee \neg y_j)$$

Con $k = 4$ recuperamos la idea del inciso anterior. Usando argumentos idénticos a los anteriores (pero más tediosos) se puede probar la correctitud de esta reducción, lo cual queda como ejercicio.

Para pensar, ¿Por qué esta reducción no funciona para reducir al caso con $k = 2$ y probar que $\mathsf{P} = \mathsf{NP}$?

3)e) Este ejercicio está resuelto en la sección 5.3.2 de Nature of Computation.

[1] Acá usamos que con la valuación v habia un 0 y un 1 entre los l_k^j