Clase Práctica 8

Ej 1:

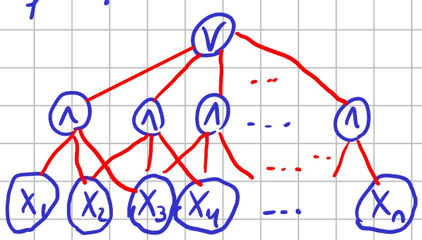
1. Decidir en qué clase están los siguientes problemas:

- a) CON-111 $= \{x_1 \ldots x_n : \exists 1 \leq i \leq n-2,\ x_i x_{i+1} x_{i+2} = 111\}$.
- b) CON-p donde p es un patrón arbitrario, y el problema se define igual que en el ejercicio anterior.
- c) PARITY $= \{x_1 \ldots x_n : x$ tiene una cantidad par de 1s$\}$
- d) EULERIANO $= \{\langle G \rangle : G$ es un grafo euleriano$\}$[1]
- e) SUMA $= \{\langle x, y, z \rangle : x + y = z\}$
- f) MULT $= \{\langle x, y, z \rangle : x * y = z\}$

[1] En este ejercicio consideramos que un grafo es euleriano si cada componente admite un circuito euleriano.

a) CON-111 : $\{x_1 \ldots x_n : \exists 1 \leq i \leq n-2,\ x_i x_{i+1} x_{i+2} = 111\}$

Básicamente es q' haya 3 elementos consecutivos en la entrada q' sean 1's



Pertenece a AC^0, una intuición de q' por ahí no está en NC^0 es q' necesitaría $\log(n)$ ∨.

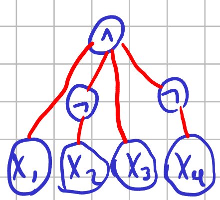
b) CON-p donde p es un patrón arbitrario y el problema se define igual q' en el ejercicio anterior.

Como p es un patrón específico de K nodos consecutivos, puedo construir lo siguiente:

- Para cada bit de la sucesión si el patrón tiene 1's se lo conecta directamente al ∧, y si es 0 se lo paso por ¬ antes

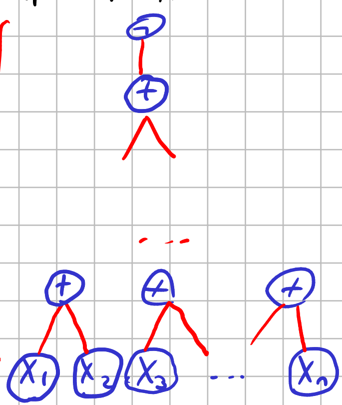
Pej: $p = 1010$

Luego, este circuito pertenece a AC^0.

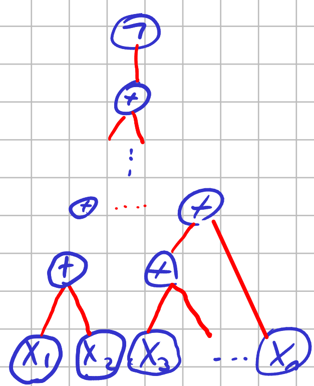


c) PARITY : $\{x_1 \ldots x_n : x$ tiene una cant. par de 1's$\}$

$O(\log(n))$



(si n es impar)



Luego, me queda NC^1

d) EULERIANO $:\{\langle G\rangle : G$ es un grafo euleriano$\}$

↳ Hay un camino q' recorre todas las aristas 1 vez desde todos los nodos.

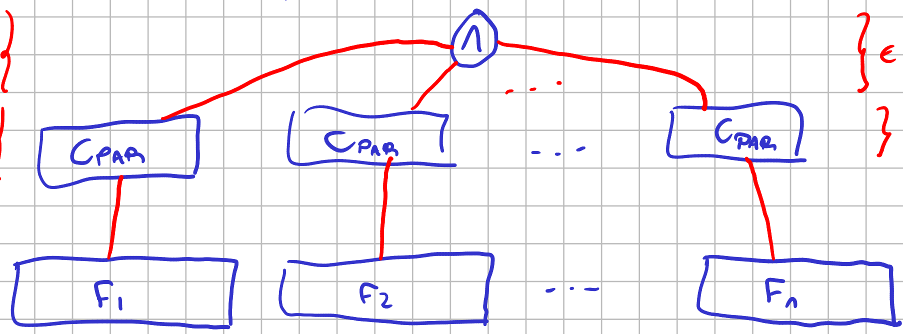
Asumimos q' G es conexo.

Tomar en cuenta q' el grafo es representado por su matriz de adyacencia.

Lo q' quiero ver es q' cada nodo tenga un grado de salida par, ya q' ya sé q' es conexo. Para esto solo preciso ver q' cada fila tenga una cant. par de 1's.

$O(\log n) = c^{tte}$ (F-i b) (F-i a) *'

$\log(n)$



$\} \in AC^0$

$\} \in NC'$

$\in NC'$

C_{PAR} := Circuito de parity del anterior ejercicio

F-i b := Fan-in binario

F-i a := Fan-in arbitrario

e) SUMA $:\{\langle x,y,z\rangle : x+y=z\}$

$$\begin{array}{r} {\scriptstyle 1\,1\,1\,\,\,} \\ 1010 \\ +\ 1110 \\ \hline 11000 \end{array}$$

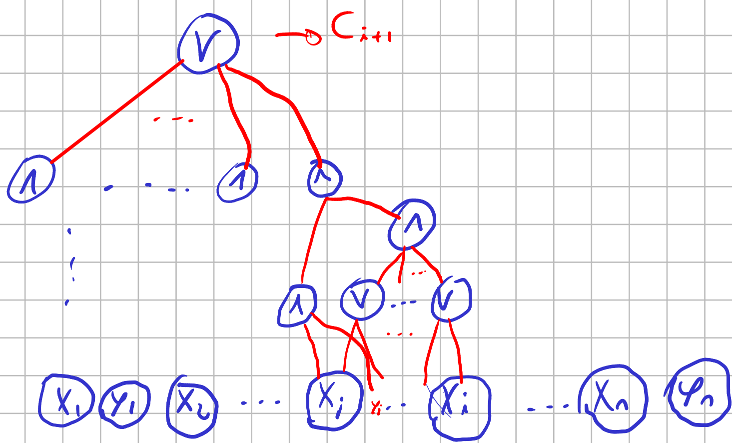
Tengo q' conseguir el carry de la anterior suma.

$$X_i \oplus Y_i \oplus C_i = S_i$$

$$C_{n+1} = S_{n+1}$$ (Último bit del resultado)

$$C_{i+1} = \bigvee_{i \geq j \geq 1} \Big((x_j \wedge y_j) \wedge \bigwedge_{i \geq k \geq j} (x_k \vee y_k) \Big)$$

→ Obtengo todos los carry en una altura c^{tte} con nodos con fan-in arbitrario



→ C_{i+1}

Es ver que haya un par con $X_z = Y_z = 1$ y que de z hasta i haya aunque sea un 1, así el carry se sigue arrastrando.

Altura c^{tte}.

Después de ver q' puedo obtener el carry en tiempo c^{tte}, solo me queda hacer:

$S_i := X_i \oplus Y_i \oplus C_i$ $\}$ Altura c^{tte}

$S_{n+1} := C_{n+1}$

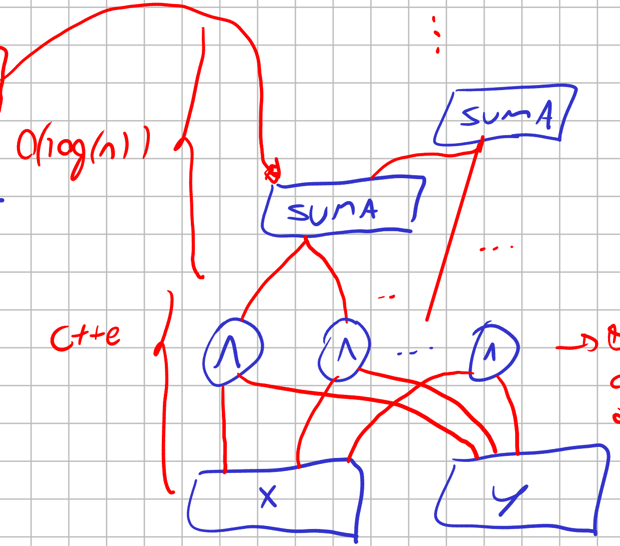
→ Es un not xor.

Y por último comparar $Z_i == S_i$ y retornar la conjunción de todas las comparaciones (Esto también tiene altura c^{tte})

Entonces, SUMA $\in AC^0$

f) MULT: $\{\langle x, y, z\rangle : x * y = z\}$

```
      1010
    x 1110
    ------
      0000
 111 1010-
    1010--
   1010---
----------
  10001100
```



No tomo muy en consideración los shifteos, pero sería algo medianamente sencillo de hacer creo.

→ Devolver nros estos $\wedge$, es tomar un dígito del segundo nro y hacer un and con cada elemento del primero.

Entonces, está en AC^1 (se puede mejorar a NC^1)

↳ Truco: $a+b+c = d+e$ está en NC^0

Ej 2:

2. Probar, asumiendo que PARITY no está en AC^0, que MAJORITY tampoco está en AC^0.

MAJORITY: $\{x : x$ tiene más 1's que 0's$\}$

Para esto voy a ver que puedo usar MAJ para resolver parity, puedo conseguir un circuito q' si MAJ $\in AC^0$, PAR $\in AC^0$, o sea un absurdo.

Esto sería una reducción del tipo MAJ $\leq_{AC^0}$ PAR

No sé, no la termino de entender como hacer un circuito con MAJ y cosas AC^0 para resolver PAR.

$$\text{PARITY}(x) = \left(\text{MAJ}(x) \Rightarrow \bigvee_{k=1}^{n}\left(\text{MAJ}(x0^{k-1}) \wedge \neg\text{MAJ}(x0^{k}) \wedge \tfrac{n+k-1}{2} \text{ es par}\right)\right)$$
$$\wedge \left(\neg\text{MAJ}(x) \Rightarrow \bigvee_{k=1}^{n}\left(\text{MAJ}(x1^{k-1}) \wedge \neg\text{MAJ}(x1^{k}) \wedge \left(n - \tfrac{n+k-1}{2}\right) \text{ es par}\right)\right)$$

La idea es que:

- Si hay más 1's que 0's se agregan tantos 0's como sea necesario (k) para igualar. Cuando son iguales, la cadena ahora te queda de longitud par, pero si dividís por 2 la cadena te queda par sii la original $\in$ PARITY sii esa división te da la cantidad de 1's.
- Si hay más 0's que 1's se agregan k 1's para q' queden misma cantidad de 1's y 0's, luego $\frac{n+k-1}{2}$ es la cantidad de 0's originales y $n - \left(\frac{n+k-1}{2}\right)$ es la cantidad de 1's originales y para q' pertenezca a PARITY, este número debe ser par.

γ

Ej 3:

3. En este ejercicio vamos a probar que SHORTEST-PATH $= \{\langle D, v, w, k\rangle :$ el camino mínimo de v a w en G tiene peso $k\}$ está en AC_2.

   (a) Probar que el producto de matrices de $n \times n$ definido como:

$$(A \star B)_{v,w} = \min_{k=1,\dots,n} (A_{v,k} + B_{k,w})$$

   está en AC_1.

   (b) Sea A una matriz tal que $A_{v,w}$ es igual al peso del camino mínimo de longitud menor o igual a k_1 de v a w, y sea B tal que $B_{v,w}$ es lo mismo pero de longitud k_2. Probar que $(A \star B)_{v,w}$ es el peso del camino mínimo de v a w de longitud menor o igual a $k_1 + k_2$.

   (c) Dar una implementación de Floyd en AC_2.

a)