Práctica 6: Jerarquía polinomial

Compilado: 6 de junio de 2025

1. Probar que el lenguaje Σ_iSAT es completo para la clase Σ_i^p, donde
   - Σ_i SAT $= \{\langle \phi(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_i)\rangle : \phi$ es una fórmula booleana y $\exists \mathbf{v}_1 \forall \mathbf{v}_2 \ldots \phi(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_i)\}$
2. Probar que si $\Sigma_k^p = \Pi_k^p$ para algún $k \in \mathbb{N}$, entonces $\mathsf{PH} = \Sigma_k^p$.
3. Probar que si SAT $\leq_p \overline{\text{SAT}}$ entonces $\mathsf{PH} = \mathsf{NP}$.
4. Probar que el problema FORMULA_MAS_CHICA de la guía anterior está en Π_2^p.
5. La clase $\mathsf{DP} = \{L_1 \cap L_2 : L_1 \in \mathsf{NP}, L_2 \in \mathsf{coNP}\}$ consiste de la intersección de problemas que están en NP y coNP (notar que $\mathsf{DP} \neq \mathsf{NP} \cap \mathsf{coNP}$). Probar que:
   a) $\mathsf{DP} \subseteq \Sigma_2^p \cap \Pi_2^p$.
   b) El siguiente lenguaje está en DP.
      - EXACT INDSET $= \{\langle G, k\rangle : G$ es un grafo cuyo conjunto independiente más grande tiene tamaño $k\}$
   c) EXACT INDSET es completo para DP. Para esto, seguir la siguiente estrategia:
      1) Dar una reducción g de SAT a INDSET (el problema de dado un grafo G y un k decidir si G tiene un conjunto independiente de tamaño mayor o igual a k). Basar la misma en la siguiente idea: por cada cláusula definir una clique de tamaño 7 que represente las 7 asignaciones que satisfacen la cláusula. Luego, conectar todos los nodos que representan asignaciones inconsistentes.
      2) Observar que la reducción propuesta en el ejercicio anterior puede modificarse de tal forma que si $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ es satisfacible entonces el conjunto independiente más grande de G tiene tamaño n, mientras que si φ no lo es entonces el conjunto independiente más grande tiene tamaño $n-1$.
      3) Dado un lenguaje $\Pi \in \mathsf{DP}$ con $L = \Pi_1 \cap \Pi_2, \Pi_1 \in \mathsf{NP}, \Pi_2 \in \mathsf{coNP}$, sean las reducciones f_1 y f_2 de Π_1 a SAT y de Π_2 a $\overline{\text{SAT}}$. Dado x, considerar las reducciones $g(f_1(x)) = \langle G_1, k_1\rangle$ y $g(f_2(x)) = \langle G_2, k_2\rangle$. Suponiendo que $k_1 \neq k_2$, probar que $x \in \Pi$ si y solamente si $\langle G_1 \times G_2, k_1(k_2-1)\rangle \in$ EXACT INDSET [1].
      4) Adaptar el argumento para el caso en que $k_1 = k_2$.

[1] Dados dos grafos $G_1 = (V_1, E_1)$ y $G_2 = (V_2, E_2)$ definimos el producto entre ambos como $G_1 \times G_2 = (V_1 \times V_2, \{((v_1, w_1), (v_2, w_2)) : v_1 v_2 \in E_1 \vee w_1 w_2 \in E_2\})$.