L y NL

Ej 8:

8. Probar que la relación $\leq_L$ es transitiva.

Por definición de transitividad lo q' quiero probar es que:

$$(L \leq_L L' \text{ y } L' \leq_L L'') \Rightarrow L \leq_L L''$$

Entonces, por def. tengo q' existe f, g trabajo-L computables tales que:

$$x \in L \text{ sii } f(x) \in L' \quad (1)$$

$$y \in L' \text{ sii } g(x) \in L'' \quad (2)$$

Con esto veo que:

$$x \in L \overset{(1)}{\text{ sii }} f(x) \in L' \overset{(2)}{\text{ sii }} g(f(x)) \in L''$$

O sea:

$$x \in L \text{ sii } g(f(x)) \in L''$$

Ahora solo me queda ver que $g \circ f$ sea trabajo-L computable (se ve en la prop. 25 de la teórica esto igual, voy a plantear la idea general nada más).

Tengo M_f y M_g tq' $M_f(\langle x, i\rangle) = f(x)[i]$ y $M_g(\langle x, i\rangle) = g(x)[i]$ y son ambas trabajo-L computables.

Luego, $M_{g\circ f}$ va a funcionar como M_g, pero cada vez q' necesita el bit i de la entrada lo calculo con $M_f(\langle x, i\rangle)$, para esto tengo q' guardarme solamente el iterador de la entrada y salida de $M_f(\langle x, i\rangle)$.

Ej 9:

9. Sea $\mathcal{L}$ el lenguaje de todas las expresiones con paréntesis bien formadas. Es decir, (), (()), (()()) $\in \mathcal{L}$, pero ((),)), ()(($\notin \mathcal{L}$. Probar que $\mathcal{L} \in$ L.

Algoritmo: $\langle S \rangle$ ↦ string

```
c := 0                          // |c| = |s|, es una especie de contador de paréntesis
for (i := 0; i < s; i++):       // Itero por el string |i| = |s|
  if (S[i] == '('):             Si el char q' se lee es '(' se le suma a c, si es
    c++                         ')' se le resta, esta suma y resta llevaría cuenta de si ')'
                                encontré su par '('.
  if (S[i] == ')'):             Si en algún momento c es negativa, significa q'
    c--                         se puso un ')' sin un '(' anteriormente. O sea, no es
                                válida.
    if (c < 0):
      ret false
ret (c == 0)                    // Si todos los '(' tienen su par ')', devuelve true, pues
                                hubo una cantidad equivalente de paréntesis (= cant. de restas y sumas)
```

y

Ej 10:

10. Probar que 2-COLOREO está en NL.

hint: Para q' un grafo sea 2-COLOREO no debe tener ningún ciclo de longitud impar. (Gracias al ayz q' me tiró el hint, tipazo).

Idea: Sé lo dicho en la hint. Como NL=coNL, puedo ver q' ¬2-COLOREO está en NL y decir q' entonces 2-COLOREO está en NL.

Algoritmo ⟨G⟩ (de una máq. no det. N) (G = ⟨V,E⟩ con V = Vertex E = Edges)

```
for (i:=0 ; i< |V| ; i++):   // i es un nodo (inicio del ciclo q' buscamos) O(log |V|)
  C:= 0                      // C = Cant. de aristas ya recorridas (A lo sumo |V| para encontrar un ciclo. O(log |V|)
  actual := i                // actual lleva el nodo en el q' estoy parado del recorrido. O(log |V|)
  m:= 0                      // m limita la longitud posible del camino O(log |V|)
  while (m <|V|):
    z:= Genero un nodo ∈{0, ..., |V|-1}   // Nodo random O((log|V|)
    if((actual, z) ∈E ):
      C++
      if ((C es impar) y (C >1) y (z == i)):
        ret true                 // Si llego a un ciclo impar co más de 1 arista devuelvo true.
      actual := z                // Si no, sigo alargando el recorrido.
    m ++
ret false
```

Entonces, el algoritmo q' computa la máq. q' decide 2-COLOREO sería la q' computa N y luego niegue la salida de esta máquina, como NL=coNL, esta máquina es NL.

γ

Ej 11:

11. Probar que los sigientes problemas son NL-completos.

- SCC = {⟨G⟩ : G es un grafo fuertemente conexo} (Digrafo donde se puede llegar desde un nodo a cualquier otro)
- NFA-NO-VACIO = {⟨A⟩ : A es un autómata no determinístico que reconoce un lenguaje no vacío.}

a) SCC es NL-completo.

Primero veo que SCC ∈ NL, la idea del algoritmo es modificar un poco el de PATH para q' se convierta en el problema q' quiero computar.

Algoritmo: <G>

Es un o ó 1.

res := true // Resultado Final de si todos los nodos ↑ O(1)

For(i=0; i<|V|; i++):
  For(j=0; j<|V|; j++):
    } Itero por todos los nodos viendo si hay un camino entre ellos O(2 log |V|)

    if(i ≠ j):

      existeC := false
      actual := i

      For(m=0; m<|V|; m++): O(log |V|)

        z := Genero un nodo ∈ {0, ..., |V|-1} O(log |V|)

        if((actual, z) ∈ E):

          if(actual == j):

            existeC := True

          actual := z

      res := res && existeC

// existe Camino entre estos 2 nodos? *' O(1)

Algoritmo de PATH básicamente

// Uno el resultado de *' con un and, así condiciono a q' todos los caminos deban existir.

ret res

Con este algoritmo se ve q' SCC ∈ NL. Otra forma hubiese sido aplicar algo similar a lo hecho en el punto anterior, demostrando q' ¬SCC ∈ NL.

Ahora tengo que ver que SCC ∈ NL-hard. Para esto, puedo usar PATH (q' sé q' es NL-hard) para la reducción:

$x \in PATH$ sii $f(x) \in SCC$ con f trabajo-L computable

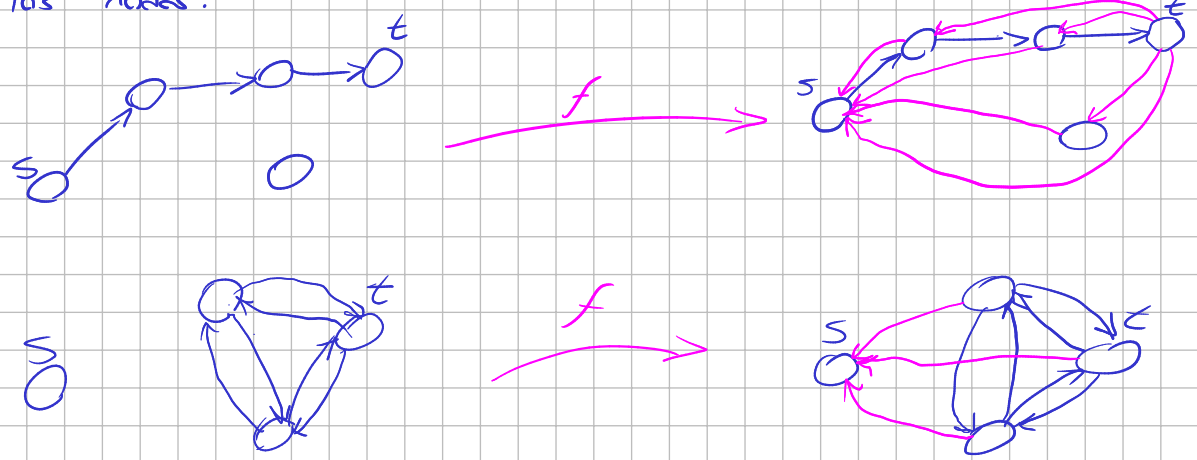
$PATH \leq_L SCC$

- Defino f de la siguiente forma: <G, s, t> es la entrada

f toma a un digrafo G y construye G' tal que:

- Por cada nodo de V_G lo copio en $V_{G'}$ y cada arista de E_G también la copio a $E_{G'}$ y además hago q' cada nodo de $V_{G'}$ se conecte a s y que t se conecte a todos los nodos.

Visual:



Algoritmo de f:

Agrego a la salida los nodos y las aristas de G O(1)

for(i:=0; i<|V|; i++): O(log|V|)

  if(i≠s):

    if(i==s):

      for(j:=0; j<|V|; j++): O(log|V|)

        if((j≠t) y ((t,j) ∉ E_G)):

          Agrego (t,j) a la salida

    elif((i,s) ∉ E_G):

      Agrego(i,s) a la salida

} Agrego las aristas desde t a todos los otros nodos

} Agrego las aristas de todos los nodos a s.

Finalizo la salida.

. Por qué funciona esta f?

C

⇒) Bueno, si yo tengo un camino de s a t, entonces voy a tener en G' un camino de cualquier nodo a s y de s a t, el cual tiene una arista directo a cualquier otro nodo.

Si no existe un PATH de s a t, entonces en G' sigue sin haber un camino de s a t, ya q' no se agregan aristas de s a ningún nuevo nodo y al resto de nodos (≠t) se le agregan aristas hacia s, o sea, si en G no se llega a t, entonces en G' tampoco por lo cual no es fuertemente conexo

⇐) La vuelta queda medio trivial pq' depende de G para construir G', por lo cual, por lo dicho en la ida, solo se tiene un G' fuertemente conexo si existe un PATH de s a t, si no existe en G', en G tampoco.

b) NFA-no-vacío (π) es NL-completo.

Primero veo q' π pertenece a NL, para lo cual hago el siguiente algoritmo:

Idea: Si el autómata analiza una palabra con más de |Q| símbolos significa q' pasó por algún ciclo, por lo q' lo podría haber evitado y obtenido una palabra más chica.
Entonces hay al menos 1 palabra de a lo sumo |Q| símbolos q' pertenece al lenguaje.

Algoritmo: $\langle Q, q_0, \Sigma, F, \delta \rangle$

actual := q_0 O(log(n))

for(m:=0; m<|Q|; m++): O(log|Q|)

  s:= Inventa un símbolo ∈ Σ

  q_{next}:= Inventa un estado ∈ Q

  if(existe δ(actual, q_{next}, s)):

} O(log|Σ|) y O(log|Q|).
Busco un camino a algún estado final desde el inicial de longitud de a lo sumo |Σ|

if ($q_{next} \in F$):

ret true

actual := q_{next}

ret false

Luego, debo ver q' π es NL-Hard. Por lo cual voy a querer reducir desde PATH a π, o sea $PATH \leq_L \pi$

$x \in PATH$ sii $f(x) \in \pi$ con f trabajo-L computable.

Tomando una instancia $\langle G, s, t \rangle$ de PATH, lo q' haría sería generar un autómata $M = \langle Q, q_0, \Sigma, F, \delta \rangle$ de la siguiente manera:

- Q := nodos de G
- q_0 := s
- $\Sigma := \{1\}$
- $F := \{t\} = \{q_f\}$
- δ := Si existe el arista (a, b) en G, existe la transición $\delta(a, b, 1)$.

Esta f es trabajo-L computable pq' va en orden 1 a 1 poniendo las cosas en la cinta de salida. Luego demuestro:

$x \in PATH$ (①) sii $f(x) \in \pi$ (②)

⇒) Si ① es verdadera, entonces $f(x) = M$ va a tener una sucesión de δ de q_0 a q_f ya q' las transiciones se corresponden con las aristas y los estados con los nodos y $q_0 = s$, $q_f = t$.

Si ① es falso, entonces desde el q_0 de M no hay camino a q_f, por lo cual el lenguaje q' decide $\emptyset$.

⇐) Es muy análoga a la ida (⇒), ya que por def. si hay un camino de q_0 a q_f es pq' había un camino de s a t en G.

γ

Ej 12:

12. Probar que 2-SAT $\in$ NL.

Hint: $(s \vee t) \equiv (\neg s \Rightarrow t) \equiv (\neg t \Rightarrow s)$ (gracias a otra ayz ^.^)

Vamos medio despacito q' es una demo rara...

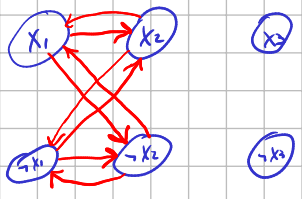
Primeramente sé q' puedo traducir a cualquier fórmula de 2-SAT a otra fórmula con el estilo de la hint.

Luego, ya con la fórmula de esta manera puedo convertirlo en un grafo, de manera que cada nodo sean las variables de la fórmula y sus negación.

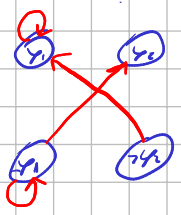
Visual:

Luego, le agrego aristas de manera q' se corresponda con las implica de la fórmula

Visual: φ:



Ψ:



Si solo pongo q' $s \vee t \equiv \neg s \Rightarrow t$ y no q' $s \vee t \equiv (\neg s \Rightarrow t) \wedge (\neg t \Rightarrow s)$ se rompe.

¿contradicción

$\varphi = (x_1 \vee x_2) \wedge (\neg x_1 \vee x_2) \wedge (x_1 \vee \neg x_2) \wedge (\neg x_1 \vee \neg x_2) = (\neg x_1 \Rightarrow x_2) \wedge (x_1 \Rightarrow x_2) \wedge (\neg x_1 \Rightarrow \neg x_2) \wedge (x_1 \Rightarrow \neg x_2) \wedge (\neg x_2 \Rightarrow x_1) \wedge (\neg x_2 \Rightarrow x_1) \wedge (x_2 \Rightarrow x_1) \wedge (x_2 \Rightarrow \neg x_1)$

¿fórmula satisfacible

$\Psi = (y_1 \vee \neg y_1) \wedge (y_2 \vee y_1) = (\neg y_1 \Rightarrow \neg y_1) \wedge (\neg y_2 \Rightarrow y_1) \wedge (y_1 \Rightarrow y_1) \wedge (\neg y_1 \Rightarrow y_2)$

Por última, voy a ver q' si la fórmula es satisfacible, entonces no puedo tener un ciclo q' comience y termine en el x_i y pase por $\neg x_i$.

Obviamente tengo q' demostrar q' esta la resuelvo con un algoritmo en NL (esto se ve fácil pq' ya tengo PATH, solo habría q' hacerle pelares modificaciones (q' se fije si paso por $\neg x_i$ desde x_i a x_i) para conseguir lo que quiero). ← Reachability

También debo justificar que $x \in 2\text{-SAT}$ sii algoritmo aplicado a $x = 1$

- Algoritmo NL para hacer la vista:

Sería básicamente buscar un ciclo de x_i que pase por $\neg x_i$, si esto no sucede significa q' la fórmula es satisfacible. Por lo visto varias veces el algoritmo de Reachability es NL.

PATH(G, x_i, x_i)

↳ Adentro chequea q' pase por $\neg x_i$, si pasa retorna true

Esto es el complemento de lo q' quiero, pero como NL = coNL puedo simplemente después de computarlo negar la salida.

- ¿Qué significa q' haya un ciclo?

Si hay un ciclo en el grafo q' cumple q' contiene a x_i y $\neg x_i$, esto significa q' llega un momento donde se puede decir q' $x_i \Rightarrow \neg x_i$ y $\neg x_i \Rightarrow x_i$, y esto es siempre falso.

- Pero te dan una fórmula, no un grafo. ¿Cómo podrías hacer lo anterior en logspace?

Esto se soluciona concluyendo q' la función q' transforma φ a G es trabajo-L computable, o sea, podría calcularlo on-the-fly, o sea a medida de q' sea necesario lo calculo.

Ej 13:

13. Probar que NL $\subseteq$ P.

Idea: Tomar un $L \in$ NL-completo y demostrar q' está en P.

Para lo siguiente voy a tomar PATH $\in$ NL-Completo y mostrar cómo se podría computar en una M máq. det. poly.

Algoritmo: $\langle G, s, t \rangle$

Con BFS se puede hacer tranquilamente, y se q' BFS corre en tiempo $O(|V|+|E|)$, o sea $O(|V|^2)$ a lo sumo.
Sería hacer BFS desde s y ver si en algún momento visito t.

Como cualquier problema en NL se puede reducir en logspace a PATH, puedo decir q' PATH $\in$ P $\Rightarrow$ NL $\subseteq$ P

Otra forma (más teórica):

Puedo usar la prop. 18 de la teoría que dice que si la función S es construible en espacio, sabemos q' $NSpace(S(n)) \subseteq DTime(2^{O(S(n))})$, entonces llego a q':

$NSpace(\log(n)) \subseteq DTime(2^{O(\log(n))})$, o sea

$NSpace(\log(n)) \subseteq DTime(n^c) = P$

↳ sale de $O(\log(n)) = c.\log(n)$

Sale de hacer el grafo de configuraciones de la N q' decide $L \in NSpace(S(n))$

Fin guía 5 :D.