Clase 1

Santiago Cifuentes

Marzo 2025

Definiciones por límite: dadas dos funciones crecientes $f, g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, supongamos que existe $L = \lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)}$. Luego:

- Si $L = 0$, $f(n) = o(g(n))$.
- Si $L = c \in \mathbb{R}$, $f(n) = \Theta(g(n))$.
- Si $L = \infty$, $f(n) = \omega(g(n))$.

En particular, $f(n) = O(g(n))$ si $L < \infty$, y $f(n) = \Omega(g(n))$ si $L \neq 0$.

1. Probar que $\log n^k = o(n^\varepsilon)$ para todo $k \in \mathbb{N}$ y $\varepsilon > 0$.
2. Dar una cota fina a la función $T(n)$ definida como

$$T(n) = \begin{cases} 0 & n = 0 \\ 2n - 1 + T(n) & \text{caso contrario} \end{cases}$$

3. Hacer lo mismo para la recusión dada por

$$T(n) = \begin{cases} 1 & n \in \{0, 1\} \\ 3T(n/2) + 4\log n & \text{caso contrario} \end{cases}$$

4. Argumentar que una máquina de Turing con k cintas de trabajo que corre en $T(n)$ pasos puede simularse con una sola cinta de trabajo en $O(kT(n)^2)$.
5. Argumentar que una máquina de Turing con acceso RAM puede simularse eficientemente con una máquina de Turing.
6. Probar que los siguientes problemas están en P:
   - Dado un grafo G, decidir si dos nodos v, w están conectados.
   - Dadas dos cadensa t y p, decidir si p es una subcadena de t.
   - Dado n, calcular $\sqrt{n}$.
7. Explicar por qué el algoritmo de "*trial division*" para decidir si un número es primo no es polinomial.

8. Probar que la clase P está cerrada por complemento, unión e intersección.

9. Dada una función $f : \Sigma^* \to \Sigma^*$ y un problema Π, definimos $f(\Pi) = \{f(x) : x \in \Pi\}$. Encontrar funciones que corran en tiempo polinomial para las cuales P esté cerrada (i.e. $\Pi \in \mathrm{P} \implies f(\Pi) \in \mathrm{P}$) ¿Existe alguna función para la cual P no esté cerrada?

   Ayuda: el único problema que saben que no está en P es HALT. Considerar como función la proyección π, que dado un par $\langle x, y\rangle$ se comporta como $\pi(\langle x, y\rangle) = x$.