Práctica 4: Jerarquía temporal

Compilado: 18 de febrero de 2025

1. Probar que las siguientes funciones son time-constructible:

   (a) $f(n) = n$.
   (b) $f(n) = 2^n$.
   (c) $f(n) = n\lfloor \log n \rfloor$.
   (d) $f(n) = \lfloor n^{3/2} \rfloor$.

2. Argumentar por cardinalidad que hay funciones que no son time-constructible. Dar un ejemplo de una función f con $f(n) \geq n$ que no sea time-constructible.

3. **Padding** Probar que si $\mathsf{P} = \mathsf{NP}$ entonces $\mathsf{EXP} = \mathsf{NEXP}$[1]. **Ayuda**: Para ver que $\mathrm{NEXP} \subseteq \mathrm{EXP}$ tomar $\Pi \in \mathrm{NTIME}(2^{n^c})$ y considerar el lenguaje

$$\Pi_{pad} = \left\{ \langle x, 01^{2^{|x|^c}} \rangle : x \in \Pi \right\}$$

4. Suponiendo que todos los lenguajes unarios[2] de NP están en P, probar que $\mathsf{EXP} = \mathsf{NEXP}$.

5. Probar que la función H en la demostración del Teorema de Ladner es computable en tiempo $O(n^3)$.

6. Generalizar el Teorema de Ladner. Más puntualmente, probar que si $\mathsf{P} \neq \mathsf{NP}$ entonces existen problemas $\{\Pi_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ tales que $\Pi_i \in \mathsf{NP} \setminus \mathsf{P}$, $\Pi_i \not\leq_p \Pi_{i+1}$ y $\Pi_{i+1} \leq_p \Pi_i$ para todo $i \in \mathbb{N}$.

[1] Recordar que $\mathrm{EXP} = \bigcup_{c\in\mathbb{N}} \mathrm{TIME}(2^{n^c})$ y $\mathrm{NEXP} = \bigcup_{c\in\mathbb{N}} \mathrm{NTIME}(2^{n^c})$

[2] Un lenguaje $\mathcal{L}$ es unario si $\mathcal{L} \subseteq \{1\}^*$