МИНОБРНАУКИ РОССИИ
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
"МИРЭА - Российский технологический университет"
РТУ МИРЭА

Институт Информационных Технологий

Кафедра Вычислительной Техники

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА №6

по дисциплине
«Теория принятия решений»
Двойственная задача

Студент группы: ИКБО-04-22 Арефьев А.М.
(Ф. И.О. студента)

Преподаватель __Железняк Л.М.__
(Ф.И.О. преподавателя)

Москва 2024

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Общие правила составления двойственных задач При составлении двойственных задач используют следующие правила [4]:

1) Матрица из коэффициентов при переменных в прямой задаче и аналогичная матрица в двойственной задаче получаются друг из друга транспортированием.

2) Ограничения – неравенства исходной задачи должны быть записаны так, чтобы знаки неравенств у них были направлены в одну сторону.

3) Если знаки неравенств в ограничениях прямой задачи «≤», то целевая функция должна $f(\bar{x})$ максимизироваться, если «≥» минимизироваться.

4) Каждому ограничению исходной задачи соответствует неизвестное в двойственной задаче; при этом неизвестное, отвечающее ограничениюнеравенству, должно удовлетворять условию не отрицательности, отвечающее ограничению-равенству, может быть любого знака.

5) Целевая функция двойственной задачи $g(\bar{x})$ должна оптимизироваться противоположно целевой функции $f(\bar{x})$, т.е. $f(\bar{x}) \rightarrow max$, то $g(\bar{y}) \rightarrow min$, если $f(\bar{x}) \rightarrow min$, то $g(\bar{y}) \rightarrow max$.

1ДВОЙСТВЕННАЯ ЗАДАЧА

1.2 Постановка задачи

Фабрика выпускает три вида тканей. Суточные ресурсы фабрики, следующие: 700 ед. производственного оборудования, 800 ед. сырья, 600 ед. электроэнергии, расход которых на единицу ткани представлен в таблице П.1.

Таблица П.1. Расход на единицу ткани.

Ресурсы	Ткани			Ресурсы
	I	II	III	
Оборудование	2	3	4	700
Сырье	1	4	5	800
Электроэнергия	3	4	2	600
Прибыль от единицы ткани	8	7	6	

Цена одного метра ткани I равна 8 ден.ед., ткани II – 7 ден.ед. и ткани III – 6 ден.ед. Сколько нужно произвести ткани каждого вида, чтобы прибыльот реализации была наибольшей?

1.2 Математическая модель исходной задачи

Пусть x1 – тип ткани I, x2 –тип ткани II, x3 –тип ткани III. Прибыль от продажи тканей составит 8x1 + 7x2 + 6x3, прибыль требуется максимизировать.

$$f(x)=8x1+7x2+6x3\rightarrow max$$

$$\begin{cases} 2x1+3x2+4x3\leq 700 \\ x1+4x2+5x3\leq 800 \\ 3x1+4x2+2x3\leq 600 \\ xi\geq 0,1\leq i\leq 3 \end{cases}$$

1.3 Соответствующая исходной двойственная задача

Найдем соответствующую двойственную задачу. Введем вектор двойственных переменных размерности три $\overline{y}=(y_1, y_2, y_3)^T$. Соответствующие векторы и матрица ограничений имеет вид:

$$\overline{c}=(8,7,6), \overline{b}=(700,800,600), A=\begin{pmatrix}2 & 3 & 4\\ 1 & 4 & 5\\ 3 & 4 & 2\end{pmatrix}, A^T=\begin{pmatrix}2 & 1 & 3\\ 3 & 4 & 4\\ 4 & 5 & 2\end{pmatrix}.$$

Запишем двойственную задачу. Найти минимум функции.

$$g(\overline{y})=(\overline{b}, \overline{y})=700\,y_1+800\,y_2+600\,y_3 \to min$$

При ограничениях:

$$\begin{pmatrix}2 & 1 & 3\\ 3 & 4 & 4\\ 4 & 5 & 2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}y_1\\ y_2\\ y_3\end{pmatrix}\geq\begin{pmatrix}8\\ 7\\ 6\end{pmatrix}, \textit{следовательно}$$

$$\begin{cases}2\,y_1+1\,y_2+3\,y_3\geq 8,\\ 3\,y_1+4\,y_2+4\,y_3\geq 7,\\ 4\,y_1+5\,y_2+2\,y_3\geq 6,\\ yi\geq 0, 1\leq i\leq 3.\end{cases}$$

1.4 Первая теорема двойственности

Если одна из пары двойственных задач имеет оптимальный план, то и другая имеет оптимальный план, причем экстремальные значения целевых функций равны. В ходе решения прямой задачи было определено, что максимальный доход от продажи составляет $f_{max}=1675$ тыс. ден.ед., оптимальный план $\overline{x^{¿}}=(x1, x2, x3, x4, x5, x6)=(1000/8, 0, 900/8, 0, 900/8, 0)$

Оптимальное решение двойственной задачи может быть получено из оптимального решения прямой задачи. Так как прямая задача имеет решение, то на основании первой теоремы о двойственности задача также разрешима. Ее решение может быть найдено из формулы:

$$\overline{x^{¿}} = \overline{C_B} \cdot D^{-1},$$

Где D – матрица, составленная из компонентов векторов входящих в последний базис, при котором получен оптимальный план исходной задачи.

В последней симплекс-таблице базисными переменными являются $x4$, $x2$, $x1$. Соответствующие этим переменным векторы $\overline{A_3}$, $\overline{A_5}, \overline{A_1}$ в разложении используются для формирования столбцов матрицы D.

$$\overline{A_3} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}, \overline{A_5} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \overline{A_1} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix},$$

Тогда,

$$D = (\overline{A_3}, \overline{A_5}, \overline{A_1}) = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 2 \\ 5 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Для вычисления обратной матрицы D^{-1} запишем матрицу D дописав к ней справа единичную матрицу.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 4 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Для нахождения обратной матрицы D^{-1} используем элементарные преобразования над строками матрицы. Таким образом, преобразуются левая часть полученной матрицы в единичную.

Запишем обратную матрицу.

$$D^{-1} = (y_3^{¿}, y_5^{¿}, y_1^{¿}) = \begin{pmatrix} 3/8 & 0 & -1/4 \\ -13/8 & 1 & 3/4 \\ -1/4 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$$

Базисными переменными в симплекс-таблице являются $\overline{C_B}=(6,0,8)$, тогда

$$\overline{y^{¿}}=(y_3^{¿},y_5^{¿},y_1^{¿})=\overline{C_B}\cdot D^{-1}=(1/4,0,5/2)$$

При этом минимальное значение целевой функции двойственной задачи

$$g_{min}=g(\overline{y^{¿}})=(\overline{b},\overline{y^{¿}})=700*1/4+800*0+600*5/2=1675.ден.ед$$

совпадает с максимальным значением f_{max} = 1675 [тыс. ден.ед.] прямой задачи, что является результатом взаимодвойственности. Таким образом,

$$maxf(\overline{x})=ming(\overline{y})=1675[.ден.ед.]$$

1.5 Вторая теорема двойственности

Для того, чтобы планы $\overline{x^{¿}}=(x_1^{¿},x_2^{¿},\ldots,x_n^{¿})$ и $\overline{y^{¿}}=(y_1^{¿},y_2^{¿},\ldots,y_m^{¿})$ ЗЛП двойственной пары были оптимальными, необходимо и достаточно, чтобы эти планы удовлетворяли условиям дополняющей нежесткости.

$$\left\{x_j^{¿}\left(\sum_{i=1}^{m}a_{ij}y_i^{¿}-c_j\right)=0,\ j=\overline{1,n}\right.$$

$$\left\{y_i^{¿}\left(\sum_{i=1}^{n}a_{ij}x_j^{¿}-b_i\right)=0,i=\overline{1,m}\right.$$

Итак, имеем оптимальное решение прямой задачи: недельный объем производства тканей типа I – $x1$ = 125; недельный объем производства тканей типа II – $x2$ = 0; недельный объем производства тканей типа III – $x3$ = 112/5; максимальный доход от продажи f_{max} = 1675 [тыс. ден.ед. / неделю]. Рассмотрим выполнение неравенств прямой задачи при подстановке $x1$, $x2$, $x3$ в систему ограничений (Таблица 1.2).

Согласно Таблице 1.2 имеем следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} 2y1 + y2 + 3y3 = 8 \\ y2 = 0 \\ 4y1 + 5y2 + 2y3 = 6 \end{cases}$$

Решим данную систему уравнений

$$y1 = 0.25\, y3 = 2.5$$

Решение найденное из первой теоремы двойственности равнозначно решению из второй теоремы.

$$g(\overline{y^{¿}}) = (\overline{b}, \overline{y^{¿}}) = 700*1/4 + 800*0 + 600*5/2 = 1675\, ден.ед$$

$$min\, g(\overline{y}) = 1675[.ден.ед.]$$

Таким образом, вторая теорема дает нахождение оптимального решения двойственной задачи, пользуясь условием обращения в равенство сопряженных неравенств в системах ограничения.

Таблица 1.2 – Выполнение неравенств прямой задачи

Ограничение	Расчет	Вывод
2x1 + 3x2 + 4x3 ≤ 700	2*125+4*112.5= 700 700 = 700	Первое ограничение прямой задачи выполняется как равенство. Это означает, что ткани типа I полностью используется в оптимальном плане, является дефицитным и его оценка согласно второй теоремы двойственности отлична от нуля ($y_1 \neq 0$).
x1 + 4x2 + 5x3 ≤ 800	125+0+562.5< 800 687.5<800	Второе ограничение прямой задачи выполняется как строгое неравенство, остается спрос на продукцию ткани II. Значит, этот ресурс не является дефицитным и его оценка в оптимальном плане равна нулю ($y_2 = 0$).
3x1 + 4x2 + 2x3 ≤ 600	3*125+2*112.5= 600 600=600	Третье ограничение прямой задачи выполняется как равенство. Это означает что шкафы типа A

		полностью используется в оптимальном плане, является дефицитным и его оценка согласно второй теоремы двойственности отлична от нуля ($y_3 \neq 0$).
x1 ≥ 0	125>0	Первое ограничение в двойственной задаче будет равенством $2y_1 + 1y_2 + 3y_3 = 8$, т.е. весь его запас полностью используется в оптимальном плане, он является дефицитным
x2 ≥ 0	0=0	Второе ограничение в двойственной задаче будет равенством $y_2 = 0$, т.е. в процессе производства не используется является не дефицитном.
x3 ≥ 0	112.5>0	Третье ограничение в двойственной задаче будет равенством $4y_1 + 5y_2 + 2y_3 = 6$

1.6 Третья теорема двойственности

Третью теорему двойственности иногда называют теоремой об оценках. Рассматривая ограничения ЗЛП, можно констатировать: изменение правых частей ограничений исходной задачи приводит к изменению максимального значения целевой функции Z_{max}.

Выпишем необходимые элементы из прямой задачи о максимальном доходе. Обратная матрица базиса оптимального плана:

$$D^{-1} = (y_3^{¿}, y_5^{¿}, y_1^{¿}) = \begin{pmatrix} 3/8 & 0 & -1/4 \\ -13/8 & 1 & 3/4 \\ -1/4 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$$

Индексы базисных переменных оптимального плана:

$$\overline{A_0^{¿}} = \left(x_3^{¿}, x_5^{¿}, x_1^{¿}\right) = \begin{pmatrix} 112.5 \\ 112.5 \\ 125 \end{pmatrix}$$

Свободные члены неравенств (ограничений) прямой задачи:

$$\overline{A_0} = \left(b_1, b_2, b_3\right) = \begin{pmatrix} 700 \\ 800 \\ 600 \end{pmatrix}$$

Теперь воспользуемся формулами для нахождения нижней и верхней границ интервалов устойчивости оценок по видам ресурсов.

Ресурс 1 (Тип А). Найдем нижнюю границу. В третьем столбце обратной матрицы два положительных элемента (¾, 1/2), им соответствует индексы базисных переменных оптимального плана (112.5, 125).

$$\Delta b_1^H = \begin{cases} \left| min\, 112.5 \cdot \left(\frac{4}{3}\right) \right| = 150 \\ \left| min\, 125\, x \left(\frac{2}{1}\right) \right| = 250 \end{cases}$$

Выбираем наибольшее значение, равное 250.

Найдем верхнюю границу. В третьем столбце единственное отрицательное значение (−1/4), которое соответствует индексу базисной переменной оптимального плана (112.5).

$$\Delta b_1^B = \left| max\, 112.5 \cdot \left(\frac{4}{-1}\right) \right| = \left| -450 \right| = 450$$

Таким образом, получаем $\Delta b_1 \in (-250; 450)$.

Тогда первый ресурс может изменяться в интервале:

$$\left(b_1 - \Delta b_1^H, b_1 + \Delta b_1^B\right) = (700 - 250; 700 + 450) = (450; 1150)\, шт./неделю$$

При таком значении оптимальный план двойственной задачи остается неизменным. Аналогичные рассуждения позволяют найти интервалы устойчивости оценок для остальных ресурсов.

Ресурс 2. Рассматриваем второй столбец обратной матрицы, в котором один положительный элемент (1) и два нулевых. Данным элементам соответствуют следующие индексы базисных переменных оптимального плана: положительного элемента – 112.5;

Тогда находим нижнюю границу.

$$\Delta b_2^H = min\{112.5/1 = 112.5$$

Верхняя граница не ограничена.

Получаем $\Delta b_2 \in (-112.5; +inf)$.

Получаем интервал устойчивости оценок по отношению ко второму ограничению:

$$(b_2 - \Delta b_2^H, b_2 + \Delta b_2^B) = (800 - 112.5; +inf) = (687.5; +inf)\, шт./неделю$$

Ресурс 3. Рассматриваем первый столбец обратной матрицы, в котором один положительный элемент (3/8) и 2 отрицательных. Данному элементу соответствует индекс соответствующего базисного переменного оптимального плана – 112.5.

Находим нижнюю границу.

$$\Delta b_3^H = min\, 112.5 \cdot \frac{8}{3} = 300$$

Верхняя граница:

$$\Delta b_3^B = \begin{cases} \left| max\, 112.5 \cdot \left(-\frac{8}{13}\right) \right| = 69.23\ldots. \\ \left| max\, 125\, x \left(-\frac{4}{1}\right) \right| = 500 \end{cases}$$

Выбираем наибольшее — 500.

Тогда, получаем что $\Delta b_3 \in (-300; +500)$.

Получаем интервал устойчивости оценок по отношению к третьему ограничению:

$$\left(b_3-\Delta b_3^H, b_3+\Delta b_3^B\right)=\left(600-300;\ \ 600+500\right)=\left(300;1100\right) шт./неделю$$

Далее оценим влияние изменения объема ресурсов на величину максимальной стоимости продукции. Как известно, это дефицитные ресурсы $y_1=0.25\ \ и\ y_3=2.5$. Введем верхние границы $\Delta b_1^B и \Delta b_3^B$ в формулу:

$$\Delta G_{max}^i \approx y_i^{¿} \times \Delta b_i$$

$$\Delta G=y_1 \times \Delta b_1^B=0.25 \times 450=112.5$$

$$\Delta G=y_3 \times \Delta b_3^B=2.5 \ \times\ 500=1250$$

Совместное влияние изменений этих ресурсов приводит к изменению максимальной стоимости продукции G_{max} на величину:

$$\Delta G_{max}=\Delta G_{¿}+\Delta G_{¿}=112+1250=1362$$

Следовательно, оптимальное значение целевой функции при максимальном изменении ресурсов:

$$G_{max} \approx 1675+1362.5=3037.5\left[ден.ед./неделю\right]$$

Таким образом, двойственные оценки позволяют судить о чувствительности решения к изменениям.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Прямая задача была переведена в двойственную, было получено оптимальное решение двойственной задачи из оптимального решения прямой задачи. При помощи теоремы 1 и 2 было доказано что решения правильные — взаимодвойственные. При помощи теоремы 3 оценили влияние изменения ресурсов на изменение максимальной стоимости.

СПИСОК ИНФОРМАЦИОННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Болотова Л. С. Многокритериальная оптимизация. Болотова Л. С., Сорокин А. Б. [Электронный ресурс] / Метод. указания по вып. курсовой работы — М.: МИРЭА, 2015.

2. Сорокин А. Б. Методы оптимизации: гибридные генетические алгоритмы. Сорокин А. Б. [Электронный ресурс] / Учебно-метод. пособие — М.: МИРЭА, 2016.

3. Сорокин А. Б. Линейное программирование: практикум. Сорокин А. Б., Бражникова Е. В., Платонова О. В. [Электронный ресурс] / Учебно-метод. пособие — М.: МИРЭА, 2017.

ПРИЛОЖЕНИЯ

Приложение А – Код реализации двойственной задачи на языке Python.

Приложение А

Код реализации двойственной задачи на языке Рутнон.

Листинг А.1. Реализация двойственной задачи.

```
D = np.array([
 [4, 0, 2],
 [5, 1, 1],
 [2, 0, 3]
])
c = np.array([6, 0, 8])
D_inv = np.linalg.inv(D)

y = c.dot(D_inv)
gmin = b*y
gmin.sum()
----------------------------
y = np.linalg.solve(D.T, c)

print(y)
-------------------------
indices = np.array([112.5, 112.5, 125])

b = np.array([700, 800, 600])

# Ресурс 1
positive_mask = D_inv[:, 2] > 0
negative_mask = D_inv[:, 2] < 0
delta_b1_min = max(abs((indices[positive_mask] / D_inv[positive_mask, 2])))
delta_b1_max = max(abs((indices[negative_mask] / D_inv[negative_mask, 2])))
b1_interval = [b[0] - delta_b1_min, b[0] + delta_b1_max]

# Ресурс 2
positive_mask = D_inv[:, 1] > 0
if np.any(positive_mask):
    delta_b2_min = -1 * max((indices[positive_mask] / D_inv[positive_mask, 1]))
else:
    delta_b2_min = float('inf')
b2_interval = [b[1] + delta_b2_min, np.inf]

# Ресурс 3
positive_mask = D_inv[:, 0] > 0
negative_mask = D_inv[:, 0] < 0
delta_b3_min = max(abs((indices[positive_mask] / D_inv[positive_mask, 0])))
delta_b3_max = max(abs((indices[negative_mask] / D_inv[negative_mask, 0])))

b3_interval = [b[2] - delta_b3_min, b[2] + delta_b3_max]

print(f"Интервал устойчивости для ресурса 1: {b1_interval}")
print(f"Интервал устойчивости для ресурса 2: {b2_interval}")
print(f"Интервал устойчивости для ресурса 3: {b3_interval}")
g1= y[0] * delta_b1_max
g2 = y[2] * delta_b3_max
print(delta_b3_max)
```

```
gmax = optimal_value+g1+g2

print(g1, g2, gmax)
```