МИНОБРНАУКИ РОССИИ
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
"МИРЭА - Российский технологический университет"
РТУ МИРЭА

Институт Информационных Технологий

Кафедра Вычислительной Техники

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА №5

по дисциплине
«Теория принятия решений»
Симплексный метод

Студент группы:ИКБО-04-22 Заковряшин Н.М.
(Ф. И.О. студента)

Преподаватель Железняк Л.М.
(Ф.И.О. преподавателя)

Москва 2024

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Симплексный метод — это алгоритм для решения задач линейного программирования, которые включают в себя максимизацию или минимизацию линейной функции при ограничениях в виде линейных неравенств. Этот метод был разработан Джорджем Данцигом в 1947 году и является одним из наиболее широко используемых методов оптимизации.

Принцип работы симплексного метода начинается с математической модели. Задача линейного программирования формулируется в виде целевой функции и системы ограничений. Например: максимизировать целевую функцию при ограничениях, заданных системой линейных неравенств.

Преимущества симплексного метода включают гарантированное нахождение оптимального решения, если оно существует, и возможность применения к большим задачам благодаря эффективным алгоритмам. Ограничения метода включают возможные проблемы с вырожденными решениями, что может привести к увеличению числа итераций, и сложности с задачами, содержащими большое количество переменных и ограничений без предварительной обработки данных.

1СИМПЛЕКСНЫЙ МЕТОД

1.1 Постановка задачи

Ресурсы	Нормы расхода сырья на ед. продукции, ед.				Запасы ресурсов, ед.
	A	B	C	D	
I	2	1	0,5	4	3400
II	1	5	3	0	1200
III	3	0	6	1	3000
Прибыль от единицы продукции, ден. ед.	7,5	3	6	12	

1.2 Математическая модель задачи

Пусть x1 – тип продукции A, x2 –тип продукции B, x3 –тип продукции C, x4 — тип продукции D. Прибыль от продажи продукции составит 7,5x1 + 3x2 + 6x3 + 12x4, прибыль требуется максимизировать.

Ограничения задачи:

$$\begin{cases} 2x1+x2+0,5x3+4x4 \le 3400 \\ x1+5x2+3x3 \le 1200 \\ 3x1+6x3+x4 \le 3000 \end{cases}$$

Таким образом, переходим к задаче линейного программирования:

$$f(x)=7,5x1+3x2+6x3+12x4 \rightarrow max$$

$$\begin{cases} 2x1+x2+0{,}5x3+4x4 \le 3400 \\ x1+5x2+3x3 \le 1200 \\ 3x1+6x3+x4 \le 3000 \\ xi \ge 0, 1 \le i \le 4 \end{cases}$$

Приведем задачу к канонической форме. Для этого в левые части ограничений вводим дополнительные переменные: x5 ≥ 0, x6 ≥ 0, x7 ≥ 0. Эти переменные выбираются так, чтобы они обращали неравенства в равенства.

$$\begin{cases} 2x1+x2+0{,}5x3+4x4+x5=3400 \\ x1+5x2+3x3+x6=1200 \\ 3x1+6x3+x4+x7=3000 \\ xi \ge 0, 1 \le i \le 7 \end{cases}$$

$$f(x)=7{,}5x1+3x2+6x3+12x4+0x5+0x6+0x7$$

Построим начальную симплекс-таблицу. Запишем систему в векторной форме:

$$A1x1+A2x2+A3x3+A4x4+A5x5+A6x6+A7x7=A0$$

$$A1=\begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix}, A2=\begin{pmatrix}1\\5\\0\end{pmatrix}, A3=\begin{pmatrix}0{,}5\\3\\6\end{pmatrix}, A4=\begin{pmatrix}4\\0\\1\end{pmatrix}, A5=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, A6=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, A7=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$$

$$A0=\begin{pmatrix}3400\\1200\\3000\end{pmatrix}$$

Векторы $A5$, $A6$, $A7$ являются линейно независимыми единичными векторами 3х-мерного пространства и образуют базис этого пространства.

Поэтому за базисные переменные выбираем переменные $x5$, $x6$, $x7$. Небазисными переменными являются $x1$, $x2$, $x3$, $x4$. Разложение позволяет найти первое базисное допустимое решение.

Для этого свободные переменные $x1$, $x2$, $x3$, $x4$ приравниваем нулю. В результате получим разложение

$$A5x5+A6x6+A7x7=A0$$

Которому соответствует первоначальный опорный план

$$x^0=(x1,x2,x3,x4,x5,x6,x7)=(0,0,0,0,3400,1200,3000)$$
$$f(x^{(0)})=0.$$

Для проверки плана $x^{(0)}$ на оптимальность построим первую симплекс-таблицу. Введем в рассмотрение вектор коэффициентов целевой функции при базисных переменных.

$$\overline{C_B}=(c5,c6,c7)^T=(0,0,0)^T.$$

В левый столбец Таблицы 5.2 запишем переменные $x5$, $x6$, $x7$ образующие базис, в верхней строке – небазисные переменные $x1$, $x2$, $x3$, $x4$. В строке c_j запишем коэффициенты целевой функции, соответствующие небазисным переменным c1 = 15/2, c2 = 3, c3 = 6, c4 = 12. В столбце $\overline{C_B}$ запишем коэффициенты целевой функции, соответствующие базисным переменным Столбец, определяемый переменной $x1$, состоит из коэффициентов вектора $\overline{A_1}$. Аналогично, столбец, определяемый переменной $x2$, состоит из коэффициентов вектора $\overline{A_2}$. И столбец, определяемый переменной $x3$ состоит из коэффициентов вектора $\overline{A_3}$. Аналогично столбец x4. Крайний правый столбец заполняется элементами столбца $\overline{A_0}$, в нем же в результате вычислений получаем оптимальный план.

Заполнение f-строки (Таблица 1.3). Найдем относительные оценки Δ1, Δ2, Δ3 и значение целевой функции Q.

$$\Delta_1=(\overline{C_B}*\overline{A_1})-c_1=0*2+0*1+0*3-15/2=-15/2;$$
$$\Delta_2=(\overline{C_B}*\overline{A_2})-c_2=0*1+0*5+0*0-3=-3;$$

$$\Delta_3 = \left(\overline{C_B} * \overline{A_3}\right) - c_3 = -6;$$

$$\Delta_4 = \left(\overline{C_B} * \overline{A_3}\right) - c_3 = -12;$$

$$Q = \left(\overline{C_B} * \overline{A_0}\right) = 0*3400 + 0*1200 + 0*3000 = 0.$$

Таблица 1.2 – Начальная симплекс-таблица задачи о максимальном доходеs

	c_j	15/2	3	6	12	
$\overline{C_B}$		X1	X2	X3	X4	$\overline{A_0}$
0	X5	2	1	1/2	4	3400
0	X6	1	5	3	0	1200
0	X7	3	0	6	1	3000
	f	-15/2	-3	-6	-12	0
		Δ_1	Δ_2	Δ_3		Q

Таблица 1.3 – Заполнение f-строки

	c_j	15/2	3	6	12		
$\overline{C_B}$		X1	X 2	X3	X4	$\overline{A_0}$	
0	X5	2	1	1/2	4	3400	3400/4 = 850 min
0	X6	1	5	3	0	1200	не имеет смысла
0	X7	3	0	6	1	3000	0 3000/1 = 3000
	f	-15/2	-3	-6	- 12	0	
		Δ_1	Δ_2	Δ_3	Δ4	Q	

Для оптимальности опорного решения в задаче на максимум требуется выполнение неотрицательности всех относительных оценок Δi ≥ 0. Так как оценки Δ1= −15/2, Δ2= −3 и Δ3= −6, Δ4= −12 в f-строке отрицательны, то это свидетельствуют о возможности улучшения полученного решения. Наибольшая по модулю отрицательная оценка Δ4= −12. В базис будет включена соответствующая ей небазисная переменная *x*3. Составим отношения свободных членов к положительным элементам разрешающего столбца.

Данные отношения приведены справа от таблицы. Наименьшему частному соответствует строка с переменной $x5$. Эта переменная исключается из базиса. В Таблице 5.3 разрешающий столбец и разрешающая строка выделены. Разрешающим элементом является число $a13 = 4$.

Далее построим новую симплекс-таблицу. Ниже поэтапно демонстрируется процесс заполнения новой симплекс-таблицы (Таблицы 1.4).

Таблица 1.4 – Новая симплекс-таблица

	c_j	15/2	3	6	0	
$\overline{C_B}$		X1	X2	X3	X5	$\overline{A_0}$
12	X4				1/4	
0	X6					
0	X7					
	f					
		Δ_1	Δ_2	Δ_3		

В Таблице 1.4 переменные $x4$ и $x5$ меняются местами вместе с коэффициентами cj. Разрешающий элемент заменяется на обратный. В Таблице 5.5 элементы разрешающей строки делятся на разрешающий элемент. Элементы разрешающего столбца делятся на разрешающий элемент и меняют знак.

Таблица 1.5 – Симплекс преобразования

	c_j	15/2	3	6	0	
$\overline{C_B}$		X1	X2	X3	X5	$\overline{A_0}$
12	X4	1/2	1/4	1/8	1/4	850
0	X6				0	
0	X7				-1/4	
	f				3	
		Δ_1	Δ_2	Δ_3		Q

Таблица 1.6 – Итерация 0

	c_j	15/2	3	6	0		
$\overline{C_B}$		X1	X2	X3	X5	$\overline{A_0}$	
12	X4	1/2	1/4	1/8	1/4	850	6800
0	X6	1	5	3	0	1200	400
0	X7	5/2	-1/4	47/8	-1/4	2150	365,957 min
	f	-3/2	0	-9/2	3	10200	
		Δ_1	Δ_2	Δ_3		Q	

Остальные элементы (Таблица 1.6) рассчитываются по «правилу прямоугольника».

$$a_{21}=\frac{(1*4)-(2*0)}{4}=1;a_{22}=\frac{(5*4)-(2*0)}{4}=5;$$

$$a_{23}=\frac{(3*4)-\left(\frac{1}{2}*0\right)}{4}=3;a_{25}=\frac{(1200*4)-(3400*0)}{4}=1200;$$

$$a_{31}=5/2;a_{32}=-1/4;a_{33}=47/8;$$

$$a_{35}=2150;\Delta_1=-3/2;\Delta_2=0;$$

$$\Delta_3=-9/2;$$

Базисное решение, которое дает последняя таблица

$$x^{(0)}=(x1,x2,x3,x4,x5,x6,x7)=(0,0,0,850,0,1200,2150)$$

$$f\left(x^{(0)}\right)=\left(\overline{C_B}*\overline{A_0}\right)=12*850+0*1200+0*2150=10200.$$

Это решение не является оптимальным, так как в f-строке имеются отрицательные оценки Δ1, Δ3.

Выполняем следующую итерацию до тех пор пока в таблице f-строка не будет отрицательных оценок Δ1, Δ2, Δ3.

Таблица 5.7 – Итерация 1

	c_j	15/2	3	0	0	
$\overline{C_B}$		X1	X2	X7	X5	$\overline{A_0}$
12	X4	21/47	12/47	-1/47	12/47	37800/47
0	X6	-13/47	241/47	-24/47	6/47	4800/47
6	X3	20/47	-2/47	8/47	-2/47	17200/47
	f	39/94	-9/47	36/47	132/47	556800/47
		Δ_1	Δ_2	Δ_3		Q

Подставляем базисное решение, которое дает последняя таблица

$$x^{(1)}=(x1,x2,x3,x4,x5,x6,x7)=(0,0,17200/47,37800/47,0,4800/47,0),$$

Где n – количество итераций

$$f(x^{(1)})=(\overline{C_B}*\overline{A_0})=12*37800/47+6*17200/47=11846{,}808$$

Это решение не является оптимальным, так как в f-строке имеются отрицательные оценки Δ2.

Выполняем следующую итерацию до тех пор пока в таблице f-строка не будет отрицательных оценок Δ1, Δ2, Δ3.

Таблица 5.7 – Итерация 2

	c_j	15/2	0	0	0	
$\overline{C_B}$		X1	X6	X7	X5	$\overline{A_0}$
12	X4	111/241	-12/241	1/241	60/241	192600/241
3	X2	-13/241	47/241	-24/241	6/241	4800/241
6	X3	102/241	2/241	40/241	-10/241	88400/241
	f	195/482	9/241	180/241	678/241	2856000/241
		Δ_1	Δ_2	Δ_3		Q

Подставляем базисное решение, которое дает последняя таблица

$$x^{(2)}=(x1,x2,x3,x4,x5,x6,x7)=(0,4800/241,88400/241,88400/241,0,0,0),$$

Где n – количество итераций

$$f(x^{(2)})=(\overline{C_B}*\overline{A_0})=12*192600/241+3*4800/241+6*88400/241=11850.622$$

Проверим решение по «правилу прямоугольника».

$$f_{max} = Q = \left(\overline{C_B} * \overline{A_0}\right) = 2856000/241$$

Таким образом, фабрика должна выпускать в течении недели $x2$ = 4800/241 продукции типа B, $x3$ = 88400/241 продукции типа C и x4= 192600/241 продукции типа D .Тогда фабрика получит максимальный доход от продажи 11850.622.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В ходе работы была решена задача с использованием симплексного метода. Были определены исходные данные, включающие коэффициенты целевой функции, матрицу ограничений и вектор ограничений. Эти данные были использованы для инициализации симплекс-таблицы, которая включала коэффициенты ограничений, целевой функции и единичные матрицы для искусственных переменных.

Процесс решения задачи включал несколько итераций, на каждом этапе которых осуществлялись выбор входящей переменной, расчет отношения элементов для определения исходящей переменной, деление строки на пивотный элемент и обновление остальных строк таблицы. В каждой итерации также обновлялся список базисных переменных.

Результатом работы алгоритма стало определение оптимального значения целевой функции и соответствующего распределения переменных.

СПИСОК ИНФОРМАЦИОННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Болотова Л. С. Многокритериальная оптимизация. Болотова Л. С., Сорокин А. Б. [Электронный ресурс] / Метод. указания по вып. курсовой работы — М.: МИРЭА, 2015.

2. Сорокин А. Б. Методы оптимизации: гибридные генетические алгоритмы. Сорокин А. Б. [Электронный ресурс] / Учебно-метод. пособие — М.: МИРЭА, 2016.

3. Сорокин А. Б. Линейное программирование: практикум. Сорокин А. Б., Бражникова Е. В., Платонова О. В. [Электронный ресурс] / Учебно-метод. пособие — М.: МИРЭА, 2017.

ПРИЛОЖЕНИЯ

Приложение А – Код реализации симплексного метода на языке Python.

Приложение А

Код реализации симплексного метода на языке Python

Листинг А.1. Реализация симплексного метда.

```
import numpy as np


def simplex(objective, constraints, limits):
    num_constraints, num_variables = constraints.shape

    simplex_table = np.zeros((num_constraints + 1, num_variables + num_constraints + 1))
    simplex_table[:num_constraints, :num_variables] = constraints
    simplex_table[:num_constraints, num_variables:num_variables + num_constraints] =
np.eye(num_constraints)
    simplex_table[:num_constraints, -1] = limits
    simplex_table[-1, :num_variables] = -np.array(objective)

    basic_vars = list(range(num_variables, num_variables + num_constraints))

    while any(simplex_table[-1, :-1] < 0):
        entering = np.argmin(simplex_table[-1, :-1])
        ratios = [simplex_table[i, -1] / simplex_table[i, entering] if simplex_table[i, entering] > 0 else float('inf')
for i in range(num_constraints)]
        leaving = np.argmin(ratios)
        pivot = simplex_table[leaving, entering]
        simplex_table[leaving, :] /= pivot
        for i in range(num_constraints + 1):
            if i != leaving:
                simplex_table[i, :] -= simplex_table[i, entering] * simplex_table[leaving, :]
        basic_vars[leaving] = entering

    solution = np.zeros(num_variables)
    for i, var in enumerate(basic_vars):
        if var < num_variables:
            solution[var] = simplex_table[i, -1]

    return simplex_table[-1, -1], solution

objective = [7.5, 3, 6, 12]

constraints = np.array([
    [2, 1, 0.5, 4],
    [1, 5, 3, 0],
    [3, 0, 6, 1]
])
limits = [3400, 1200, 3000]

optimal_profit, production_distribution = simplex(objective, constraints, limits)

print("Максимальная прибыль:", float(optimal_profit))
print("Распределение производства:", [float(x) for x in production_distribution])
```