МИНОБРНАУКИ РОССИИ
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
"МИРЭА - Российский технологический университет"
РТУ МИРЭА

Институт Информационных Технологий

Кафедра Вычислительной Техники

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА №5

по дисциплине

«Теория принятия решений»

Симплексный метод

Студент группы: ИКБО-04-22 Арефьев А.М
(Ф. И.О. студента)

Преподаватель Железняк Л.М.
(Ф.И.О. преподавателя)

Москва 2024

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Регулярным симплексом в n-мерном пространстве называется правильный многогранник с n+1 вершиной. При n = 2 симплексом является правильный треугольник, при n = 3 – тетраэдр и т.д.

В симплексе решение задачи начинается с рассмотрений одной из вершин многогранника условий. Если исследуемая вершина не соответствует максимуму (минимуму), то переходят к соседней, увеличивая значение функции цели при решении задачи на максимум и уменьшая при решении задачи на минимум. Таким образом, переход от одной вершины к другой улучшает значение функции цели. Так как число вершин многогранника ограничено, то за конечное число шагов гарантируется нахождение оптимального значения или установление того факта, что задача неразрешима.

Таким образом, симплексный метод - это метод целенаправленного перебора опорных решений ЗЛП.

1СИМПЛЕКСНЫЙ МЕТОД

1.1 Постановка задачи

Фабрика выпускает три вида тканей. Суточные ресурсы фабрики, следующие: 700 ед. производственного оборудования, 800 ед. сырья, 600 ед. электроэнергии, расход которых на единицу ткани представлен в таблице П.1.

Таблица П.1. Расход на единицу ткани.

Ресурсы	Ткани			Ресурсы
	I	II	III	
Оборудование	2	3	4	700
Сырье	1	4	5	800
Электроэнергия	3	4	2	600
Прибыль от единицы ткани	8	7	6	

Цена одного метра ткани I равна 8 ден.ед., ткани II – 7 ден.ед. и ткани III – 6 ден.ед. Сколько нужно произвести ткани каждого вида, чтобы прибыльот реализации была наибольшей?

1.2 Математическая модель задачи

Пусть x1 – тип ткани I, x2 –тип ткани II, x3 –тип ткани III. Прибыль от продажи тканей составит 8x1 + 7x2 + 6x3, прибыль требуется максимизировать.

Ограничения задачи:

$$\begin{cases} 2x1+3x2+4x3 \le 700 \\ x1+4x2+5x3 \le 800 \\ 3x1+4x2+2x3 \le 600 \end{cases}$$

Таким образом, переходим к задаче линейного программирования:

$$f(x) = 8x1 + 7x2 + 6x3 \rightarrow max$$

$$\begin{cases} 2x1 + 3x2 + 4x3 \leq 700 \\ x1 + 4x2 + 5x3 \leq 800 \\ 3x1 + 4x2 + 2x3 \leq 600 \\ xi \geq 0, 1 \leq i \leq 3 \end{cases}$$

Приведем задачу к канонической форме. Для этого в левые части ограничений вводим дополнительные переменные: x4 ≥ 0, x5 ≥ 0, x6 ≥ 0. Эти переменные выбираются так, чтобы они обращали неравенства в равенства.

$$\begin{cases} 2x1 + 3x2 + 4x3 + x4 \leq 700 \\ x1 + 4x2 + 5x3 + x5 \leq 800 \\ 3x1 + 4x2 + 2x3 + x6 \leq 600 \\ xi \geq 0, 1 \leq i \leq 6 \end{cases}$$

$$f(x) = 8x1 + 7x2 + 6x3 + 0x4 + 0x5 + 0x6$$

Построим начальную симплекс-таблицу. Запишем систему в векторной форме:

$$A1x1 + A2x2 + A3x3 + A4x4 + A5x5 + A6x6 = A0,$$

$$A1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, A2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}, A3 = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}, A4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, A5 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, A6 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$A0 = \begin{pmatrix} 700 \\ 800 \\ 600 \end{pmatrix}$$

Векторы $A4$, $A5$, $A6$ являются линейно независимыми единичными векторами 3х-мерного пространства и образуют базис этого пространства.

Поэтому за базисные переменные выбираем переменные $x4$, $x5$, $x6$. Небазисными переменными являются $x1$, $x2$, $x3$. Разложение позволяет найти первое базисное допустимое решение.

Для этого свободные переменные $x1$, $x2$, $x3$ приравниваем нулю. В результате получим разложение

$$A4x4+A5x5+A6x6=A0,$$

Которому соответствует первоначальный опорный план

$$x^{(0)}=(x1,x2,x3,x4,x5,x6)=(0,0,0,700,800,600),$$
$$f(x^{(0)})=0.$$

Для проверки плана $x^{(0)}$ на оптимальность построим первую симплекс-таблицу. Введем в рассмотрение вектор коэффициентов целевой функции при базисных переменных.

$$\overline{C_B}=(c4,c5,c6)^T=(0,0,0)^T.$$

В левый столбец Таблицы 5.2 запишем переменные $x4$, $x5$, $x6$ образующие базис, в верхней строке – небазисные переменные $x1$, $x2$, $x3$. В строке c_j запишем коэффициенты целевой функции, соответствующие небазисным переменным c1 = 8, c2 = 7, c3 = 6. В столбце $\overline{C_B}$ запишем коэффициенты целевой функции, соответствующие базисным переменным Столбец, определяемый переменной $x1$, состоит из коэффициентов вектора $\overline{A_1}$. Аналогично, столбец, определяемый переменной $x2$, состоит из коэффициентов вектора $\overline{A_2}$. И столбец, определяемый переменной $x3$ состоит из коэффициентов вектора $\overline{A_3}$ Крайний правый столбец заполняется элементами столбца $\overline{A_0}$, в нем же в результате вычислений получаем оптимальный план.

Заполнение f-строки (Таблица 1.3). Найдем относительные оценки Δ1, Δ2, Δ3 и значение целевой функции Q.

$$\Delta_1=(\overline{C_B}*\overline{A_1})-c_1=0*2+0*1+0*3-8=-8;$$
$$\Delta_2=(\overline{C_B}*\overline{A_2})-c_2=0*3+0*4+0*4-7=-7$$

$$\Delta_3=(\overline{C_B}*\overline{A_3})-c_3=0*4+0*5+0*2-6=-6;$$

$$Q=(\overline{C_B}*\overline{A_0})=0*700+0*800+0*600=0.$$

Таблица 1.2 – Начальная симплекс-таблица задачи о максимальном доходе

	c_j	8	7	6	
$\overline{C_B}$		X1	X2	X3	$\overline{A_0}$
0	X4	2	3	4	700
0	X5	1	4	5	800
0	X6	3	4	2	600
	f				
		Δ_1	Δ_2	Δ_3	Q

Таблица 1.3 – Заполнение f-строки

	c_j	8	7	6		
$\overline{C_B}$		X1	X2	X3	$\overline{A_0}$	
0	X4	2	3	4	700	700/2=350
0	X5	1	4	5	800	800/1=800
0	X6	3	4	2	600	600/3=200(min)
	f	-8	-7	-6	0	
		Δ_1	Δ_2	Δ_3	Q	

Для оптимальности опорного решения в задаче на максимум требуется выполнение неотрицательности всех относительных оценок $\Delta i \geq 0$. Так как оценки $\Delta 1= -8$, $\Delta 2= -7$ и $\Delta 3= -6$ в f-строке отрицательны, то это свидетельствуют о возможности улучшения полученного решения. Наибольшая по модулю отрицательная оценка $\Delta 1= -8$. В базис будет включена соответствующая ей небазисная переменная $x1$. Составим отношения свободных членов к положительным элементам разрешающего столбца. Данные отношения приведены справа от таблицы. Наименьшему частному соответствует строка с переменной $x6$. Эта переменная исключается из базиса. В Таблице 5.3 разрешающий столбец и разрешающая строка выделены. Разрешающим элементом является число $a31$ = 3.

Далее построим новую симплекс-таблицу. Ниже поэтапно демонстрируется процесс заполнения новой симплекс-таблицы (Таблицы 1.4).

Таблица 1.4 – Новая симплекс-таблица

	c_j	0	7	6	
$\overline{C_B}$		X6	X2	X3	$\overline{A_0}$
0	X4				
0	X5				
8	X1	1/3			
	f				
		Δ_1	Δ_2	Δ_3	Q

В Таблице 1.4 переменные $x1$ и $x6$ меняются местами вместе с коэффициентами cj. Разрешающий элемент заменяется на обратный. В Таблице 5.5 элементы разрешающей строки делятся на разрешающий элемент. Элементы разрешающего столбца делятся на разрешающий элемент и меняют знак.

Таблица 1.5 – Симплекс преобразования

	c_j	0	7	6	
$\overline{C_B}$		X6	X2	X3	$\overline{A_0}$
0	X4	-2/3			
0	X5	-1/3			
8	X1	1/3	4/3	2/3	200
	f	8/3			
		Δ_1	Δ_2	Δ_3	Q

Таблица 1.6 – Итерация 0

	c_j	0	7	6		
$\overline{C_B}$		X6	X2	X3	$\overline{A_0}$	
0	X4	-2/3	1/3	**8/3**	300	900/8=112(min)
0	X5	-1/3	8/3	13/3	600	*1800/13 = 138*
8	X1	1/3	4/3	2/3	200	*600/2 =300*
	f	8/3	1	-2/3	1600	
		Δ_1	Δ_2	Δ_3	Q	

Остальные элементы (Таблица 1.6) рассчитываются по «правилу прямоугольника».

$$a_{12}=\frac{(3*3)-(2*4)}{3}=1/3\,;a_{13}=\frac{(4*3)-(2*2)}{3}=8/3\,;$$

$$a_{14}=\frac{(700*3)-(2*600)}{3}=300\,;a_{22}=\frac{(4*3)-(4*1)}{3}=8/3;$$

$$a_{23}=\frac{(5*3)-(1*2)}{3}=13/3\,;a_{24}=\frac{(800*3)-(1*600)}{3}=600\,;$$

$$\Delta_2=\frac{(-7*3)-(-8*4)}{3}=1\,;$$

$$\Delta_3=\frac{(-6*3)-(-8*2)}{3}=-2/3\,;$$

$$Q=\frac{(0*3)-(-8*600)}{3}=1600\,;$$

Базисное решение, которое дает последняя таблица

$$x^{(1)}=(x1,x2,x3,x4,x5,x6)=(200,0,0,300,600,0),$$
$$f(x^{(1)})=(\overline{C_B}*\overline{A_0})=8*200+0*600+0*300=1600.$$

Это решение не является оптимальным, так как в f-строке имеются отрицательные оценки Δ1, Δ2.

Выполняем следующую итерацию до тех пор пока в таблице f-строка не будет отрицательных оценок Δ1, Δ2, Δ3.

Таблица 5.7 – Итерация 1

	c_j	0	7	0	
$\overline{C_B}$		X6	X2	X4	$\overline{A_0}$
6	X3	-1/4	1/8	3/8	900/8
0	X5	3/4	17/8	-13/8	900/8
8	X1	1/2	10/8	-1/4	1000/8
	f	5/2	13/12	1/4	1675
		Δ_1	Δ_2	Δ_3	Q

Если в последней таблице f-строке не содержит отрицательных оценок, то это свидетельствует об оптимальности полученного решения:

Подставляем базисное решение, которое дает последняя таблица

$$x^{(4)}=(x1,x2,x3,x4,x5,x6)=(1000\,8,0,900/8,0,900/8,0),$$

Где n – количество итераций

$$f(x^{(4)})=(\overline{C_B}*\overline{A_0})=6*900/8+8*1000/8=1675.$$

Проверим решение по «правилу прямоугольника».

$$f_{max}=Q=(\overline{C_B}*\overline{A_0})=\frac{(1600*8/3)-((-2/3)*300)}{8/3}=1675.$$

Таким образом, фабрика должна выпускать в течении недели $x1$ = 1000/8 шт. тканей типа I и $x3$= 900/8 шт. тканей типа III. Тогда фабрика получит максимальный доход от продажи 1675 [ден.ед].

```
c = [8, 7, 6]

A = np.array([
    [2, 3, 4],
    [1, 4, 5],
    [3, 4, 2]
])
b = [700, 800, 600]

optimal_value, solution = simplex(c, A, b)

print("Максимальная прибыль:", optimal_value)
print("Распределение производства:", solution)

Executed at 2024.05.08 13:52:34 in 12ms

 Максимальная прибыль: 1675.0
 Распределение производства: [125.    0.  112.5]
```

Рисунок 1 – Результат работы программы

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Алгоритм симплекс метода заключается в составлении новых таблиц с помощью процедуры повторяющихся расчетов итераций до тех пор, пока не будет получено оптимальное решение задачи, либо сделан вывод о неразрешимости поставленной задачи.

Задача была переведена в каноническую форму линейного программирования с добавлением дополнительных переменных для преобразования неравенств в равенства.

С использованием начальной симплекс-таблицы было найдено первое базисное допустимое решение, которое затем подверглось проверке на оптимальность. На основе относительных оценок и процедуры повторяющихся расчетов в рамках симплекс-метода было продемонстрировано, как происходит переход к новому базисному решению, улучшая значение целевой функции.

После нескольких итераций, было достигнуто оптимальное решение задачи, гарантирующее максимальную прибыль при данных ограничениях.

СПИСОК ИНФОРМАЦИОННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Болотова Л. С. Многокритериальная оптимизация. Болотова Л. С., Сорокин А. Б. [Электронный ресурс] / Метод. указания по вып. курсовой работы — М.: МИРЭА, 2015.

2. Сорокин А. Б. Методы оптимизации: гибридные генетические алгоритмы. Сорокин А. Б. [Электронный ресурс] / Учебно-метод. пособие — М.: МИРЭА, 2016.

3. Сорокин А. Б. Линейное программирование: практикум. Сорокин А. Б., Бражникова Е. В., Платонова О. В. [Электронный ресурс] / Учебно-метод. пособие — М.: МИРЭА, 2017.

ПРИЛОЖЕНИЯ

Приложение А – Код реализации симплексного метода на языке Рутнон.

Приложение А

Код реализации симплексного метода на языке Pyтнон.

Листинг А.1. Реализация симплексного метда.

```
import numpy as np


def simplex(c, A, b):
    nrows, ncols = A.shape
    tableau = np.zeros((nrows + 1, ncols + nrows + 1))
    tableau[:nrows, :ncols] = A
    tableau[:nrows, ncols:ncols + nrows] = np.eye(nrows)
    tableau[:nrows, -1] = b
    tableau[-1, :ncols] = -np.array(c)

    basis = list(range(ncols, ncols + nrows))

    while any(tableau[-1, :-1] < 0):
        col = np.argmin(tableau[-1, :-1])
        ratios = [tableau[i, -1] / tableau[i, col] if tableau[i, col] > 0 else float('inf') for i in range(nrows)]
        row = np.argmin(ratios)
        pivot = tableau[row, col]
        tableau[row, :] /= pivot
        for i in range(nrows + 1):
            if i != row:
                tableau[i, :] -= tableau[i, col] * tableau[row, :]
        basis[row] = col

    solution = np.zeros(ncols)
    for i, b_col in enumerate(basis):
        if b_col < ncols:
            solution[b_col] = tableau[i, -1]

    return tableau[-1, -1], solution


c = [8, 7, 6]

A = np.array([
    [2, 3, 4],
    [1, 4, 5],
    [3, 4, 2]
])
b = [700, 800, 600]

optimal_value, solution = simplex(c, A, b)

print("Максимальная прибыль:", optimal_value)
print("Распределение производства:", solution)
```