二元函数的连续性、可微性、偏导数及任意方向导数

可微

- 连续：yes
- 偏导数：yes
- 任意方向导数存在：yes

连续

- 可微：no
- 偏导数存在：no
- 任意方向导数存在：no
- 反例：连续不一定存在方向导数，也不一定存在偏导数，进而更不一定可微（可微必存在方向导数和偏导数）

  例 12.1.2 证明 $f(x,y)=\sqrt[3]{x^2+y^2}$ 在原点连续，但不存在任意方向导数，也不存在偏导数。□

  pf：显然连续。

  取单位方向向量 $\vec{l}=(\cos\alpha,\cos\beta)\Rightarrow f_l(0,0)=\lim\limits_{r\to0^+}\dfrac{f(r\cos\alpha,r\cos\beta)-f(0,0)}{r}$

  $=\lim\limits_{r\to0^+}\dfrac{r^{\frac{2}{3}}}{r}=\lim\limits_{r\to0^+}\dfrac{1}{r^{\frac{1}{3}}}=+\infty$ 不存在 □

任意方向导数存在

- 可微：no
- 连续：no
  - 反例：此例中原点处任意方向导数均为0，但显然不是连续的（从y=kx和y=1/2 x^2趋近极限不相同，重极限不存在，则必不连续，也不可微）

    P4 例题 12.1.7 (重要反例) 举例说明连续与方向导数及偏导数存在没有必然关系.

    解答. 对于函数

    $$f(x,y)=\begin{cases}1, & 0<y<x^2,\ -\infty<x<+\infty,\\ 0, & 其他.\end{cases}$$

    类例11.2.9 (1) 和重极限不存在

    分子为0

    显然 $f(x,y)$ 在原点不连续（也不可微），但在始于原点的任何射线上，都存在包含原点的充分小的一段，在这一段上 $f(x,y)$ 的函数值恒为零，进而由方向导数的定义可知，在原点处沿任何方向 l 都有 $f_l(0,0)=0$，与此同时，也有 $f_x(0,0)=f_y(0,0)=0$. 这说明连续与方向导数及偏导数存在没有必然关系，另外也说明可微是方向导数及偏导数均存在的充分不必要条件. □

    可微 ⇒ 方向导数均存在
- 偏导数存在：no
  - 例子:此函数在原点处方向导数均为1，但偏导数不存在

    考虑函数$f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$在原点处的情况

    $$f_l(0,0)=\lim_{r\to0^+}\frac{f(r\cos\theta,r\sin\theta)-f(0,0)}{r}=1$$

    $$f_x(0,0)=\lim_{x\to0}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x}=\lim_{x\to0}\frac{|x|}{x}$$

偏导数存在

- 可微：no
- 连续：no
  - 反例：此例中原点处偏导数存在均为0，显然不连续的，也不可微

    P4 例题 12.1.7 (重要反例) 举例说明连续与方向导数及偏导数存在没有必然关系.

    解答. 对于函数

    $$f(x,y)=\begin{cases}1, & 0<y<x^2,\ -\infty<x<+\infty,\\ 0, & 其他.\end{cases}$$

    类例11.2.9 (1) 和重极限不存在

    分子为0

    显然 $f(x,y)$ 在原点不连续（也不可微），但在始于原点的任何射线上，都存在包含原点的充分小的一段，在这一段上 $f(x,y)$ 的函数值恒为零，进而由方向导数的定义可知，在原点处沿任何方向 l 都有 $f_l(0,0)=0$，与此同时，也有 $f_x(0,0)=f_y(0,0)=0$. 这说明连续与方向导数及偏导数存在没有必然关系，另外也说明可微是方向导数及偏导数均存在的充分不必要条件. □

    可微 ⇒ 方向导数均存在

- 任意方向导数存在：no
  - 反例

    $$f(x,y)=\begin{cases}x^2+y^2, xy\neq0\\ 1, \qquad xy=0\end{cases}$$

    显然$f_x(0,0)=\lim_{x\to0}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x}=0$,同理$f_y(0,0)=0$，其余方向导数均不存在

    这是由于

    $$\lim_{r\to0^+}\frac{f(r\cos\theta,r\sin\theta)-f(0,0)}{r}=\lim_{r\to0^+}\frac{r^2-1}{r}=\lim_{r\to0^+}(r-\frac{1}{r})\to-\infty$$

    其中$\theta\in[0,2\pi),\theta\neq0,\frac{\pi}{2},\pi,\frac{3}{2}\pi$，即不与偏导数方向相同