数学分析学习笔记

复习整理笔记

作者：阮炜挺
组织：宁波大学数学与统计学院

Given yourself an epsilon of room!

目录

第一章 公式大全

1.1 常见函数的泰勒展开式

几何级数

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n + o(x^n)$$
$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots + (-1)^n x^n + o(x^n)$$

指数和对数函数

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$$
$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots + (-1)^{n+1}\frac{x^n}{n} + o(x^n)$$

幂函数

$$(1+x)^a = 1 + ax + \frac{a(a-1)}{2!}x^2 + \cdots + \binom{a}{n}x^n + o(x^n)$$
$$\sqrt{1+x} = \boxed{1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2} + \frac{1}{16}x^3 + \cdots + \frac{(-1)^{n+1}(2n-3)!!}{2^n n!}x^n + o(x^n)$$

三角函数

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + (-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2})$$
$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots + (-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1})$$
$$\tan x = \boxed{x + \frac{x^3}{3} + \frac{2}{15}x^5} + \cdots + \frac{B_{2n}(-4)^n(1-4^n)}{(2n)!}x^{2n-1} + o(x^{2n})$$

反三角函数

$$\arcsin x = \boxed{x + \frac{x^3}{6}} + \frac{3}{40}x^5 + \cdots + \frac{(2n)!}{4^n(n!)^2(2n+1)}x^{2n+1} + o(x^{2n+2})$$
$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \cdots + (-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1} + o(x^{2n+2})$$

1.2 常见三角恒等式

积化和差公式

$$
\begin{aligned}
\sin A \sin B &= \frac{1}{2}[\cos(A-B)-\cos(A+B)] \\
\cos A \cos B &= \frac{1}{2}[\cos(A-B)+\cos(A+B)] \\
\sin A \cos B &= \frac{1}{2}[\sin(A+B)+\sin(A-B)] \\
\cos A \sin B &= \frac{1}{2}[\sin(A+B)-\sin(A-B)]
\end{aligned}
$$

和差化积公式

$$
\begin{aligned}
\sin A + \sin B &= 2\sin\left(\frac{A+B}{2}\right)\cos\left(\frac{A-B}{2}\right) \\
\sin A - \sin B &= 2\cos\left(\frac{A+B}{2}\right)\sin\left(\frac{A-B}{2}\right) \\
\cos A + \cos B &= 2\cos\left(\frac{A+B}{2}\right)\cos\left(\frac{A-B}{2}\right) \\
\cos A - \cos B &= -2\sin\left(\frac{A+B}{2}\right)\sin\left(\frac{A-B}{2}\right)
\end{aligned}
$$

基本恒等式

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

$$1 + \tan^2 x = \sec^2 x$$

$$1 + \cot^2 x = \csc^2 x$$

倒数关系

$$\sec x = \frac{1}{\cos x} \qquad \csc x = \frac{1}{\sin x} \qquad \cot x = \frac{1}{\tan x}$$

倍角公式

$$\sin 2x = 2\sin x \cos x$$

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 2\cos^2 x - 1 = 1 - 2\sin^2 x$$

$$\tan 2x = \frac{2\tan x}{1-\tan^2 x}$$

半角公式

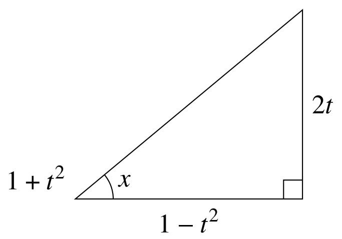
$$\sin^2\frac{x}{2}=\frac{1-\cos x}{2}$$
$$\cos^2\frac{x}{2}=\frac{1+\cos x}{2}$$
$$\tan\frac{x}{2}=\frac{\sin x}{1+\cos x}=\frac{1-\cos x}{\sin x}$$

三角函数万能代换

令 $t=\tan\frac{x}{2}$。
则

$$\tan x=\frac{2\tan\frac{x}{2}}{1-\tan^2\frac{x}{2}}=\frac{2t}{1-t^2}$$

根据勾股定理，我们有 $(2t)^2+(1-t^2)^2=4t^2+1-2t^2+t^4=t^4+2t^2+1=(1+t^2)^2$。
根据三角函数的几何意义，绘出三边关系图：



因此，

$$\sin x=\frac{2t}{1+t^2}$$
$$\cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2}$$

而 $t=\tan\frac{x}{2}$，所以 $x=2\arctan t$。
则

$$dx=\frac{2}{1+t^2}dt$$

最终结果：

$$\sin x=\frac{2t}{1+t^2}$$
$$\cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2}$$
$$\tan x=\frac{2t}{1-t^2}$$
$$x=2\arctan t$$
$$dx=\frac{2}{1+t^2}dt$$

1.3 常见积分公式

重要积分公式

$$\int \ln x \, dx = x \ln x - x + C$$

$$\boxed{\int \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} dx = \ln|x + \sqrt{x^2+1}| + C}$$

$$\boxed{\int \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} dx = \ln|x + \sqrt{x^2-1}| + C}$$

三角函数积分

$$\int \sec^2 x \, dx = \tan x + C$$

$$\int \csc^2 x \, dx = -\cot x + C$$

$$\int \sec x \tan x \, dx = \sec x + C$$

$$\int \csc x \cot x \, dx = -\csc x + C$$

反三角函数积分

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + C$$

$$\int \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arccos x + C$$

$$\int \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan x + C$$

$$\int \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}} dx = \operatorname{arcsec} x + C \quad (|x| > 1)$$

注 由于 $\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$, 那么第二个式子其实也可以写成 $\int \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} dx = -\arcsin x + C$

笔记 利用以上结果，我们还可以进行特殊代换，得到一些常用的积分公式：

$$\int \frac{1}{a^2+x^2} dx = \frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a} + C$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}} dx = \arcsin \frac{x}{a} + C$$

$$\int \frac{1}{x^2-a^2} dx = \frac{1}{2a} \ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C$$

第二章 实数完备性定理

2.1 定理叙述

定理 2.1 (确界原理)

任何非空集 $E \subset \mathbb{R}$，若它有上界，则必有上确界 $\sup E \in \mathbb{R}$。（等价地，若有下界，则必有下确界。）

定理 2.2 (单调有界原理)

任何单调递增、有上界的序列 $\{x_n\} \subset \mathbb{R}$，必有极限 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n \in \mathbb{R}$。（等价地，单调递减有下界也必有极限。）（所谓有极限，指有有限极限，下同。）

定理 2.3 (Cauchy 收敛原理)

序列 $\{x_n\} \subset \mathbb{R}$ 收敛的充分必要条件是

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N > 0, \text{当} m, n > N \text{时，有} |x_n - x_m| < \varepsilon.$$

定理 2.4 (致密性定理（Bolzano-Weierstrass 定理）)

(a) 有界数列的定义：设 $\{x_n\}$ 为一数列，若 $\exists M > 0$，满足对任意正整数 n，$|x_n| \le M$，则称 $\{x_n\}$ 为有界数列。

(b) 定理内容：设 $\{x_n\}$ 为一有界数列，则 $\{x_n\}$ 一定有收敛子列。即存在 $\{x_{n_k}\} \subset \{x_n\}$，满足 $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k}$ 存在。反之若 $\{x_n\}$ 的任何子列都不收敛，则 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$。

定理 2.5 (聚点定理)

(a) 聚点的定义：设 $E \subset \mathbb{R}$，$x_0 \in \mathbb{R}$ 满足：对任意 $\varepsilon > 0$，有

$$\big((x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \setminus \{x_0\}\big) \cap E \neq \varnothing,$$

则称 x_0 为 E 的聚点。记 E' 为 E 的所有聚点构成的集合。

(b) 定理内容：设 E 是无穷有界集合，则 E 至少有一个聚点（即 $E' \neq \varnothing$）。

定理 2.6 (闭区间套定理)

定义：

设有无穷多个闭区间 $[a_n, b_n]$，$n = 1, 2, 3, \ldots$，满足以下两个条件：

1. $[a_{n+1}, b_{n+1}] \subseteq [a_n, b_n]$
2. $\lim\limits_{n\to\infty} (b_n - a_n) = 0$

将这一无穷多个闭区间所构成的集合 $\{[a_n, b_n]\}$ 称为一个闭区间套，简称区间套。

定理内容：

若 $\{[a_n, b_n]\}$ 是一个闭区间套，则存在唯一实数 ξ 满足：

$$\xi \in [a_n, b_n], \quad \forall n = 1, 2, 3, \ldots$$

且

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = \xi.$$

定理 2.7 (有限覆盖定理)

(a) 定义：设 $E \subset \mathbb{R}$，$\{O_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ 是一族开区间，若满足

$$\bigcup_{\lambda \in \Lambda} O_\lambda \supseteq E,$$

则称 $\{O_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ 为 E 的开覆盖。若 E 的任何开覆盖都存在有限子覆盖（即存在有限个 $O_{\lambda_1}, \dots, O_{\lambda_n}$ 仍覆盖 E），则称 E 是紧的。

(b) 定理内容：任何有界闭区间 $[a, b]$ 都是紧的（闭区间上的任一开覆盖必存在有限子覆盖）。

(c) 等价描述：设 $\{\Delta\}$ 是一组开区间，若 $\forall x \in [a, b]$，$\exists \Delta_x \in \{\Delta\}$，使得 $x \in \Delta_x$，则称 $\{\Delta\}$ 为闭区间 $[a, b]$ 的一个开覆盖。定理指出，$[a, b]$ 的任一开覆盖 $\{\Delta\}$ 中，必存在有限子集 $\{\Delta_1, \Delta_2, \cdots, \Delta_r\} \subset \{\Delta\}$，$\{\Delta_1, \Delta_2, \cdots, \Delta_r\}$ 仍为 $[a, b]$ 的一个开覆盖（称之为有限子覆盖）。

定理 2.8 (Dedekind 分割定理)

若将实数分为上、下（非空的）两组：A' 和 A，使得

1. 每个实数必在，且仅在两组之一；
2. 上组 A' 中的每个数必大于下组 A 中的每个数，

则称 A 和 A' 组成一 Dedekind 分割，记作 $A|A'$。每个 $A|A'$ 确定唯一的实数 ξ。下面称它为分割点。

Dedekind 定理指出，此时

1. 要么 $\xi \in A$，则下组 A 中有最大值 ξ，而上组 A' 中无最小值；
2. 要么 $\xi \in A'$，则下组 A 中无最大值，而上组 A' 中有最小值 ξ。

该定理非常直观，意即：在数轴任何地方，用法平面去截，必截得唯一的实数 ξ（表明实轴连续，无空缺）。该实数 ξ 将数轴分成 $A|A'$ 两半，要么 $\xi \in A$，要么 $\xi \in A'$。

我们先证明致密性定理2.5与聚点定理2.5的等价性，接下来的互证里，只涉及其中之一。

聚点定理2.5$\Rightarrow$ 致密性定理2.5

证明 设 $\{a_n\}$ 是 $\mathbb{R}$ 中的有界列。

考虑集合 $E := \{a_n \mid n \geq 1\}$，则 E 是有界集。

- 情形 **1.** 若 E 是有限集，则必有某个 a 在 $\{a_n\}$ 中出现无限多次。将相应的项取出，形成 $\{a_n\}$ 的一个取常值 a 的子列。显然，该子列收敛到 a。
- 情形 **2.** 若 E 是无限集，则 E 有聚点，设为 ξ。构造严格递增的正整数列 $\{n_k\}$ 如下：
    - 在区间 $(\xi - 1, \xi + 1)$ 中取 $n_1 \geq 1$，使得 $a_{n_1} \in (\xi - 1, \xi + 1)$；
    - 在区间 $(\xi - \frac{1}{2}, \xi + \frac{1}{2})$ 中取 $n_2 > n_1$，使得 $(\xi - \frac{1}{2}, \xi + \frac{1}{2})$；
    - 依此类推，对任意 k，在区间

    $$\left(\xi - \frac{1}{k}, \xi + \frac{1}{k}\right)$$

    中取 $n_k > n_{k-1}$，使得 $a_{n_k} \in \left(\xi - \frac{1}{k}, \xi + \frac{1}{k}\right)$。

  由此可得子列 $\{a_{n_k}\}$ 满足：

  $$\lim_{k \to \infty} a_{n_k} = \xi$$

  因此 $\{a_{n_k}\}$ 是 $\{a_n\}$ 的收敛子列。

■

致密性定理2.5$\Rightarrow$ 聚点定理2.5：

证明 设点集 S 为一有界无穷点集，依次任取 S 中不重复的点 (保证极限不为孤立点) 构成数列 $\{a_n\}$，根据致密性定理，必存在收敛子列满足 $\lim_{k \to \infty} a_{n_k} = \xi$，由极限定义，$\forall \varepsilon > 0$，$\exists N \in \mathbb{N}^+$，使 $k > N$ 时有 $|a_{n_k} - \xi| < \varepsilon$，因而 ξ 是聚点。 ■

对于 Dedekind 分割定理，我们做如下的详细说明。

定义 2.1 (有理数集的切割)

设两个非空有理数集合 A 和 B 满足：

- $\mathbb{Q} = A \cup B$
- $\forall a \in A, \forall b \in B : a < b$

则称 A, B 构成 $\mathbb{Q}$ 的一个切割，记为：

$$A \mid B$$

♣

例题 2.1 判断以下是否为有理数集 $\mathbb{Q}$ 的切割

考虑以下四组区间，对每一组分别取两个区间内的有理数构成两个集合，判断是否构成 $\mathbb{Q}$ 的一个切割：

$$(-\infty, 2], (2, +\infty)$$

$$(-\infty, 2), [2, +\infty)$$

$$(-\infty, \sqrt{2}), (\sqrt{2}, +\infty)$$

$$(-\infty, 2], [2, +\infty)$$

前三组能构成 $\mathbb{Q}$ 的切割，最后一组不能构成切割。

注 从上述例子中可以归纳 Dedekind 切割的四种可能情况：

1. A 有最大数，B 无最小数
2. A 无最大数，B 有最小数
3. A 无最大数，B 无最小数
4. A 有最大数，B 有最小数（不成立）

设 A 有最大数时，最大数为 a_0，B 有最小数时，最小数为 b_0。这四种情况与前面提到的具体例子相对应，第四种情形不可能发生，下面来证明。假设第四种情况成立，则 $\dfrac{a_0 + b_0}{2}$ 是有理数且 $a_0 < \dfrac{a_0 + b_0}{2} < b_0$ 这样一个既不属于 A 也不属于 B 的有理数存在说明 $A \cup B \neq Q$, 与切割的定义相矛盾。

情况 1 可以确定一个有理数 a_0, 情况 2 可以确定一个有理数 b_0 , 但情况 3 则没有确定任何有理数, 这意味着全体有理数的两个补集之间有空隙, 我们将这个空隙定义为无理数. 这样我们引入一种对无理数的定义方法.

定义 2.2 (定义无理数)

设 $A \mid B$ 是有理数集 $\mathbb{Q}$ 的一个切割，且满足：A 无最大数,B 无最小数. 则 $A \mid B$ 确定了一个无理数 c，满足：$\forall a \in A, \forall b \in B : a < c < b$. 该 c 可视为填补有理数间“空隙”的无理数。

♣

定义 2.3 (Dedekind 原理)

设 A, B 是实数域 $\mathbb{R}$ 的两个子集，它们满足以下三个条件：

(a) 不空：$A \neq \emptyset$ 且 $B \neq \emptyset$;

(b) 不漏：$A \cup B = \mathbb{R}$;

(c) 不乱：对 $\forall x \in A, y \in B$ 都成立 $x < y$;

则称 $(A|B)$ 为实数域的一个 Dedekind 分割，A 为分割的下集，B 为分割的上集。

♣

定理 2.9 (Dedekind 分割定理)

设 $(A \mid B)$ 是实数域的一个 Dedekind 分割，则或者下集 A 中有最大数，或者上集 B 中有最小数。

等价描述：设 $(A \mid B)$ 是实数域的一个 Dedekind 分割，则存在实数 c 使得 $x \leq c \leq y \quad \forall x \in A, \forall y \in B$ 成立。

实数 c 称为分划 $(A \mid B)$ 的分界点，且 c 是唯一的。

♡

2.2 确界原理

定理（确界原理）

任何非空集 $E \subset \mathbb{R}$，若它有上界，则必有上确界 $\sup E \in \mathbb{R}$。（等价地，若有下界，则必有下确界。）

问题 2.1 用单调有界原理证明确界原理。

证明 设数集 S 非空有上界，即存在 $a \in S$，不妨设数 a 不是 S 的上界，存在数 b 是 S 的上界。

将区间 $[a,b]$ 二等分：

若中点 $\dfrac{a+b}{2} \in S$，则取 $a_1 = \dfrac{a+b}{2}, b_1 = b$；

若中点 $\dfrac{a+b}{2} \notin S$，则取 $a_1 = a, b_1 = \dfrac{a+b}{2}$，得小区间 $[a_1, b_1]$。

如此无限继续下去，得两个数列 $\{a_n\},\{b_n\}$，其中 $a_n \in S$ 且单调递增有上界 b，b_n 单调递减有下界 a_1，且 $\lim\limits_{n\to\infty}(b_n - a_n) = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{b-a}{2^n} = 0$。

由单调有界定理知存在 ξ，使得 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \xi$，又由 $\lim\limits_{n\to\infty}(b_n - a_n) = 0$ 知 $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \xi$。因 $\{b_n\}$ 是 S 的上界，所以 $\forall x \in S$ 有 $x \le b_n\ (n = 1,2,\cdots)$，令 $n\to\infty$ 得 $x \le \lim\limits_{n\to\infty} b_n = \xi$，所以 ξ 为 S 的上界。

因 $\forall \varepsilon > 0$，由 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \xi$ 知，存在 N，当 $n > N$ 时有 $\xi - \varepsilon < a_n$，即 $\xi - \varepsilon < a_{N+1}$，又对所有的 $a_n \in S$，即存在 S 中的某个数 a_{N+1}，使得 $\xi - \varepsilon < a_{N+1}$，故 ξ 为 S 的最小上界。所以 $\xi = \sup S$。

同理可证非空有下界的数集，必有下确界。 ■

问题 2.2 用 Cauchy 收敛原理证明确界原理。

证明 设数集 S 非空有上界，即存在 $a \in S$，不妨设数 a 不是 S 的上界，存在数 b 是 S 的上界。

将区间 $[a,b]$ 二等分：

若中点 $\dfrac{a+b}{2}$ 是 S 的上界，则取 $a_1 = a, b_1 = \dfrac{a+b}{2}$；

若中点 $\dfrac{a+b}{2}$ 不是 S 的上界，则取 $a_1 = \dfrac{a+b}{2}, b_1 = b$，得小区间 $[a_1, b_1]$。

如此无限继续下去，得两个数列 $\{a_n\},\{b_n\}$，其中 a_n 不是 S 的上界，b_n 是 S 的上界，且 $\lim\limits_{n\to\infty}(b_n - a_n) = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{b-a}{2^n} = 0.$

下面证明 $\{a_n\}$ 满足柯西收敛准则。

由 $\lim\limits_{n\to\infty}(b_n - a_n) = 0$ 知 $\forall \varepsilon > 0, \exists N, n > N$ 时有 $|b_n - a_n| < \varepsilon$；又 $a_n \le a_{n+1} \le b_{n+1} \le b_n$，从而 $\forall p$ 有 $|a_{n+p} - a_n| \le |b_n - a_n| < \varepsilon$，故 $\{a_n\}$ 满足柯西收敛准则，从而有极限。

设 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \xi$，从而也得到 $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \xi$。

再证明 $\xi = \sup S$。

对任意的 n 和任意的 $x \in S$，因 b_n 是 S 的上界，所以有 $x \le b_n$，令 $n\to\infty$ 得 $x \le \lim\limits_{n\to\infty} b_n = \xi$，所以 ξ 为 S 的上界。而 $\forall \varepsilon > 0$，由 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \xi$ 知，存在 N，当 $n > N$ 时有 $\xi - \varepsilon < a_n$，即 $\xi - \varepsilon < a_{N+1}$。

又对所有的 $a_n \in S$，即存在 S 中的某个数 a_{N+1}，使得 $\xi - \varepsilon < a_{N+1}$，故 ξ 为 S 的最小上界。所以 $\xi = \sup S$。

同理可证非空有下界的数集，必有下确界。 ■

问题 2.3 用闭区间套定理证明确界原理。

证明 设数集 S 非空有上界，即存在 $a \in S$，不妨设数 a 不是 S 的上界，存在数 b 是 S 的上界。

将区间 $[a,b]$ 二等分：

若中点 $\dfrac{a+b}{2}$ 是 S 的上界，则取 $a_1 = a, b_1 = \dfrac{a+b}{2}$；

若中点 $\dfrac{a+b}{2}$ 不是 S 的上界，则取 $a_1 = \dfrac{a+b}{2}, b_1 = b$，得小区间 $[a_1, b_1]$。

如此无限继续下去，得一区间套 $[a_n, b_n]$，其中 a_n 不是 S 的上界、b_n 是 S 的上界，且 $\lim\limits_{n\to\infty}(b_n - a_n) = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{b-a}{2^n} = 0$. 故由区间套定理知，存在唯一的一点 ξ，使得 $\xi \in [a_n, b_n](n = 1,2,\cdots)$，且 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = \xi$.

对任意的 $x \in S$，因 b_n 是 S 的上界，所以有 $x \le b_n$，令 $n\to\infty$ 得 $x \le \lim\limits_{n\to\infty} b_n = \xi$，所以 ξ 为 S 的上界。

而 $\forall \varepsilon > 0$，由 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \xi$ 知，存在 N，当 $n > N$ 时有 $\xi - \varepsilon < a_n$，即 $\xi - \varepsilon < a_{N+1}$，又对所有的 $a_n \in S$，即存在 S 中的某个数 a_{N+1}，使得 $\xi - \varepsilon < a_{N+1}$，故 ξ 为 S 的最小上界。

所以 $\xi = \sup S$。

同理可证非空有下界的数集，必有下确界。■

问题 2.4 用致密性定理证明确界原理。

证明 设 S 是非空有上界的数集，则必有无限多个上界，设 $Q_0 = \{r_1, r_2, \cdots, r_n, \cdots\}$ 为 S 的所有有理数上界。令 $x_n = \min\{r_1, r_2, \cdots, r_n\}$，显然 $\{x_n\} \in Q_0$ 且单调递减有下界，显然也有上界。

由致密性定理知，存在 ξ 使得 $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} = \xi$。下面证明 $\xi = \sup S$。

(1) 证明是上界：如果存在 $x_0 \in S$，使得 $x_0 > \xi$，则 $\dfrac{x_0 - \xi}{2} > 0$，所以 $\exists N$，使得 $x_N < \xi + \dfrac{x_0 - \xi}{2} = \dfrac{x_0 + \xi}{2} < x_0$，而 $x_N \in Q_0$，这与 x_N 为 S 的上界矛盾。

(2) 证明是最小上界：如果存在 $\xi_0 > 0$，对任意的 $x \in S$ 有 $x \le \xi - \xi_0$，由有理数的稠密性知，存在 $r' \in Q$ 使得 $\xi - \xi_0 < r' < \xi$，所以 $\forall x \in S$ 有 $x < r'$，所以 r' 为 S 的一个上界，即 $r' \in Q_0$，这与 $\xi \le x_{n_k} \le r'$ 矛盾。

这是由于序列 $\{x_{n_k}\}$ 的构造，x_{n_k} 是从 Q_0 中选取的最小值序列的子列，且 $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} = \xi$。由于 $r' \in Q_0$，当 n 足够大时，x_{n_k} 必然包含 r' 或更小的值，因此有 $x_{n_k} \le r'$。这意味着极限 ξ 应满足 $\xi \le r'$。然而，r' 的选取满足 $r' < \xi$，导致矛盾：$\xi \le r'$ 与 $r' < \xi$ 同时成立，这是不可能的。因此，原假设“存在 $\xi_0 > 0$ 使得所有 $x \in S$ 有 $x \le \xi - \xi_0$”不成立，说明 ξ 是最小的上界，即 $\xi = \sup S$。■

问题 2.5 用有限覆盖定理证明确界存在原理。

证明 设 S 为非空有上界的数集，A 为所有上界的集合，取 $M \in A$ 和 $x_0 \in S$。

反证法假设：S 无上确界（即无最小上界）。

构造开覆盖：考虑闭区间 $[x_0, M]$，对其中每一点 x 分情况讨论：

(1) 若 x 是上界：由于无最小上界，存在更小的上界 $x_1 < x$。取 x 的某个邻域 Δ_x，使得 Δ_x 内的点均为上界（例如取 $\Delta_x = (x_1, x + \varepsilon)$）。

(2) 若 x 不是上界：存在 $x_2 \in S$ 使得 $x_2 > x$。取 x 的邻域 Δ_x，使得 Δ_x 内的点均小于 x_2，从而都不是上界（例如取 $\Delta_x = (x - \varepsilon, x_2)$）。

所有这样的 Δ_x 构成 $[x_0, M]$ 的一个开覆盖。

应用有限覆盖定理：由有限覆盖定理，存在有限个子开区间 $\{\Delta_{x_1}, \Delta_{x_2}, \ldots, \Delta_{x_k}\}$ 覆盖 $[x_0, M]$。

M 是上界，故覆盖 M 的邻域 Δ_{x_k} 必为情况 (1)，即 Δ_{x_k} 内全为上界。若相邻邻域 $\Delta_{x_{k-1}}$ 与 Δ_{x_k} 有交集，则 $\Delta_{x_{k-1}}$ 也必为情况 (1)。否则，若 $\Delta_{x_{k-1}}$ 为情况 (2)，其内部全为非上界，与 Δ_{x_k} 的上界区域矛盾。依次向左分析每个邻域，最终覆盖 x_0 的邻域也必为情况 (1)，即 x_0 是上界。

$x_0 \in S$，若 x_0 是上界，则 x_0 为 S 的最大元素，即 $\sup S = x_0$，与原假设“无上确界”矛盾。这是由于通过有限覆盖定理，闭区间 $[x_0, M]$ 被有限个邻域覆盖。从 M 开始，所有邻域必须为情况 (1)（上界区域），否则会在交界处产生逻辑矛盾（某点同时属于上界和非上界）。最终推导出 x_0 是上界，但 $x_0 \in S$，意味着 x_0 是 S 的上确界，与反证假设矛盾。因此，原假设错误，S 必有上确界。■

问题 2.6 用 Dedekind 分割定理证明确界原理。

证明 先证明非空有上界的数集必有上确界。

设非空有上界的数集 S 的全体上界组成集合 $\tilde{B}$，则

$$\tilde{B} = \{x \mid \forall t \in S : x \ge t\},$$

取 $\tilde{B}$ 的补集为

$$\tilde{A} = \{x \mid x \notin \tilde{B}\},$$

则 $\tilde{A}$ 和 $\tilde{B}$ 是 $\mathbb{R}$ 的一个划分。

要证明 S 有上确界，即是要证明 $\tilde{B}$ 有最小数。根据 Dedekind 切割定理，只需证明 $\tilde{A}$ 没有最大数即可。

$\tilde{A}$ 由 $\mathbb{R}$ 中不是 S 上界的数组成，所以对 $\forall x \in \tilde{A}$，存在 $t \in S$ 使得 $x < t$。取 (x, t) 区间内任意一个数 x'。因为 $x' < t$，所以 x' 不是 S 的上界，故 $x < x' \in \tilde{A}$。

换句话说，对 $\tilde{A}$ 中任意一个数 x，我们都能在 $\tilde{A}$ 中找到比他更大的数 x'，所以 $\tilde{A}$ 没有最大数。
根据 Dedekind 切割定理，$\tilde{B}$ 有最小数，即 S 有上确界。
用类似的方法可以证明非空有下界的数集必有下确界。 ■

2.3 单调有界原理

定理 (单调有界原理)

任何单调递增、有上界的序列 $\{x_n\} \subset \mathbb{R}$, 必有极限 $\lim_{n\to\infty} x_n \in \mathbb{R}$。(等价地, 单调递减有下界也必有极限。)(所谓有极限, 指有有限极限, 下同。)

问题 2.7 用确界原理证明单调有界原理。

证明 不妨设 $\{a_n\}$ 为单调递增且有上界的序列。由确界原理知 $\{a_n\}$ 必有上确界, 令 $\alpha = \sup_n \{a_n\}$, 由上确界的定义可知: $\forall \varepsilon > 0, \exists N > 0, \text{s.t.} \alpha - \varepsilon < a_N < \alpha$, 那么当 $n \geqslant N$ 时, 有 $\alpha - \varepsilon < a_N \leqslant a_n < \alpha < \alpha + \varepsilon$, 故当 $n \geqslant N$ 时, 有 $\alpha - \varepsilon < a_n < \alpha + \varepsilon$, 即 $|a_n - \alpha| < \varepsilon$. 由此可知 $\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$. ■

问题 2.8 用 Cauchy 收敛原理证明单调有界原理。

证明 只证递增有上界数列必有极限的情形。不妨设 $\{x_n\}$ 为递增有上界数列, 下面用反证法证明数列 $\{x_n\}$ 有极限。假设 $\{x_n\}$ 不存在极限。由柯西收敛准则知, $\exists \varepsilon_0 > 0$, $\forall N$, $\exists n > N$, 使得 $x_n - x_N = |x_n - x_N| > \varepsilon_0$。

依次取 $N_1 = 1$, $\exists n_1 > N_1$ 使得 $x_{n_1} - x_1 > \varepsilon_0$;

取 $N_2 = n_1$, $\exists n_2 > n_1$ 使得 $x_{n_2} - x_{n_1} > \varepsilon_0$;

......

取 $N_k = n_{k-1}$, $\exists n_k > n_{k-1}$ 使得 $x_{n_k} - x_{n_{k-1}} > \varepsilon_0$。

把以上式子相加得 $x_{n_k} - x_1 > k\varepsilon_0$, 对任意的实数 G, 当 $k > \dfrac{G - x_1}{\varepsilon_0}$ 时有 $x_{n_k} > G$, 这与 $\{x_n\}$ 有上界矛盾。故数列 $\{x_n\}$ 有极限。 ■

问题 2.9 用致密性定理证明单调有界原理。

证明 不妨设数列 $\{x_n\}$ 单调递增且有上界 M。由于 $\{x_n\}$ 单调递增, 其下界显然为 x_1 (即对任意 $n \geq 1$, 有 $x_n \geq x_1$)。因此 $\{x_n\}$ 是有界数列 (既有上界又有下界)。根据致密性定理, $\{x_n\}$ 存在收敛子列 $\{x_{n_k}\}$, 设

$$\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = \xi.$$

下证 ξ 为 $\{x_n\}$ 的极限。对任意 $\varepsilon > 0$, 存在 $K > 0$, 使得当 $k > K$ 时, 有 $|x_{n_k} - \xi| < \varepsilon$, 即

$$\xi - \varepsilon < x_{n_k} < \xi + \varepsilon.$$

取 $N = n_{K+1}$, 则当 $n > N$ 时, 由于 $\{x_n\}$ 单调递增, 存在子列下标 n_k 满足 $n \leq n_k$ (因 $\{n_k\}$ 严格递增且趋于无穷), 从而

$$\xi - \varepsilon < x_{n_{K+1}} \leq x_n \leq x_{n_k} < \xi + \varepsilon.$$

因此 $|x_n - \xi| < \varepsilon$ 对任意 $n > N$ 成立, 即

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \xi.$$

■

问题 2.10 用闭区间套定理证明单调有界原理。

证明 只证递增有上界数列必有极限的情形。不妨设 $\{x_n\}$ 为递增有上界数列, 取闭区间 $[a_1, b_1]$, 使 a_1 不是数列 $\{x_n\}$ 的上界 (如 $a_1 = x_1 - 1$), b_1 是数列 $\{x_n\}$ 的上界, 则 $[a_1, b_1]$ 包含数列 $\{x_n\}$ 的无穷多项, 而在 $[a_1, b_1]$ 外至多含有数列 $\{x_n\}$ 的有限项。

将 $[a_1, b_1]$ 二等分为两个小区间, 其中必有一小区间含有数列 $\{x_n\}$ 的无穷多项, 而在此小区间外至多含有数列 $\{x_n\}$ 的有限项, 记这样的小区间为 $[a_2, b_2]$。

无限继续下去, 可得一闭区间列 $\{[a_n, b_n]\}$ 满足区间套定理, 故存在唯一的 $\xi \in [a_n, b_n]$ $(n = 1, 2, \cdots)$, 使得

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = \xi.$$

由极限关系知，$\forall\varepsilon>0$，$\exists N$，当 $n>N$ 时，有

$$\xi-\varepsilon<a_n<b_n<\xi+\varepsilon.$$

取 $n_0>N$，$[a_{n_0},b_{n_0}]$ 含有数列 $\{x_n\}$ 的无穷多项，即 $\exists M$ 使 $x_M\in[a_{n_0},b_{n_0}]$，则当 $m>M$ 时，有 $x_m\in[a_{n_0},b_{n_0}]$。否则，$\exists m_1>M$ 有 $b_{n_0}<x_{m_1}$，则在 $[a_{n_0},b_{n_0}]$ 中最多只有数列 $\{x_n\}$ 的前 m_1 项，与前提矛盾。

从而当 $m>M$ 时，有

$$\xi-\varepsilon<a_{n_0}\leq x_m\leq b_{n_0}<\xi+\varepsilon,$$

亦即 $|x_m-\xi|<\varepsilon$。故 $\forall\varepsilon>0$，$\exists M$，当 $m>M$ 时有 $|x_m-\xi|<\varepsilon$，所以数列 $\{x_n\}$ 的极限为 ξ。 ■

问题 2.11 用有限覆盖定理证明单调有界原理。

证明 不妨设数列 $\{x_n\}$ 递增有界，且 $a\leq x_n\leq b$。假设 $\{x_n\}$ 的极限不存在，则对任意 $x_0\in[a,b]$，x_0 都不是 $\{x_n\}$ 的极限。于是存在 $\varepsilon_0>0$，使得对任意 N，当 $n>N$ 时，有 $|x_n-x_0|\geq\varepsilon_0$。因此，存在 x_0 的邻域 $U\left(x_0,\dfrac{\varepsilon_0}{2}\right)$，其中只含有 $\{x_n\}$ 的有限项。

令 $H=\left\{U\left(x,\dfrac{\varepsilon_x}{2}\right)\mid x\in[a,b]\right\}$，则 H 是闭区间 $[a,b]$ 的一个开覆盖。根据有限覆盖定理，存在 H 的有限子覆盖，即存在 $U\left(x_1,\dfrac{\varepsilon_1}{2}\right),U\left(x_2,\dfrac{\varepsilon_2}{2}\right),\ldots,U\left(x_k,\dfrac{\varepsilon_k}{2}\right)$，使得

$$\bigcup_{i=1}^{k}U\left(x_i,\frac{\varepsilon_i}{2}\right)\supseteq[a,b].$$

由于每个 $U\left(x_i,\dfrac{\varepsilon_i}{2}\right)$ 只含有 $\{x_n\}$ 的有限项，它们的并集也至多含有 $\{x_n\}$ 的有限项。然而 $[a,b]$ 包含 $\{x_n\}$ 的所有项（无穷多项），这与有限覆盖的结论矛盾。因此，假设不成立，$\{x_n\}$ 必有极限。 ■

问题 2.12 用 Dedekind 分割定理证明单调有界原理。

证明 设递增数列 $\{x_n\}$ 有上界 M，即 $x_1\leq x_2\leq\cdots\leq M$。目标是证明 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在且有限。

考虑将实数集划分为两个集合 A 和 A'：

- A'：包含所有数列 $\{x_n\}$ 的上界，即满足 $x_n\leq a$ 对所有 n 成立的实数 a。
- A：包含所有不是上界的实数，即存在至少一个 $x_n>a$。

该分割满足以下条件：

- A' 非空：因为 M 是上界，故 $M\in A'$。
- A 非空：取 $a=x_1-1$，显然 $x_1>a$，故 $a\in A$。
- 对任意 $a\in A$ 和 $a'\in A'$，有 $a<a'$，因为存在 $x_n>a$，而 $x_n\leq a'$。

由戴德金定理，存在唯一实数 α 是该分割的界数。即 α 是 A' 的最小元，也是 A 的上确界。因为对任意 $a\in A$，存在 $x_n>a$，故 A 无最大元，从而 α 是 A' 的最小元。

证明 A 无最大元（即 α 必为 A' 的最小元）：

1. 任取 $a\in A$：由 A 的定义，存在某项 $x_{n_0}>a$（因 a 不是上界）
2. 构造 $a+\tau\in A$：取 $\tau=\dfrac{x_{n_0}-a}{2}>0$，则：
   - $a+\tau<x_{n_0}$
   - $a+\tau$ 仍不是 $\{x_n\}$ 的上界（因 $x_{n_0}>a+\tau$），故 $a+\tau\in A$
3. 结论：对任意 $a\in A$，总存在更大的数 $a+\tau\in A$，因此 A 无最大元

α 的性质与数列关系

由于 α 是 A' 的最小元，具有以下特性：

1. 上界性：$\forall n,x_n\leq\alpha$（因 $\alpha\in A'$ 是上界）
2. 最小性：任何比 α 小的数 $\alpha-\varepsilon$ 均属于 A（即不是上界），从而存在 $x_N>\alpha-\varepsilon$

于是对所有 n 有 $x_n\leq\alpha$。

下面证明 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\alpha$：

对任意 $\varepsilon>0$，由于 α 是 A' 的最小元，故 $\alpha-\varepsilon\in A$，即存在某个 $x_N>\alpha-\varepsilon$。由于数列递增，对任意 $n>N$

有 $x_n \geq x_N > \alpha - \varepsilon$。又因为 α 是上界，故 $x_n \leq \alpha$，从而

$$\alpha - \varepsilon < x_n \leq \alpha \Rightarrow |x_n - \alpha| < \varepsilon$$

因此，$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \alpha$。

综上，递增有上界数列必有极限且该极限为有限实数。 ■

2.4 Cauchy 收敛原理

定理（Cauchy 收敛原理）

序列 $\{x_n\} \subset \mathbb{R}$ 收敛的充分必要条件是

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N > 0, \text{当} m, n > N \text{时，有} |x_n - x_m| < \varepsilon.$$

命题 2.1

满足 Cauchy 条件的数列是有界的。

证明 设 $\{x_n\}$ 是 N 中的 Cauchy 列。根据 Cauchy 列的定义，对任意 $\varepsilon > 0$，存在 $N \in \mathbb{N}$，使得对所有 $m, n \geq N$，有

$$|x_m - x_n| < \varepsilon.$$

特别地，取 $\varepsilon = 1$，则存在 $N \in \mathbb{N}$，使得对所有 $n \geq N$，

$$|x_n - x_N| < 1.$$

由绝对值不等式可得

$$|x_n| = |x_n - x_N + x_N| \leq |x_n - x_N| + |x_N| < 1 + |x_N|.$$

因此，对 所有 $n \geq N$，有

$$|x_n| < 1 + |x_N|.$$

而对于 $n < N$ 的有限项 $x_1, x_2, \ldots, x_{N-1}$，取

$$M = \max\{|x_1|, |x_2|, \ldots, |x_{N-1}|\},$$

则对所有 $n < N$，有 $|x_n| \leq M$.

综上，对所有 $n \in \mathbb{N}$，

$$|x_n| \leq \max\{M, 1 + |x_N|\},$$

即 $\{x_n\}$ 有界。 ■

问题 2.13 用确界原理证明 Cauchy 收敛原理。

证明 必要性:

设 $\lim_{n\to\infty} x_n = \eta$，则 $\forall \varepsilon > 0$，$\exists N > 0$，当 $m, n > N$ 时，有

$$|x_n - \eta| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad |x_m - \eta| < \frac{\varepsilon}{2}$$

那么，

$$|x_n - x_m| = |(x_n - \eta) - (x_m - \eta)| \leq |x_n - \eta| + |x_m - \eta| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

充分性:

1. 构造非空有界数集：设 $S = \{x \mid (-\infty, x) \cap \{x_n\}$ 是空集或有限数集 $\}$。
2. 确界存在性：由于满足 Cauchy 条件的数列是有界的，显然 S 是非空有上界的数集。由确界原理，数集 S 有上确界，不妨令 $\zeta = \sup S$。
3. 极限点的性质：
   - 对任意 $\varepsilon > 0$，$(-\infty, \zeta) \cap \{x_n\}$ 是无限集（假设为有限集，则意味着从某项开始所有 $x_n \geq \zeta$，那就会导致 ζ 不是 S 的最小上界，矛盾）。
   - $(-\infty, \zeta - \varepsilon) \cap \{x_n\}$ 至多含有 $\{x_n\}$ 的有限多项。
     这是由于 S 为非空且有上界的集合，且 ζ 为 S 的上确界，故由 S 的定义可知 $(-\infty, \zeta - \varepsilon) \cap \{x_n\}$ 至多含有 $\{x_n\}$ 的有限多个点。

- 因此 $(\zeta-\varepsilon,\zeta+\varepsilon)$ 含有 $\{x_n\}$ 的无限多项。

4. 收敛性证明：取柯西列的子列 $x_{n_k}\in(\zeta-\varepsilon,\zeta+\varepsilon)$，$k=1,2,\cdots$，且有 $n_1<n_2<\cdots$。取 $N_1=\max\{N,n_1\}$，则当 $n>N_1$ 时，总存在 $n_k>N_1$ 使得

$$|x_n-\zeta|\le|x_n-x_{n_k}|+|x_{n_k}-\zeta|<2\varepsilon$$

■

笔记 定义：任给 $\varepsilon>0$，若数列 $\{a_n\}$ 中至多只有有限项落在邻域 $U(a,\varepsilon)$ 之外，则称数列 $\{a_n\}$ 收敛于极限 a。这个充分性证明的思路就是，先假设 S 是有限点集，再得出 S 有上确界的结论。一个集合有上确界 ζ，则在 $(\zeta-\varepsilon,\zeta+\varepsilon)$ 区间就有无限个点，这是由上确界的定义确定的。由此得到要证明的结论。

问题 2.14 用单调有界原理证明 Cauchy 收敛原理。

证明 只证充分性（必要性同上）。由命题2.1知数列 $\{x_n\}$ 有界，不妨设 $a\le x_n\le b$。用如下的方法取得 $\{x_n\}$ 的一个单调子列 $\{x_{n_k}\}$：

1. 取 $x_{n_k}\in\{x_n\}$，使 $[a,x_{n_k}]$ 或 $[x_{n_k},b]$ 中含有无穷多的 $[a,b]$ 中的项；
2. 在 $[a,x_{n_k}]$ 或 $[x_{n_k},b]$ 中取得 $x_{n_{k+1}}\in\{x_n\}$ 且满足条件 1；
3. 取项时方向一致，要么由 $a\to b$，要么由 $b\to a$。

由数列 $\{x_n\}$ 的性质可知，以上三点可以做到。这样，取出一个数列 $\{x_{n_k}\}\subset\{x_n\}$ 且 $\{x_{n_k}\}$ 是一个单调有界数列，则它必有极限，设为 ξ。下面证明 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\xi$。

由柯西条件及 $\lim\limits_{k\to\infty}x_{n_k}=\xi$ 知，$\forall\varepsilon>0$，$\exists N$，当 $m,n,k>N$ 时有 $|x_m-x_n|<\varepsilon$ 和 $|x_{n_k}-\xi|<\varepsilon$ 同时成立。

当 $n>N$，取 $m=n_k(\ge k>N)$ 时得 $|x_n-\xi|\le|x_n-x_{n_k}|+|x_{n_k}-\xi|<2\varepsilon$。所以 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\xi$。 ■

问题 2.15 用致密性定理证明 Cauchy 收敛原理。

证明 只证充分性（必要性同上）。由命题2.1知数列 $\{x_n\}$ 有界.

根据致密性定理知 $\{x_n\}$ 必存在收敛的子列 $\{x_{n_k}\}$ 设 $\lim\limits_{k\to\infty}x_{n_k}=\xi$。

下面证明 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\xi$。

由柯西条件及 $\lim\limits_{k\to\infty}x_{n_k}=\xi$ 知，$\forall\varepsilon>0$，$\exists N$，当 $m,n,k>N$ 时有 $|x_m-x_n|<\varepsilon$ 和 $|x_{n_k}-\xi|<\varepsilon$ 同时成立。

当 $n>N$ 时，取 $m=n_k\ (\ge k>N)$ 时得 $|x_n-\xi|\le|x_n-x_{n_k}|+|x_{n_k}-\xi|<2\varepsilon$。所以 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\xi$。 ■

问题 2.16 用闭区间套定理证明 Cauchy 收敛原理。

证明 只证充分性。由柯西条件知，$\forall\varepsilon>0$，$\exists N$，$\forall m,n\ge N$ 有 $|x_m-x_n|<\varepsilon$。取 $m=N$，则当 $n\ge N$ 时有 $|x_N-x_n|<\varepsilon$，即 $x_N-\varepsilon<x_n<x_N+\varepsilon$，即在区间 $[x_N-\varepsilon,x_N+\varepsilon]$ 内含有 $\{x_n\}$ 中除有限项外的几乎所有的项。

令 $\varepsilon=\dfrac{1}{2}$，则 $\exists N_1$，在区间 $\left[x_{N_1}-\dfrac{1}{2},x_{N_1}+\dfrac{1}{2}\right]$ 内含有 $\{x_n\}$ 中除有限项外的几乎所有的项，记该区间为 $[a_1,b_1]$。

再令 $\varepsilon=\dfrac{1}{2^2}$，则 $\exists N_2(>N_1)$，在区间 $\left[x_{N_2}-\dfrac{1}{2^2},x_{N_2}+\dfrac{1}{2^2}\right]$ 内含有 $\{x_n\}$ 中除有限项外的几乎所有的项，记 $[a_2,b_2]=\left[x_{N_2}-\dfrac{1}{2^2},x_{N_2}+\dfrac{1}{2^2}\right]\cap[a_1,b_1]$，它也含有 $\{x_n\}$ 中除有限项外的几乎所有的项，且 $[a_2,b_2]\subset[a_1,b_1]$，$b_2-a_2\le\dfrac{b_1-a_1}{2}=\dfrac{1}{2}$；依次继续令 $\varepsilon=\dfrac{1}{2^3},\cdots,\dfrac{1}{2^n},\cdots$，得一闭区间列 $\{[a_n,b_n]\}$ 满足：

(i) $[a_{n+1},b_{n+1}]\subset[a_n,b_n]\ (n=1,2,\cdots)$;

(ii) $b_n-a_n\le\dfrac{1}{2^{n-1}}\to0\ (n\to\infty)$;

(iii) 每个区间中都含有 $\{x_n\}$ 中除有限项外的几乎所有的项。

由区间套定理，故存在唯一的 $\xi\in[a_n,b_n]\ (n=1,2,\cdots)$ 且 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}b_n=\xi$。

再证 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\xi$。由 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}b_n=\xi$ 知，$\forall\varepsilon>0$，$\exists N$，$\exists n>N$ 时有 $\xi-\varepsilon<a_n<b_n<\xi+\varepsilon$，即 $[a_n,b_n]\subset U(\xi,\varepsilon)$，由 $[a_n,b_n]$ 中含有 $\{x_n\}$ 中除有限项外的几乎所有的项得，$U(\xi,\varepsilon)$ 中含有 $\{x_n\}$ 中除有限项外的几乎所有的项。即 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\xi$。 ■

问题 2.17 用有限覆盖定理证明 Cauchy 收敛原理。

证明 由命题2.1知数列 $\{x_n\}$ 有界.

下面证明 $\{x_n\}$ 有极限。不妨设 $\{x_n\}\subseteq[a,b]$，假设 $\{x_n\}$ 的极限不存在，所以 $\forall x_0\in[a,b]$，x_0 都不是 $\{x_n\}$ 的极限，则 $\exists\varepsilon_0>0$，$\forall N$，当 $n>N$ 时有 $|x_n-x_0|\ge\varepsilon_0$，则存在 x_0 的某邻域 $U\left(x_0,\dfrac{\varepsilon_0}{2}\right)$ 中只含有 $\{x_n\}$ 的有限项。

令 $H=\left\{U\left(x,\frac{\varepsilon_x}{2}\right)\mid x\in[a,b]\right\}$，则 H 是闭区间 $[a,b]$ 的一个无限开覆盖，由有限覆盖定理知，必存在有限子覆盖。不妨设存在 $U\left(x_1,\frac{\varepsilon_1}{2}\right),U\left(x_2,\frac{\varepsilon_2}{2}\right),\cdots,U\left(x_k,\frac{\varepsilon_k}{2}\right)$ 是 $[a,b]$ 的一个有限开覆盖，即

$$\bigcup_{i=1}^{k}U\left(x_i,\frac{\varepsilon_i}{2}\right)\supseteq[a,b],$$

而每个 $U\left(x_i,\frac{\varepsilon_i}{2}\right)$ $(i=1,2,\cdots,k)$ 只含 $\{x_n\}$ 的有限项，从而它们的并也只含 $\{x_n\}$ 的有限项，这与 $\{x_n\}$ 是无限点集矛盾。故假设不成立，$\{x_n\}$ 必有极限。 ■

问题 2.18 用 Dedekind 分割定理证明 Cauchy 收敛原理。

证明 设数列 $\{x_n\}$ 是一个 Cauchy 列，则

$$\forall\varepsilon>0,\ \exists N\in\mathbb{N}^+,\ \forall n,m>N,\ |x_n-x_m|<\frac{\varepsilon}{2}$$

$\forall x\in\mathbb{R}$，若 $[x,\infty)$ 内只含有 $\{x_n\}$ 的有限多项，则归入上集 B 中，令 $A=\mathbb{R}\setminus B$。

根据 Dedekind 分割定理知：或上集 B 有最小数，或下集 A 有最大数。记分割点为 ξ，满足

$$\forall\varepsilon>0,\ \xi-\varepsilon\in A,\ \xi+\varepsilon\in B$$

由上集 B 中只有 $\{x_n\}$ 的有限多项知，对于上述 $\varepsilon>0$，

$$\exists N_1\in\mathbb{N}^+,\ \forall m>N_1,\ \xi-\frac{\varepsilon}{2}<x_m\leq\xi<\xi+\frac{\varepsilon}{2}$$

取 $N_2=\max\{N,N_1\}$，则有

$$\forall n,m>N_2,\ |x_n-x_m|<\frac{\varepsilon}{2}$$

进而可得

$$-\frac{\varepsilon}{2}<x_n-x_m<\frac{\varepsilon}{2}\ \Rightarrow\ \xi-\varepsilon<x_n<\xi+\varepsilon\ \Rightarrow\ \lim_{n\to\infty}x_n=\xi$$

■

2.5 聚点定理与致密性定理

定理（聚点定理）

设 E 是无穷有界集合，则 E 至少有一个聚点（即 $E' \neq \varnothing$）。

定理（致密性定理（Bolzano-Weierstrass 定理））

设 $\{x_n\}$ 为一有界数列，则 $\{x_n\}$ 一定有收敛子列。即存在 $\{x_{n_k}\} \subset \{x_n\}$，满足 $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k}$ 存在。反之若 $\{x_n\}$ 的任何子列都不收敛，则 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$。

问题 2.19 用确界原理证明聚点定理。

证明 设 S 是有界无限点集，则由确界原理有 $\eta = \sup S$，$\xi = \inf S$。

- 若 η，ξ 中有一点是 S 的聚点，那么结论已成立。
- 若 η，ξ 都不是 S 的聚点，令

$$E := \{x \in \mathbb{R} \mid S \text{ 中仅有有限个数小于} x\}.$$

显然 E 非空且有上界。令 $\eta' = \sup E$，则由 E 的构造方法可知，$\forall \varepsilon > 0$，必有 $\eta' + \varepsilon \notin E$(上确界加一个正数必不在 E 中)，那么由 E 的定义知 S 中有无限个数小于 $\eta' + \varepsilon$，又由于 S 中仅有有限个数小于 η'，则 S 中必有无限个数小于 $\eta' + \varepsilon$ 大于 η'。所以 $(\eta' - \varepsilon, \eta' + \varepsilon)$ 中含有 S 的无限个数，故 η' 是 S 的聚点。■

问题 2.20 用单调有界原理证明致密性定理。

证明 设数列 $\{x_n\}$ 是有界数列，首先证明 $\{x_n\}$ 中存在单调子数列。

(1) 若 $\{x_n\}$ 中存在单调递增子数列 $\{x_{n_k}\}$，则得证。

(2) 若 $\{x_n\}$ 中无单调递增子数列，那么 $\exists n_1$，当 $n > n_1$ 时恒有 $x_{n_1} > x_n$；同样在 $\{x_n\}\ (n > n_1)$ 中也无单调递增子数列，于是又 $\exists n_2$，当 $n_2 > n$ 时恒有 $x_{n_2} < x_n < x_{n_1}$；如此无限进行下去，便可得到一严格递减子数列 $\{x_{n_k}\}$。

由上可知，$\{x_n\}$ 中存在单调子数列 $\{x_{n_k}\}$，而 $\{x_n\}$ 有界，所以 $\{x_{n_k}\}$ 有界。故由单调有界定理知，$\{x_{n_k}\}$ 必收敛，即有界数列 $\{x_n\}$ 必有收敛子列 $\{x_{n_k}\}$。

■

问题 2.21 用 Cauchy 收敛原理证明致密性定理。

证明 设数列 $\{x_n\}$ 是有界数列，不妨设 $\{x_n\} \subset [a,b]$，即 $[a,b]$ 中包含 $\{x_n\}$ 的无穷多项。对 $[a,b]$ 二等分，则至少有一个小区间包含 $\{x_n\}$ 的无穷多项，记这样的小区间为 $[a_1,b_1]$，再将 $[a_1,b_1]$ 二等分，又得到包含 $\{x_n\}$ 的无穷多项的小区间 $[a_2,b_2]$，无限进行下去，得一闭区间套 $\{[a_n,b_n]\}$，每个 $[a_n,b_n]$ 都包含 $\{x_n\}$ 的无穷多项。

易证 $\{a_n\},\{b_n\}$ 为柯西数列，且 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = \xi$。现构造收敛子列如下：

取 n_1 使得 $x_{n_1} \in [a_1,b_1]$；取 $n_2 > n_1$ 使得 $x_{n_2} \in [a_2,b_2]$；$\cdots$ 取 $n_k > n_{k-1}$ 使得 $x_{n_k} \in [a_k,b_k]$；$\cdots$

由于 $|a_k - b_k| = \dfrac{b-a}{2^k} \to 0$ 且 $x_{n_k}, \xi \in [a_k,b_k]$，故有

$$|x_{n_k} - \xi| \le \frac{b-a}{2^k} \to 0 \quad (k \to \infty)$$

即 $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} = \xi$，从而得到 $\{x_n\}$ 的一个收敛于 ξ 的子列 $\{x_{n_k}\}$。■

问题 2.22 用闭区间套定理证明致密性定理。

证明 设数列 $\{x_n\}$ 是有界数列，不妨设 $\{x_n\} \subseteq [a,b]$，即 $[a,b]$ 中包含 $\{x_n\}$ 的无穷多项。对 $[a,b]$ 二等分，则至少有一个小区间包含 $\{x_n\}$ 的无穷多项，记这样的小区间为 $[a_1,b_1]$，再将 $[a_1,b_1]$ 二等分，又得到包含 $\{x_n\}$ 的无穷多项的小区间 $[a_2,b_2]$，无限进行下去，得一闭区间套 $\{[a_n,b_n]\}$ 满足：

(i) $[a_{n+1},b_{n+1}] \subseteq [a_n,b_n]\ (n = 1,2,\cdots)$；

(ii) $b_n - a_n \le \dfrac{b-a}{2^n} \to 0\ (n \to \infty)$；

(iii) 每个 $[a_n,b_n]$ 都包含 $\{x_n\}$ 的无穷多项。

由区间套定理，故存在唯一的 $\xi \in [a_n,b_n]\ (n = 1,2,\cdots)$ 且 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = \xi$。

在 $[a_1,b_1]$ 中任取 $\{x_n\}$ 的一项，记为 x_{n_1}；由于 $[a_2,b_2]$ 中包含 $\{x_n\}$ 的无穷多项，因此必含有 x_{n_1} 以后的无穷多项，在这些项中取一项，记为 x_{n_2}（满足 $n_2 > n_1$）；继续下去，即可得 $\{x_n\}$ 的一个子列 $\{x_{n_k}\}$，其中 $n_1 < n_2 < \cdots < n_k < \cdots$，且 $a_k \le x_{n_k} \le b_k$。由夹逼定理，令 $k \to \infty$ 得

$$\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = \xi$$

即 $\{x_n\}$ 存在收敛子列 $\{x_{n_k}\}$。 ■

问题 2.23 用有限覆盖定理证明致密性定理。

证明 设数列 $\{x_n\}$ 是有界数列，不妨设 $\{x_n\} \subset [a,b]$。若数列 $\{x_n\}$ 中有无限多相等的项，则由这些项组成 $\{x_n\}$ 的一个子列 $\{x_{n_k}\}$ 是一个常数列，且收敛。

若数列 $\{x_n\}$ 中相等的项只有有限项，即 $\{x_n\}$ 中有无穷多个不同的项。则在 $[a,b]$ 内至少存在一点 x_0，对任意的正数 δ，在 $(x_0-\delta, x_0+\delta)$ 内含有 $\{x_n\}$ 中的无穷多项。

事实上，假若不然，对于 $[a,b]$ 内的每一点 x，存在正数 δ_x，在 $(x-\delta_x, x+\delta_x)$ 内仅有 $\{x_n\}$ 中的有限项；考虑所有这样的开区间组成的无限开区间集 $H = \{(x-\delta_x, x+\delta_x) \mid x \in [a,b]\}$，$H$ 覆盖了闭区间 $[a,b]$，则由有限覆盖定理知，存在 H 中的有限个开区间 $H^* = \{(x_k-\delta_k, x_k+\delta_k) \mid k = 1,2,\cdots,n\}$ 也覆盖了 $[a,b]$，并且每个 $(x_i-\delta_i, x_i+\delta_i)$ 中都仅含有 $\{x_n\}$ 的有限项，与前提矛盾。

于是，对于 $\delta_k = \dfrac{1}{k}$ $(k = 1,2,\cdots)$，在 $(x_k-\delta_k, x_k+\delta_k)$ 内取 $\{x_n\}$ 的点，组成 $\{x_n\}$ 的一个子列 $\{x_{n_k}\}$ 满足 $|x_{n_k} - x_0| < \delta_k \le \dfrac{1}{k}$，令 $k \to \infty$ 得

$$\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = x_0$$

即 $\{x_n\}$ 存在收敛子列 $\{x_{n_k}\}$。 ■

问题 2.24 用 Dedekind 分割定理证明聚点定理。

证明 设 S 是一个非空有上界的实数集，定义两个集合 A 和 B 分别如下：

$$B = \{b \in \mathbb{R} \mid \forall x \in S, x < b\}, \quad A = \mathbb{R} \setminus B.$$

即 B 由所有比 S 中的数都大的实数组成，A 则为 B 的余集。下证 $(A \mid B)$ 是实数域的一个 Dedekind 分割。

(1) 不空：由于 S 有上界，可设实数 M 是 S 的一个上界，令 $a = M+1$，则 a 大于 S 中的所有数，从而 $a \in B$，所以 $B \neq \emptyset$。又由于 S 非空，任取 $x_0 \in S$，则 $x_0 \in A$，说明 $A \neq \emptyset$；

(2) 不漏：根据 A 与 B 的定义有 $A \cup B = \mathbb{R}$；

(3) 不乱：设 $x \in A, y \in B$，由 $x \in A$ 可知 $x \notin B$，从而存在 $z \in S$，使 $x \le z$。而由 $y \in B$ 和 $z \in S$ 可知必有 $z < y$。由 $x \le z$ 和 $z < y$ 可得 $x < y$，即 A 中的数都比 B 中的数小。

因此，$(A \mid B)$ 是实数域的一个 Dedekind 分割。根据 Dedekind 原理可知，存在实数 c 使得

$$x \le c \le y \quad \forall x \in A, \forall y \in B.$$

由于 $x \le c$ 对所有 $x \in S$ 成立（因为 $S \subseteq A$），这表明 c 是 S 的一个上界。另外，对任意 $\varepsilon > 0$，$c - \varepsilon < c$，故 $c - \varepsilon \in A$，从而存在 $x' \in S$ 使得 $x' > c - \varepsilon$。这意味着 c 是 S 的最小上界（上确界），接下来证明 c 是 S 的聚点。

1. 邻域内至少有一个点：由上确界定义，对任意 $\varepsilon > 0$，存在 $x' \in S$ 使得

$$c - \varepsilon < x' \le c,$$

故 $x' \in (c-\varepsilon, c+\varepsilon) \cap S$。

2. 邻域内有无限多个点（反证法）：假设存在 $\varepsilon_0 > 0$ 使得 $(c-\varepsilon_0, c+\varepsilon_0) \cap S$ 只有有限个点 $\{x_1, \ldots, x_k\}$。取

$$\delta = \min\{c - x_i\} > 0,$$

则 $(c-\delta, c) \cap S = \emptyset$。这意味着 $c - \delta$ 也是 S 的上界，与 c 是最小上界矛盾。

3. 结论：因此，$(c-\varepsilon, c+\varepsilon) \cap S$ 必须包含无限多个点，即 c 是 S 的聚点。

■

2.6 闭区间套定理

定理 (闭区间套定理)

定义：

设有无穷多个闭区间 $[a_n, b_n]$, $n = 1, 2, 3, \ldots$，满足以下两个条件：

1. $[a_{n+1}, b_{n+1}] \subseteq [a_n, b_n]$
2. $\lim\limits_{n\to\infty}(b_n - a_n) = 0$

将这一无穷多个闭区间所构成的集合 $\{[a_n, b_n]\}$ 称为一个闭区间套，简称区间套。

定理内容：

若 $\{[a_n, b_n]\}$ 是一个闭区间套，则存在唯一实数 ξ 满足：

$$\xi \in [a_n, b_n], \quad \forall n = 1, 2, 3, \ldots$$

且

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = \xi.$$

问题 2.25 用确界原理证明闭区间套定理。

证明 令数集 $S = \{a_n\}$，显然 S 非空有上界（例如 b_1），故由确界定理知，S 存在上确界，设 $\xi = \sup S$。下面证明 ξ 即为所求。

因 ξ 为 S 的一个上界，故 $a_n \le \xi\ (n = 1, 2, \cdots)$。再由 ξ 为 S 的最小上界知，假设由某个 $b_m < \xi$，b_m 不是 S 的上界，即 $\exists a_k > b_m$，这与 $\{[a_n, b_n]\}$ 为区间套矛盾 $(a_i > b_j)$。所以对任意的 b_n 都有 $b_n \ge \xi$，故得 $a_n \le \xi \le b_n$ $(n = 1, 2, \cdots)$。

假设还有另外的 $\xi' \in [a_n, b_n]\ (n = 1, 2, \cdots)$，则 $|\xi - \xi'| \le |a_n - b_n| \to 0$，故 $\xi = \xi'$，从而唯一性得证。 ■

问题 2.26 用单调有界原理证明闭区间套定理。

证明 由（i）知 $\{a_n\}$ 为递增有界数列，由单调有界定理知 $\{a_n\}$ 有极限 ξ，且有 $a_n \le \xi (n = 1, 2, \cdots)$，同理，递减有界数列 $\{b_n\}$ 也有极限，由区间套的条件（ii）知 $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \lim\limits_{n\to\infty} a_n = \xi$ 且 $b_n \ge \xi (n = 1, 2, \cdots)$ 所以有 $a_n \le \xi \le b_n (n = 1, 2, \cdots)$.

假设还有另外的 $\xi' \in [a_n, b_n] (n = 1, 2, \cdots)$，则 $|\xi - \xi'| \le |a_n - b_n| \to 0$，故 $\xi = \xi'$，从而唯一性得证。

■

问题 2.27 用 Cauchy 收敛原理证明闭区间套定理。

证明 由 $\lim\limits_{n\to\infty}(b_n - a_n) = 0$ 知，$\forall \varepsilon > 0, \exists N$，当 $n > N$ 时有 $|b_n - a_n| < \varepsilon$。由于 $\{a_n\}$ 单调递增，$\{b_n\}$ 中的每一个元素都是 $\{a_n\}$ 的上界，故 $\forall m > n > N$，有 $a_n \le a_m \le b_m \le b_n$，所以

$$|a_m - a_n| = a_m - a_n \le b_n - a_n = |b_n - a_n| < \varepsilon,$$

$$|b_m - b_n| = b_n - b_m \le b_n - a_n = |b_n - a_n| < \varepsilon.$$

故由柯西收敛准则知，$\{a_n\}$、$\{b_n\}$ 都收敛，再由 $\lim\limits_{n\to\infty}(b_n - a_n) = 0$ 知极限相同，设 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = \xi$。下面证明 $\xi \in [a_n, b_n] (n = 1, 2, \cdots)$。

用反证法：若 $\exists N_1$ 使 $\xi < a_{N_1}$，由 $\{a_n\}$ 单调递增知，当 $n > N_1$ 时有 $a_n > a_{N_1} > \xi$，所以 $|a_n - \xi| = a_n - \xi \ge 0$，两边取极限有 $0 \le \lim\limits_{n\to\infty}(a_n - \xi) < 0$，与前提矛盾。若 $\exists N_2$ 使 $\xi > b_{N_2}$，由 $\{b_n\}$ 单调递减知，当 $n > N_2$ 时有 $\xi > b_n > b_{N_2}$，所以 $|b_n - \xi| = \xi - b_n \ge 0$，两边取极限有 $0 \le \lim\limits_{n\to\infty}(\xi - b_n) < 0$，与假设矛盾。故 $\xi \in [a_n, b_n] (n = 1, 2, \cdots)$。

最后证明 ξ 是唯一的。

假设还有另外的 $\xi' \in [a_n, b_n] (n = 1, 2, \cdots)$，则 $|\xi - \xi'| \le |a_n - b_n| \to 0$，故 $\xi = \xi'$，从而唯一性得证。

■

问题 2.28 用致密性定理证明闭区间套定理。

证明 由已知条件知，$\{a_n\}$ 单调递增有界，$\{b_n\}$ 单调递减有界，根据致密性定理，存在 $\{b_n\}$ 的子列 $\{b_{n_k}\}$ 收敛，

设 $\lim\limits_{k\to\infty} b_{n_k}=\xi$。

由 $\{[a_n,b_n]\}$ 是一个区间套，所以 $\lim\limits_{k\to\infty}(b_{n_k}-a_{n_k})=0$，推出 $\lim\limits_{k\to\infty} a_{n_k}=\xi$，由 $\{a_n\},\{b_n\}$ 的单调性可推出，$\forall k$，有 $\xi\in[a_{n_k},b_{n_k}]$。又 $\forall n,\exists k$, 使得 $[a_{n_k},b_{n_k}]\subset[a_n,b_n]$，故 $\xi\in[a_n,b_n]$。

最后证明 ξ 是唯一的。

假设还有另外的 $\xi'\in[a_n,b_n](n=1,2,\cdots)$，则 $|\xi-\xi'|\le|a_n-b_n|\to 0$，故 $\xi=\xi'$，从而唯一性得证。 ■

问题 2.29 用有限覆盖定理证明闭区间套定理。

证明 用反证法。假设 $[a_n,b_n](n=1,2,\cdots)$ 没有公共点，则 $[a_1,b_1]$ 上的任何一点都不是 $\{[a_n,b_n]\}$ 的公共点，从而 $\forall x\in[a_1,b_1]$，总存在一个开区间 $(x-\delta_x,x+\delta_x)$，使得 $(x-\delta_x,x+\delta_x)$ 与所有的 $[a_n,b_n]$ 无交集，即存在某个 $[a_{n_x},b_{n_x}]$ 使得 $[a_{n_x},b_{n_x}]\cap(x-\delta_x,x+\delta_x)=\emptyset$。

当 x 取遍 $[a_1,b_1]$ 上的所有点时，就得到一无限开区间集 $H=\{(x-\delta_x,x+\delta_x)|x\in[a_1,b_1]\}$ 覆盖了闭区间 $[a_1,b_1]$，由有限覆盖定理，存在有限个开区间 $H=\{(x_i-\delta_{x_i},x_i+\delta_{x_i})|i=1,2,\cdots,k\}$ 覆盖 $[a_1,b_1]$，其中 $[a_{n_{x_i}},b_{n_{x_i}}]\cap(x_i-\delta_{x_i},x_i+\delta_{x_i})=\emptyset$。

因为 $[a_{n_{x_i}},b_{n_{x_i}}]$ 只有有限个，由闭区间套定理的条件知，它们是一个套一个，因此其中一定有一个最小区间，设为 $[a_{n_0},b_{n_0}]$，这时 $[a_{n_0},b_{n_0}]\cap(x_i-\delta_{x_i},x_i+\delta_{x_i})=\emptyset(i=1,2,\cdots,k)$。

从而 $[a_{n_0},b_{n_0}]\cap\bigcup\limits_{i=1}^{k}(x_i-\delta_{x_i},x_i+\delta_{x_i})=\emptyset$，这与 $[a_{n_0},b_{n_0}]\subseteq[a_1,b_1]$ 矛盾。

所以 $[a_n,b_n](n=1,2,\cdots)$ 应有公共点。 ■

问题 2.30 用 Dedekind 分割定理证明闭区间套定理。

证明 设 $[a_n,b_n]$ 为一列闭区间套。令 $\{a_n\}$ 全体上界为上类 B，令 $A=\mathbb{R}\setminus B$。由已知

$$[a_1,b_1]\supset[a_2,b_2]\supset\cdots\supset[a_{n-1},b_{n-1}]\supset[a_n,b_n]$$

可知

$$a_1\le a_2\le\cdots\le b_n\le\cdots\le b_2\le b_1,$$

所以有结论：

(1) 不空：由于 $b_1\in B,a_1\in A$，则 A,B 两类不空；

(2) 不漏：由于 $A=\mathbb{R}\setminus B$，则 A,B 两类不漏；

(3) 不乱：$\forall a\in A,\forall b\in B$，可知 a 不是 $\{a_n\}$ 的上界，因此存在 $x\in\{a_n\}$ 使 $a<x$。又 b 为 $\{a_n\}$ 的上界，所以 $x\le b$，则有 $a<x\le b$，即得 $a<b$，故 A,B 不乱。

因此，(A,B) 是实数域的一个 Dedekind 分割。此时我们运用 Dedekind 原理知，存在唯一的 c，$\forall a\in A,\forall b\in B$，有 $a<c\le b$。所以

$$\forall n,\ a_n\le c\le b_n,$$

又因为 $\lim\limits_{n\to\infty}(b_n-a_n)=0$，所以

$$\lim_{n\to\infty}a_n=c=\lim_{n\to\infty}b_n.$$

■

2.7 有限覆盖定理

定理 2.10 (有限覆盖定理)

(a) 定义：设 $E \subset \mathbb{R}$，$\{O_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ 是一族开区间，若满足

$$\bigcup_{\lambda \in \Lambda} O_\lambda \supseteq E,$$

则称 $\{O_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ 为 E 的开覆盖。若 E 的任何开覆盖都存在有限子覆盖（即存在有限个 $O_{\lambda_1}, ..., O_{\lambda_n}$ 仍覆盖 E），则称 E 是紧的。

(b) 定理内容：任何有界闭区间 $[a, b]$ 都是紧的（闭区间上的任一开覆盖必存在有限子覆盖）。

(c) 等价描述：设 $\{\Delta\}$ 是一组开区间，若 $\forall x \in [a, b]$，$\exists \Delta_x \in \{\Delta\}$，使得 $x \in \Delta_x$，则称 $\{\Delta\}$ 为闭区间 $[a, b]$ 的一个开覆盖。定理指出，$[a, b]$ 的任一开覆盖 $\{\Delta\}$ 中，必存在有限子集 $\{\Delta_1, \Delta_2, \cdots, \Delta_r\} \subset \{\Delta\}$，$\{\Delta_1, \Delta_2, \cdots, \Delta_r\}$ 仍为 $[a, b]$ 的一个开覆盖（称之为有限子覆盖）。

问题 2.31 用确界原理证明有限覆盖定理。

证明 设 H 为 $[a, b]$ 的一个开覆盖，令数集 $S = \{x | a < x \le b, [a, x]$ 能被 H 中的有限个开区间覆盖 $\}$，显然 S 有上界 b，因为 a 点的邻域 $(a-\delta, a+\delta)$ 必含有 $[a, b]$ 中的点，设为 x，则开区间 $(a-\delta, a+\delta)$ 必覆盖 $[a, x]$，故 S 非空。由确界存在定理知 S 必有上确界，设 $\xi = \sup S$。

下面证明 $\xi = b$。反证法：若 $\xi \ne b$，则 $a < \xi < b$，由 H 覆盖闭区间 $[a, b]$ 知，一定存在 $(\alpha_i, \beta_i) \in H$，使 $\xi \in (\alpha_1, \beta_1)$，取 x_1, x_2 使 $a < x_1 < \xi < x_2 < \beta_1$，且 $x_1 \in S$，则 $[a, x_1]$ 能被 H 中有限个开区间覆盖，把 (α_1, β_1) 加进去，就可推出 $x_2 \in S$，这与 $\xi = \sup S$ 矛盾，故 $\xi = b$，即定理的结论成立。 ■

问题 2.32 用单调有界原理证明有限覆盖定理。

证明 设 H 为 $[a, b]$ 的一个开覆盖，假设 H 不存在有限子覆盖，则对 $[a, b]$ 二等分作区间套 $\{[a_n, b_n]\}$，使得每个 $[a_n, b_n]$ 都不存在有限子覆盖。根据区间套的做法知，$\{a_n\}, \{b_n\}$ 都是单调有界数列，故由单调有界定理可推出

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = \xi$$

即 $\forall \varepsilon > 0$，$\exists N$，当 $n > N$ 时有 $\xi - \varepsilon < a_n < \xi + \varepsilon, \xi - \varepsilon < b_n < \xi + \varepsilon$，从而 $[a_n, b_n] \subset (\xi - \varepsilon, \xi + \varepsilon)$。这表明 $[a_n, b_n]$ 已被 $(\xi - \varepsilon, \xi + \varepsilon)$ 所覆盖，这与 $[a_n, b_n]$ 的做法矛盾。于是有限覆盖定理成立。 ■

问题 2.33 用 Cauchy 收敛原理证明有限覆盖定理。

证明 设 H 为 $[a, b]$ 的一个开覆盖，假设 H 不存在有限子覆盖，则对 $[a, b]$ 二等分作区间套 $\{[a_n, b_n]\}$，使得每个 $[a_n, b_n]$ 都不存在有限子覆盖。

由 $\lim\limits_{n\to\infty}(b_n - a_n) = 0$ 知，$\forall \varepsilon > 0, \exists N$，当 $n > N$ 时有 $|b_n - a_n| < \varepsilon$。由于 $\{a_n\}$ 单调递增，$\{b_n\}$ 中的每一个元素都是 $\{a_n\}$ 的上界，故 $\forall m > n > N$，有 $a_n \le a_m \le b_m \le b_n$，所以

$$|a_m - a_n| = a_m - a_n \le b_n - a_n = |b_n - a_n| < \varepsilon,$$

$$|b_m - b_n| = b_n - b_m \le b_n - a_n = |b_n - a_n| < \varepsilon.$$

故由柯西收敛准则知，$\{a_n\}$、$\{b_n\}$ 都收敛，再由 $\lim\limits_{n\to\infty}(b_n - a_n) = 0$ 知极限相同，设 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = \xi$。

即 $\forall \varepsilon > 0, \exists N,\quad n > N$ 时有 $\xi - \varepsilon < a_n < \xi + \varepsilon,\quad \xi - \varepsilon < b_n < \xi + \varepsilon$, 从而 $[a_n, b_n] \subset (\xi - \varepsilon, \xi + \varepsilon)$。这表明 $[a_n, b_n]$ 已被 $(\xi - \varepsilon, \xi + \varepsilon)$ 所覆盖，这与 $[a_n, b_n]$ 的做法矛盾。

于是有限覆盖定理成立。 ■

问题 2.34 用致密性定理证明有限覆盖定理。

证明 设 H 为 $[a, b]$ 的一个开覆盖，假设 H 不存在有限子覆盖，则对 $[a, b]$ 二等分作区间套 $\{[a_n, b_n]\}$，使得每个 $[a_n, b_n]$ 都不存在有限子覆盖。

根据闭区间套的做法知，$\{b_n\}$ 为有界数列，故由致密性定理知，存在 $\{b_n\}$ 的子数列 $\{b_{n_k}\}$ 收敛，设 $\lim\limits_{k\to\infty} b_{n_k} = \xi$，由 $\lim\limits_{k\to\infty}(b_{n_k} - a_{n_k}) = 0$ 知 $\lim\limits_{k\to\infty} a_{n_k} = \xi$，显然 $\xi \in [a, b]$。

由 $[a,b]$ 被 H 覆盖知，存在开区间 $(\alpha,\beta)\in H$，使 $\xi\in(\alpha,\beta)$，由 $\lim\limits_{k\to\infty}a_{n_k}=\lim\limits_{k\to\infty}b_{n_k}=\xi$ 知，存在充分大的 K 使得 $[a_{n_K},b_{n_K}]\subset(\alpha,\beta)$，这与 $[a_{n_K},b_{n_K}]$ 不能被 H 有限覆盖矛盾。■

问题 2.35 用闭区间套定理证明有限覆盖定理。

证明 用反证法。假设定理的结论不成立，即不能用 H 中有限个开区间来覆盖 $[a,b]$。

将 $[a,b]$ 等分为两个子区间，则其中至少有一个子区间不能用 H 中的有限个开区间来覆盖。记这个子区间为 $[a_1,b_1]$，则 $[a_1,b_1]\subseteq[a,b]$，且 $b_1-a_1=\dfrac{1}{2}(b-a)$。

再将 $[a_1,b_1]$ 等分为两个子区间，同样，其中至少有一个子区间不能用 H 中的有限个开区间来覆盖，记这个子区间为 $[a_2,b_2]$，则 $[a_2,b_2]\subseteq[a_1,b_1]$，且 $b_2-a_2=\dfrac{1}{2^2}(b-a)$。

重复上述步骤并不断地进行下去，则得到一个闭区间列 $\{[a_n,b_n]\}$，它满足：

(i) $[a_n,b_n]\supseteq[a_{n+1},b_{n+1}](n=1,2,\cdots)$;

(ii) $\lim\limits_{n\to\infty}(b_n-a_n)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{b-a}{2^n}=0$;

(iii) 每一个 $[a_n,b_n]$ 都不能用 H 中有限个开区间来覆盖，

由区间套定理，存在唯一的一点 $\xi\in[a_n,b_n](n=1,2,\cdots)$。由于 H 是 $[a_n,b_n]$ 的一个开覆盖，故存在开区间 $(\alpha,\beta)\in H$，使 $\xi\in(\alpha,\beta)$。于是当 n 充分大时有 $[a_n,b_n]\subseteq(\alpha,\beta)$。这表明 $[a_n,b_n]$ 只须用 H 中的一个开区间 (α,β) 就能覆盖，这与挑选 $[a_n,b_n]$ 时的假设”不能用 H 中有限个区间来覆盖”相矛盾。从而证得必存在属于 H 的有限个开区间能覆盖 $[a,b]$。■

问题 2.36 用 Dedekind 分割定理证明有限覆盖定理。

证明 设 $\mathcal{U}$ 是闭区间 $[a,b]$ 的开覆盖，构造集合 $A=(-\infty,x]$，其中 $x\in[a,b]$，并且 $[a,x]$ 能用 $\mathcal{U}$ 中有限个开区间覆盖。

由于 $a\in A$ （此时的 $[a,a]=\{a\}$），所以 $A\neq\emptyset$。同时，因为 $\forall y>b,y\notin A$，所以 $A^c\neq\emptyset$。而 $A^c=(x,+\infty)$，显然 $\forall p\in A,q\in A^c$，有 $p<q$，所以 A^c 满足 Dedekind 定理的条件。

根据 Dedekind 定理，存在唯一实数 ξ，使得 $\xi=\max A$。

A^c 是开区间，不可能有最小值，所以这里直接能得到 $\xi\in A$。

根据 A 的定义可知 $\xi\in[a,b]$ 且 $[a,\xi]$ 能被有限覆盖。而因为 a 被 $\mathcal{U}$ 中某个开区间覆盖，即存在 $U_0\in\mathcal{U}$，使得 $a\in U_0$。在 $U_0\cap(a,b)$ 中取一点 x_0，那么 $[a,x_0]\subset U_0$ 就能被有限个开区间（即 U_0）覆盖，所以 $x_0\in A\Rightarrow a<x_0\leq\xi$。

假设 $\xi<b$，则 (a,b) 是 ξ 的开邻域，因此存在 $\varepsilon>0$，使得 $(\xi-\varepsilon,\xi+\varepsilon)\subset(a,b)$。

另一方面，因为 $[a,\xi]$ 被有限覆盖，记作 $[a,\xi]\subset\bigcup\limits_{i=1}^{n}U_i$，所以存在某个 U_i，使得 $\xi\in U_i$。而 $(\xi-\varepsilon,\xi+\varepsilon)\cap U_i$ 依然是 ξ 的开邻域，所以存在开球 $B(\xi,r)=(\xi-r,\xi+r)\subset(\xi-\varepsilon,\xi+\varepsilon)\cap U_i$。取一点 $y_0\in(\xi,\xi+r)\subset U_i$，那么 $[\xi,y_0]\subset U_i$。

从而 $[a,\xi]\cup[\xi,y_0]\subset\bigcup\limits_{i=1}^{n}U_i\cup U_i$，即 $[a,y_0]\subset\bigcup\limits_{i=1}^{n}U_i$，因此 $y_0\in A$，与 $y_0\in(\xi,\xi+r)\Rightarrow y_0>\xi$ 矛盾。

所以 $\xi=b$，即 $[a,b]$ 能被有限覆盖。■

2.8 Dedekind 分割定理

定理 (Dedekind 分割定理-裴书版)

若将实数分为上、下（非空的）两组：A' 和 A，使得

1. 每个实数必在，且仅在两组之一；
2. 上组 A' 中的每个数必大于下组 A 中的每个数，

则称 A 和 A' 组成一 Dedekind 分割，记作 $A|A'$。每个 $A|A'$ 确定唯一的实数 ξ。下面称它为分割点。

Dedekind 定理指出，此时

1. 要么 $\xi \in A$，则下组 A 中有最大值 ξ，而上组 A' 中无最小值；
2. 要么 $\xi \in A'$，则下组 A 中无最大值，而上组 A' 中有最小值 ξ。

该定理非常直观，意即：在数轴任何地方，用法平面去截，必截得唯一的实数 ξ（表明实轴连续，无空缺）。该实数 ξ 将数轴分成 $A|A'$ 两半，要么 $\xi \in A$，要么 $\xi \in A'$。

定义 (Dedekind 原理)

设 A, B 是实数域 $\mathbb{R}$ 的两个子集，它们满足以下三个条件：

(a) 不空：$A \neq \emptyset$ 且 $B \neq \emptyset$；

(b) 不漏：$A \cup B = \mathbb{R}$；

(c) 不乱：对 $\forall x \in A, y \in B$ 都成立 $x < y$；

则称 $(A|B)$ 为实数域的一个 Dedekind 分割，A 为分割的下集，B 为分割的上集。

定理 (Dedekind 分割定理)

设 $(A \mid B)$ 是实数域的一个 Dedekind 分割，则或者下集 A 中有最大数，或者上集 B 中有最小数。

等价描述：设 $(A \mid B)$ 是实数域的一个 Dedekind 分割，则存在实数 c 使得 $x \le c \le y \quad \forall x \in A, \forall y \in B$ 成立。

实数 c 称为分划 $(A \mid B)$ 的分界点，且 c 是唯一的。

问题 2.37 用确界原理证明 Dedekind 分割定理。

证明 设 $(A \mid B)$ 是实数域 $\mathbb{R}$ 的一个 Dedekind 分割。

我们将证明：上集 B 中存在最小元（或下集 A 中存在最大元的情况类似）。由于 $B \neq \emptyset$ 且对任意 $x \in A, y \in B$ 有 $x < y$，可知 B 在实数集中有下界。

根据确界原理，B 的下确界存在，记为 $\beta = \inf B$。

我们考虑两种可能：

- 若 $\beta \in B$，则 β 是 B 的最小元，结论成立；
- 若 $\beta \notin B$，由于 $A \cup B = \mathbb{R}$ 且 $A \cap B = \emptyset$，必有 $\beta \in A$。

反证法：假设 $\beta \notin B$ 则 $\beta \in A$。

由 A 中无最大元 $\exists \alpha \in A, \alpha > \beta$

因为 $\forall x \in B, x > \beta \Rightarrow \beta = \min B, \alpha > \beta = \min B$, 这意味着 $\alpha \in B$, 矛盾！ ■

问题 2.38 用单调有界原理证明 Dedekind 分割定理。

证明 设 $\mathbb{R}$ 上一个 Dedekind 分割 $(A|B)$。不妨设 A 中无最大元，现证 B 中有最小元。

构造单调数列 $\{a_n\}$ 和单调数列 $\{b_n\}$，$\{a_n\} \subseteq A$，$\{b_n\} \subseteq B$。

$\lim\limits_{n\to\infty}(b_n - a_n) = 0$，由单调有界定理，知 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \xi$，知 $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \eta$。

$b_n > a_n$，由保序性 $\eta \ge \xi$，$0 \le \eta - \xi \le b_n - a_n \to 0$，$n \to \infty$，$\eta = \xi$。

现证 ξ 即 B 中最小元。若 $\xi \in A$，由 A 中无最大元，$\exists x \in A$，$x > \xi$。$\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \eta = \xi$，$\exists N \in \mathbb{N}^+$，$\forall n > N$，$|b_n - \xi| < \varepsilon \Rightarrow \xi > b_n - \varepsilon$。故 $x > \xi > b_n - \varepsilon$，可得 $x \ge b_n \Rightarrow x \in B$ 矛盾。故 $\xi \in B$，且 $\forall n \in \mathbb{N}^+$，$\xi \le b_n$，$\xi$ 即 B

的最小元。 ■

问题 2.39 用 Cauchy 收敛原理证明 Dedekind 分割定理。

证明 设 $(A \mid B)$ 是全体实数 $\mathbb{R}$ 的任意一个分割。由于 $A \neq \emptyset$，$B \neq \emptyset$，可以任取 $a_1 \in A$，$b_1 \in B$，则 $b_1 > a_1$。将区间 $[a_1, b_1]$ 等分为二：

如果分点 $\frac{a_1+b_1}{2} \in A$，则取右半区间 $[a_2, b_2] = \left[\frac{a_1+b_1}{2}, b_1\right]$；如果 $\frac{a_1+b_1}{2} \in B$，则取左半区间 $[a_2, b_2] = \left[a_1, \frac{a_1+b_1}{2}\right]$。无论如何选择，都有 $a_2 \in A$，$b_2 \in B$。

如此继续下去，得到闭区间列 $\{[a_n, b_n]\}$，满足：

(i) $[a_{n+1}, b_{n+1}] \subset [a_n, b_n]$（$n = 1, 2, \ldots$）

(ii) $\lim\limits_{n\to\infty}(b_n - a_n) = 0$

(iii) $a_n \in A$，$b_n \in B$（$n = 1, 2, \ldots$）

由 (i) 和 (ii) 可知数列 $a_1, b_1, a_2, b_2, \ldots, a_n, b_n, \ldots$ 是 Cauchy 数列，因而收敛。设其极限为 $c \in \mathbb{R}$。

若 $c \in A$，可证 c 必为 A 的最大值。事实上，假如存在 $x \in A$ 使得 $c < x$，取 $\varepsilon = x - c > 0$，则 $(c-\varepsilon, c+\varepsilon) \subset A$。由 (iii)，每个 $b_n \notin (c-\varepsilon, c+\varepsilon)$，这与数列收敛于 c 矛盾。因此 c 为 A 的最大值，此时 B 无最小值。

类似地，若 $c \in B$，则 c 必是 B 的最小值，此时 A 无最大值。

这就证明了：对实数集的任意分割 $(A \mid B)$，要么 A 有最大值且 B 无最小值，要么 B 有最小值且 A 无最大值，即 $(A \mid B)$ 是一个 Dedekind 分割。 ■

问题 2.40 用闭区间套定理证明 Dedekind 分割定理。

证明 设 $\mathbb{R}$ 上的 Dedekind 分割 $A|B$。不妨设 A 中无最大元，现证 B 中必有最小元。

任取 a, b，$a \in A, b \in B$，将闭区间 $[a, b]$ 采用 Bolzano 二分法 $\left[a, \frac{a+b}{2}\right], \left[\frac{a+b}{2}, b\right]$。其中包含有 A 和 B 元素的记作 $[a_n, b_n]$，依次取可得一列闭区间序列 $\{[a_n, b_n]\}$ $(n = 1, 2, \cdots)$，$\lim\limits_{n\to\infty}(b_n - a_n) = 0$。

由闭区间定理，$\exists \xi \in [a_n, b_n]$ $(n = 1, 2, \cdots)$，且 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \xi = \lim\limits_{n\to\infty} b_n$。

反证假设 $\xi \in A$，A 中无最大元，$\exists x > \xi$，$x \in A$。

$\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \xi$，$\exists N \in \mathbb{N}^+$，$\forall n > N$，$|b_n - \xi| < \varepsilon$，故 $b_n < \xi + \varepsilon$。

$x > \xi > b_n - \varepsilon$，$x \geq b_n$，$b_n$ 单调递减，$x \in B$ 矛盾。

故 $\xi \in B$，现证 $\xi = \min B$。

反证假设 $\exists \eta \in B$，$\eta < \xi$，取 $\varepsilon = \eta - \xi > 0$，由 $b_n < \xi + \varepsilon$，知 $b_n < 2\xi - \eta$。

$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \xi$，$\exists N \in \mathbb{N}^+$，$\forall n > N$，$|a_n - \xi| < \varepsilon$ 故 $a_n > \xi - \varepsilon > \eta$。

故 $[a_n, b_n] \subset (\eta, 2\xi - \eta)$，$(\eta, 2\xi - \eta)$ 包含在 B 中, 无 A 中元素, 与构造矛盾。 ■

问题 2.41 用致密性定理证明 Dedekind 分割定理。

证明 设 $A|B$ 是 $\mathbb{R}$ 上的一个 Dedekind 分割，A 中无最大值，现证 B 中有最小值。

任取 a, b，$a \in A, b \in B$，且 $[a, b]$ 利用 Bolzano 二分法。

$[a, \frac{a+b}{2}]$，$[\frac{a+b}{2}, b]$ 至少有一个既含 A 的元素又含 B 的元素，记作 $[a_n, b_n]$。

这是因为将 $[a, b]$ 分为两个子区间,

$$\left[a, \frac{a+b}{2}\right] \quad \text{和} \quad \left[\frac{a+b}{2}, b\right].$$

中点 $\frac{a+b}{2}$ 要么属于 A，要么属于 B（因为 $A \cup B = \mathbb{R}$）。

情况分析:

- 如果 $\frac{a+b}{2} \in A$:
  - 右子区间 $\left[\frac{a+b}{2}, b\right]$ 包含 $\frac{a+b}{2} \in A$ 和 $b \in B$。
- 如果 $\frac{a+b}{2} \in B$:
  - 左子区间 $\left[a, \frac{a+b}{2}\right]$ 包含 $a \in A$ 和 $\frac{a+b}{2} \in B$。

依次取分 $\{[a_n,b_n]\}$ $(n=1,2,\cdots)$

显然 $\{a_n\}$ 单调递增有上界，$\{b_n\}$ 单调递减有下界。

由致密性定理知，$\{a_n\}$ 存在收敛子列 $\{a_{n_k}\}$，$\lim\limits_{k\to\infty} a_{n_k}=\xi$。

$\forall\varepsilon>0,\exists N\in\mathbb{N}^+,\forall n>N,|a_{n_k}-\xi|<\varepsilon$ 即 $\xi-\varepsilon<a_{n_k}<\xi+\varepsilon)$

$\forall n>N,\forall k\geq n$，由 $\{a_n\}$ 单调递增 $n>N$ 时，$\xi-\varepsilon<a_{n_k}<a_n<\xi+\varepsilon$ 故 $\{a_n\}$ 收敛于 ξ，由于 $\lim\limits_{n\to\infty}(b_n-a_n)=0\Rightarrow\{b_n\}$ 收敛于 ξ。则 A 中无最大值，易证 $\xi\in B$（反证法，如2.38中的过程）。

现证 ξ 是 B 中最小元，反证假设 $\exists\eta<\xi,\eta\in B$，那么 $[a_n,b_n]\subseteq(\eta,2\xi+\varepsilon)$，此区间必在 B 中，与闭区间套既包含 B 中元素又包含 A 中元素矛盾！ ■

问题 2.42 用有限覆盖定理证明 Dedekind 分割定理。

证明 (裴书版定理符号) 用有限覆盖定理证明 Dedekind 定理。设全体实数被分别为非空的 A,A' 两组，A,A' 组成一个 Dedekind 分割 $A|A'$，即 $\mathbb{R}=A\cup A',A\cap A'=\emptyset$，且 $\forall x\in A,x'\in A'$，恒有 $x<x'$。要证明 Dedekind 定理，就是要证明：每个 Dedekind 分割 $A|A'$，确定存在某 $\xi\in\mathbb{R}$，使得

i) 要么 $\xi\in A,\xi$ 是 A 的最大值，此时 A' 无最小值；

ii) 要么 $\xi\in A',\xi$ 是 A' 的最小值，此时 A 无最大值。

这等价于说下面两种（反面）情况皆不会发生：

iii) A 有最大值，且 A' 有最小值；

iv) A 无最大值，且 A' 无最小值。

亦等价于说：实数是连续的，对每个分割 $A|A'$，都必确定唯一实数 ξ 作为分割点。

首先，证明情况 iii) 不会发生。(反证法）假设 $\alpha=\max A,\beta=\min A'$，那么：若 $\alpha<\beta$，则与 $A\cup A'=\mathbb{R}$ 矛盾；若 $\alpha=\beta$，则与 $A\cap A'=\emptyset$ 矛盾；若 $\alpha\geq\beta$，则 (A 中之数) $<$ (A' 中之数)，矛盾。

其次，用有限覆盖定理证明情况 iv) 也不会发生。(反证法）假设 A 无最大值，且 A' 无最小值（看有什么矛盾）。

取 $a\in A,b\in A'$，则 $\forall x\in[a,b]$：若 $x\in A$，(因 A 无最大值) 当 $r_i>0$ 充分小时 $x+r_i$ 也应属于 A。于是小开区间 $(x-r_i,x+r_i)\subset A$；同理，因 A' 无最小值，若 $x\in A'$，当 $r_i>0$ 充分小时 $x-r_i$ 也应属于 A'，从而应有 $(x-r_i,x+r_i)\subset A'$。可见 $[a,b]$ 上每点可找到如此的小区间，全体 $\{(x-r_i,x+r_i)\}_{x\in[a,b]}$ 便组成 $[a,b]$ 上的一组开覆盖。利用有限覆盖定理，应存在有限子覆盖。注意，既然有有限个小开区间覆盖 $[a,b]$，相邻两个小开区间必有公共点，故相邻的小区间要么只含 A 之成员，要么只含 A' 之成员。于是这个有限子覆盖，要么全是 A 之成员，要么全是 A' 之成员。这与最初的选择 $(a\in A,b\in A')$ 矛盾，这就证明了情况 iv) 不可能发生。Dedekind 定理获证。 ■

第三章 计算技巧

3.1 有理函数积分

有理函数积分是指对形如 $\dfrac{R(x)}{P(x)}$ 的函数积分. 通常分为如下三个步骤：有理函数拆分、求待定系数、积分.

有理函数拆分

1. 确保有理函数是真分式. 如果有理函数不是真分式, 需要先把它拆分成多项式和真分式之和. 假设 $\dfrac{R(x)}{P(x)}=R_1(x)+\dfrac{r(x)}{P(x)}$, 其中 $r(x)$ 也是 x 的多项式函数, $\dfrac{r(x)}{P(x)}$ 为真分式. 然后继续对 $\dfrac{r(x)}{P(x)}$ 进行拆分.
2. 在实数范围内分母因式分解彻底, 设为 $\dfrac{r(x)}{P(x)}=\dfrac{r(x)}{(x-A)^p(x^2+Mx+N)^q}$.
3. 拆分 $\dfrac{r(x)}{(x-A)^p(x^2+Mx+N)^q}=\dfrac{a_1}{x-A}+\dfrac{a_2}{(x-A)^2}+\cdots+\dfrac{a_p}{(x-A)^p}+\dfrac{b_1x+c_1}{x^2+Mx+N}+\cdots+\dfrac{b_qx+c_q}{(x^2+Mx+N)^q}$

笔记 这边的拆分方式和我们刚开始学的方法不同，例如按这种拆分方式为 $\dfrac{3x^2+1}{x(x+1)^2}=\dfrac{a}{x}+\dfrac{b}{x+1}+\dfrac{c}{(x+1)^2}$, 而按我们学的拆分法应拆为 $\dfrac{3x^2+1}{x(x+1)^2}=\dfrac{a}{x}+\dfrac{bx+c}{(x+1)^2}$, 但本质是相同的. 之后均采用这种拆分方式，它在计算系数和处理积分的时候更方便.

求待定系数

主要有以下几个方法：

1. **构造方程组法.** 通分, 化简, 相同次幂的系数相同, 构造方程组, 解出待定系数.
2. **留数法.** 等式两边同时乘以某个因子, 再令该因子为零, 解出待定系数.
3. **极限法.** 如果已经求得几个待定系数, 可以用对 x 取极限的方法求得剩余待定系数.
4. **特殊值法.** 如果已经求得几个待定系数, 可以用对 x 取特殊值的方法求得剩余待定系数.

注 第一种方法就是通分求待定系数，过程往往较为繁琐, 我们通常采用后三种方法.

例题 3.1 $\displaystyle\int\frac{\mathrm{d}x}{(x-1)(x-2)(x-3)}=\frac{a}{x-1}+\frac{b}{x-2}+\frac{c}{x-3}$

解 [留数法] 两边同乘以 $(x-1)$ 可得 $\dfrac{1}{(x-2)(x-3)}=a+(\dfrac{b}{x-2}+\dfrac{c}{x-3})(x-1)$, 再令 $x=1$ 即可得 $a=-\dfrac{1}{2}$. 同理得 $b=-1.c=\dfrac{1}{2}$ 所以 $\displaystyle\int\frac{\mathrm{d}x}{(x-1)(x-2)(x-3)}=-\frac{1}{2}\ln|x-1|+\frac{1}{2}\ln|x-2|-\frac{1}{2}\ln|x-3|+C.$ ■

例题 3.2 $\dfrac{3x^2+1}{x(x+1)^2}=\dfrac{a}{x}+\dfrac{b}{x+1}+\dfrac{c}{(x+1)^2}$

解 两边同乘 x 可得 $\dfrac{3x^2+1}{(x+1)^2}=a+(\dfrac{b}{x+1}+\dfrac{c}{(x+1)^2})x$. 令 $x=0$ 可得 $a=1$.

两边同乘 $x+1$ 时会出现 $\dfrac{3x^2+1}{x(x+1)}=(\dfrac{a}{x}+\dfrac{c}{(x+1)^2})(x+1)+b$, 但此时不能令 $x=-1$.

我们考虑以下两种处理方法：

留数法：先考虑同乘 $(x+1)^2$ 有 $\dfrac{3x^2+1}{x}=c+(\dfrac{1}{x}+\dfrac{b}{x+1})(x+1)^2$, 令 $x=-1$ 可得 $c=-4$

极限法：在 $\dfrac{3x^2+1}{x(x+1)}=(\dfrac{a}{x}+\dfrac{c}{(x+1)^2})(x+1)+b$ 中令 $x\to\infty$ 有 $3=1+b$, 则 $b=2$ ■

笔记 1. 因子 $\dfrac{1}{(x-A)^p}$ 最高次幂的系数 $p=1$，可以直接用留数法（不求导）求得。

2. 因子 $\dfrac{1}{(x-A)^p}$ 其他次幂的系数，可以通过留数法（求导）求得，也可以用极限法或者特殊值法求得。

3. 因子 $\dfrac{1}{(x^2+Mx+N)^q}$ 一般同特殊值法和极限法求得待定系数。