第八讲 UMVUE

例：设 $X \sim N(a, \sigma^2)$，σ^2 已知，a 未知，证明：$\overline{X}$ 是 a 的 UMVUE

证：$\forall\ \varphi(X_1, \cdots, X_n)$ 满足 $E\varphi = 0$

使 $E\overline{X}\cdot\varphi = 0$

$$0 = E\varphi(X_1, \cdots, X_n) = \int\cdots\int \varphi(x_1, \cdots, x_n)\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\right)^n \exp\left\{-\sum_{i=1}^{n}\frac{(x_i-a)^2}{2\sigma^2}\right\} dx_1\cdots dx_n$$

两边关于 a 求导

$$0 = \int\cdots\int n(\overline{x}-a)\varphi(x_1, \cdots, x_n)\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\right)^n \exp\left\{-\sum_{i=1}^{n}\frac{(x_i-a)^2}{2\sigma^2}\right\}$$

例 6.4.2 设 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 是来自指数分布 $Exp(1/\theta)$ 的样本，则根据因子分解定理可知，$T = x_1 + x_2 + \cdots + x_n$ 是 θ 的充分统计量，由于 $E(T) = n\theta$，所以 $\bar{x} = T/n$ 是 θ 的无偏估计. 设 $\varphi = \varphi(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 是 0 的任一无偏估计，则

$$E(\varphi(x_1, \cdots, x_n)) = \int_0^\infty \cdots \int_0^\infty \varphi(x_1, \cdots, x_n) \cdot \prod_{i=1}^{n}\left\{\frac{1}{\theta}\cdot e^{-x_i/\theta}\right\} dx_1 \cdots dx_n = 0,$$

即

$$\int_0^\infty \cdots \int_0^\infty \varphi(x_1, \cdots, x_n) \cdot e^{-(x_1+\cdots+x_n)/\theta} dx_1 \cdots dx_n = 0,$$

两端对 θ 求导，得

$$\int_0^\infty \cdots \int_0^\infty \frac{n\bar{x}}{\theta^2}\varphi(x_1, \cdots, x_n) \cdot e^{-(x_1+\cdots+x_n)/\theta} dx_1 \cdots dx_n = 0.$$

这说明 $E(\bar{x}\cdot\varphi) = 0$，从而

$$\mathrm{Cov}(\bar{x}, \varphi) = E(\bar{x}\cdot\varphi) - E(\bar{x})\cdot E(\varphi) = 0.$$

由定理 6.4.1，$\bar{x}$ 是 θ 的 UMVUE.

2. (Rao-Blackwell定理)

定理 6.4.2 设总体概率函数是 $p(x;\theta)$，$x_1,x_2,\cdots,x_n$ 是其样本，$T=T(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 是 θ 的充分统计量，则对 θ 的任一无偏估计 $\hat{\theta}=\hat{\theta}(x_1,x_2,\cdots,x_n)$，令 $\tilde{\theta}=E(\hat{\theta}\mid T)$，则 $\tilde{\theta}$ 也是 θ 的无偏估计，且

$\hat{\theta}^{*}=\tilde{\theta}$

$$\mathrm{Var}(\tilde{\theta})\leqslant \mathrm{Var}(\hat{\theta}).$$

已经在T的条件下了

$$E(\hat{\theta}\mid T)=\hat{\theta}$$

因为 $\tilde{\theta}=E(\hat{\theta}\mid T)$

证明 由于 $T=T(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 是充分统计量，故而 $\tilde{\theta}=E(\hat{\theta}\mid T)$ 与 θ 无关，因此它也是 θ 的一个估计（统计量），根据重期望公式，有

$$E(\tilde{\theta})=E[E(\hat{\theta}\mid T)]=E(\hat{\theta})=\theta,$$

故 $\tilde{\theta}$ 是 θ 的无偏估计．再考察其方差

$$\mathrm{Var}(\hat{\theta})=E[(\hat{\theta}-\tilde{\theta})+(\tilde{\theta}-\theta)]^2=E(\hat{\theta}-\tilde{\theta})^2+E(\tilde{\theta}-\theta)^2+2E[(\hat{\theta}-\tilde{\theta})(\tilde{\theta}-\theta)],$$

由于

$$E[(\hat{\theta}-\tilde{\theta})(\tilde{\theta}-\theta)]=E\{E[(\hat{\theta}-\tilde{\theta})(\tilde{\theta}-\theta)\mid T]\}=E\{(\tilde{\theta}-\theta)E[(\hat{\theta}-\tilde{\theta})\mid T]\}=0,$$

$$=E\{(\tilde{\theta}-\theta)[\underbrace{E(\hat{\theta}\mid T)}_{\tilde{\theta}}-\underbrace{E(\tilde{\theta}\mid T)}_{E[E(\hat{\theta}\mid T)\mid T]=E(\hat{\theta}\mid T)=\tilde{\theta}}]\}=0$$

由此即有

$$\mathrm{Var}(\hat{\theta})=E(\hat{\theta}-\tilde{\theta})^2+\mathrm{Var}(\tilde{\theta}),$$

由于上式右端第一项非负，这就证明了第二个结论．

4. 唯一性证明：

T是充分完备的，$\forall\ E\hat{\theta}_1=\theta$，$E\hat{\theta}_2=\theta$

$E[\hat{\theta}_1\mid T]\triangleq\hat{\theta}_1^{*}$，$E[\hat{\theta}_2\mid T]=\hat{\theta}_2^{*}$

$E\hat{\theta}_1^{*}=\theta$，$E\hat{\theta}_2^{*}=\theta$

求重期望

$E[E(\hat{\theta}_1\mid T)]-E[E(\hat{\theta}_2\mid T)]=0$

$E\{\underbrace{E(\hat{\theta}_1\mid T)-E(\hat{\theta}_2\mid T)}_{\underbrace{g_1(T)-g_2(T)}_{g(T)}}\}=0$

T完备统计量

$\Rightarrow P\{g(T)=0\}=1$

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{找到充分完备统计量 }T\\ \text{构造 }g(T)\text{，使 }Eg(T)=\theta\\ \text{则 }g(T)\text{ 就是 UMVUE}\end{array}}$$

(书P288 定理6.4.1 表明θ的UMVUE必与任一零的无偏估计不相关，反之亦然 (书P288 例6.4.2)

定理 6.4.1 设 $X=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 是来自某总体的一个样本，$\hat\theta=\hat\theta(X)$ 是 θ 的一个无偏估计，$\mathrm{Var}(\hat\theta)<\infty$. 则 $\hat\theta$ 是 θ 的 UMVUE 的充要条件是，对任意一个满足 $E(\varphi(X))=0$ 和 $\mathrm{Var}(\varphi(X))<\infty$ 的 $\varphi(X)$，都有

$$\mathrm{Cov}_\theta(\hat\theta,\varphi)=0,\quad \forall\theta\in\Theta.$$

这个定理表明：θ 的 UMVUE 必与任一零的无偏估计不相关，反之亦然，这是 UMVUE 的重要特征.

第八讲 一致最小方差无偏估计

1. 一致最小方差无偏估计(UMVUE)的定义.

设 $\hat\theta^*$ 是 θ 的无偏估计，若对于 θ 的任意一个无偏估计 $\hat\theta$，都有 $D\hat\theta^*\le D\hat\theta,\forall\theta\in\Theta$,（满足 $E\hat\theta^*=\theta$）则称 $\hat\theta^*$ 是 θ 的一致最小方差无偏估计。记为 UMVUE。⟺ $\forall E\hat\theta=\theta$，$\exists\hat\theta^*$，满足 $E\hat\theta^*=\theta$，且 $D\hat\theta^*\le D\hat\theta$，则称 $\hat\theta^*$ 是一致最小方差无偏估计

2. (Rao-Blackwell 定理) 书P289 定理6.4.2

设$(X_1,\ldots X_n)$为取自总体 $X\sim F(x;\theta)$的样本，$\theta\in\Theta$ 未知，若 $T=T(X_1,\ldots X_n)$是 θ 的充分统计量，$\hat\theta$ 是 θ 的任一无偏估计，

记 $\hat\theta^*=E[\hat\theta\,|\,T]$,则有 $E\hat\theta^*=\theta,\forall\theta\in\Theta$，且 $D\hat\theta^*\le D\hat\theta,\forall\theta\in\Theta$。（为什么 $E[\hat\theta\,|\,T]$ 是一个估计量？）

（即把一个无偏估计 $\hat\theta$ 对某个充分统计量 T 求条件期望 $E(\hat\theta\,|\,T)$ 可获得一个更有效的无偏估计.）

3. 所以 θ 的一致最小方差无偏估计一定是在 θ 的充分的无偏估计类里寻找。（为什么？）
进一步，如果充分无偏估计是唯一的，那么它一定就是 θ 的一致最小方差无偏估计（UMVUE）
4. 问：什么条件下 θ 的充分无偏估计是唯一的呢？

设$(X_1,\ldots X_n)$为取自总体 $X\sim F(x;\theta)$的样本，$\theta\in\Theta$ 未知，若 $T=T(X_1,\ldots X_n)$是 θ 的充分完备统计量，$\hat\theta$ 是 θ 的任一无偏估计，记 $\hat\theta^*=E[\hat\theta\,|\,T]$,则 $\hat\theta^*$ 是 θ 的一致最小方差无偏估计。

5. 寻找 UMVUE 的方法：先寻找一个 ① 充分完备统计量 $T=T(X_1,\cdots X_n)$ 和 θ 的一个 ② 无偏估计 $g(T)$，则 $g(T)$ 就是 θ 的 UMVUE.

6. 有效估计一定是 UMVUE，但 UMVUE 不一定是有效估计。

例：设总体 $X\sim N(\mu,1)$，则 μ^2 的 UMVUE $T=\bar X^2-1/n$ 并不是 μ^2 的有效估计。

证： $f(x;\mu)=\left(\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)e^{-\frac12(x-\mu)^2}$

①找充分完备统计量

$$\Rightarrow L(\mu)=\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)^n\exp\left\{-\frac12\sum_{i=1}^n(x_i-\mu)^2\right\}=\underbrace{\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)^n e^{-\frac{n\mu^2}{2}}}_{C(\mu^2)}\cdot\exp\left\{\underbrace{\sqrt{\mu^2}}_{b(\mu^2)}\underbrace{\left(\sum_{i=1}^n x_i\right)}_{T}\right\}\cdot\underbrace{e^{-\frac12\sum_{i=1}^n x_i^2}}_{h(x_1,\cdots,x_n)}$$

$$\triangleq C(\mu^2)\exp\{b(\mu^2)T\}h(x_1,\cdots,x_n)$$ (指数型分布族)

所以 $\sum_{i=1}^n x_i=n\bar X$ 是未知参数 μ^2 的充分完备统计量。

②判断是否为无偏估计

又因为 $ET=E[\bar X^2-1/n]=E\bar X^2-1/n=D\bar X+(E\bar X)^2-1/n=1/n+\mu^2-1/n=\mu^2$，且 $T=\bar X^2-1/n$ 又是 $\sum_{i=1}^n x_i=n\bar X$ 的函数，所以 $T=\bar X^2-1/n$ 是 μ^2 的 UMVUE。

计算 $\ln f(X;\mu)=\ln\left(\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)-\dfrac12(X-\mu)^2,\dfrac{\partial\ln f(X;\mu)}{\partial\mu}=(X-\mu),\dfrac{\partial^2\ln f(X;\mu)}{\partial\mu^2}=-1$

费希尔信息量 $I(\mu)=-E\left[\dfrac{\partial^2\ln f(X;\mu)}{\partial\mu^2}\right]=1$，所以 μ^2 的 R-C 下界为 $\dfrac{[g'(\mu)]^2}{nI(\mu)}=\dfrac{4\mu^2}{n}$。

进一步，$DT=D[\bar X^2-1/n]=E\bar X^4-(E\bar X^2)^2=\dfrac{2}{n^2}+\dfrac{4\mu^2}{n}>\dfrac{4\mu^2}{n}$。所以 T 不是 μ^2 的有效估计。

1. 设总体 $X\sim\Gamma(\alpha,\beta)$分布，其中 $\alpha>0$ 已知,$\beta>0$ 未知. 试求 $g(\beta)=1/\beta$ 的极大似然估计，UMVUE，有效估计。

sol: $f(x;\beta)=\frac{\beta^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)}e^{-\beta x}x^{\alpha-1},\ x>0$

$$L(\beta)=\frac{\beta^{n\alpha}}{[\Gamma(\alpha)]^n}e^{-\beta\sum_{i=1}^n x_i}\cdot\prod_{i=1}^n x_i^{\alpha-1}$$

$$\ln L(\beta)=n\alpha\ln\beta-n\ln\Gamma(\alpha)-\beta\sum_{i=1}^n x_i+(\alpha-1)\sum_{i=1}^n\ln x_i$$

$$\frac{\partial\ln L(\beta)}{\partial\beta}=\frac{n\alpha}{\beta}-\sum_{i=1}^n x_i=0$$

$$\hat{g}(\beta)=\left(\widehat{\frac{1}{\beta}}\right)_{MLE}=\frac{\overline{X}}{\alpha}$$

$$L(\beta)=\underbrace{\frac{\beta^{n\alpha}}{[\Gamma(\alpha)]^n}}_{C(\frac{1}{\beta})}\exp\{\underbrace{-\beta}_{b_1(\frac{1}{\beta})}\underbrace{\sum_{i=1}^n x_i}_{T}\}\underbrace{\prod_{i=1}^n x_i^{\alpha-1}}_{h(x_1,\cdots x_n)}$$

由指数型分布族定义知 $\sum_{i=1}^n X_i$ 是 $\frac{1}{\beta}$ 的充分完备统计量.

$$E\left[\sum_{i=1}^n X_i\right]=nEX=n\frac{\alpha}{\beta}$$

$$E\left[\frac{1}{n\alpha}\sum_{i=1}^n X_i\,\Big|\,\sum_{i=1}^n X_i\right]=\frac{1}{n\alpha}\sum_{i=1}^n X_i$$ 而 $\frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n\alpha}=\frac{\overline{X}}{\alpha}$ 即为UMVUE

$$\frac{\partial\ln L(\beta)}{\partial\beta}=\frac{n\alpha}{\beta}-\sum_{i=1}^n X_i=-n\alpha\left[\frac{\overline{X}}{\alpha}-\frac{1}{\beta}\right]$$

$E\left[\frac{\overline{X}}{\alpha}\right]=\frac{1}{\beta}$，则 $\frac{\overline{X}}{\alpha}$ 是 $\frac{1}{\beta}$ 的有效估计 □

2. 设总体 ξ 的密度函数为 $f(x;\theta)=\begin{cases}\theta x^{\theta-1},0<x<1,\theta>0\\0,\quad else\end{cases}$

(1)求可估函数 $1/\theta$ 的极大似然估计量；(2) 求可估函数 $1/\theta$ 的有效估计量；
(3) 证明 $1/\theta$ 的极大似然估计量也是 $1/\theta$ 的一致最小方差无偏估计量。

解：(1) $\because L(\theta)=\theta^n\prod_{i=1}^n x_i^{\theta-1}\Rightarrow\ln L(\theta)=n\ln\theta+(\theta-1)\ln\prod_{i=1}^n x_i\Rightarrow$ 令 $\frac{\partial\ln L(\theta)}{\partial\theta}=\frac{n}{\theta}+\sum_{i=1}^n\ln x_i=0$

$\left(\widehat{\frac{1}{\theta}}\right)_{MLE}=-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n\ln\xi_i$。 同时易知 $\frac{\partial\ln L(\theta)}{\partial\theta}=-n\left[-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n\ln x_i-\frac{1}{\theta}\right]$， 且 $E\left[-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n\ln x_i\right]=-\frac{1}{n}nE\ln\xi=\frac{1}{\theta}$，

其中 $\ln\xi=\int_0^1\ln x\ \theta x^{\theta-1}dx=\int_0^1\ln x\ dx^{\theta}=x^{\theta}\ln x|_0^1-\int_0^1 x^{\theta}\frac{1}{x}dx=0-\frac{1}{\theta}x^{\theta}|_0^1=-\frac{1}{\theta}$ 。

可见 $-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n\ln\xi_i$ 就是 $\frac{1}{\theta}$ 的有效估计。则它也就是一致最小方差无偏估计。

另解：$\because L(\theta)=\theta^n\prod_{i=1}^n x_i^{\theta-1}=\theta^n\exp\{(\theta-1)\ln(\prod_{i=1}^n x_i)\}=(1/\theta)^{-n}\exp\left\{\left[(1/\theta)^{-1}-1\right]\sum_{i=1}^n\ln x_i\right\}$，由指数型分布族的

定义可知 $\sum_{i=1}^{n}\ln\xi_i$ 是 $\frac{1}{\theta}$ 的充分完备统计量。又因为 $E[\sum_{i=1}^{n}\ln\xi_i]=-\frac{n}{\theta}\Rightarrow E[-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\ln\xi_i]=\frac{1}{\theta}$。

则 $\left(\hat{\frac{1}{\theta}}\right)^{*}=E\left[-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\ln\xi_i\middle|\sum_{i=1}^{n}\ln\xi_i\right]=-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\ln\xi_i$ 就是 $\frac{1}{\theta}$ 的一致最小方差无偏估计。

3. 设样本 $X_1,\cdots,X_n$ 取自总体 $X\sim N(0,\sigma^2)$, (1) 证明: $T=\sum_{i=1}^{n}X_i^2$ 是未知参数 σ^2 的充分完备统计量;

(2) 求 σ^2 的 UMVUE; (3) 求 σ^2 的有效估计。

(1) $X\sim N(0,\sigma^2)$; $f(x;\sigma^2)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}$

$$L(\sigma^2)=\prod_{i=1}^{n}f(x_i;\sigma^2)=\underbrace{\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\right)^n}_{C(\sigma^2)}\exp\{\underbrace{-\frac{1}{2\sigma^2}}_{b_1(\sigma^2)}\underbrace{\sum_{i=1}^{n}x_i^2}_{T}\}$$

由指数型分布定义知 $T=\sum_{i=1}^{n}X_i^2$ 为 σ^2 的充分完备统计量 $\square$

(2) $E\left[\frac{\sum_{i=1}^{n}X_i^2}{n}\right]=EX^2=[DX+(EX)^2]=\sigma^2$

则 $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2$ 为 σ^2 的UMVUE $\square$

(3) $\ln L(\sigma^2)=-n\ln\sqrt{2\pi}\sqrt{\sigma^2}-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}x_i^2$

$$=-n\ln\sqrt{2\pi}-\frac{1}{2}n\ln\sigma^2+\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}x_i^2$$

$$\frac{\partial\ln L(\sigma^2)}{\partial\sigma^2}=-\frac{n}{2\sigma^2}+\frac{1}{2(\sigma^2)^2}\sum_{i=1}^{n}x_i^2=\underbrace{\frac{n}{2\sigma^4}}_{C(\sigma^2)}\Big(\underbrace{\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i^2}{n}}_{T}-\underbrace{\sigma^2}_{g(\theta)}\Big)$$

$\triangleq C(\sigma^2)(T-g(\theta))$

$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2$ 为 σ^2 的有效估计 $\square$

4 设样本 $(X_1,X_2,\cdots X_n)$ 取自总体 $U(0,\theta),\theta>0$，证明: (1) 该均匀分布族不是指数型分布族; (2) $X_{(n)}$ 是 θ 的充分统计量;(利用因子分解定理验证)； (3) $X_{(n)}$ 是 θ 的完备统计量.(利用完备统计量的定义证明) (P70 例 7.3.8); (4) 求 θ 的一致最小方差无偏估计 UMVUE.

(1) $f(x;\theta)=\begin{cases}\frac{1}{\theta}, & 0\le x\le\theta\\ 0, & \text{else}\end{cases}$, $F(x)=\begin{cases}0, & x<0\\ \frac{x}{\theta}, & 0\le x\le\theta\\ 1, & x>\theta\end{cases}$

$L(\theta)=\prod_{i=1}^{n} f(x_i;\theta)=\frac{1}{\theta^n}I_{\{x_{(1)}\ge 0\}}I_{\{x_{(n)}\le\theta\}}$ 不是指数型分布族

(2) $L(\theta)=\underbrace{\frac{1}{\theta^n}I_{\{x_{(n)}\le\theta\}}}_{g(T,\theta)}\cdot\underbrace{1}_{h(x_1,\cdots,x_n)}$

(3) $f_{X_{(n)}}(x;\theta)=n[F(x)]^{n-1}f(x)=n\cdot\frac{x^{n-1}}{\theta^{n-1}}\cdot\frac{1}{\theta}=\frac{nx^{n-1}}{\theta^n}$

若 $E[g(X_{(n)})|\theta]=\int_0^\theta g(x)\frac{nx^{n-1}}{\theta^n}dx=0,\ \forall\theta>0$

$\Rightarrow \int_0^\theta g(x)x^{n-1}dx=0\quad\forall\theta>0$

两边求导有 $g(\theta)\theta^{n-1}=0,\ \forall\theta>0$

$\Rightarrow g(x)=0,\ \forall x>0 \Rightarrow P(g(X_{(n)})=0|\theta)=1,\ \forall\theta>0$

$X_{(n)}$是θ的充分完备统计量 □

(4) $E(X_{(n)})=\int_0^\theta x\frac{nx^{n-1}}{\theta^n}dx=\frac{n\theta}{n+1}$

$E(\frac{n+1}{n}X_{(n)})=\theta \Rightarrow \frac{n+1}{n}X_{(n)}$ 是θ的无偏估计量 □

5. 设总体$\xi \sim N(a,\sigma^2),\xi_1,\cdots,$ ξ_n为ξ的样本，a为已知，证明$\hat{\sigma} \triangleq \frac{1}{n}\sqrt{\frac{\pi}{2}}\sum_{i=1}^{n}|\xi_i - a|$为σ的无偏估计量，且有效率为$\frac{1}{\pi-2}$。

证明：因为$\because \xi_i \sim N(a,\sigma^2), \therefore \xi_i - a \sim N(0,\sigma^2), \Rightarrow E|\xi_i - a| = \sqrt{2/\pi}\sigma$ $=\int_{-\infty}^{+\infty}|x|\frac{1}{\sqrt{\pi}\sigma}e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}dx$

$$\therefore E\left[\frac{1}{n}\sqrt{\frac{\pi}{2}}\sum_{i=1}^{n}|\xi_i - a|\right] = \frac{1}{n}\sqrt{\frac{\pi}{2}}\sum_{i=1}^{n}E|\xi_i - a| = \frac{1}{n}\sqrt{\frac{\pi}{2}}n\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sigma = \sigma,\quad \therefore \frac{1}{n}\sqrt{\frac{\pi}{2}}\sum_{i=1}^{n}|\xi_i - a|\text{是}\sigma\text{的无偏估计。}$$

$$\because \xi_i \sim N(a,\sigma^2), \therefore L(\sigma) = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\right)^n e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i - a)^2} \Rightarrow \boxed{\frac{\partial \ln L(\sigma)}{\partial \sigma}} = -\frac{n}{\sigma} + \frac{1}{\sigma^3}\sum_{i=1}^{n}(x_i - a)^2 = \frac{n}{\sigma^3}\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - a)^2 - \sigma^2\right]$$

式中为σ^2，没有关于σ的形式

不能表示成$C(\sigma)[T(X_1,\cdots,X_n) - \sigma]$的形式，可见$\sigma$的有效估计量并不存在。

$$\ln f(\xi;\sigma) = -\ln 2\pi - \ln\sigma - \frac{1}{2\sigma^2}(\xi - a)^2 \Rightarrow \frac{\partial \ln f(\xi;\sigma)}{\partial \sigma} = -\frac{1}{\sigma} + \frac{1}{\sigma^3}(\xi - a)^2 \Rightarrow \frac{\partial^2 \ln f(\xi;\sigma)}{\partial \sigma^2} = \frac{1}{\sigma^2} - \frac{3}{\sigma^4}(\xi - a)^2$$

$$\therefore I(\sigma) = -E\left[\frac{\partial^2 \ln f(\xi;\sigma)}{\partial \sigma^2}\right] = -\frac{1}{\sigma^2} + \frac{3}{\sigma^4}E(\xi - a)^2 = \frac{2}{\sigma^2}$$，于是计算 R-C 不等式的方差下界$=\frac{1}{nI(\sigma)} = \frac{\sigma^2}{2n}$。

$$\because D\left[\frac{1}{n}\sqrt{\frac{\pi}{2}}\sum_{i=1}^{n}|\xi_i - a|\right] = \frac{1}{n^2}\frac{\pi}{2}\sum_{i=1}^{n}D|\xi_i - a| = \frac{\pi}{2n^2}n\left[E|\xi_i - a|^2 - (E|\xi_i - a|)^2\right] = \frac{\pi}{2n}\left[D\xi_i - \left(\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sigma\right)^2\right] = \frac{\pi - 2}{2n}\sigma^2$$

$$\therefore \frac{1}{n}\sqrt{\frac{\pi}{2}}\sum_{i=1}^{n}|\xi_i - a|\text{的效率为}e = \frac{\sigma^2}{2n}\Big/\frac{\pi - 2}{2n}\sigma^2 = \frac{1}{\pi - 2}\text{。}$$

总结：

①充分统计量：

2. 因子分解定理：判断充分统计量的简单准则（Fisher-Neyman 准则）

设(X_1, ...X_n)为取自总体 X~$p(x;\theta)$的一个简单随机样本，(其中对离散型总体 $p(x;\theta)$ 对应的是概率分布律函数,对连续型总体对应的是密度函数.记 $L(x;\theta)$为样本的联合分布，则统计量 $T=T(X_1, ...X_n)$ 是 θ 的充分统计量，等价于 $L(x;\theta)=\prod_{i=1}^{n} p(x_i;\theta)=h(x_1,x_2,\cdots x_n)\,g(T(x_1,x_2,\cdots x_n);\theta)$，其中 h 是关于 ($x_1$, ...$x_n$)的非负函数且与 θ 无关，g 是仅仅通过统计量 T 依赖于(x_1, ...x_n)的函数.

$$\Leftrightarrow L(x;\theta)=\prod_{i=1}^{n} p(x_i;\theta)=h(x_1,x_2,\cdots x_n)\,g(\underset{\text{抱团}}{T(x_1,x_2,\cdots x_n);\theta})$$

②完备统计量

二.完备统计量

1.完备分布函数族的定义： 设总体 X~{$F(x;\theta),\theta\in\Theta$}，若对于任意的一个满足 $E[g(X)|\theta]=0$,对于任意的 $\theta\in\Theta$ 的 r.v.$g(X)$,总有 $P[g(X)=0|\theta]=1$,对于任意的 $\theta\in\Theta$,则称~{$F(x;\theta),\theta\in\Theta$} 是完备的分布函数族.

2.完备统计量的定义： 设(X_1, ...X_n) 是来自总体 X~{$F(x;\theta),\theta\in\Theta$}的一个样本,若统计量 $T=T(X_1, ...X_n)$ 的分布函数族{$F_T(x;\theta),\theta\in\Theta$}是完备的分布函数族，则称 $T=T(X_1, ...X_n)$为完备统计量.

可见，$P[g_1(T)=g_2(T)\,|\,\theta]=1,\ \forall\theta\in\Theta \Leftrightarrow E[g_1(T)|\theta]=E[g_2(T)|\theta],\ \forall\theta\in\Theta$

"完备统计量"意味着"a.s.相等"等价于期望相等

若 $\forall\ E[g(T)|\theta]=0 \Rightarrow P[g(T)=0]=1$，则称 T 为完备统计量

③充分完备统计量：

5. (充分完备统计量的判断定理)

设总体X的分布是指数型分布族，即样本联合分布可以表示成

$$L(x_1,x_2,\cdots,x_n;\boldsymbol{\theta})=C(\boldsymbol{\theta})\exp\{\sum_{i=1}^{m} b_j(\boldsymbol{\theta})T_j(x_1,x_2,\cdots,x_n)\}h(x_1,x_2,\cdots,x_n)$$

其中$\theta=(\theta_1,\dots,\theta_m)^T$, $T=(T_1(x_1,\dots x_n),\dots,T_m(x_1,\dots x_n))^T$，则T是θ的充分完备统计量.

④有效估计：

3（书 P39 推论 2.2.1）**有效估计的充要条件**：在定理 2.2.1 的条件下，(i) 可估函数 $g(\theta)$的有效估计量存在且为无偏估计 $T(X_1,X_2,\dots,X_n)$的充要条件是 $\frac{\partial \ln L(\theta)}{\partial\theta}$ 可以化为形式 $C(\theta)[T(X_1,\cdots,X_n)-g(\theta)],a.s.$;

判断是否为有效估计：

① $p(x;\theta)\,/\,f(x;\theta)$

② $L(x_1,\cdots,x_n;\theta)$

③ $\ln L(x_1,\cdots,x_n;\theta)$

④ $\frac{\partial \ln L(x_1,\cdots,x_n;\theta)}{\partial\theta} \triangleq C(\theta)[\underbrace{T(x_1,\cdots,x_n)}_{\text{有效估计}}-g(\theta)]$

求是否是达到 R-C 下界的无偏估计

① 密度函数：$f(x;\theta)$ / $p(x;\theta)$

② 取对数：$\ln p(x;\theta)$

③ 求偏导：$\dfrac{\partial \ln p(x;\theta)}{\partial \theta}$

④ 求 fisher 信息量：

$$I(\theta)=E\left[\frac{\partial \ln p(x;\theta)}{\partial \theta}\right]^2, \quad I(\theta)=-E\left[\frac{\partial^2 \ln p(x;\theta)}{\partial \theta^2}\right]$$

⑤ 求 R-C 下界：

$$\frac{[g'(\theta)]^2}{nI(\theta)}$$，其中 $g(\theta)$ 为要估计的参数

⑥ 求 $D(T(X_1,\cdots,X_n))$，其中 $T(X_1,\cdots,X_n)$ 是 $g(\theta)$ 的无偏估计

⑦ 比较 R-C 下界与 $D(T(X_1,\cdots,X_n))$

⑤ UMVUE：

5. 寻找 UMVUE 的方法：先寻找一个 ① 充分完备统计量 $T=T(X_1,\cdots X_n)$ 和 θ 的一个 ② 无偏估计 $g(T)$，则 $g(T)$ 就是 θ 的 UMVUE.

6. 有效估计一定是 UMVUE，但 UMVUE 不一定是有效估计。