第十一讲 非参数假设检验（检验总体的分布） 做习题

一．皮尔逊 χ^2 检验法:

1．多项分布的 χ^2 检验法 **适用范围：总体是仅取 m 个可能值的离散型随机变量。**

检验 设总体分布律：$P(X=x_i)=p_i, i=1,2,\cdots,m, \sum_{i=1}^{m} p_i=1$

记 v_i 表示在样本$(X_1,X_2,\ldots X_n)$中取值为 x_i 的样本分量的个数，则$(v_1,v_2,\ldots v_n)$的联合概率分布律为：

$$P(v_1=n_1,v_2=n_2,\cdots v_m=n_m)=\frac{n!}{n_1!n_2!\cdots n_m!}p_1^{n_1}p_2^{n_2}\cdots p_m^{n_m}$$ 多项分布

需要检验假设：$H_0: p_i=p_{i0} \leftrightarrow H_1: p_i\neq p_{i0} \quad (i=1,2,\cdots,m)$ 其中 p_{i0} 是已知的数。

实际 理论

取检验统计量：$\chi_n^2=\sum_{i=1}^{m}\frac{(v_i-np_{i0})^2}{np_{i0}}=\sum_{i=1}^{m}\frac{v_i^2}{np_{i0}}-n$ 来衡量 v_i/n 与 p_{i0} 的差异程度，这个称为**皮尔逊统计量**。

直观上认为，如果$(p_{10},\ldots,p_{m0})$是总体的真实概率分布，即当 H_0 成立时，统计量 χ_n^2 有偏小的趋势。

拒绝域为 $W=\{\chi_n^2>C\}$.

【定理 1】当 H_0 成立时，即$(p_{10},\cdots,p_{m0})$是总体的真实概率分布时，上述检验统计量 χ_n^2 渐近服从 $\chi^2(m-1)$.分布。

例 11.1 将一颗骰子掷了 120 次，结果如下：点数：1，2，3，4，5，6，对应的频数为：21，28，19，24，16，12. 问这颗骰子是否匀称？(α=0.05)

$H_0: p_i=\frac{1}{6} \leftrightarrow H_0: p_i\neq\frac{1}{6}$ 计算：

$$\chi_n^2=\sum_{i=1}^{6}\frac{(v_i-np_{i0})^2}{np_{i0}}=\frac{(21-120\times\frac{1}{6})^2}{120\times\frac{1}{6}}+\frac{(28-120\times\frac{1}{6})^2}{120\times\frac{1}{6}}+\frac{(19-120\times\frac{1}{6})^2}{120\times\frac{1}{6}}+\frac{(24-120\times\frac{1}{6})^2}{120\times\frac{1}{6}}+\frac{(16-120\times\frac{1}{6})^2}{120\times\frac{1}{6}}$$

$$+\frac{(12-120\times\frac{1}{6})^2}{120\times\frac{1}{6}}=8.1<\chi_{0.05}^2(6-1)=11.07$$，所以接受 H_0.

练习 11.1 64 只某种杂交的几内亚猪后代，34 只红的，10 只黑的，20 只白的。根据遗传模型，它们之间的比例应该为 9：3：4，问以上数据在 0.05 显著水平下与模型是否吻合？

$H_0: p_1=\frac{9}{16}$， $p_2=\frac{3}{16}$， $p_3=\frac{1}{4}$ 计算：

$$\chi_n^2=\sum_{i=1}^{4}\frac{(v_i-np_{i0})^2}{np_{i0}}=\frac{(34-64\times\frac{9}{16})^2}{64\times\frac{9}{16}}+\frac{(10-64\times\frac{3}{16})^2}{64\times\frac{3}{16}}+\frac{(20-64\times\frac{1}{4})^2}{64\times\frac{1}{4}}=\frac{13}{9}<\chi_{0.05}^2(3-1)=5.99$$，所以接受 H_0.

2．**若总体 X 不是仅取 m 个值的随机变量,但其分布函数 $F(x)$具有明确的表达式**,欲检验假设 $H_0: F(x)=F_0(x)$,可选

取 m-1 个实数 $-\infty=a_0<a_1<\cdots<a_{m-1}<a_m=+\infty$,将实轴分成 m 个不交的区间,记

$p_{i0}=P(a_{i-1}<X\le a_i)=F_0(a_i)-F_0(a_{i-1}), i=1,2,\cdots,m, v_i$ 为 $(X_1,X_2,\cdots,X_n)'$ 中落在第 i 个区间 $(a_{i-1},a_i]$ 内的个数,

则该问题即转化成多项分布的 χ^2 检验.

例 11.2 在一批灯泡中抽取 300 只作寿命实验,结果如下:

寿命 T(小时)	[0, 100]	(100,200)	(200,300)	(300,+∞)
灯泡数	121	78	43	58

试在显著水平 $\alpha=0.05$ 下,检验 $H_0: T\sim E(1/200)$． $F(x)=1-e^{-x/200}, x>0$

Sol: $P_{10}=P(0\le X\le 100)=0.3925$

$P_{20}=P(100<X<200)=0.2386$

$P_{30}=P(200<X<300)=0.1448$

$P_{40}=P(X>300)=0.2231$

$$\chi^2=\sum_{i=1}^{4}\frac{(v_i-np_{i0})^2}{np_{i0}}=1.845<\chi_{0.05}^2(4-1)=7.81$$

不在拒绝域内，则接受 H_0 □

3. 分布中含有未知参数的皮尔逊 χ^2 检验法: (H_0 中只确定总体分布的类型，其中含有 l 个未知参数)

自由度减 l

未知参数用 MLE 代替，再计算 $\hat{p}_i$，建立检验统计量 $\chi_n^2 = \sum_{i=1}^{m} \frac{(v_i - n\hat{p}_i)^2}{n\hat{p}_i} \sim \chi^2(m-1-l)$ 分布.

例 11.3 某工厂生产一种滚珠，现随机抽取了 50 件产品，测得其直径（单位：mm）为

15.0， 15.8， 15.2， 15.1， 15.9， 14.7， 14.8， 15.5， 15.6， 15.3，15.0， 15.6， 15.7， 15.8， 14.5， 15.1，
15.3， 14.9， 14.9， 15.2，15.9， 15.0， 15.3， 15.6， 15.1， 14.9， 14.2， 14.6， 15.8， 15.2，15.2， 15.0，
14.9， 14.8， 15.1， 15.5， 15.5， 15.1， 15.1， 15.0，15.3， 14.7， 14.5， 15.5， 15.0， 14.7， 14.6， 14.2，
14.2， 14.5 问滚珠直径是否服从正态分布？

设滚珠的直径为 $X \sim F(x)$， H_0：$F(x)=\Phi[(x-\mu)/\sigma]$

先计算 μ，σ^2 的极大似然估计，$\hat{\mu}_{MLE} = \bar{x} = 15.1, \hat{\sigma}^2 = s^{*2} = 0.4379^2$.

根据数据特点并考虑到组观测值个数不低于 5，我们取分点为 $a_0=-\infty$, $a_1=14.55$, $a_2=14.95$, $a_3=15.35$, $a_4=15.75$, $a_5=\infty$,

把数据分成 5 组，$n_1=6$, $n_2=11$，$n_3=20$，$n_4=8$，$n_5=5$. $\hat{p}_i = \Phi\left(\frac{a_i - 15.1}{0.4379}\right) - \Phi\left(\frac{a_{i-1} - 15.1}{0.4379}\right), i = 1, 2, \cdots, 5$

组号	观测数 n_i	概率估计 $\hat{p}_i$	期望观测数 $n\hat{p}_i$	$\frac{(n_i - n\hat{p}_i)^2}{n\hat{p}_i}$
1	6	0.104559	5.2279	0.1146
2	11	0.261412	13.0706	0.3280
3	20	0.349998	17.4999	0.3572
4	8	0.215174	10.7587	0.7074
5	5	0.068857	3.4429	0.7043
总和	50	1	50	2.2109

l 两个未知参数

所以 $\sum_{i=1}^{5} \frac{(n_i - n\hat{p}_i)^2}{n\hat{p}_i} = 2.2109 < \chi_{0.05}^2(5-2-1) = 5.9915$，接受 H_0.

练习 11.2 某建筑工地每天发生的事故数的现场记录如下：

一天发生的事故数	0	1	2	3	4	5	≥6	合计
天数	102	59	30	8	0	1	0	200

试在显著水平=0.05 下检验这批数据是否服从泊松分布？

H_0：服从泊松分布 $P(X=i) = \frac{\lambda^i}{i!}e^{-\lambda}, i = 0, 1, \cdots$ 先计算 λ 的极大似然估计，$\hat{\lambda}_{MLE} = \bar{x} = 0.74$.

$\hat{\lambda}_{MLE} = 0.74$ 代 λ.

i	观测数 n_i	概率估计 $\hat{p}_i$	期望观测数 $n\hat{p}_i$	$\chi_n^2 = \frac{(n_i - n\hat{p}_i)^2}{n\hat{p}_i}$
0	102	$P(X=0)=$ 0.4771	95.42	0.4537
1	59	$P(X=1)=$ 0.3531	70.62	1.9120
2	30	$P(X=2)=$ 0.1306	26.12	0.5764
≥3	9	0.0392	7.84	0.1716
总和	200			$3.1137<\chi^2_{0.05}$（4-1-1）=5.9915，接受 H_0

二. Kolmogorov 检验 适用范围: **检验一维连续型总体的分布函数且原假设中一般不含未知参数**

χ^2 检验都依赖于区间的划分，

检验：$H_0: F(x) = F_0(x)$ 检验统计量：$D_n = \sup_{-\infty<x<+\infty} \{|F_n^*(x) - F(x)|\}$

三. Smirnov 检验 适用范围:**检验两个连续型总体是否同分布**

检验：$H_0: F_1(x) = F_2(x)$ 检验统计量：$D_{n_1,n_2} = \sup_{-\infty<x<+\infty} \{|F_{n_1}^*(x) - F_{n_2}^*(x)|\}$

四. 秩和检验 适用范围:**检验两个总体是否同分布**

P150 例 3.3.5， P151 例 3.3.6

五. 独立性检验　　适用范围: 检验两个总体是否相互独立 (书 P114)

检验的原假设和备择假设: $H_0: F(x,y)=F_1(x)F_2(y) \leftrightarrow H_1: F(x,y)\neq F_1(x)F_2(y)$

检验统计量及其分布: $\boxed{\chi_n^2=\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{s}\left(n_{ij}-\frac{n_{i\cdot}n_{\cdot j}}{n}\right)^2 \Big/ \frac{n_{i\cdot}n_{\cdot j}}{n} \sim \chi^2((r-1)(s-1))}$　$n\to\infty$

例 11.4 为调查促销反应与性别之间的关系，得到如下数据：

		分组标志 B（对促销的反应）		合　计
		能激起购买欲望（组号 $j=1$）	不能激起购买欲望（组号 $j=2$）	
分组标志 A（性别）	男（组号 $i=1$）	$n_{11}=40$	$n_{12}=60$	$n_{1\cdot}=100$
	女（组号 $i=2$）	$n_{21}=55$	$n_{22}=73$	$n_{2\cdot}=128$
合计		$n_{\cdot 1}=95$	$n_{\cdot 2}=133$	$n=228$

试问男性与女性是否导致不同的促销反应？（显著水平 $\alpha=0.05$，$\chi^2_{0.05}(1)=3.84$）

解：由题意，可提出原假设和备择假设

H_0：性别与对促销的反应独立，　H_1：二者不独立

检验统计量

$$\chi^2=\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2}\frac{(n_{ij}-\frac{n_{i\cdot}n_{\cdot j}}{n})^2}{\frac{n_{i\cdot}n_{\cdot j}}{n}}=\left[\frac{(40-\frac{100\times 95}{228})^2}{\frac{100\times 95}{228}}+\frac{(60-\frac{100\times 133}{228})^2}{\frac{100\times 133}{228}}\right]+\left[\frac{(55-\frac{128\times 95}{228})^2}{\frac{128\times 95}{228}}+\frac{(73-\frac{128\times 133}{228})^2}{\frac{128\times 133}{228}}\right]$$

=0.2036

对于自由度为（2−1）(2−1)=1 的 χ^2 分布，　由于 $\chi^2=0.2036<\chi^2_{0.05}(1)=3.84$, 检验统计量的样本值落在接受域，所以没有理由拒绝独立性原假设。也就是说，看起来性别不会导致对促销的反应有什么不同.

练习 11.3 在 19 世纪,孟德尔按颜色与形状把豌豆分为四类:黄圆,绿圆,黄皱和绿皱.根据遗传学原理判断这四类的比例为9:3:3:1.为做验证,在一次豌豆实验中收获了 n=556 个豌豆,其中这四类豌豆的个数分别为315,108,101,32.请检验这批数据是否与孟德尔提出的比例相吻合?

解: m=4, v_1=315, v_2=108, v_3=101, v_4=32, n=556

H_0: p_{10}=9/16 , p_{20}=3/16 , p_{30}=3/16 , p_{40}=1/16 ,

$$\chi^2=\sum_{i=1}^{4}\frac{(v_i-np_{i0})^2}{np_{i0}}=0.47 \sim \chi^2(3)$$

$\chi^2_{0.05}(3)=7.81>0.47$. 则接受 H_0 □