

武汉大学

数据科学基础课程论文

基于 MNIST 数据集的分类

姓 名： 潘 宇 杰

学 号： 2025286560200

专 业： 25 级应用统计

武汉大学
前沿交叉学科研究院
湖北国家应用数学中心

2025 年 12 月 26 日

1 数据集

在计算机视觉与模式识别领域, MNIST 数据库是最为经典且广泛使用的基准数据集之一。MNIST 是一个著名的手写数字分类任务基准, 常被深度学习教材引用为入门实例。我们基于该数据集对卷积神经网络模型 CNN 进行了实现。

1.1 数据规模与划分

MNIST 数据集的构建旨在模拟真实的分类任务场景。该数据集包含总计 70,000 个样本，并被严格划分为两个子集：

- **训练集**: 包含 60,000 个样本，用于模型的参数学习。
 - **测试集**: 包含 10,000 个样本，用于评估模型。

1.2 样本特征与预处理

数据集中的每一个样本均为一张单通道的灰度图片，内容涵盖了从数字 0 到 9 的十个类别。

1. **尺寸规范**: 每个样本图像的物理尺寸被标准化为 28×28 像素。
 2. **位置规范**: 为了降低特征提取的难度, MNIST 在预处理阶段对图像进行了中心化处理, 确保每一个示例数字都位于图像的几何中心。

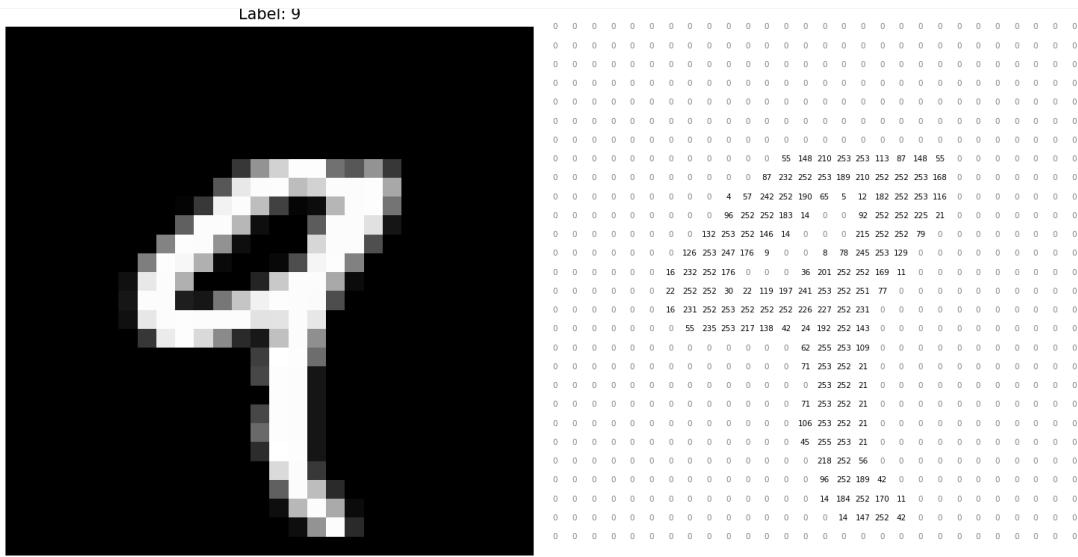


图 1: 一张样本

图 1 展示了示例数字及其对应的像素矩阵，直观地反映了每个像素点在矩阵中的亮度分布情况。

2 多分类问题误差分解

2.1 推导目标

我们要证明期望超额风险满足：

$$\mathbb{E}_{\mathbb{D}} [\mathcal{E}(f_{\mathcal{A}(\tau)})] \lesssim O(n^{-\text{rate}})$$

并指明这个 rate (即老师所说的 α) 是如何计算出来的。

2.2 第一步：误差分解

根据《FoDS_25》Page 5, 对于训练集 \mathbb{D} 大小为 n 的学习算法, 其超额风险可以分解为三部分:

$$\mathbb{E}[\mathcal{E}(\hat{f})] \leq 2 \underbrace{\mathbb{E}[\sup_{f \in \mathcal{F}} |L(f) - \hat{L}(f)|]}_{\text{估计误差 (Estimation Error)}} + \underbrace{\inf_{f \in \mathcal{F}} (L(f) - L(f^*))}_{\text{近似误差 (Approximation Error)}} + \underbrace{\text{Opt}}_{\text{优化误差}}$$

- 假设优化误差为 0 (即假设我们能求得当前假设空间内的最优解)。
- 我们的目标是找到一个假设空间 \mathcal{F} (通常由分辨率参数 ϵ 控制), 使得前两项之和最小。

2.3 量化近似误差

近似误差(即偏差)来源于模型假设空间 \mathcal{F} 不足以完美表达真实的目标函数 f^* 。根据《FoDS_25》Page 48 的设定, 假设目标函数属于 Hölder 类 $H^\beta([0, 1]^d)$, 即函数的平滑度为 β (意味着函数通过 β 阶导数有界), 数据维度为 d 。

如果我们使用网格大小 (或分辨率) 为 ϵ 的函数类来逼近 f^* , 根据泰勒展开或多项式逼近理论, 逼近误差的上界与分辨率的 β 次方成正比:

$$\text{App Error} \leq C_1 \cdot \epsilon^\beta$$

- 物理含义: 网格越密 (ϵ 越小), 逼近越准, 偏差越小。

2.4 量化估计误差

估计误差(即方差)来源于样本量有限。根据统计学习理论, 估计误差的上界由假设空间的复杂度 (覆盖数/熵) 和样本量 n 决定。

1、覆盖数: 根据《FoDS_25》Page 48, 对于平滑度为 β 、维度为 d 的函数类, 其对数覆盖数为:

$$\log \mathcal{N}(\epsilon) \asymp \epsilon^{-d/\beta}$$

(注: 文档中用 α 表示平滑度, 此处为避免混淆, 暂用 β 表示平滑度, 对应文档中的 α)。

2、误差上界: 对于多分类问题或有界损失函数, 估计误差通常由 Dudley 积分或链式法则给出, 其量级为:

$$\text{Est Error} \lesssim \sqrt{\frac{\log \mathcal{N}(\epsilon)}{n}} \asymp \sqrt{\frac{\epsilon^{-d/\beta}}{n}}$$

(注：对于某些损失函数如平方损失，或者是满足 Tsybakov 噪声条件的分类，该项可能是 $\frac{\log N}{n}$ 而不是根号，这会改变最终系数，但推导逻辑一致。这里采用最通用的根号形式)。

- 物理含义：网格越密 (ϵ 越小)，模型越复杂 ($\epsilon^{-d/\beta}$ 变大)，方差越大；数据量 n 越大，方差越小。

2.5 偏差-方差权衡

现在的总误差上界是 ϵ 的函数：

$$\text{Total Error}(\epsilon) \lesssim \underbrace{\epsilon^\beta}_{\text{Bias}} + \underbrace{\sqrt{\frac{\epsilon^{-d/\beta}}{n}}}_{\text{Variance}}$$

为了得到最紧的上界（即最小的误差），我们需要选择最佳的 ϵ^* ，使这两项在数量级上平衡：

$$\epsilon^\beta \asymp \sqrt{\frac{\epsilon^{-d/\beta}}{n}}$$

两边平方：

$$\epsilon^{2\beta} \asymp \frac{\epsilon^{-d/\beta}}{n}$$

移项整理：

$$\begin{aligned} \epsilon^{2\beta} \cdot \epsilon^{d/\beta} &\asymp \frac{1}{n} \\ \epsilon^{\frac{2\beta^2+d}{\beta}} &\asymp n^{-1} \end{aligned}$$

解出最佳分辨率 ϵ^* ：

$$\epsilon^* \asymp n^{-\frac{\beta}{2\beta+d}}$$

2.6 得到最终误差上界

将最佳 ϵ^* 代回总误差公式（由平衡条件可知，两项同阶，只需计算一项）：

$$\text{Total Error} \asymp (\epsilon^*)^\beta \asymp \left(n^{-\frac{\beta}{2\beta+d}}\right)^\beta = n^{-\frac{\beta^2}{2\beta+d}}$$

(注：如果根据文档《FoDS_25》48 针对平方损失的推导，估计误差项是 $\frac{\epsilon^{-d/\beta}}{n}$ 而没有根号，那么平衡方程变为 $\epsilon^\beta \asymp \frac{\epsilon^{-d/\beta}}{n}$ ，解得 $\epsilon \asymp n^{-\frac{\beta}{2\beta+d}}$ ，最终误差为 $n^{-\frac{2\beta}{2\beta+d}}$ 。文档《FoDS_25》48 明确给出的结果是 $O(n^{-\frac{2\alpha}{2\alpha+d}})$ 4)。无论具体是哪种损失函数的假设，最终形式都是幂律分布：

$$\mathbb{E}_D [\mathcal{E}] \lesssim O(n^{-\text{rate}})$$

2.7 该证明过程依赖的假设

1. 数据分布假设

- 独立同分布 (i.i.d.)：训练数据 $\mathcal{D} = \{Z_1, \dots, Z_n\}$ 必须是独立同分布的，采样自某个未知的联合分布 μ_Z 。这是所有统计学习界限（包括 Hoeffding 不等式、VC 维界限）生效的基础。

- 有界支撑集：通常假设输入数据 X 分布在一个紧致集合上，例如单位超立方体 $[0, 1]^d$ 。如果没有这个假设，数据的覆盖数可能无穷大，导致无法控制方差。
2. 目标函数的光滑性假设这是决定指数 α 大小的最关键假设。
- Hölder 连续性：假设真实的贝叶斯最优分类器 f^* (或回归函数) 属于 Hölder 函数类 $\mathcal{H}^\beta([0, 1]^d)$ 。
 - 这意味着目标函数 f^* 具有 β 阶的平滑度 (即函数不会剧烈震荡，导数有界)。
 - 作用：这个假设限制了近似误差。如果函数不光滑 (任意乱跳)，无论模型多复杂都无法用有限网格逼近，偏差将无法收敛。
 - 推导中的 α 通常与平滑度 β 直接相关 (例如 $\alpha = \frac{\beta}{2\beta+d}$)。
3. 假设空间的复杂度假设
- 有限的覆盖数：假设模型函数类 \mathcal{F} 的复杂度是可以被度量的。具体来说，其对数覆盖数 $\log \mathcal{N}(\xi)$ 必须随着分辨率 ξ 的提高以特定速率增长，通常假设为 $\log \mathcal{N}(\xi) \asymp \xi^{-d/\beta}$ 。
 - 作用：这个假设用于控制估计误差。它保证了随着样本量增加，我们能以足够快的速度“填满”整个空间，从而找到最优解。
4. 优化与模型选择假设
- 偏差-方差的最优权衡：证明过程假设我们能够选取最优的模型复杂度 (例如最优的网格大小 ξ^* 或神经网络的宽度/深度)。
 - 文档第 48 页展示了如何选取 $\xi^* = n^{-\frac{\alpha}{d+2\alpha}}$ 来平衡 Bias 和 Variance。
 - 隐含假设：如果模型复杂度 (如网络层数) 固定不变，或者优化算法未能找到最优解 (Optimization Error $\neq 0$)，则该收敛速率 $O(n^{-\alpha})$ 无法达到。
5. 噪声/边界条件假设——针对分类问题虽然《FoDS_25》第 48 页主要以回归 (最小二乘) 为例，但在分类问题中要达到 $O(n^{-\alpha})$ 这种形式的快速率，通常还需要：
- Tsybakov 噪声条件 (Tsybakov Noise Condition)：假设在决策边界附近，类别概率 $P(Y = 1|X)$ 既然不等于 0.5，也不会无限逼近 0.5 (或者逼近的速度受控)。
 - 《FoDS_25》第 74 页提到了 σ_s, σ_t 等参数以及与之相关的误差界，这通常对应于迁移学习或分类任务中的边界条件假设。如果没有这个假设，分类问题的误差界通常只能达到 $O(n^{-1/2})$ 甚至更慢，而无法达到与平滑度 α 相关的更快得多的速率。

3 网络架构设计

3.1 整体概述

模型输入数据为 $1 \times 28 \times 28$ 的灰度图像，经过两个阶段的卷积特征提取模块后，数据被映射为高维语义特征，最后通过全连接层完成 10 分类的概率输出。整个网络包含 4 个卷积层和 2 个全连接层，并在层间引入了批归一化和 Dropout 以防止过拟合。

3.2 特征提取

特征提取部分由 2 个结构相似但深度递增的卷积块组成。

3.2.1 第一阶段：浅层特征提取

第一阶段旨在从原始像素中提取边缘、纹理等基础几何特征。该模块包含两个连续的卷积层：

- **卷积** `Conv2d(1, 32, 3, padding = 1)`: 使用 3×3 的卷积核，并采用 `padding=1` 填充，确保卷积操作不改变特征图的空间尺寸。
- **归一化与激活** `nn.BatchNorm2d(32), nn.ReLU()`: 每个卷积层后紧接 BN 层和 ReLU 激活函数。公式如下：

$$Y = \text{ReLU}(\text{BN}(W * X + b)) \quad (1)$$

经过双重卷积后，特征图维度变为 $32 \times 28 \times 28$ 。

- **池化层** `nn.MaxPool2d(2)`: 随后，网络应用一个 2×2 的最大池化层，步长为 2。这一步执行下采样操作，将特征图的空间分辨率减半，从而减少计算量并引入平移不变性。
- `nn.Dropout(0.25)`: 该模块引入丢弃率为 0.25 的 Dropout 层。第一阶段的最终输出张量维度为 $32 \times 14 \times 14$ 。

3.2.2 第二阶段：深层特征提取

第二阶段同样包含两个连续的卷积层，但输出通道数提升至 64。通过增加通道数，网络能够在低分辨率的空间网格上编码更丰富的信息量。

- **卷积** `nn.Conv2d(32, 64, 3, padding = 1)`: 输入 $32 \times 14 \times 14 \rightarrow$ 两个 $64 \times 3 \times 3$ 卷积层 \rightarrow 特征图 $64 \times 14 \times 14$ 。
- **归一化与激活** `nn.BatchNorm2d(32), nn.ReLU()`: 每个卷积层后紧接 BN 层和 ReLU 激活函数。
- **池化层** `nn.MaxPool2d(2)`: 再次经过 2×2 最大池化层，空间尺寸进一步缩小至 7×7 。
- `nn.Dropout(0.25)`: 最后，该模块引入丢弃率为 0.25 的 Dropout 层。

经过本阶段处理，原始图像被编码为 $64 \times 7 \times 7$ 的高维特征张量。相较于原始输入，该特征张量虽然空间分辨率较低，但每个“像素”点都包含了原始图像中较大感受野。

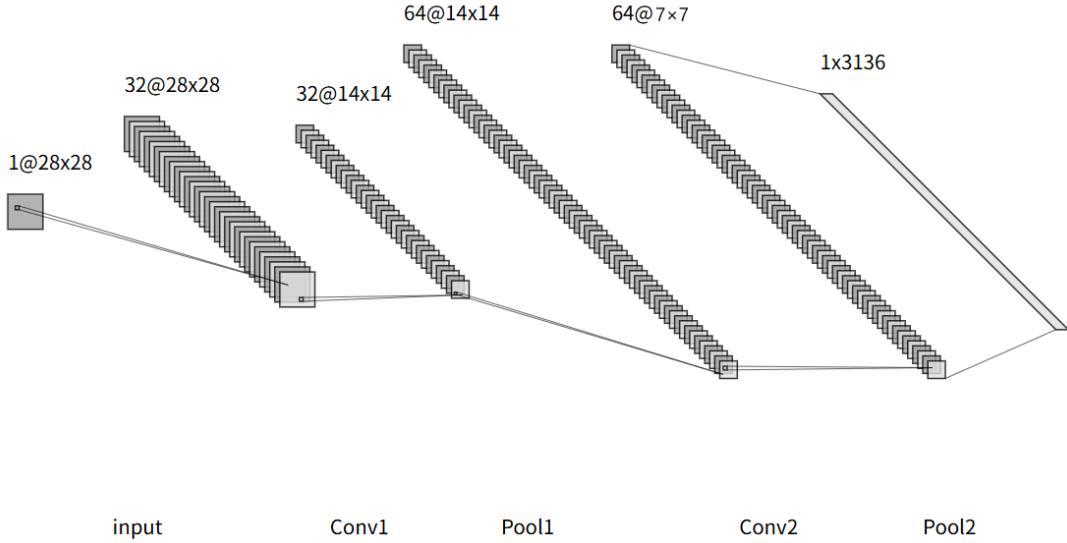


图 2: 网络架构图

3.3 分类器模块

网络的末端是一个 MLP，负责将提取的三维特征映射到类别标签空间。

1. 展平: 首先, 将第二阶段输出的 $64 \times 7 \times 7$ 张量展平为一维向量, 长度为 $N = 64 \times 7 \times 7 = 3136$ 。
2. 全连接层 nn.Linear($64 * 7 * 7, 128$): 第一层线性变换将 3136 维向量映射到 128 维的隐藏空间。该层同样配备了 BN 和 ReLU 激活函数, 以加速收敛并防止梯度消失。
3. 强正则化 nn.Dropout(0.5): 为了显著降低全连接层的过拟合风险, 此处引入了丢弃率为 0.5 的 Dropout 层。每次迭代将随机丢弃一半的神经元, 迫使网络学习更加鲁棒的分布式特征表示。
4. 输出层 nn.Linear(128, 10): 最后一个全连接层将 128 维特征映射到 10 维输出, 分别对应 MNIST 数据集中的数字 0 至 9。

最终, 输出向量通过 Softmax 函数转化为预测概率分布。

3.4 参数与结构汇总

表 1 总结了各层的详细参数配置。

表 1: 神经网络架构详细参数表

| 块名称 | 层级名称 | 输入尺寸 | 核大小/步长 | 输出通道 | 输出尺寸 |
|------------|----------------|--------------------------|------------------|------|----------------|
| Block 1 | Conv2d × 2 | $1 \times 28 \times 28$ | $3 \times 3 / 1$ | 32 | 28×28 |
| | Max Pool | $32 \times 28 \times 28$ | $2 \times 2 / 2$ | 32 | 14×14 |
| | Dropout (0.25) | - | - | - | - |
| Block 2 | Conv2d × 2 | $32 \times 14 \times 14$ | $3 \times 3 / 1$ | 64 | 14×14 |
| | Max Pool | $64 \times 14 \times 14$ | $2 \times 2 / 2$ | 64 | 7×7 |
| | Dropout (0.25) | - | - | - | - |
| Classifier | Flatten | $64 \times 7 \times 7$ | - | - | 3136 |
| | Linear | 3136 | - | 128 | 128 |
| | Dropout (0.5) | - | - | - | - |
| | Output | 128 | - | 10 | 10 |

4 实验设置与结果分析

4.1 模型实现与训练策略

4.1.1 数据增强

本实验在数据预处理阶段引入了数据增强。具体设置如下：

- **随机旋转**: 在 $\pm 15^\circ$ 范围内对图像进行随机旋转。
- **随机仿射变换**: 在水平和垂直方向进行 10% 范围内的随机平移。

这种策略迫使模型主动学习而非只固定校对像素位置，显著提升了模型的鲁棒性。

4.1.2 训练超参数配置

实验采用 **Adam** 优化器，利用其自适应矩估计能力加快收敛速度。初始学习率设为 1×10^{-3} ，批次大小为 50。本实验还采用了 StepLR 学习率调度策略：每经过 2 个 Epoch，学习率衰减为当前的 0.1 倍。这种策略使得模型在初期快速下降 Loss，在后期微调参数以逼近全局最优解。

4.2 实验结果分析

实验在 Kaggle 平台上的免费 GPU T4×2 下进行，共训练 7 个 Epoch，测试集包含 2,000 个未参与训练的独立样本。

4.2.1 精度表现

模型在第 6 个 Epoch 达到了历史最佳测试精度 **99.50%**，超过了 99% 的目标。

4.2.2 收敛性分析

得益于 Batch Normalization 和 Adam 优化器的结合，模型展现了极快的收敛特性：

- 仅在 Epoch 1 后，测试精度即达到 98.75%。
- 在 Epoch 2 结束时，精度迅速突破 99.0% 关口，达到 99.10%。

此外，观察训练日志可以发现，在 Epoch 2 和 Epoch 4 的学习率衰减节点之后，模型的 Loss 波动明显减小，精度稳步提升并稳定在 99.2% 以上。最终 Epoch 的平均精度保持在 99.25% 左右，表明模型已经收敛至一个鲁棒的极值点，未出现明显的过拟合现象。

```

--> 发现更优模型! 已保存, 当前最高准确率: 0.98750
Epoch: 1 | Step: 950 | Loss: 0.1579 | Accuracy: 0.98550
Epoch: 1 | Step: 1000 | Loss: 0.1378 | Accuracy: 0.98100
Epoch: 1 | Step: 1050 | Loss: 0.2422 | Accuracy: 0.98550
Epoch: 1 | Step: 1100 | Loss: 0.0442 | Accuracy: 0.96950
Epoch: 1 | Step: 1150 | Loss: 0.0566 | Accuracy: 0.98100
Epoch: 2 | Step: 0 | Loss: 0.1984 | Accuracy: 0.98350
Epoch: 2 | Step: 50 | Loss: 0.1254 | Accuracy: 0.98600
Epoch: 2 | Step: 100 | Loss: 0.0532 | Accuracy: 0.98900
--> 发现更优模型! 已保存, 当前最高准确率: 0.98900
Epoch: 2 | Step: 150 | Loss: 0.0875 | Accuracy: 0.98750
Epoch: 2 | Step: 200 | Loss: 0.0753 | Accuracy: 0.98900
Epoch: 2 | Step: 250 | Loss: 0.1953 | Accuracy: 0.99000
--> 发现更优模型! 已保存, 当前最高准确率: 0.99000
Epoch: 2 | Step: 300 | Loss: 0.0535 | Accuracy: 0.99100
--> 发现更优模型! 已保存, 当前最高准确率: 0.99100
Epoch: 2 | Step: 350 | Loss: 0.0392 | Accuracy: 0.99000
Epoch: 2 | Step: 400 | Loss: 0.0939 | Accuracy: 0.99000
Epoch: 2 | Step: 450 | Loss: 0.2106 | Accuracy: 0.99100
Epoch: 2 | Step: 500 | Loss: 0.0250 | Accuracy: 0.99000
Epoch: 2 | Step: 550 | Loss: 0.1281 | Accuracy: 0.99000
Epoch: 2 | Step: 600 | Loss: 0.0801 | Accuracy: 0.99100
Epoch: 2 | Step: 650 | Loss: 0.0229 | Accuracy: 0.98950
Epoch: 2 | Step: 700 | Loss: 0.2493 | Accuracy: 0.99050
Epoch: 2 | Step: 750 | Loss: 0.1905 | Accuracy: 0.99100
Epoch: 2 | Step: 800 | Loss: 0.0283 | Accuracy: 0.98800
Epoch: 2 | Step: 850 | Loss: 0.1886 | Accuracy: 0.99050
Epoch: 2 | Step: 900 | Loss: 0.1432 | Accuracy: 0.99050
Epoch: 2 | Step: 950 | Loss: 0.1171 | Accuracy: 0.98900
Epoch: 2 | Step: 1000 | Loss: 0.0514 | Accuracy: 0.98950
Epoch: 2 | Step: 1050 | Loss: 0.0498 | Accuracy: 0.99050
Epoch: 2 | Step: 1100 | Loss: 0.0748 | Accuracy: 0.99100
Epoch: 2 | Step: 1150 | Loss: 0.0693 | Accuracy: 0.99050
-----  

训练结束!
历史最高测试准确率 (Best): 0.99500
最后一个 Epoch 平均准确率 (Avg): 0.99254
最佳模型文件: best_mnist_model.pth

```

图 3: 训练初期与后期结果

5 代码存放网址

https://github.com/Mercury481/FoDS_pyj.git

参考文献

- [1] JIAO Yuling. Foundation of Data Science [EB/OL]. 2025 [2025-12-26].
- [2] LIU Shicai. minist [EB/OL]. 2017 [2025-12-26]. <https://www.kaggle.com/code/lsc2data/minist>.